



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

VICTOR WENDER SOARES SILVA

ALGUMAS APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA

ARAGUAÍNA

2019

VICTOR WENDER SOARES SILVA

ALGUMAS APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco.

ARAGUAÍNA

2019

VICTOR WENDER SOARES SILVA

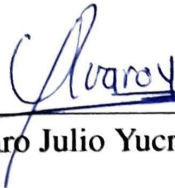
ALGUMAS APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco.

Aprovada em: 02 / 12 / 2019.


BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco (orientador)



Profa. Dra. Samara Leandro Matos da Silva



Prof. Me. André Luiz Ortiz da Silva

Dedico este trabalho à minha mãe, e também a todos aqueles que amam a Matemática.

AGRADECIMENTOS

Inicio os meus agradecimentos lembrando-me daquele que é o maior Matemático do Universo, e sem o qual nada disso existiria ou teria acontecido. Agradeço ao meu Deus, por ter me dado todas as condições para fazer um bom trabalho.

Também agradeço e dedico este trabalho à pessoa que merece muito mais do que um simples “obrigado”, e essa pessoa é a minha mãe, minha rainha, Maria da Guia Sousa da Silva, que sempre me deu tudo de melhor, e sempre fez o possível e o impossível para que hoje eu pudesse estar aqui onde estou. Sem ela nada disso seria possível.

Também agradeço ao meu padrasto, Charles, que, ao lado da minha mãe, sempre lutou para que nada me faltasse. Agradeço à minha irmã, Beatriz Mayara, pelo companheirismo e por sempre cuidar de mim da melhor forma possível. Agradeço à minha pequena Alice, por ser a alegria em pessoa e sempre me fazer sorrir. Agradeço a cada um dos meus primos, que torcem pelo meu sucesso.

Agradeço a todos os meus professores da UFT, em especial ao meu amigo e orientador Álvaro Julio Yucra Hanco, e aos professores José Carlos, Samara Leandro e André Luiz, professores que têm uma didática excepcional, e em quem eu me inspiro. Também agradeço ao professor Freud Romão, meu primeiro orientador, e ao professor Douglas Fonseca, rubro negro, que muito me ensinou a respeito da vida do professor.

Agradeço aos meus amigos da turma de Matemática 2016.1, que me acompanharam desde sempre, e, assim como eu, também estão nessa mesma luta. Agradeço às minhas amigas Nelly Almeida e Maria Cristina, por cada pequeno momento que compartilhamos, e por todas as risadas e conselhos que trocamos um com o outro. Também agradeço aos meus amigos Jusciel Kvan e Matheus Pires por todas as horas de estudo, e por todo apoio que sempre me deram. Desejo todo sucesso do mundo a vocês, meus amigos!!

Agradeço especialmente a um grupo de pessoas que, a partir do momento em que conheci, mudaram a minha vida por completo: Bheatriz Negreiros, Karollyne Paixão, Letticia Cortez e Milene Paixão. Não tenho palavras suficientes para expressar o quanto vocês são especiais para mim. Obrigado por estarem comigo nos meus piores momentos, e por me apoiarem em tudo (e também pelas pizzas de todo sábado).

Agradeço a todos os meus amigos e colegas que conheci na Universidade, em especial a Andressa Araújo, Jully Carollyne, Marcelo Guedes e Natália Almeida, pessoas cuja energia é muito intensa, e que tornam os meus dias sempre melhores. Também agradeço a Nathália Araújo, Milca Ramos, Gabriel Victor, Letícia Lima e Mariana Moreira, meus amigos do curso de Letras, que sempre me fazem rir e me sentir uma pessoa muito especial. Também agradeço à minha amiga Louislane Araújo, por sempre me dar os melhores conselhos, e por sempre fazer de tudo por mim. Agradeço também à minha amiga Martha Cristina, por tantas vezes enxugar minhas lágrimas e me fazer sorrir sem exigir nada em troca.

Também agradeço aos meus amigos da turma, Aico Alves, Gabriel Moreira, Vanessa Silva, Bruno Neres, Teylane França, Lara Borges, Hevellyn Thays, Thalya Horryny, por todos os bons momentos que vivemos, todas as risadas histéricas, todas as brincadeiras, e, principalmente, por todo companheirismo que sempre tivemos. Nunca esquecerei dos corujões que fizemos juntos.

Agradeço aos meus amigos e companheiros de outras turmas de Matemática, em especial a João Paulo Macedo, Daniel Alves, Ludimilla Almeida, Janaina Nunes, Maiza Rodrigues, Atalia Araújo, Ronaldo Sousa, Mateus Clayton, Mateus Silva, Marcos Santos, Railton Ixynoa, João Marcos, Guilherme Guida, Maycon Brendo, Fernando França, Guilherme Tavares, Jefferson Ulisses, Jackellinny Rocha, Matheus Amorim, Roberta Alexandre, Lúria Thamires, e tantos outros que fizeram a minha passagem pela UFT mais especial.

Agradeço também aos meus amigos que já passaram por essa luta, e hoje estão atuando em suas vidas profissionais: Geisson Rodrigues (em quem me inspiro para fazer esse trabalho), Jeruzarlém Martins, Fernanda Queiroz, Isabelle Romão e Luan Alves. A cada um de vocês, o meu muito obrigado pela inspiração que vocês me deram.

O estudo profundo da natureza é a fonte mais rica de descobertas matemáticas.

Jean Baptiste Joseph Fourier

RESUMO

Há cerca de 2300 anos, um homem criou um método para calcular a distância da Terra ao Sol e da Terra à Lua. Na mesma época, outro homem conseguiu calcular a circunferência da Terra com grande precisão, utilizando apenas instrumentos primitivos e o cérebro. Como eles conseguiram realizar tais descobertas? Apesar de serem desprovidos de recursos técnicos e da tecnologia do mundo moderno, esses homens tinham como aliada a parte da Matemática que estuda as relações entre os lados e ângulos de um triângulo, e que torna possível o cálculo dessas enormes distâncias e medidas: a Trigonometria. O objetivo desta monografia é destacar a importância dos estudos teóricos, das aplicações teóricas e das aplicações práticas de Trigonometria em algumas ciências e áreas do conhecimento humano, e a relevância que esses estudos e aplicações têm na vida das pessoas. No decorrer do trabalho, estudaremos sobre a Trigonometria e suas propriedades, a fim de analisar o contexto de suas aplicações em algumas ciências e/ou áreas do conhecimento humano. Também realizaremos um experimento prático, a fim de demonstrar uma dessas aplicações.

Palavras-chave: Aplicações da Trigonometria. Ciências/áreas do conhecimento humano. Matemática.

ABSTRACT

About 2300 years ago, a man created a method to calculate the distance from the Earth to the Sun and from the Earth to the Moon. At the same era, another man was able to calculate the circumference of the Earth with great precision, using only primitive instruments and the brain. How did they manage to make such discoveries? Despite being devoid of technical resources and technology of the modern world, these men had as an ally the part of mathematics that studies the relations between the sides and angles of a triangle, and that makes possible the calculation of these enormous distances and measures: the Trigonometry. The aim of this monograph is to highlight the importance of theoretical studies, theoretical applications and practical applications of Trigonometry in some sciences and areas of human knowledge, and the relevance that these studies and applications have in people's lives. In the course of the work, we will study Trigonometry and its properties, in order to analyze the context of its applications in some sciences and/or areas of human knowledge. We will also conduct a practical experiment in order to demonstrate one of these applications.

Keywords: Applications of Trigonometry. Sciences/areas of human knowledge. Mathematics.

Lista de Figuras

2.1	Papiro <i>Rhind</i>	18
2.2	Tableta <i>Plimpton 322</i>	19
2.3	Ângulo formado pelas semirretas \vec{OM} e \vec{ON}	21
2.4	Ângulos $A\hat{O}B$, $R\hat{S}T$ e sua soma	22
2.5	Ângulos $C\hat{D}E$, $P\hat{Q}R$ e sua soma	23
2.6	Triângulo ABC	23
2.7	Triângulo retângulo	24
2.8	Arco \widehat{AXB}	25
2.9	Semicircunferência	26
2.10	Arco de uma volta	26
2.11	Medidas de arcos	26
2.12	Arco \widehat{AB} associado ao ângulo central $A\hat{O}B$	27
2.13	Arcos de 45° e 60°	27
2.14	Radiano ($m(\widehat{AB}) = 1 \text{ rad}$)	28
2.15	Medidas de ângulos em radianos	28
2.16	Ângulo central $OP\hat{Q}$ e Arco \widehat{OQ}	29
3.1	O Ciclo trigonométrico	31
3.2	$x = O \Rightarrow P \equiv A$	31
3.3	$x > O \Rightarrow A > P$	32
3.4	Eixos no ciclo trigonométrico	33
3.5	Seno	34
3.6	Seno positivo	34
3.7	Seno negativo	35
3.8	Sinal de $\text{sen } x$ em cada quadrante	35
3.9	Cosseno	36
3.10	Cosseno positivo	36
3.11	Cosseno negativo	37
3.12	Sinal de $\text{cos } x$ em cada quadrante	37

3.13	Tangente	38
3.14	Tangente positiva	38
3.15	Tangente negativa	39
3.16	Sinal da $\operatorname{tg} x$ em cada quadrante	39
3.17	$f(x) = \operatorname{sen} x$	40
3.18	$f(x) = \operatorname{cos} x$	41
3.19	$f(x) = \operatorname{tg} x$	41
3.20	Triângulo retângulo reto em A	42
3.21	Triângulo CDE	43
3.22	Triângulo OPQ	44
3.23	Triângulo XYZ	45
3.24	Quadrado $ABCD$	46
3.25	Quadrado $ABCD$ dividido em dois triângulos retângulos	47
3.26	Triângulo Equilátero ABC	47
3.27	Triângulo ABC dividido em dois triângulos retângulos	48
3.28	Tabela das razões trigonométricas dos ângulos notáveis	49
3.29	Tabela das razões trigonométricas dos arcos notáveis	49
3.30	Triângulo qualquer	50
3.31	Triângulo	51
3.32	Triângulo inscrito em uma circunferência de raio r	51
3.33	Triângulo cujos ângulos internos são α , β e γ	52
4.1	Pulso de onda em uma corda	54
4.2	Onda transversal	55
4.3	Onda longitudinal	55
4.4	Comprimento de onda	57
4.5	Deslocamento do elemento da corda situado em $x = 0$	58
4.6	$\phi = 0$ (à esquerda), e $\phi \neq 0$ (à direita)	59
4.7	Ondas superpostas	60
4.8	Ondas estacionárias	61
4.9	Espiral de encadernação ($33mm$)	63
4.10	Onda senoidal contínua	64
4.11	Onda se propagando de volta à origem do pulso	64
4.12	Múltiplas reflexões de ondas	65
4.13	Ondas estacionárias geradas na espiral de encadernação	65
5.1	Jean Baptiste Joseph Fourier	67
5.2	Função periódica	69

5.3	Período fundamental T e seus múltiplos	69
5.4	Onda triangular	72
5.5	Onda quadrada	73
5.6	Função seccionalmente contínua	75
5.7	Gráfico da função do Exemplo 5.7	76
5.8	Função dente de serra	78

Sumário

1	Introdução	14
2	Noções Preliminares	17
2.1	Um pouco da História da Trigonometria	17
2.2	Noções de Geometria	21
2.3	Arcos e ângulos em uma circunferência	24
2.3.1	Medidas de Arcos	25
2.3.2	Medidas de ângulos	28
3	Trigonometria	30
3.1	Trigonometria na circunferência	30
3.1.1	O ciclo trigonométrico	31
3.1.2	Razões trigonométricas na circunferência	33
3.1.3	Funções Trigonométricas	40
3.2	Trigonometria no triângulo retângulo	42
3.2.1	Relações entre seno, cosseno e tangente	45
3.3	Cálculo do seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30° , 45° e 60°	46
3.3.1	Seno, cosseno e tangente de 45°	46
3.3.2	Seno, cosseno e tangente de 30° e 60°	47
3.3.3	Tabela trigonométrica dos ângulos notáveis	49
3.4	Trigonometria em Triângulos Quaisquer	50
3.4.1	Lei dos cossenos	50
3.4.2	Lei dos senos	51
4	Uma Aplicação no Movimento Ondulatório	53
4.1	Ondas	54
4.2	Formas de onda: transversais e longitudinais	54
4.3	Descrição da propagação de uma onda em uma corda	56
4.3.1	Amplitude e fase da onda	56
4.3.2	Comprimento e número de onda	57

<i>SUMÁRIO</i>	13
4.3.3 Período, frequência angular, frequência e constante de fase da onda . . .	58
4.3.4 O princípio da superposição de ondas	60
4.3.5 Ondas estacionárias	61
4.3.6 Experimento: produzindo ondas estacionárias	63
5 Uma aplicação na Introdução às séries de Fourier	66
5.1 Breve história de Fourier	67
5.2 As séries de Fourier	68
5.2.1 Periodicidade das funções seno e cosseno	69
5.2.2 Ortogonalidade das funções seno e cosseno	70
5.3 As fórmulas de Euler-Fourier para os coeficientes de uma série de Fourier . . .	71
5.4 O Teorema de Fourier	74
6 Considerações Finais	80
Referências	82

Capítulo 1

Introdução

Desde que existe, o homem busca meios para conhecer e compreender o seu lugar no mundo. Reflexões e indagações acerca do Universo e de seu funcionamento sempre fizeram parte da vida das pessoas: “Como surgiu o Universo? Como ele evoluiu? Para onde ele vai? [...] Desde a menor partícula até um grande agrupamento de galáxias, o que mantém tudo isso funcionando?” (CONTADOR, 2008, p.15). Perguntas como essas, muitas das quais ficaram milhares de anos sem respostas, impulsionaram o ser humano a buscar meios e criar ferramentas que servissem para responder não só a essas indagações, mas também a outras que porventura surgissem com o passar do tempo - e que, de fato, surgiram. Vale ressaltar que nem todas as perguntas possuem alguma resposta definida, mas, segundo Contador (2008, p.16), “se existe uma chave para a busca dessas respostas [...], ela deve ser encontrada no domínio da *Matemática*”.

Observando os fenômenos que acontecem no céu e na Terra, na contínua busca por entender o Universo e tudo o que lhe diz respeito, algumas civilizações antigas (como a grega, por exemplo), avançaram consideravelmente através dos anos, no que se refere aos conhecimentos matemáticos e demais conhecimentos científicos. Fosse por curiosidade, ou mesmo por necessidade (compreender o movimento dos planetas e outros corpos celestes, as mudanças entre as estações uma após a outra, a sucessão da noite pelo dia, entre outros acontecimentos), uma das ciências que os antigos mais dedicavam-se a estudar era a *Astronomia*, e os avanços significativos observados nessa ciência, principalmente pelos gregos, se devem à área da Matemática denominada *Trigonometria*. Os estudos, aplicações teóricas e aplicações práticas de Trigonometria tiveram fundamental importância na evolução das pesquisas referentes à Astronomia na sociedade grega: “Com uma Astronomia avançada, os gregos tinham a necessidade de cálculos matemáticos mais precisos e um melhor conhecimento e estudo sobre ângulos, e foi a Trigonometria que deu essa segurança” (CONTADOR, 2008, p. 226). Com o passar dos anos, o progresso das civilizações e a crescente necessidade de “expandir os horizontes do mundo”, os estudos nessa área da Matemática passaram a ser mais frequentes. O Renascimento (fim da idade média), trouxe ao continente europeu inúmeras transformações, tanto culturais quanto or-

ganizacionais e também científicas, dentre as quais podemos citar a expansão marítima através das grandes navegações: “A partir do Renascimento, época da expansão marítima europeia, que exigiu o desenvolvimento da Cartografia, a Trigonometria passou a ser utilizada nesta área e em Topografia” (OLIVEIRA, 2015, p.20).

Nesse sentido, analisando os notáveis avanços das sociedades antigas em relação à ciência, tecnologia e cultura (o progresso dos estudos em Astronomia, a expansão marítima, a criação e estruturação de cidades, a construção de grandes edifícios e monumentos, entre outros feitos), e observando que muitos desses avanços perduram até os dias atuais (inclusive contribuindo significativamente para novos avanços), mostraremos nesta monografia a importância dos estudos teóricos, das aplicações teóricas e das aplicações práticas da Trigonometria em algumas ciências e áreas do conhecimento humano.

Durante a realização da pesquisa e escrita desta monografia, utilizamos uma abordagem qualitativa, com procedimentos de investigação de caráter bibliográfico.

Pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos, pois os dados analisados são não-métricos (sucitados e de interação) e se valem de diferentes abordagens (SILVEIRA; CORDOVA, 2009, p.32).

Os dados analisados estão contidos em livros, artigos, *webpages*, dissertações de Mestrado, entre outros materiais relacionados ao tema da pesquisa. No decorrer do trabalho, realizamos um experimento prático simples, com a finalidade de demonstrar uma aplicação prática do tema estudado. Buscamos apresentar cada aplicação da maneira mais simples possível, mas sem fugir do rigor matemático adequado.

Estruturamos esta monografia em cinco capítulos, dispostos como segue.

No Capítulo 2, além da contextualização histórica, abordaremos algumas definições e resultados referentes à Geometria Plana, como por exemplo, a definição de ângulos, triângulos e arcos de circunferência.

No Capítulo 3, onde estudaremos especificamente sobre a Trigonometria, apresentaremos definições, resultados, teoremas e exemplos referentes à Trigonometria na circunferência, no triângulo retângulo e também em triângulos quaisquer. Nesse capítulo, mostraremos uma forma de calcular o seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis, através de figuras simples, e também construiremos uma tabela com os valores das razões trigonométricas dos ângulos e arcos notáveis.

No Capítulo 4, apresentaremos uma aplicação da Trigonometria na Física, a saber, no que diz respeito ao movimento ondulatório. Descreveremos algumas características do movimento ondulatório através das funções seno e cosseno, e mostraremos que existem ondas cujas

formas correspondem aos gráficos dessas duas funções. Ainda nesse capítulo, realizaremos um experimento simples, cuja intenção é demonstrar o comportamento de ondas estacionárias em uma corda (ou em materiais similares).

No Capítulo 5, estudaremos sobre as séries de Fourier como uma aplicação da Trigonometria em Matemática. Nesse capítulo, mostraremos as características de uma função determinada por uma série de Fourier, e apresentaremos algumas definições e resultados importantes para a determinação dessas funções através das séries de Fourier. Apresentaremos também um teorema que garante a convergência de uma série de Fourier. Para compreensão desse capítulo, é necessário um conhecimento prévio sobre sequências e séries numéricas.

Os gráficos e figuras encontradas no trabalho, e cuja fonte são o arquivo pessoal do autor, foram feitas através do software Microsoft PowerPoint, e também através do software de distribuição gratuita GeoGebra.

Capítulo 2

Noções Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos, além do contexto histórico, algumas definições e resultados introdutórios que julgamos necessários para o entendimento dos conteúdos apresentados nos capítulos posteriores.

Na seção inicial, na qual trataremos da História da Trigonometria, estudaremos a respeito das contribuições mais notáveis que diferentes povos antigos deram a essa área da Matemática, com maior destaque às contribuições dadas pelos egípcios, pelos babilônios e pelos gregos. Na seção subsequente, estudaremos algumas noções de Geometria, analisando determinados elementos que são essenciais para o entendimento inicial de Trigonometria. Na última seção deste capítulo, apresentaremos as noções de Arcos e ângulos em uma circunferência, e essa seção servirá de ponte para o tratamento da Trigonometria no capítulo seguinte.

A elaboração deste capítulo foi baseada nas referências [2, 4, 7, 12].

2.1 Um pouco da História da Trigonometria

Nesta seção, apresentamos uma parte da história da área da Matemática (ou, de acordo com [4], *ciência*) hoje chamada de Trigonometria.

Assim como outros ramos da Matemática, a Trigonometria não tem uma origem definida. Isso talvez deva-se ao fato de que essa área da Matemática não seja obra de uma única pessoa, ou mesmo de um único povo (ou nação), mas tenha recebido inúmeras contribuições de diferentes povos, cada qual com os seus costumes, culturas e concepções a respeito da vida e do Universo (o que possibilitou a construção de um pensamento matemático singular, inerente a cada indivíduo, povo ou nação). Evidências dessas contribuições mútuas para o desenvolvimento da Matemática como ciência, e, mais especificamente, da Trigonometria como uma área dessa ciência, podem ser encontradas tanto no **Papiro Rhind**, quanto na **Tableta Plimpton 322**, peças/documentos/artefatos históricos produzidos por egípcios e babilônios, respectivamente, que hoje fazem parte do acervo do Museu Britânico de Londres e da Universidade de

Colúmbia - EUA (respectivamente), e que têm valor inestimável para a História da Matemática, pois são as principais fontes de informações referentes à Matemática desses povos. Essas peças são a prova de que diferentes povos antigos, que viveram aproximadamente na mesma época, empregaram, à sua maneira e segundo suas próprias necessidades, além de diversas outras definições matemáticas, conceitos do que atualmente se conhece por Trigonometria; além de conter informações, definições e problemas de diversas áreas do conhecimento matemático, segundo [4] e [7], o Papiro *Rhind* e a Tableta *Plimpton 322* também contém variados teoremas e problemas relacionados (com conceitos equivalentes) aos lados de triângulos semelhantes, à cotangente do ângulo da base de uma pirâmide e também uma notável tabela de secantes, entre outras informações relevantes.

O Papiro *Rhind* (Figura 2.1) é um documento egípcio datado de cerca de 1650 a.C., que, conforme diz [7], p. 69, contém 85 problemas copiados em escrita hierática¹ por um escriba chamado *Ahmes* de um trabalho mais antigo (datado do período de 2000 a.C. a 1800 a.C., segundo [4]). De acordo com [7], p.70, a importância desse papiro reside no fato de ele ser uma fonte primária rica sobre a Matemática egípcia, pois, além de descrever os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, suas aplicações para frações unitárias, sua solução para o problema da determinação da área do círculo, também continha muitas aplicações da Matemática a problemas práticos do cotidiano.

Figura 2.1: Papiro *Rhind*



Fonte: Wikipedia (2019)

¹Escrita hierática era uma modalidade de escrita egípcia realizada em papiro, no formato cursivo, e era paralela aos hieróglifos egípcios (modalidade de escrita geralmente empregada em argila, formada por conjuntos de signos e figuras, e utilizada em textos religiosos, paredes de templos, artefatos sagrados, etc.). Fonte: [6]

A Tableta *Plimpton 322* (Figura 2.2) é uma tábua babilônica em escrita cuneiforme, no sistema sexagesimal, datada aproximadamente entre 1900 a.C. e 1600 a.C., tendo seu conteúdo descrito em 1945 (de acordo com [4], p.85 e [7], p.63). A tableta recebeu esse nome pelo fato de pertencer à coleção *G.A. Plimpton* da Universidade de Columbia, e estar catalogada com o número 322.

Devido a lamentáveis infortúnios, segundo [7], parte da tableta está danificada:

Infelizmente perdeu-se um pedaço de todo o seu lado esquerdo devido a uma rachadura; além disso a tábua posteriormente foi danificada com a perda de uma lasca profunda em seu lado direito, à altura da metade, e por um descamamento no canto superior esquerdo. Exames revelaram a existência de cristais de uma cola moderna ao longo da rachadura do lado esquerdo. Isso sugere que a tábua provavelmente estava inteira quando foi desenterrada e que posteriormente se quebrou, tendo havido uma tentativa de colar as duas partes que, por fim, acabaram se separando ([7], p. 63).

Apesar dos danos, a tableta ainda fornece preciosas informações acerca da Matemática babilônica. Informações mais detalhadas sobre a *Plimpton 322* podem ser encontradas em [7]. De acordo com o autor, um exame minucioso e um estudo mais aprofundado sobre a tableta nos revela que ela é uma tábua de secantes para os ângulos de 45° a 31° , “formada por meio de triângulos retângulos de lados inteiros, em que se verifica uma variação em saltos regulares na função em vez de no ângulo correspondente” (p.66). Ainda segundo [7], é provável que existissem outras tábuas, com informações semelhantes sobre ângulos de 0° a 15° e de 16° a 30° .

Figura 2.2: Tableta *Plimpton 322*



Fonte: Wikipedia (2018)

No entanto, embora essas relações entre ângulos e lados de triângulos estejam presentes no Papiro *Rhind* e na Tableta *Plimpton 322*, segundo [2], no período pré-helênico (isto é, antes da hegemonia grega no mundo ocidental), ainda não existia o conceito de medida de ângulo:

“Dada a falta, no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, um tal estudo seria melhor chamado “trilaterometria”, ou medida de polígonos de três lados (triláteros), do que “trigonometria”, a medida das partes de um triângulo”(p.108, grifos do autor). De acordo com [4] e [2], foram os gregos que desenvolveram um estudo mais aprofundado acerca das relações entre ângulos (ou arcos) em um círculo, e os respectivos comprimentos de suas cordas. Esse desenvolvimento se deu graças à grande quantidade de informações que receberam dos babilônios através do comércio e da conquista, segundo [4], p.225. Por essa razão, é interessante ressaltar que, “no início, a Trigonometria baseava-se na função **corda** de um arco de círculo com raio arbitrário, e não na função **seno** como é o padrão atual” ([4], p.255).

Segundo [4], p.224, a Trigonometria evoluiu “devido a duas aplicações básicas: uma foi a necessidade de aplicações teóricas; a outra, e principal, foi a necessidade de uma aplicação prática, a Astronomia”. De fato, a História nos diz que, durante muito tempo, Trigonometria e Astronomia eram praticamente uma única Ciência, de tal modo que o desenvolvimento de uma desencadeou o desenvolvimento da outra: o avanço da Astronomia trouxe aos gregos a necessidade de cálculos matemáticos mais precisos e um melhor conhecimento e estudo sobre ângulos, e essa segurança foi alcançada graças aos seus estudos em Trigonometria.

Dentre os principais responsáveis por esse desenvolvimento da Trigonometria e da Astronomia grega, podemos citar:

1. **Menelau de Alexandria**, que escreveu um trabalho chamado *Sphaerica*, composto de seis livros, dos quais três se perderam; os outros três foram preservados, mas em uma versão árabe ([4], p.226; [7], p.203). Nesses três livros encontram-se estudos sobre triângulos esféricos, relacionando-os aos triângulos planos, cujas proposições foram estabelecidas por Euclides (Livro I); teoremas e outros assuntos relacionados à Astronomia (Livro II); e estudos sobre as relações entre ângulos e cordas numa esfera, ou, em outras palavras, a Trigonometria esférica da época (Livro III). É também no Livro III onde aparece o *Teorema de Menelau*².
2. **Aristarco de Samos**, que, em seu trabalho: *Dos tamanhos e distâncias do Sol e da Lua*, determinou as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua³.
3. **Eratóstenes de Cirene**, que calculou a medida da circunferência da Terra.
4. **Hiparco de Nicéia**, a quem é atribuído um tratado em 12 livros que trata da construção de uma *tábua de cordas*. De acordo com [4], “Hiparco é responsável pela primeira publicação de uma tabela trigonométrica e também pela introdução, na Grécia, do círculo com 360°” (p.226). Por conta disso, ganhou o título de *Pai da Trigonometria*.

²“Se uma transversal intercepta os lados BC, CA, AB de um triângulo nos pontos L, M e N, respectivamente, então $(\frac{AN}{NB})(\frac{BL}{LC})(\frac{CM}{MA}) = -1$ ” ([7], p.203, 204).

³Pode-se encontrar informações detalhadas sobre os cálculos dessas distâncias em ([4], p.356)

5. **Cláudio Ptolomeu de Alexandria**, que é citado como último grande astrônomo grego, e cujo tratado sobre Astronomia conhecido como *Almagesto*⁴, é tido como o trabalho grego definitivo sobre essa Ciência. Composto de treze livros, o trabalho contém uma tábua de cordas (segundo [7], no Livro I), em que está exposto o estudo sobre os comprimentos das cordas dos ângulos centrais de um círculo dado, além de outros tópicos relevantes. (Um estudo mais detalhado sobre a obra de Ptolomeu pode ser encontrado em [2], [4] e [7]).

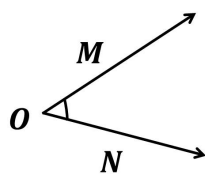
Com o passar do tempo e o avançar dos séculos, estudiosos de diversos outros povos e nações (árabes, hindus, ingleses, italianos, etc.) também deram suas contribuições para o desenvolvimento da Trigonometria, e seus estudos foram notáveis e essenciais para a percepção e para o aperfeiçoamento das várias aplicações que essa área da Matemática tem, tanto na própria Matemática, quanto em outras Ciências e/ou áreas do conhecimento humano.

2.2 Noções de Geometria

Nesta seção, apresentamos alguns elementos de Geometria que são importantes para a construção dos conceitos, e também para o entendimento básico inicial de Trigonometria. São eles: **ângulo**, **triângulo** e **triângulo retângulo**.

Definição 2.1 (Ângulo). Consideremos duas semirretas \overrightarrow{OM} e \overrightarrow{ON} no plano. A reunião dessas duas semirretas forma um ângulo de *vértice* O e *lados* \overrightarrow{OM} e \overrightarrow{ON} , conforme a Figura 2.3. De modo genérico, de acordo com [12], “ângulo é a reunião de duas semi-retas de mesma origem mas não continuadas na mesma reta” (p.2).

Figura 2.3: Ângulo formado pelas semirretas \overrightarrow{OM} e \overrightarrow{ON}



Fonte: Arquivo pessoal

⁴De acordo com [7], esse tratado de ampla influência científica foi baseado nos escritos de Hiparco, e é famoso por sua “compacidade e elegância”(p.204). Para distinguir o tratado de Ptolomeu de outras coleções menores sobre Astronomia, associou-se a ele o superlativo *magiste*, ou “maior”. Quando traduzido para o árabe, ganhou o prefixo *al*, sendo a partir de então conhecido como *Almagesto*, “o maior”.

Na Figura 2.3, leia-se: ângulo $M\hat{O}N$ (ou ângulo $N\hat{O}M$).

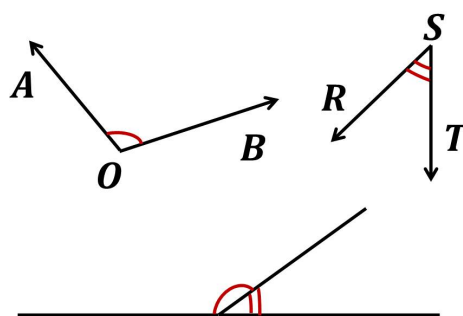
Consideremos ainda o ângulo $M\hat{O}N$ da Figura 2.3. Sua medida é dada pela notação $m(M\hat{O}N)$, e está associada à região que ele ocupa no plano. Para encontrar essa medida, geralmente divide-se um círculo (ou circunferência) C , de centro O e raio r , em 360 partes iguais (cada uma dessas divisões correspondem a $\frac{1}{360}$ do círculo original). Chama-se **ângulo de 1°** (ângulo de um grau) ao ângulo correspondente a uma dessas divisões. Ou seja, o ângulo de 1° tem valor igual a $\frac{1}{360}$ do círculo. Falaremos mais a respeito da **Trigonometria na Circunferência** na Seção 3.1.

Definição 2.2 (Ângulo reto, ângulo agudo, ângulo obtuso, ângulo nulo e ângulo raso).

- i) Um ângulo é *reto* quando tem a medida de 90° ;
- ii) Todo ângulo cuja medida seja menor do que 90° é chamado de *ângulo agudo*;
- iii) Todo ângulo cuja medida seja maior do que 90° é chamado de *ângulo obtuso*;
- iv) Se as extremidades de duas semirretas coincidem, elas determinam um **ângulo nulo**;
- v) Se as semirretas têm extremidades opostas, elas determinam dois *ângulos rasos*, cuja medida é de 180° .

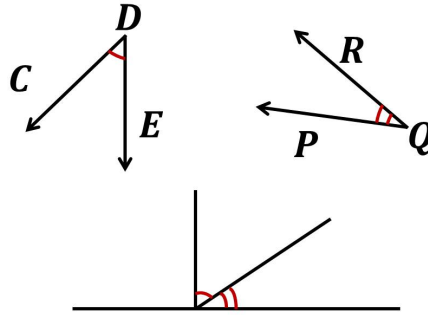
Definição 2.3 (Ângulos Suplementares). Dois ângulos são chamados de *suplementares* quando a soma de suas medidas é igual a 180° (um é o suplemento do outro).

Figura 2.4: Ângulos $A\hat{O}B$, $R\hat{S}T$ e sua soma



Fonte: Arquivo pessoal

Notemos, na Figura 2.4, que a soma dos ângulos $A\hat{O}B$ e $R\hat{S}T$, é um ângulo raso. Em outras palavras, $m(A\hat{O}B) + m(R\hat{S}T) = 180^\circ$. Portanto, $A\hat{O}B$ e $R\hat{S}T$ são ângulos suplementares ($A\hat{O}B$ é o suplemento de $R\hat{S}T$ e $R\hat{S}T$ é o suplemento de $A\hat{O}B$).

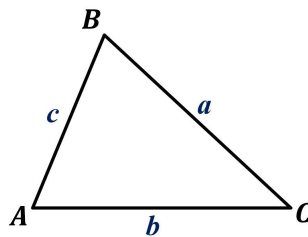
Figura 2.5: Ângulos \widehat{CDE} , \widehat{PQR} e sua soma

Fonte: Arquivo pessoal

Definição 2.4 (Ângulos complementares). Dois ângulos são chamados de *complementares* quando a soma de suas medidas é igual a 90° (um complementa o outro).

Na Figura 2.5, a soma dos ângulos \widehat{CDE} e \widehat{PQR} é um ângulo reto. Ou seja, $m(\widehat{CDE}) + m(\widehat{PQR}) = 90^\circ$. Portanto, \widehat{CDE} e \widehat{PQR} são ângulos complementares (\widehat{CDE} é o complemento de \widehat{PQR} e \widehat{PQR} é o complemento de \widehat{CDE}).

Definição 2.5 (Triângulo). Sejam A , B e C , três pontos *distintos e não colineares*⁵ no plano. Esses três pontos determinam três segmentos de reta: \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} . O *Triângulo ABC* (Figura 2.6) é formado a partir da reunião desses segmentos de reta.

Figura 2.6: Triângulo ABC 

Fonte: Arquivo pessoal

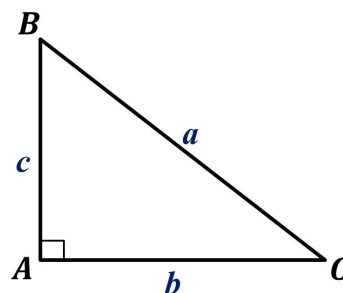
Dizemos que os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} são os *lados* do triângulo ABC , e os pontos A , B e C são os seus *vértices*. Em relação às medidas dos lados, dizemos que $AB = c$, $BC = a$, e $AC = b$ (isto é, AB tem medida c , BC tem medida a , e AC tem medida b).

⁵Pontos não colineares são aqueles que não pertencem à mesma reta. Os pontos que pertencem à mesma reta são chamados de colineares.

No tocante às medidas dos ângulos, temos que $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$, e $\hat{C} = \widehat{ACB}$ (ou seja, \widehat{BAC} tem medida \hat{A} , e assim sucessivamente). Vale ressaltar que, em qualquer triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180° .

Definição 2.6 (Triângulo retângulo). Um triângulo ABC é retângulo quando um de seus ângulos internos mede 90° , ou seja, é um *ângulo reto*.

Figura 2.7: Triângulo retângulo



Fonte: Arquivo pessoal

Dizemos que o triângulo da Figura 2.7 é reto em A . Os lados $AB = c$ e $AC = b$, são chamados de *Catetos*. O lado $BC = a$, é chamado de *Hipotenusa*⁶.

O Teorema que leva o nome do grande Filósofo e Matemático grego Pitágoras é uma relação extremamente importante entre os lados de um Triângulo Retângulo. Esse Teorema nos diz basicamente que, tendo as medidas de dois lados quaisquer de um Triângulo Retângulo, temos a possibilidade calcular a medida do terceiro lado.

Teorema 2.7 (Teorema de Pitágoras). Em qualquer Triângulo Retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Pela Figura 2.7, temos que $a^2 = b^2 + c^2$.

Demonstração: Diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras podem ser encontradas em [5], p. 24 - 54. □

2.3 Arcos e ângulos em uma circunferência

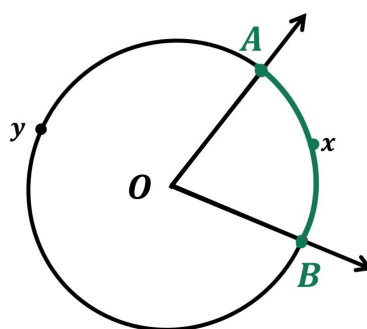
Nesta seção, realizamos um estudo sobre arcos e ângulos em uma circunferência, apresentamos as definições e propriedades acerca de suas medidas. Também apresentamos nesta seção uma nova unidade de medida para ângulos, as relações existentes entre os arcos e os

⁶Vale ressaltar que, em qualquer triângulo retângulo, a hipotenusa sempre será o lado oposto ao ângulo reto.

ângulos de uma circunferência, e uma forma de calcular a medida do ângulo central a partir da medida do raio da circunferência e de um arco dessa mesma circunferência. Esta seção é a ponte para a seção inicial do capítulo seguinte.

Definição 2.8 (Arcos de circunferência). Consideremos uma circunferência cujo centro seja o ponto O , e um ângulo central \widehat{AOB} , em que A e B são pontos em comum do ângulo e da circunferência, conforme a Figura 2.8.

Figura 2.8: Arco \widehat{AXB}



Fonte: Arquivo pessoal

Dizemos que a circunferência fica dividida em dois *arcos de circunferência*: o arco \widehat{AXB} , arco menor, e o arco \widehat{AYB} , arco maior⁷. Os pontos A e B são as chamadas *extremidades* do arco.

Os casos especiais de arcos de circunferência são:

- 1. Semicircunferência:** Quando as extremidades do arco são também as extremidades de um diâmetro da circunferência, dois arcos são formados, cada um dos quais é chamado de *Semicircunferência*.
- 2. Arco Nulo e Arco de uma volta:** Quando as extremidades do arco coincidem, dois arcos são determinados, sendo que um deles é um ponto. Esse ponto é chamado de *Arco Nulo*. O outro arco formado é a própria circunferência, a qual denomina-se *Arco de uma volta*.

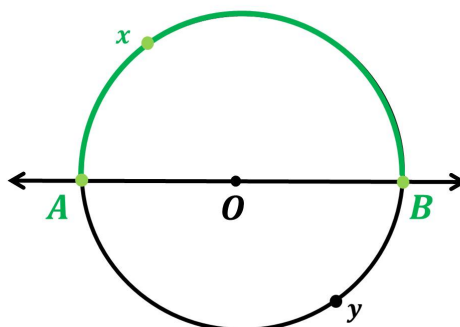
2.3.1 Medidas de Arcos

Consideremos um arco \widehat{AB} . A medida de \widehat{AB} em relação a um arco unitário n não nulo e de mesmo raio que \widehat{AB} é dada pela quantidade de vezes que o arco n “cabe” no arco \widehat{AB} .

Na Figura 2.11, vemos que o arco n cabe 8 vezes no arco \widehat{AB} . Logo, a medida de \widehat{AB} é 8, ou seja, $\widehat{AB} = 8 \cdot arco\ u$

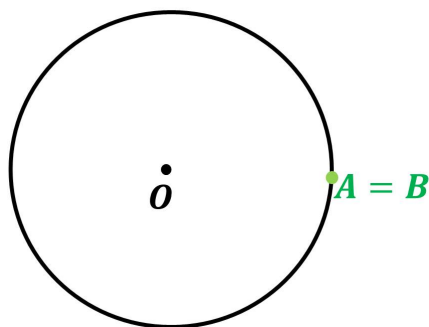
⁷Geralmente considera-se apenas o arco menor, de modo que podemos chamá-lo simplesmente de arco \widehat{AB} .

Figura 2.9: Semicircunferência



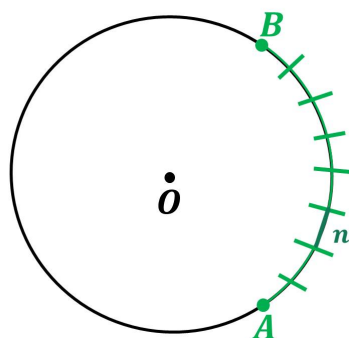
Fonte: Arquivo pessoal

Figura 2.10: Arco de uma volta



Fonte: Arquivo pessoal

Figura 2.11: Medidas de arcos



Fonte: Arquivo pessoal

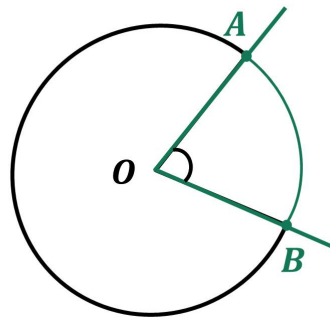
Unidades de medida para os ângulos em uma Circunferência

As unidades de medida usuais para arco são duas: o *grau* e o *radiano*.

Definição 2.9 (Grau). Pela Definição 2.1, vemos que o ângulo de 1° corresponde a uma parte igual $\frac{1}{360}$ de um círculo ou circunferência qualquer. Podemos então dizer que o *Grau* (cujo símbolo é $^\circ$), é “um arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido”([12], p.26).

Todo arco de uma circunferência está associado a um ângulo central dessa circunferência, conforme ilustra a Figura 2.12.

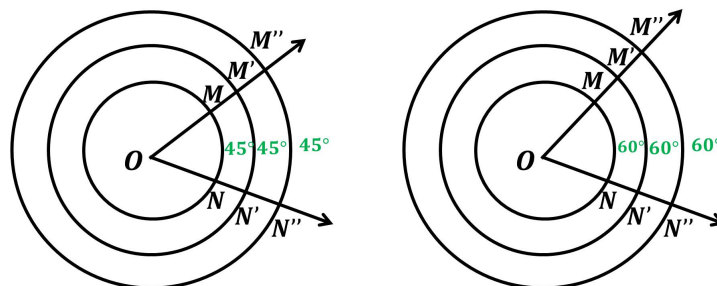
Figura 2.12: Arco \widehat{AB} associado ao ângulo central \widehat{AOB}



Fonte: Arquivo pessoal

A partir disso, podemos enunciar o seguinte: “a medida (em graus) de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente” ([12], p.26). Podemos também observar que a medida de um arco, em graus, não depende do raio da circunferência, conforme pode-se observar pelas circunferências representadas na Figura 2.13.

Figura 2.13: Arcos de 45° e 60°



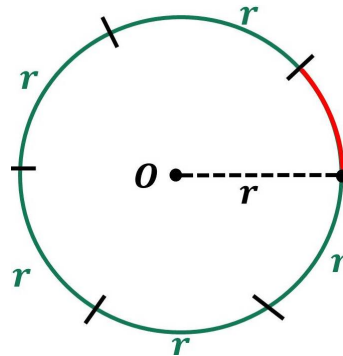
Fonte: Arquivo pessoal

Observemos que, na circunferência da esquerda, $m(\widehat{MN}) = m(\widehat{M'N'}) = m(\widehat{M''N''}) = 45^\circ$, e na circunferência da direita, $m(\widehat{MN}) = m(\widehat{M'N'}) = m(\widehat{M''N''}) = 60^\circ$.

Definição 2.10 (Radiano). O *Radiano*, cujo símbolo é *rad*, é um arco unitário de comprimento igual ao raio de uma dada circunferência. Em outras palavras, é a razão entre o comprimento de

um arco e o raio (de mesmo comprimento) da circunferência que contém o arco a ser medido.

Figura 2.14: Radiano ($m(\widehat{AB}) = 1 \text{ rad}$)



Fonte: Arquivo pessoal

Sabemos que uma circunferência tem a medida de 360° . Como não é tão fácil dizer exatamente qual é a medida de uma circunferência em radianos, é possível chegar a uma noção intuitiva dessa medida considerando algumas construções⁸. Pode-se então estabelecer as seguintes correspondências para a conversão das unidades de grau para unidades de radiano:

$$360^\circ \leftrightarrow 2\pi \text{ rad} \quad (2.1)$$

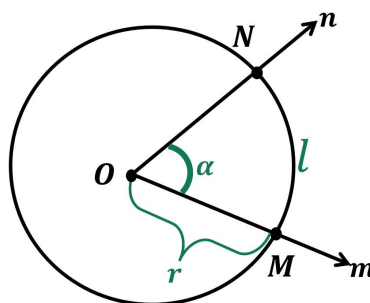
Analogamente,

$$180^\circ \leftrightarrow \pi \text{ rad} \quad (2.2)$$

2.3.2 Medidas de ângulos

Para medir um determinado ângulo em radianos, deve-se construir uma circunferência cujo centro seja O e o raio seja r (como na Figura 2.15), e depois calcular quantos radianos mede o arco determinado. Em outras palavras, deve-se calcular o quociente entre o comprimento l do arco determinado pelo ângulo e o raio da circunferência.

Figura 2.15: Medidas de ângulos em radianos



Fonte: Arquivo pessoal

⁸Uma dessas construções pode ser encontrada em [12], p.27

A relação entre o ângulo, o comprimento do arco e o raio da circunferência é:

$$\alpha = \frac{l}{r} \quad (\text{medida de } \alpha \text{ em radianos}) \quad (2.3)$$

Exemplo 2.11. Um ângulo central $n\widehat{O}m$ é tal que determina numa circunferência de raio $r = 15\text{cm}$ um arco \widehat{AB} de medida $l = 24\text{ cm}$. Qual é a medida de $n\widehat{O}m$?

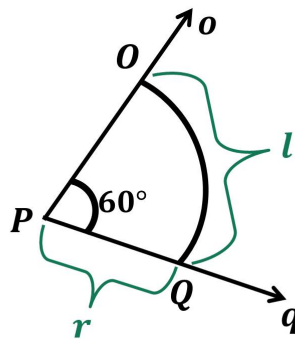
A medida do ângulo $n\widehat{O}m$, denotado por α será:

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5} = 1,6 \text{ rad}$$

Exemplo 2.12. Calcular o comprimento l do arco \widehat{OQ} definido numa circunferência de raio $r = 10\text{ cm}$, por um ângulo central de 60° .

O ângulo $O\widehat{P}Q$ pode ser representado graficamente como na Figura 2.16.

Figura 2.16: Ângulo central $O\widehat{P}Q$ e Arco \widehat{OQ}



Fonte: Arquivo pessoal

Pelas relações expressas em (2.1) ou (2.2), podemos converter o ângulo central $O\widehat{P}Q$ (que denotaremos por α) de graus para radianos. Feita a conversão, temos que $\alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$.

Daí,

$$\alpha = \frac{l}{r} \implies l = \alpha \cdot r \implies l = \frac{\pi}{3} \cdot 10 \implies l = 10,472 \text{ cm}.$$

Capítulo 3

Trigonometria

De acordo com [4] (2008, p. 223), o nome Trigonometria é derivado do grego *tri*, cujo significado é *três*, mais *gonia*, que significa *ângulo*, mais *metron*, que significa *medida*. A Trigonometria é então a parte da Matemática que estuda relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de Triângulos, tendo suas bases fundamentadas em triângulos retângulos, embora os estudos possam estender-se também a triângulos quaisquer.

Neste capítulo, abordaremos algumas definições que julgamos necessárias para a compreensão deste trabalho. O objetivo é apresentar os fundamentos da Trigonometria e seus conceitos principais, de modo que se possa compreender os conceitos mais avançados de Trigonometria, além de suas aplicações em Matemática e em outras ciências e/ou áreas. Consideramos este capítulo como um dos pilares deste trabalho, tendo em vista a importância da compreensão dos conceitos básicos aqui apresentados para o avanço nos estudos. As principais referências utilizadas para a elaboração deste capítulo foram [10, 12].

Na seção inicial, onde estudaremos a respeito da **Trigonometria na circunferência**, apresentaremos o **ciclo trigonométrico**, e também as **razões trigonométricas** seno, cosseno e tangente nessa circunferência, bem como os conceitos iniciais das **funções trigonométricas** cujo nome é o mesmo. A seguir, trataremos da **Trigonometria no triângulo retângulo**, analisando as razões trigonométricas e suas propriedades, agora tendo como base essa figura geométrica. Nessa mesma seção, discutiremos sobre as relações entre seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. A seguir, apresentaremos o cálculo do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis (isto é, os ângulos de 30° , 45° e 60°), a partir de figuras simples, e montaremos uma tabela com esses valores. Por fim, apresentaremos também um estudo básico a respeito da **Lei dos Cossenos** e da **Lei dos Senos**, estudando a Trigonometria em triângulos quaisquer, finalizando assim este capítulo.

3.1 Trigonometria na circunferência

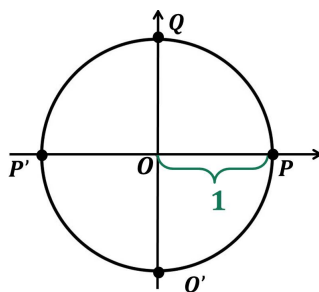
O objetivo desta seção é apresentar um estudo acerca da Trigonometria na circunferência. No decorrer desta parte do trabalho, discorreremos a respeito do *ciclo trigonométrico* (ou *cir-*

cunferência trigonométrica), apresentando algumas definições e propriedades. Também estudaremos a respeito das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente¹ expressas na circunferência trigonométrica, suas propriedades e sua relação com as **funções trigonométricas** de mesmo nome.

3.1.1 O ciclo trigonométrico

Consideremos uma circunferência de centro O e raio $r = 1$, em um sistema cartesiano ortogonal sobre um plano. Podemos notar que o comprimento dessa circunferência é igual a 2π , já que $r = 1$.

Figura 3.1: O Ciclo trigonométrico

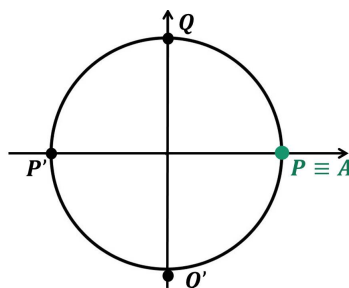


Fonte: Arquivo pessoal

Consideremos um ponto P na circunferência. A cada número real x no intervalo $0 \leq x < 2\pi$, podemos associar um único ponto A da circunferência, do seguinte modo:

- 1º) Se $x = 0$, ou seja, se x coincide com a origem do ciclo trigonométrico, o ponto A coincide com P , conforme a Figura 3.2.

Figura 3.2: $x = 0 \Rightarrow P \equiv A$

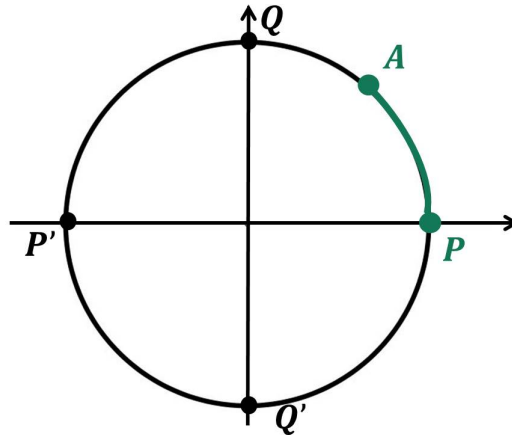


Fonte: Arquivo pessoal

¹Existem outras razões trigonométricas que são obtidas através do ciclo trigonométrico, e que são as razões inversas às já citadas. São elas: secante (inverso do cosseno), cossecante (inverso do seno) e cotangente (inverso da tangente)

2º) Se $x > O$, então realiza-se, a partir de P , um “percurso” de comprimento igual a x , no sentido anti-horário, e depois marca-se o ponto A como o ponto final do percurso, de modo que $A > P$ conforme a Figura 3.3.

Figura 3.3: $x > O \Rightarrow A > P$



Fonte: Arquivo pessoal

A circunferência definida acima, com origem em P , é chamada de *ciclo trigonométrico* ou *circunferência trigonométrica*. Se o ponto A está associado ao número x , dizemos que A é a *imagem* de x no ciclo.

Resumidamente, podemos definir o ciclo trigonométrico como segue:

Definição 3.1 (Ciclo trigonométrico). O **ciclo trigonométrico** é uma circunferência de raio unitário, cujo centro está na origem do plano cartesiano, e na qual, a cada ponto $x \in [0, 2\pi)$, pode-se associar um único ponto A da circunferência, que chamamos de *imagem* de x no ciclo. Veremos que a abscissa e a ordenada desse ponto recebem nomes especiais, dados pelas *razões trigonométricas na circunferência*.

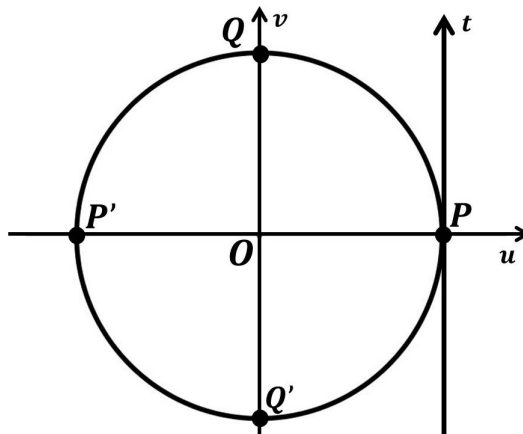
3.1.2 Razões trigonométricas na circunferência

Considerando um ciclo trigonométrico de origem P e raio \overline{OP} , cuja medida é igual a 1, associamos três eixos ao ciclo trigonométrico para o estudo das razões trigonométricas na circunferência. São eles:

- 1º) Eixo dos *Cossenos* (u), cuja direção é \overline{OP} , e tem o sentido positivo $O \rightarrow P$;
- 2º) Eixo dos *Senos* (v), cuja direção é perpendicular ao eixo dos cossenos ($v \perp u$), por O , e sentido positivo $O \rightarrow Q$, sendo Q tal que $\widehat{PQ} = \frac{\pi}{2}$;
- 3º) Eixo das *Tangentes* (t), que é paralelo a v por P , e cujo sentido positivo é o mesmo do eixo v .

Podemos ver a representação desses eixos na Figura 3.4.

Figura 3.4: Eixos no ciclo trigonométrico

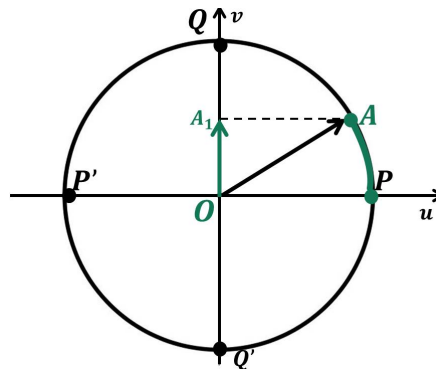


Fonte: Arquivo pessoal

Sabemos que o *Sistema Cartesiano Ortogonal* divide o plano em quatro regiões chamadas de *Quadrantes*. Por sua vez, os eixos u e v dividem a circunferência em quatro arcos: \widehat{PQ} , $\widehat{QP'}$, $\widehat{P'Q'}$ e $\widehat{Q'A}$. Considerando um número real x qualquer, e sua imagem A no ciclo, podemos observar que a imagem de x pertence a algum desses arcos em cada quadrante (por exemplo, se x está no 1º Quadrante, então $A \in \widehat{PQ}$; se x está no 2º Quadrante, então $A \in \widehat{QP'}$, e assim por diante).

Definição 3.2 (Seno). Consideremos um número real $x \in [0, 2\pi]$, e a sua imagem A na Circunferência Trigonométrica. O **seno** de x , indicado por $\text{sen } x$, é a ordenada OA_1 do ponto A em relação ao sistema uOv , conforme pode-se observar pela Figura 3.5.

Figura 3.5: Seno



Fonte: Arquivo pessoal

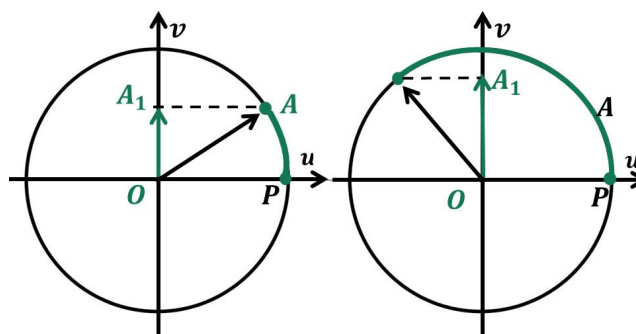
Notemos que a imagem A é única para cada número real $x \in [0, 2\pi]$, e o valor de $\text{sen } x$ também é único para cada imagem A (ou seja, $OA_1 = \text{sen } x$).

Ainda em relação ao seno na circunferência, observemos os seguintes fatos:

- 1º) $\text{sen } x$ é positivo quando x está no primeiro ou no segundo quadrante;

Figura 3.6: Seno positivo

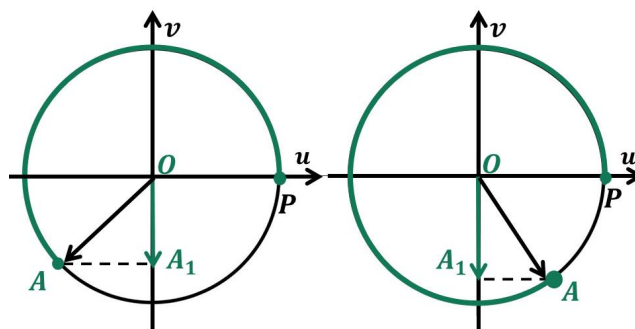
$$(0 \leq OA_1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \text{sen } x \leq 1)$$



Fonte: Arquivo pessoal

2º) $\text{sen } x$ é negativo quando x está no terceiro ou no quarto quadrante.

Figura 3.7: Seno negativo
 $(-1 \leq OA_1 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq \text{sen } x \leq 0)$

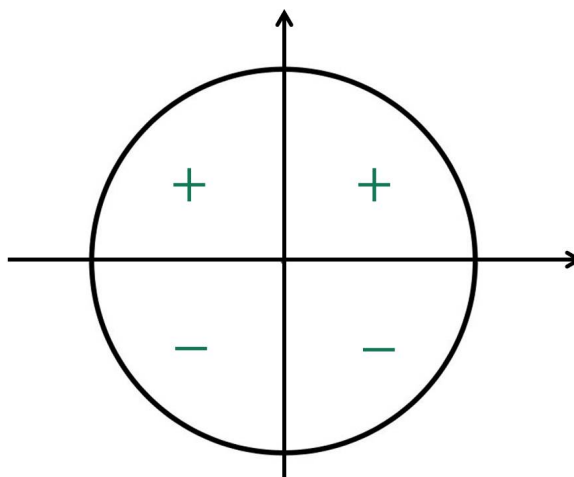


Fonte: Arquivo pessoal

Assim, para cada $x \in [0, 2\pi]$, temos $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$, o que nos diz que -1 é o **valor mínimo** de $\text{sen } x$, e 1 é o **valor máximo** de $\text{sen } x$.

Podemos sintetizar o sinal de $\text{sen } x$ conforme a Figura 3.8.

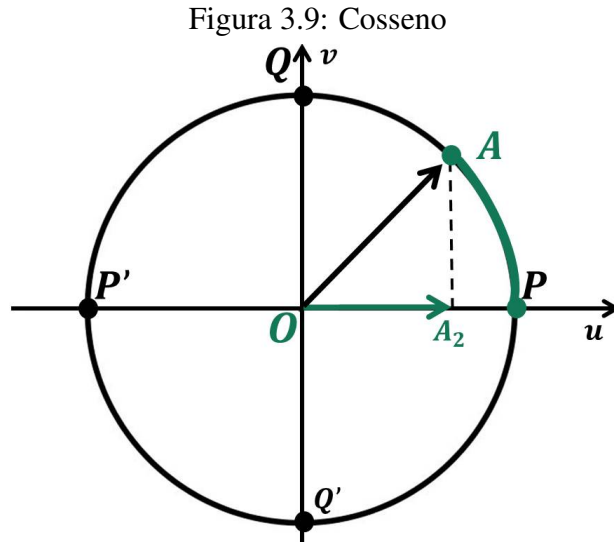
Figura 3.8: Sinal de $\text{sen } x$ em cada quadrante



Fonte: Arquivo pessoal

Notemos que $\text{sen } x$ é *crescente* se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, e *de-*
crescente se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante.

Definição 3.3 (Cosseno). Dado um número real x no intervalo $[0, 2\pi]$, e a sua imagem A na circunferência trigonométrica, o *cosseno* x , indicado por $\cos x$, é a abscissa OA_2 do ponto A em relação ao sistema uOv , conforme a Figura 3.9.



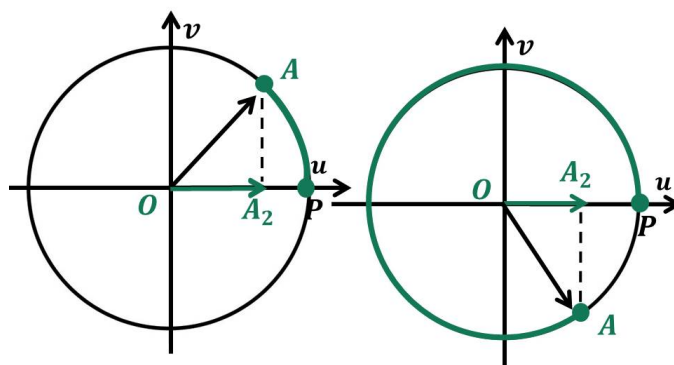
Fonte: Arquivo pessoal

A imagem A é única para cada número real $x \in [0, 2\pi]$, e o valor de $\cos x$ também é único para cada imagem A (ou seja, $OA_2 = \cos x$).

Assim como no seno, também podemos observar algumas propriedades em relação ao cosseno na circunferência:

- 1º) $\cos x$ é positivo quando x está no primeiro ou no quarto quadrante;

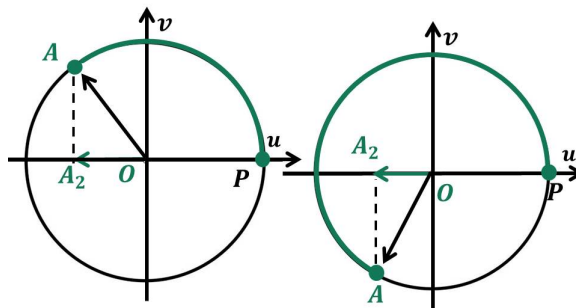
Figura 3.10: Cosseno positivo
 $(0 \leq OA_2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos x \leq 1)$



Fonte: Arquivo pessoal

2º) $\cos x$ é negativo quando x está no segundo ou no terceiro quadrante.

Figura 3.11: Cosseno negativo
 $(-1 \leq OA_2 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 0)$

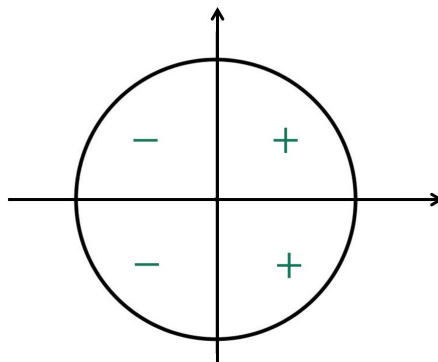


Fonte: Arquivo pessoal

Assim, para cada $x \in [0, 2\pi]$, temos $-1 \leq \cos x \leq 1$, o que nos diz que -1 é o *valor mínimo* de $\cos x$, e 1 é o *valor máximo* de $\cos x$.

O sinal de $\cos x$ pode ser sintetizado como na Figura 3.12.

Figura 3.12: Sinal de $\cos x$ em cada quadrante

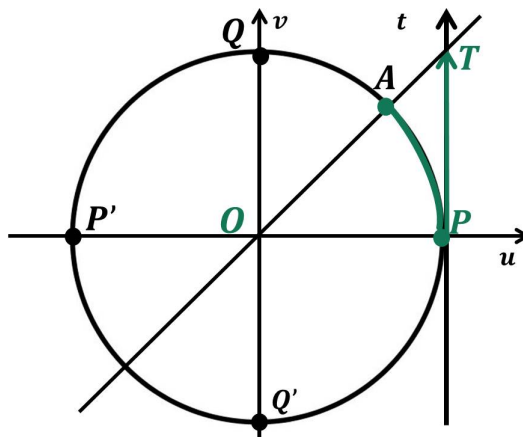


Fonte: Arquivo pessoal

Notemos que $\cos x$ é *crescente* se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, e *decrecente* se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante.

Definição 3.4 (Tangente). Consideremos um número real x no intervalo $[0, 2\pi]$, em que $x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$, e sua imagem A na circunferência trigonométrica. Consideremos também a reta \overleftrightarrow{OA} , e seja T a sua intersecção com o eixo das tangentes. A **tangente** de x , indicada por $\operatorname{tg} x$ é a medida algébrica do segmento \overline{PT} , conforme mostra a Figura 3.13.

Figura 3.13: Tangente



Fonte: Arquivo pessoal

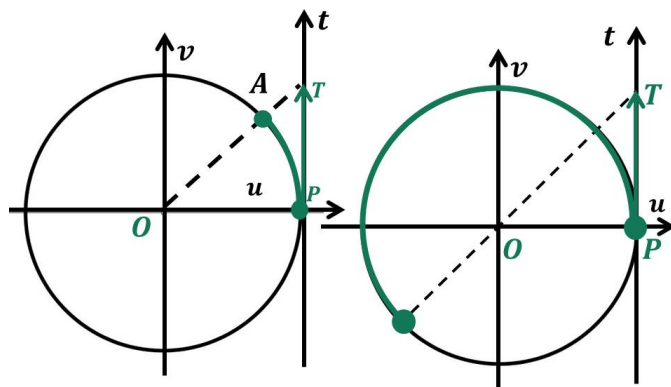
Para $x = \frac{\pi}{2}$, o ponto A está em Q , e para $x = \frac{3\pi}{2}$, A está em Q' , e a reta \overleftrightarrow{OA} fica paralela ao eixo das tangentes, de modo que o ponto T não existe e $\operatorname{tg} x$ não está definida.

A tangente tem as seguintes propriedades na circunferência:

- 1º) A $\operatorname{tg} x$ é positiva quando x está no primeiro ou no terceiro quadrante;

Figura 3.14: Tangente positiva

$$(PT > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x > 0)$$

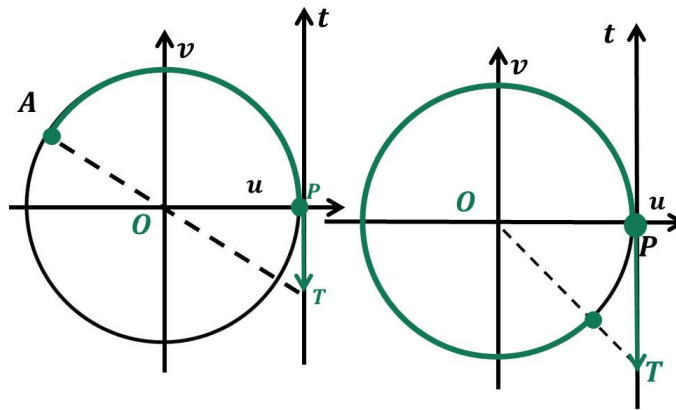


Fonte: Arquivo pessoal

2º) A $\operatorname{tg} x$ é negativa quando x está no segundo ou no quarto quadrante.

Figura 3.15: Tangente negativa

$$(PT < 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x < 0)$$

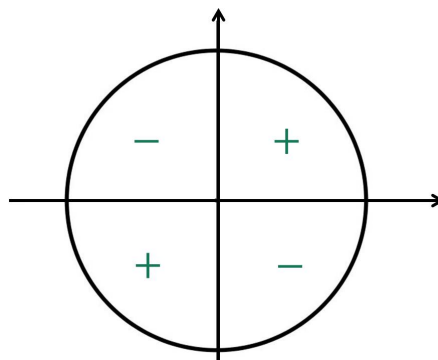


Fonte: Arquivo pessoal

A tangente é crescente em todos os quadrantes, isto é, se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, $\operatorname{tg} x$ é crescente. Daí, dados dois valores x_1 e x_2 no ciclo, com $x_1 < x_2$, temos $\alpha_1 < \alpha_2$, o que implica no fato de que $PT_1 < PT_2$, ou seja, $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$, por propriedade da Geometria Plana.

O sinal da tangente pode ser esquematizado como na Figura 3.16.

Figura 3.16: Sinal da $\operatorname{tg} x$ em cada quadrante



Fonte: Arquivo pessoal

O estudo das razões trigonométricas no ciclo trigonométrico é o pontapé inicial para o estudo das *Funções Trigonométricas*, conforme veremos na próxima subseção.

3.1.3 Funções Trigonométricas

As discussões acerca das funções trigonométricas são bastante extensas, pois envolvem diversas outras propriedades além das propriedades que até aqui foram vistas, e daquelas que serão apresentadas adiante no decorrer do trabalho. Diante disso, nesta subseção, faremos um breve estudo acerca das funções seno, cosseno e tangente. Um estudo detalhado dessas funções pode ser encontrado nas referências [10, 12].

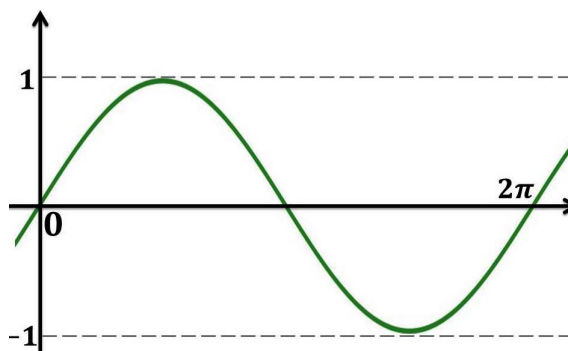
Definição 3.5 (Função seno). Pela Definição 3.2, sabemos de que forma o seno está expresso na circunferência. Consideremos um número real x , a imagem A desse número no ciclo e sua ordenada OA_1 em relação ao sistema uOv . A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x , o número real $OA_1 = \text{sen } x$, isto é, $f(x) = \text{sen } x$, é denominada *função seno*.

A função seno possui duas propriedades importantes:

- 1ª) Sua *imagem* é o intervalo $[-1, 1]$;
- 2ª) A função seno é uma função *periódica*, e o seu período é 2π .

Podemos visualizar essas propriedades através do gráfico da função seno, conforme a Figura 3.17.

Figura 3.17: $f(x) = \text{sen } x$



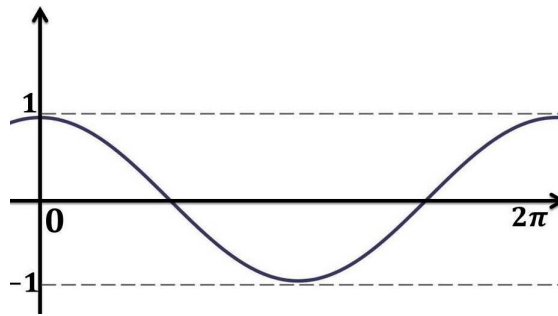
Fonte: Arquivo pessoal

Definição 3.6 (Função cosseno). Consideremos a Definição 3.3, do cosseno na circunferência. Seja um número real x , a imagem A desse número no ciclo e sua abscissa OA_2 em relação ao sistema uOv . A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x , o número real $OA_2 = \text{cos } x$, isto é, $f(x) = \text{cos } x$, é denominada *função cosseno*.

A função cosseno possui as mesmas propriedades da função seno:

- 1ª) Sua *imagem* é o intervalo $[-1, 1]$;
- 2ª) É uma função *periódica*, de período 2π .

A Figura 3.18 nos mostra o gráfico da função cosseno e suas propriedades.

Figura 3.18: $f(x) = \cos x$ 

Fonte: Arquivo pessoal

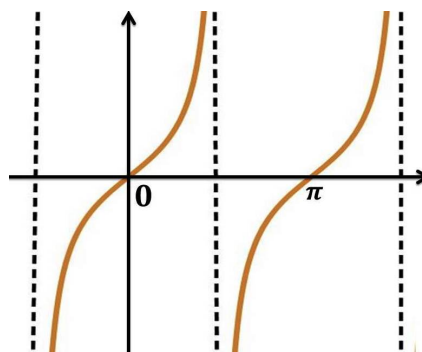
Trataremos do caráter periódico das funções seno e cosseno na subseção 5.2.1 do capítulo 5.

Definição 3.7 (Função tangente). Da Definição 3.4, da tangente na circunferência, consideremos um número real x , tal que $x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$. A função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número real x , tal que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o número real $PT = \operatorname{tg} x$, isto é, $f(x) = \operatorname{tg} x$, é denominada *função tangente*

A função tangente possui as seguintes propriedades:

- 1^a) Seu domínio é $D = \left\{ x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$;
- 2^a) Sua imagem é \mathbb{R} , ou seja, para todo número real y , existe um número real x tal que $y = \operatorname{tg} x$;
- 3^a) É uma função periódica, e seu período é π .

Podemos ver o gráfico da função tangente na Figura 3.19.

Figura 3.19: $f(x) = \operatorname{tg} x$ 

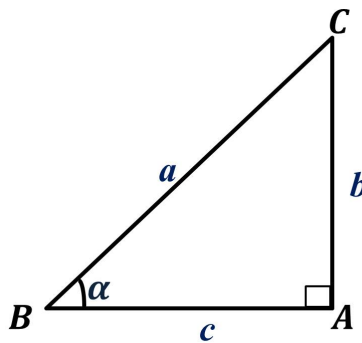
Fonte: Arquivo pessoal

3.2 Trigonometria no triângulo retângulo

As razões trigonométricas são conceitos extremamente importantes em Trigonometria, e também podem ser deduzidas e definidas através do triângulo retângulo. Por esse motivo, no decorrer desta seção, trazemos uma abordagem acerca das razões seno, cosseno e tangente, tendo em vista que elas servem de base para o aprofundamento de estudos teóricos e práticos mais avançados em Matemática, que estejam relacionados direta ou indiretamente com a Trigonometria. Além disso, esses conceitos também são fundamentais para o estudo das aplicações da Trigonometria, tanto em Matemática, quanto em diversas ciências e/ou áreas.

Consideremos um triângulo retângulo ABC , reto em A , como mostra-se na Figura 3.20.

Figura 3.20: Triângulo retângulo reto em A



Fonte: Arquivo pessoal

Definição 3.8 (Seno, cosseno e tangente de um ângulo). Na Figura 3.20, seja α a medida interna do ângulo \widehat{ABC} . Podemos então estabelecer as seguintes relações:

1. **Seno** de α : razão entre o *cateto oposto* ao ângulo \widehat{B} e a hipotenusa:

$$\bullet \operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}.$$

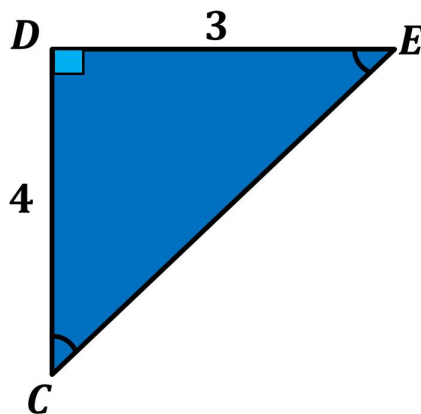
2. **Cosseno** de α : razão entre o *cateto adjacente* ao ângulo \widehat{B} e a hipotenusa:

$$\bullet \operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}.$$

3. **Tangente** de α : razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo \widehat{B} :

$$\bullet \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}.$$

Exemplo 3.9. Dado o triângulo CDE da Figura 3.21, reto em D , vamos calcular as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente do ângulo \widehat{C} .

Figura 3.21: Triângulo CDE 

Fonte: Arquivo pessoal

Notemos que a medida da hipotenusa do triângulo CDE não está definida. Vamos então calcular essa medida, utilizando o Teorema 2.7 (Teorema de Pitágoras). Seja d a medida da hipotenusa. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que

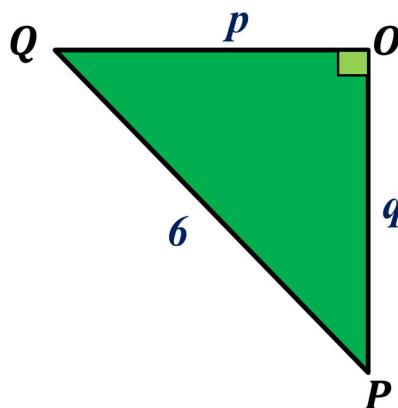
$$d^2 = 4^2 + 3^2 \implies d^2 = 16 + 9 \implies d^2 = 25 \implies d = 5.$$

Feito isso, podemos calcular o seno, o cosseno e a tangente do ângulo \widehat{C} :

- $\text{sen } \widehat{C} = \frac{\text{Cateto oposto a } \widehat{C}}{\text{hipotenusa}} \implies \text{sen } \widehat{C} = \frac{3}{5};$
- $\text{cos } \widehat{C} = \frac{\text{Cateto adjacente a } \widehat{C}}{\text{hipotenusa}} \implies \text{cos } \widehat{C} = \frac{4}{5};$
- $\text{tg } \widehat{C} = \frac{\text{Cateto oposto a } \widehat{C}}{\text{Cateto adjacente a } \widehat{C}} \implies \text{tg } \widehat{C} = \frac{3}{4}.$

Exemplo 3.10. Seja OPQ um triângulo retângulo em \hat{O} . Dados $\text{tg}\hat{P} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ e hipotenusa igual a 6, vamos calcular os catetos p e q .

Figura 3.22: Triângulo OPQ



Fonte: Arquivo pessoal

O triângulo descrito pode ser representado geometricamente, como na Figura 3.22. Pela Definição 3.8, $\text{tg}\hat{P} = \frac{\text{Cateto oposto a } \hat{P}}{\text{Cateto adjacente a } \hat{P}}$. Logo,

$$\text{tg}\hat{P} = \frac{p}{q} \implies \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{p}{q} \implies q \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot p \implies p = \frac{q \cdot \sqrt{5}}{2} \quad (3.1)$$

Escolhemos isolar o valor do cateto p . Podemos então calcular a medida do cateto q pelo Teorema de Pitágoras, substituindo na relação o valor de p encontrado na Equação (3.1):

$$6^2 = q^2 + p^2 \implies 36 = q^2 + \left(\frac{q \cdot \sqrt{5}}{2}\right)^2 \implies 36 = q^2 + \frac{5 \cdot q^2}{4} \implies 36 = \frac{9q^2}{4} \implies 144 = 9q^2 \implies q = 4.$$

Por fim, vamos substituir na Equação (3.1) o valor de q encontrado na relação acima:

$$p = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{2} \implies p = 2\sqrt{5}.$$

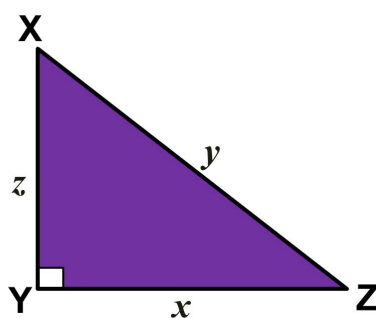
3.2.1 Relações entre seno, cosseno e tangente

Nesta subseção, apresentaremos algumas das relações existentes entre as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente em um triângulo retângulo.

Seja o triângulo da Figura 3.23, reto em Y . Em relação ao ângulo \widehat{X} , pela Definição 3.8, sabemos que:

- $\text{sen } \widehat{X} = \frac{x}{y}$;
- $\text{cos } \widehat{X} = \frac{z}{y}$;
- $\text{tg } \widehat{X} = \frac{x}{z}$.

Figura 3.23: Triângulo XYZ



Fonte: Arquivo pessoal

Consideremos a razão $\frac{\text{sen } \widehat{X}}{\text{cos } \widehat{X}}$. Assim, temos:

$$\frac{\text{sen } \widehat{X}}{\text{cos } \widehat{X}} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{y}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = \frac{x}{z} = \text{tg } \widehat{X}. \quad \text{Sendo assim, } \text{tg } \widehat{X} = \frac{\text{sen } \widehat{X}}{\text{cos } \widehat{X}}.$$

Se os ângulos \widehat{X} e \widehat{Z} forem *complementares*, isto é, se $\widehat{X} + \widehat{Z} = 90^\circ$, teremos as seguintes relações:

1º.) $\text{sen } \widehat{X} = \frac{x}{y}$ e $\text{cos } \widehat{Z} = \frac{x}{y}$. Ou seja, $\text{sen } \widehat{X} = \text{cos } \widehat{Z}$;

2º.) $\text{sen } \widehat{Z} = \frac{z}{y}$ e $\text{cos } \widehat{X} = \frac{z}{y}$. Ou seja, $\text{sen } \widehat{Z} = \text{cos } \widehat{X}$.

Analisemos novamente $\text{sen } \widehat{X} = \frac{x}{y}$ e $\text{cos } \widehat{X} = \frac{z}{y}$ no triângulo XYZ . Observemos que:

$$y \cdot \text{sen } \widehat{X} = x \quad \text{e} \quad y \cdot \text{cos } \widehat{X} = z$$

Pelo Teorema de Pitágoras (Teorema 2.7), temos:

$$(y \cdot \widehat{\text{sen}} \widehat{X})^2 + (y \cdot \widehat{\text{cos}} \widehat{X})^2 = y^2 \implies y^2 \cdot \widehat{\text{sen}}^2 \widehat{X} + y^2 \cdot \widehat{\text{cos}}^2 \widehat{X} = y^2 \implies \widehat{\text{sen}}^2 \widehat{X} + \widehat{\text{cos}}^2 \widehat{X} = 1. \quad (3.2)$$

Essa relação é tida como uma *relação fundamental*, e ocorre independentemente do ângulo \widehat{X} , ou seja, é sempre válida.

3.3 Cálculo do seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30° , 45° e 60°

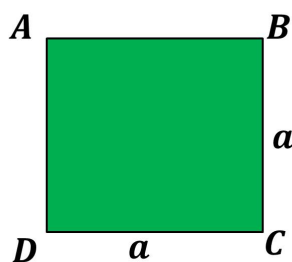
É evidente que, assim como existem infinitos números, existem também infinitos ângulos. Para cada um desses ângulos, existe um valor real de seno, cosseno e tangente, e esse valor pode ser encontrado tanto em tabelas trigonométricas (que contém os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos), como também podem ser obtidos através do uso de uma calculadora científica.

Dentre os infinitos ângulos, existem aqueles que, por serem empregados tão frequentemente em problemas diversos, recebem o nome especial de *ângulos notáveis*, e esses ângulos são 30° , 45° e 60° . Também esses ângulos servem de referência para os demais, e os valores de suas razões trigonométricas podem ser obtidos através de figuras simples e conhecidas (triângulo equilátero, para os ângulos de 30° e 60° , e o quadrado para o ângulo de 45°), por meio de cálculos simples. Nesta seção, apresentamos esses cálculos, e depois montamos uma tabela com os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30° , 45° e 60° .

3.3.1 Seno, cosseno e tangente de 45°

Consideremos um quadrado $ABCD$, cujos lados têm a medida a , como pode-se observar na Figura 3.24.

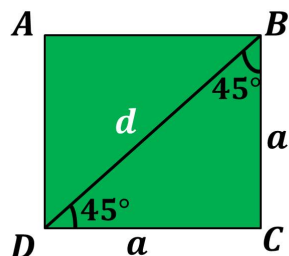
Figura 3.24: Quadrado $ABCD$



Fonte: Arquivo pessoal

Podemos traçar a diagonal d , dividindo assim o quadrado em dois triângulos retângulos, como pode-se ver pela Figura 3.25.

Figura 3.25: Quadrado $ABCD$ dividido em dois triângulos retângulos



Fonte: Arquivo pessoal

Notemos que a diagonal do quadrado é também a hipotenusa dos dois triângulos. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que o valor da diagonal do quadrado será:

$$d^2 = a^2 + a^2 \implies d^2 = 2a^2 \implies d = \sqrt{2a^2} \implies d = a\sqrt{2}$$

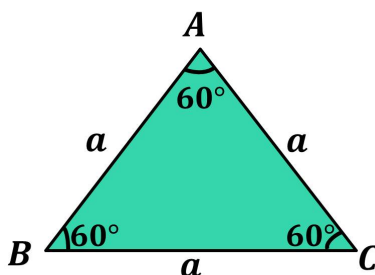
Consideremos o triângulo BCD . De acordo com a Definição 3.8, temos que:

- $\text{sen } 45^\circ = \frac{a}{d} \implies \text{sen } 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} \implies \text{sen } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \implies \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\text{cos } 45^\circ = \frac{a}{d} \implies \text{cos } 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} \implies \text{cos } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \implies \text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\text{tg } 45^\circ = \frac{a}{a} \implies \text{tg } 45^\circ = 1$.

3.3.2 Seno, cosseno e tangente de 30° e 60°

Consideremos um triângulo equilátero ABC , de lado a , como observamos na Figura 3.26.

Figura 3.26: Triângulo Equilátero ABC

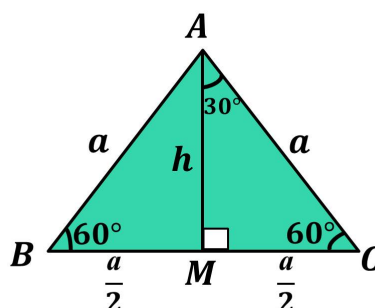


Fonte: Arquivo pessoal

Uma vez que, em um triângulo, os lados de medidas iguais se opõem aos ângulos de medidas iguais, em um triângulo equilátero, todos os ângulos são congruentes, isto é, têm a mesma medida. Dessa forma, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , todos os ângulos de um triângulo equilátero medem 60° .

No triângulo da Figura 3.26, podemos traçar a mediana \overline{AM} , relativa ao lado \overline{BC} , conforme a Figura 3.27. Da Geometria Plana, sabemos que, no triângulo equilátero, a mediana, a bissetriz, a mediatriz e a altura coincidem. Ou seja, o segmento \overline{AM} , além de mediana, também é bissetriz, mediatriz e altura do triângulo ABC , de modo que o triângulo fica dividido em dois triângulos retângulos, cujos ângulos agudos têm medida de 30° e 60° .

Figura 3.27: Triângulo ABC dividido em dois triângulos retângulos



Fonte: Arquivo pessoal

Consideremos o triângulo AMC . Pelo Teorema de Pitágoras, podemos calcular o valor de h :

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \implies h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2}{4}\right) \implies h^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} \implies h^2 = \frac{3a^2}{4} \implies h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Pela Definição 3.8, temos:

1º) ângulo de 30° :

$$\bullet \text{ sen } 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} \implies \text{sen } 30^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} \implies \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\bullet \text{ cos } 30^\circ = \frac{h}{a} \implies \text{cos } 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} \implies \text{cos } 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{a} \implies \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\bullet \text{ tg } 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{h} \implies \text{tg } 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \implies \text{tg } 30^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} \implies \text{tg } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2º) ângulo de 60° :

$$\bullet \text{ sen } 60^\circ = \frac{h}{a} \Rightarrow \text{sen } 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{sen } 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\bullet \text{ cos } 60^\circ = \frac{a}{2} \Rightarrow \text{cos } 60^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow \text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\bullet \text{ tg } 60^\circ = \frac{h}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \text{tg } 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \text{tg } 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{a} \Rightarrow \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}.$$

3.3.3 Tabela trigonométrica dos ângulos notáveis

Com os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30° , 45° e 60° , podemos construir a seguinte tabela trigonométrica:

Figura 3.28: Tabela das razões trigonométricas dos ângulos notáveis

Razão Trigonométrica	Ângulos		
	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Arquivo pessoal

Pelas Equações (2.2) e (2.1) da Definição 2.10 do capítulo anterior, podemos converter os ângulos de graus para radianos. Existe então uma outra versão da tabela expressa na Figura 3.28, mas com os valores dos ângulos notáveis em radianos.

Figura 3.29: Tabela das razões trigonométricas dos arcos notáveis

Razão Trigonométrica	Ângulos		
	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Arquivo pessoal

3.4 Trigonometria em Triângulos Quaisquer

Como dissemos no início deste capítulo, os estudos de Trigonometria são muitas vezes direcionados a triângulos retângulos. Em situações nas quais nos deparamos com triângulos *acutângulos*² ou *obtusângulos*³, não podemos nos valer das relações trigonométricas já conhecidas, tendo em vista que seu uso está restrito apenas a triângulos retângulos. Nesse sentido, o objetivo desta seção é apresentar duas propriedades trigonométricas (ou teoremas) cuja aplicação é válida para triângulos quaisquer. Essas propriedades são conhecidas como *Lei dos cossenos* e *Lei dos senos*.

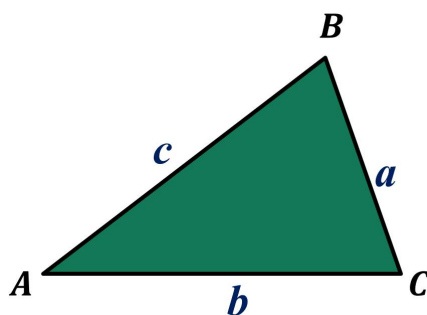
3.4.1 Lei dos cossenos

Teorema 3.11 (Lei dos cossenos). “Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado corresponde à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles” ([12], p.226).

Ou seja, dado um triângulo qualquer, como o da Figura 3.30, a Lei dos cossenos nos fornece:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \quad (3.3)$$

Figura 3.30: Triângulo qualquer



Fonte: Arquivo pessoal

Analogamente, pode-se provar que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}, \text{ e}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Demonstração: Uma demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [12], p.226. \square

²Triângulos cujos ângulos internos são todos agudos, ou seja, menores do que 90°

³Triângulos em que um dos ângulos internos é obtuso, ou seja maior do que 90°

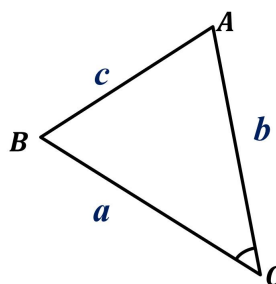
Exemplo 3.12. (Exercício de [12], p. 228) Calcule c , sabendo que:

$$a = 4$$

$$b = 3\sqrt{2}$$

$$\widehat{C} = 45^\circ$$

Figura 3.31: Triângulo



Fonte: Arquivo pessoal

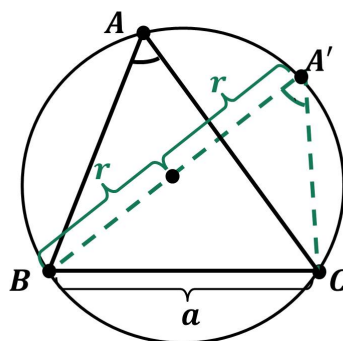
Pela Lei dos cossenos, e conforme a Figura 3.31, temos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \widehat{C} \Rightarrow c^2 = 4^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow c = \sqrt{10}.$$

3.4.2 Lei dos senos

Teorema 3.13 (Lei dos senos). “Consideremos um triângulo qualquer inscrito em uma circunferência. Nesse triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é uma constante igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita” ([12], p.229).

Figura 3.32: Triângulo inscrito em uma circunferência de raio r



Fonte: Arquivo pessoal

Ou seja, dado um triângulo inscrito numa circunferência, como na Figura 3.32, temos:

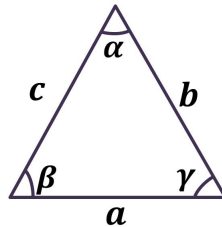
$$\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } C}} = 2r \quad (3.4)$$

Demonstração: Uma demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [12], p.229. \square

Exemplo 3.14. Sendo a o lado oposto ao ângulo α , b oposto a β e c oposto a γ em um triângulo, vamos calcular o valor de γ para $a = \sqrt{2}cm$, $\beta = 45^\circ$ e $b = 2cm$.

O triângulo descrito pode ser representado como na Figura 3.33.

Figura 3.33: Triângulo cujos ângulos internos são α , β e γ



Fonte: Arquivo pessoal

Pela Lei dos senos, temos que:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} \quad (3.5)$$

Substituindo na Equação (3.5) os valores dados na questão, obtemos:

$$\frac{\sqrt{2}}{\text{sen } \alpha} = \frac{2}{\text{sen } 45^\circ} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\text{sen } \alpha} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\text{sen } \alpha} = \frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow 4 \text{sen } \alpha = 2 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{1}{2}. \quad (3.6)$$

Pela Tabela Trigonométrica descrita na Figura 3.28, vemos que $\frac{1}{2}$ é o seno do ângulo de 30° ; logo, $\alpha = 30^\circ$. Como α , β e γ são ângulos internos do mesmo triângulo, e a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180° , para descobrir o valor de γ , fazemos:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow 30^\circ + 45^\circ + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 105^\circ.$$

Capítulo 4

Uma Aplicação no Movimento Ondulatório

Assim como em outras ciências, as aplicações da Trigonometria na área da Física são inúmeras. O estudo do lançamento oblíquo de objetos, o trabalho realizado por uma determinada força para deslocar um corpo, o fenômeno da refração da luz, o estudo da ótica (no que diz respeito ao funcionamento de espelhos) são alguns exemplos de aplicações trigonométricas nessa área. Outros exemplos (talvez ainda mais claros) de aplicações da Trigonometria na Física estão nos estudos relacionados a fenômenos periódicos, como o movimento oscilatório chamado de **Movimento Harmônico Simples (MHS)**, e também o movimento oscilatório produzido por **Ondas** dos mais diversos tipos.

Neste capítulo, fazemos uma abordagem a respeito do movimento ondulatório e sua relação com a Trigonometria. Inicialmente, apresentaremos o conceito de onda, juntamente com uma definição do movimento ondulatório e a classificação dos tipos de onda quanto à sua origem. A seguir, restringindo a abordagem às ondas que se propagam em um meio físico específico, apresentaremos as classificações das ondas quanto ao seu formato. Na seção subsequente, apresentaremos a descrição de uma onda por meio de uma equação, e estudaremos individualmente cada grandeza da equação apresentada. Em seguida, estudaremos a respeito do **Princípio da Superposição de Ondas**. Finalmente, estudaremos sobre as **Ondas Estacionárias** e apresentaremos uma demonstração simples de como essas ondas são formadas.

A elaboração deste capítulo foi baseada nas referências [3, 11].

4.1 Ondas

Nesta seção, apresentamos o conceito de onda, a definição do movimento ondulatório, e a classificação dos tipos de ondas em relação à sua origem.

Definição 4.1 (Ondas). Ondas são oscilações físicas no espaço e periódicas no tempo, geradas através de perturbações em meio material ou não. Dizemos que o movimento ondulatório (movimento da onda) é periódico.

Em relação à sua origem, as ondas são classificadas em três tipos principais:

- 1. Ondas Mecânicas** - São ondas governadas pelas Leis de Newton, e que existem apenas em um meio material (ar, água, rochas, etc). As ondas do mar, as ondas sonoras, e mesmo as ondas geradas por perturbações em uma corda, são exemplos de ondas mecânicas;
- 2. Ondas Eletromagnéticas** - São ondas que não necessitam de meio material para existir, podendo se propagar no vácuo. As ondas de rádio e televisão, a luz visível e a luz ultravioleta são exemplos de ondas eletromagnéticas;
- 3. Ondas de Matéria** - São ondas associadas a elétrons, prótons e outras partículas elementares, como também a átomos e moléculas. São usadas em laboratório, e recebem esse nome pelo fato de que as partículas citadas são consideradas elementos básicos da matéria.

4.2 Formas de onda: transversais e longitudinais

Consideremos uma onda cuja propagação se dá em uma corda esticada¹ (a forma mais simples das ondas mecânicas). Se existe alguma perturbação em uma das pontas da corda esticada, uma onda com a forma de um pulso (como se observa na Figura 4.1) se propaga ao longo da corda, o que ocorre pelo fato de que a corda está sob tensão.

Figura 4.1: Pulso de onda em uma corda

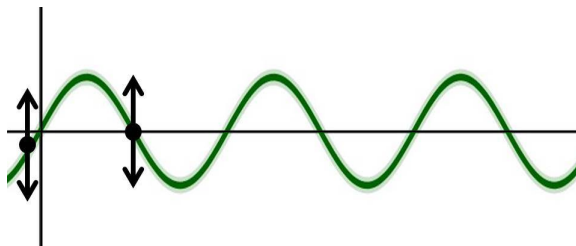


Fonte: Arquivo pessoal

¹Consideramos aqui uma corda “ideal”, na qual não existem forças de atrito para reduzir a amplitude da onda enquanto ela se propaga. Supomos também que a corda é tão comprida que não é preciso considerar o seu retorno após atingir a outra extremidade.

Quando ocorre um deslocamento contínuo para cima e para baixo (em um **movimento harmônico simples**), uma onda contínua se propaga ao longo da corda com determinada velocidade. O movimento provocado pelo deslocamento é uma **função senoidal do tempo**, e, por isso, a onda formada tem a forma de uma senoide (forma da curva da função seno ou cosseno) em qualquer instante, conforme pode-se observar pela Figura 4.2.

Figura 4.2: Onda transversal

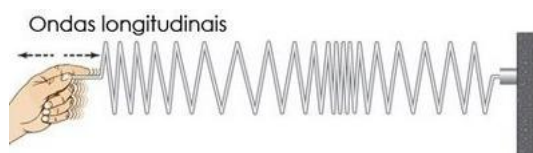


Fonte: Arquivo pessoal

Analisando o movimento de **um** elemento da corda enquanto oscila para cima e para baixo com a passagem da onda, constata-se que o deslocamento de todos os elementos da corda é sempre **perpendicular** à direção de propagação da onda. Este é um movimento chamado **transversal**, e a onda que se propaga em uma corda é uma *onda transversal*.

Uma onda sonora pode ser produzida pela voz humana ou por um instrumento musical qualquer. A vibração das cordas vocais ou das cordas de um violão, por exemplo, enviam um pulso sonoro pelo ar. Quando isso ocorre, uma onda senoidal se propaga através do meio. Como o movimento das moléculas de ar é **paralelo** à direção de propagação da onda, seu movimento é **longitudinal**, de modo que a onda que se propaga no ar é uma **onda longitudinal**. Na Figura 4.3 temos um exemplo de onda longitudinal (à esquerda) e da direção de propagação das ondas sonoras (à direita).

Figura 4.3: Onda longitudinal



Fonte: TodaMatéria



Fonte: Explicatorium

Tanto as ondas transversais quanto as longitudinais são chamadas de **ondas progressivas** quando se propagam de um lugar a outro. Vale observar que é a onda que se propaga, e não o meio material no qual ela se move.

4.3 Descrição da propagação de uma onda em uma corda

Para descrever a propagação de uma onda em uma corda é preciso que haja uma função que forneça a forma da onda, ou seja, necessitamos de uma relação da forma $y = h(x, t)$, onde y é o deslocamento transversal de um elemento da corda e h é a função do tempo t e da posição x do elemento na corda. Toda forma de onda senoidal pode ser descrita tomando h como uma função **seno** ou **coseno**, pois ambas fornecem a mesma forma para a onda.

Consideremos uma onda senoidal que se propaga em uma corda, no sentido positivo de um eixo x (ver a Figura 4.2). Quando essa onda passa por elementos sucessivos (partes muito pequenas) da corda, os elementos oscilam paralelamente ao eixo y . Em algum instante t , o deslocamento y do elemento da corda que está na posição x é dado por

$$y(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t), \quad (4.1)$$

onde:

- $y(x, t)$ é o deslocamento da onda;
- y_m é a amplitude da onda;
- $\text{sen}(kx - \omega t)$ é o fator oscilatório;
- k é o número de onda;
- x é a posição;
- ω é a frequência angular;
- t é o tempo;
- $(kx - \omega t)$ é a fase.

A Função (4.1) pode ser usada para calcular os deslocamentos de todos os elementos da corda em função do tempo, e também pode nos dizer qual é a forma da onda em qualquer instante de tempo, e como esta forma varia quando a onda se move ao longo da corda. Ainda nesta seção, discutimos a respeito das grandezas dessa função.

4.3.1 Amplitude e fase da onda

A *amplitude* de uma onda (dada por y_m), é definida como sendo o “módulo do deslocamento máximo dos elementos a partir da posição de equilíbrio quando a onda passa por eles.”

([11], p.119). Graficamente, isso corresponde à distância de uma **crista**² ou de um **vale**³ ao nível de equilíbrio. Como y_m corresponde a uma distância, sempre será uma grandeza positiva.

Conforme já visto, a *fase* da onda é o argumento $(kx - \omega t)$ da Equação (4.1). No momento em que a onda passa por um elemento da corda em certa posição x , a fase varia linearmente com o tempo t . Neste caso, o seno também varia, oscilando entre $+1$ e -1 (variação natural da função seno). Em relação a essa variação, [11] diz:

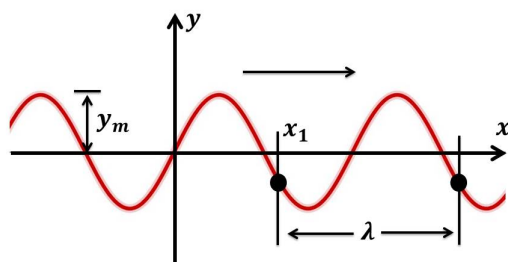
O valor extremo positivo $(+1)$ corresponde à passagem pelo elemento de pico da onda; nesse instante, o valor de y na posição x é y_m . O valor extremo negativo (-1) corresponde à passagem pelo elemento de um vale da onda; nesse instante, o valor de y na posição x é $-y_m$. ([11], p.119)

Pode-se então afirmar que a função seno e a variação da fase da onda com o tempo correspondem à oscilação de um elemento da corda, e a amplitude determina os pontos extremos do deslocamento da onda.

4.3.2 Comprimento e número de onda

O **comprimento de onda**, representado por λ , é a distância entre repetições de uma onda (essa distância é paralela à direção de propagação da onda). Um comprimento de onda típico, como o da Figura 4.4 é obtido fazendo $t = 0$ na Equação (4.1).

Figura 4.4: Comprimento de onda



Fonte: Arquivo pessoal

A descrição dessa forma de onda é dada por

$$y(x, 0) = y_m \text{sen}(kx). \quad (4.2)$$

²As cristas são formadas pelos pontos mais altos da onda

³Os vales são formados pelos pontos mais baixos da onda

Dada a periodicidade do movimento ondulatório, o deslocamento é o mesmo nas duas extremidades do comprimento de onda ($x = x_1$ e $x = x_1 + \lambda$). Assim, temos:

$$y_m \operatorname{sen} kx_1 = y_m \operatorname{sen} [k(x_1 + \lambda)] = y_m \operatorname{sen} (kx_1 + k\lambda). \quad (4.3)$$

A função seno é periódica, e o seu período é 2π . Isso significa que a função se repete à medida que o seu argumento (ângulo) recebe um acréscimo de 2π . Assim, na Equação (4.3), temos:

$$k\lambda = 2\pi \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (4.4)$$

O parâmetro k é chamado *número de onda*, e tem como unidade padrão (de acordo com o SI⁴) o $\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ou m^{-1} .

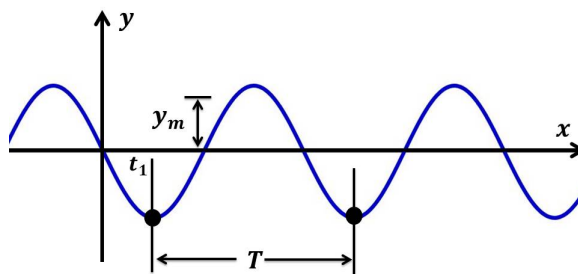
4.3.3 Período, frequência angular, frequência e constante de fase da onda

Consideremos o deslocamento de um ponto fixo em uma corda na posição $x = 0$. Da Função (4.1) (e lembrando que $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha, \forall \alpha$), temos que:

$$y(0, t) = y_m \operatorname{sen}(-\omega t) = -y_m \operatorname{sen} \omega t. \quad (4.5)$$

A Figura 4.5 é a representação gráfica da Equação (4.5). O deslocamento descrito se repete quando o tempo que leva para acontecer recebe incrementos. Nesse sentido, o **período** T de oscilação de uma onda é definido como sendo o tempo em que um elemento da corda leva para realizar uma oscilação completa.

Figura 4.5: Deslocamento do elemento da corda situado em $x = 0$



Fonte: Arquivo pessoal

⁴Sistema Internacional de Unidades

Para calcular esse tempo, partimos da ideia de que $y(0, t_1 + T) = y(0, t_1)$. Daí, pela Equação (4.5), temos:

$$-y_m \operatorname{sen} \omega t = -y_m \operatorname{sen} [\omega(t + T)] = -y_m \operatorname{sen} (\omega t + \omega T). \quad (4.6)$$

O parâmetro ω é chamado de **frequência angular**, e sua unidade no SI é o $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Notemos que a Equação (4.6) só é satisfeita se $\omega T = 2\pi$, ou seja, $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

O inverso do período exprime o número de ciclos que uma onda executa por unidade de tempo, isto é, o número de oscilações de uma onda por unidade de tempo. Em nossos estudos, as oscilações ocorrem em uma corda esticada. Essa grandeza é chamada de **frequência**, e sua unidade no SI é o *Hertz* (Hz) ou s^{-1} .

A frequência está relacionada à frequência angular ω , conforme vemos na Equação (4.7),

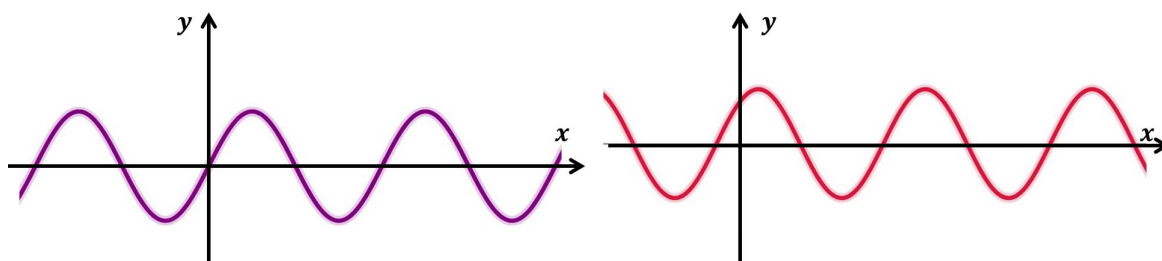
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (4.7)$$

A grandeza denominada **constante de fase**, representada por ϕ , pode ser adicionada na função de onda dada pela Equação (4.1), como pode-se ver pela Equação (4.8),

$$y = y_m \operatorname{sen} (kx - \omega t - \phi). \quad (4.8)$$

O valor dessa constante “pode ser escolhido de tal forma que a função forneça outro deslocamento e inclinação quando $x = 0$, para $t = 0$ ” ([11], p.121). Notemos que a Equação (4.8) é uma generalização da Equação (4.1) (neste último caso, $\phi = 0$). Notemos também, que, independentemente do valor de ϕ , a onda ainda é senoidal com os mesmos valores de y_m , k e ω ; o que muda é o deslocamento da onda, conforme pode-se ver na Figura 4.6.

Figura 4.6: $\phi = 0$ (à esquerda), e $\phi \neq 0$ (à direita)



Fonte: Arquivo pessoal

4.3.4 O princípio da superposição de ondas

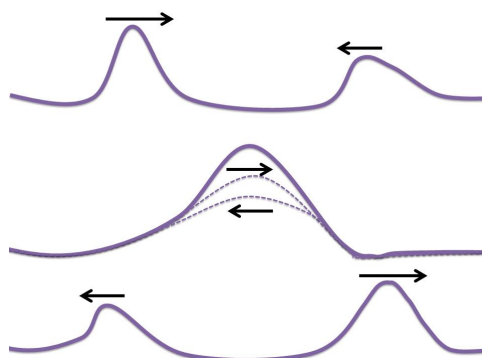
Quando duas (ou mais) ondas, cujas funções são $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$, se propagam no mesmo meio (em uma corda esticada, no nosso caso), temos uma **onda resultante**, cuja função é a soma algébrica das funções das ondas que se combinam. Ou seja, a onda resultante é uma onda descrita pela função

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t). \quad (4.9)$$

O significado dessa soma está no fato de que “ondas superpostas se somam algebricamente para produzir uma **onda resultante** ou **onda total**” ([11], p.129. Grifos do autor).

Considerando dois pulsos de ondas se propagando em sentidos opostos, quando eles passam um pelo outro, ambos se superpõem, e o pulso resultante é a soma dos dois pulsos. Após o cruzamento, cada um prossegue o seu caminho sem sofrer nenhuma alteração. Isso ocorre pelo fato de que “ondas superpostas não se alteram mutuamente” ([11], p. 129). Isso pode ser visto na Figura 4.7.

Figura 4.7: Ondas superpostas



Fonte: Arquivo pessoal

A superposição de ondas é um fenômeno constante na nossa vida diária, e existem diversos exemplos de sua ocorrência que poderíamos citar, como: a luz de uma lâmpada que chega aos nossos olhos se superpõe com vários feixes de luz em seu caminho, sem perder a sua integridade e intensidade; dos mais diversos sons emitidos pelos instrumentos musicais de uma banda, conseguimos distinguir o som da guitarra e do violão, e o som dos demais instrumentos, mesmo que todos estejam sendo tocados ao mesmo tempo, além é claro, de conseguir entender as palavras cantadas pelo vocalista, e distinguir o som da sua voz, dos sons das vozes do *backing vocal* (vocal de apoio). Tudo isso ocorre devido ao princípio da superposição. Sem ele, nada disso ocorreria.

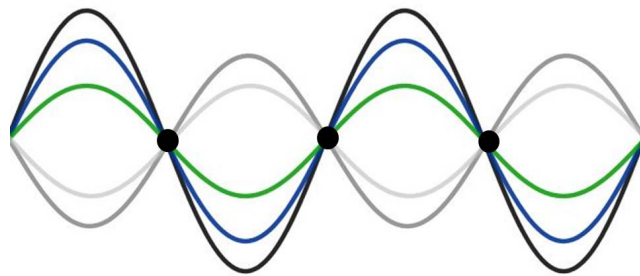
A superposição de duas ou mais ondas de mesma frequência causa um fenômeno cha-

mado de **interferência de ondas**. Duas ondas senoidais de mesma amplitude e comprimento de onda se propagando no mesmo sentido em uma corda interferem entre si para produzir uma onda senoidal resultante que se propaga nesse mesmo sentido.

4.3.5 Ondas estacionárias

Consideremos duas ondas que se propagam em uma corda esticada, agora em sentidos opostos. Em algum momento, essas ondas irão se “esbarrar”, de modo que uma será obstáculo ou fronteira da outra, tornando-se totalmente ou parcialmente uma na outra. Segundo [3], quando isso acontece em um meio de dimensão finita, a reflexão total pode resultar em **ondas estacionárias**. Em outras palavras, uma onda estacionária é produzida através da interferência mútua de ondas senoidais de mesmo comprimento de onda e amplitude que se propagam em sentidos opostos em uma mesma corda.

Figura 4.8: Ondas estacionárias



Fonte: Arquivo pessoal

Observemos na Figura 4.8, que existem alguns pontos imóveis na onda. Esses pontos são chamados de **nós**. Os pontos médios entre *nós* vizinhos são chamados de **antinós**, e são pontos em que a amplitude da onda resultante é máxima. Esses pontos ficam localizados no chamado *modo normal de vibração*, que, “no seu sentido mais geral, (...), é qualquer onda estacionária em um meio delimitado e com vínculos definidos” ([3], p.90).

A fim de analisar uma onda estacionária, consideremos as seguintes equações:

$$y_1(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t) \quad (4.10)$$

$$y_2(x, t) = y_m \text{sen}(kx + \omega t) \quad (4.11)$$

Pelo princípio de superposição, a onda resultante é dada por:

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t) + y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t) \quad (4.12)$$

Lembrando da relação trigonométrica $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta \pm \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha$, e aplicando-a na Equação (4.12), temos:

$$y'(x, t) = [2y_m \operatorname{sen} kx] \cos \omega t, \quad (4.13)$$

onde:

- $y'(x, t)$ é o deslocamento;
- $[2y_m \operatorname{sen} kx]$ é o termo de amplitude;
- $\cos \omega t$ é o termo oscilatório.

A Equação (4.13) descreve uma onda estacionária. O termo $[2y_m \operatorname{sen} kx]$ pode ser interpretado como sendo a *amplitude de oscilação* do elemento da corda que está na posição x . Notemos que, a amplitude é sempre positiva, mas $\operatorname{sen} kx$ pode ser negativo. Consideramos então o valor absoluto de $[2y_m \operatorname{sen} kx]$ como sendo a amplitude de x .

Diferentemente da onda senoidal progressiva, em uma onda estacionária a amplitude da onda **não** é a mesma para todos os elementos da corda, tendo em vista que a amplitude varia com a posição nesse tipo de onda. A onda estacionária representada pela Equação (4.13), por exemplo, tem amplitude zero para valores de kx tais que $\operatorname{sen} kx = 0$, ou seja, para

$$kx = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Fazendo $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, obtemos

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \implies x = n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.14)$$

para as posições cuja amplitude é zero (ou seja, os nós) da onda estacionária representada pela Equação (4.13). Observemos que nós vizinhos estão separados pela metade do comprimento de onda ($\frac{\lambda}{2}$).

A amplitude da onda estacionária da Equação (4.13) tem valor máximo $2y_m$, para valores de kx tais que $|\operatorname{sen} kx| = 1$, ou seja, para

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Fazendo $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, obtemos

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi + \frac{\pi}{2} \implies x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

para as posições cuja amplitude é máxima (antinós) da onda estacionária da Equação (4.13).

4.3.6 Experimento: produzindo ondas estacionárias

Consideremos uma corda esticada e presa em algum suporte nas duas extremidades. Quando a corda é excitada, fazendo com que uma onda progressiva seja refletida em uma de suas extremidades, interferindo consigo mesma, ocorre a formação de uma onda estacionária, ou seja, a onda incidente original e a refletida “se combinam” para formar uma onda estacionária. As Equações (4.10) e (4.11), respectivamente, descrevem a onda incidente original e a onda refletida.

Com o objetivo de demonstrar como as ondas estacionárias se formam e se comportam, reproduzimos um experimento simples, que consiste em produzir uma onda senoidal contínua em uma corda fixa em um suporte, e, a partir disso, analisar o comportamento da onda. Esse experimento pode ser encontrado em [8].

Os materiais utilizados para a realização do experimento foram:

1. Uma espiral de encadernação⁵ (33mm), a qual mostramos na Figura 4.9;
2. Dois suportes humanos (um fixo e o outro móvel)⁶.

Figura 4.9: Espiral de encadernação (33mm)



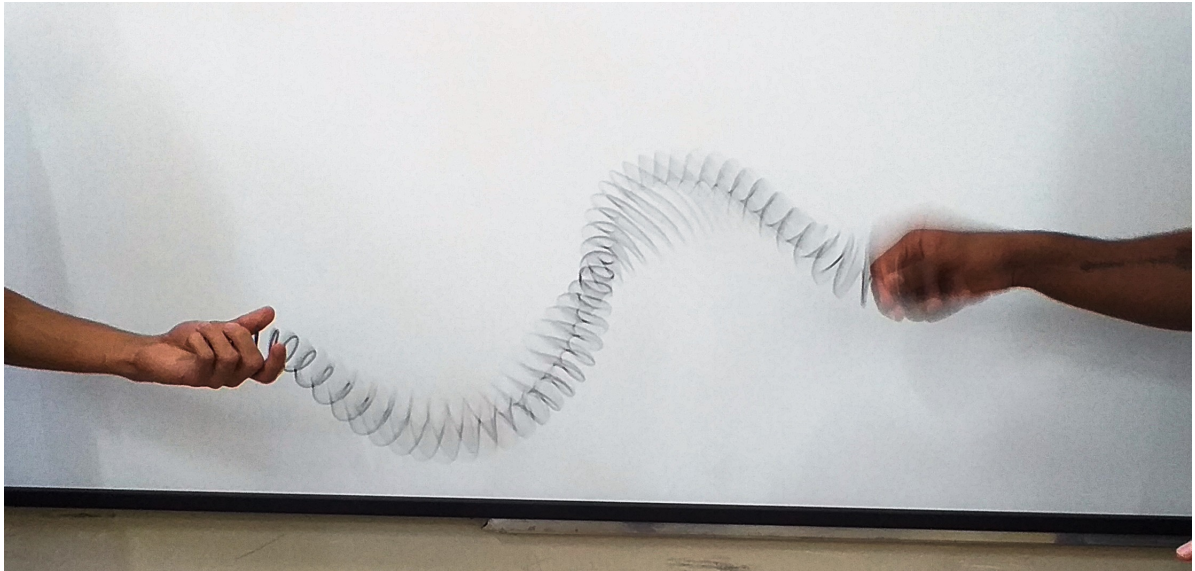
Fonte: Arquivo pessoal

⁵A espiral de encadernação substituiu a corda na realização do experimento.

⁶O suporte humano móvel é o responsável por agitar a espiral e produzir os pulsos ondulatórios, enquanto o suporte humano fixo é responsável por segurar a espiral sem fazer nenhum movimento.

Com a espiral “presa” aos dois suportes em ambas as extremidades, o suporte humano móvel (posicionado à direita) agitou a espiral, formando uma onda senoidal contínua se propagando da direita para a esquerda, conforme pode-se observar na Figura 4.10.

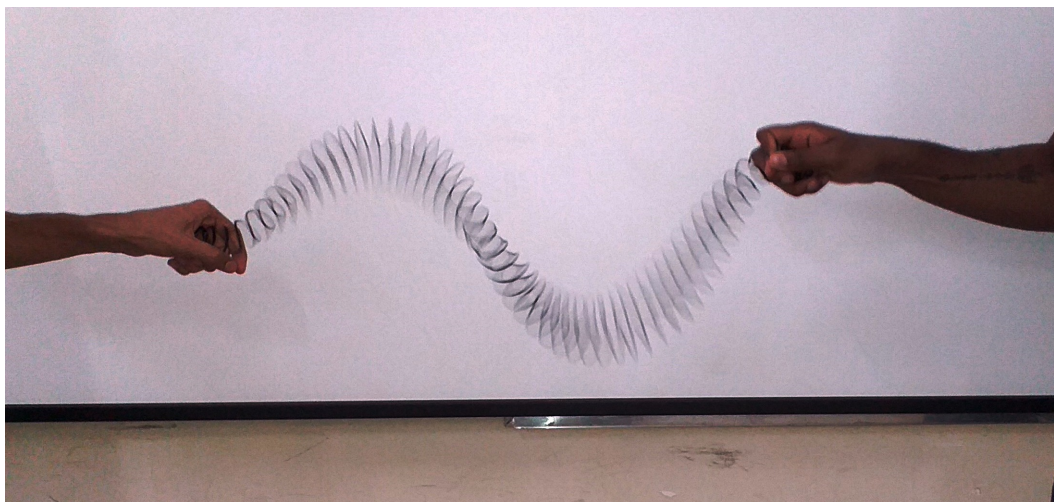
Figura 4.10: Onda senoidal contínua



Fonte: Arquivo pessoal

Ao chegar à outra extremidade (suporte humano fixo, posicionado à esquerda), essa onda se refletiu e começou a se propagar de volta à extremidade de origem do pulso, como observamos na Figura 4.11.

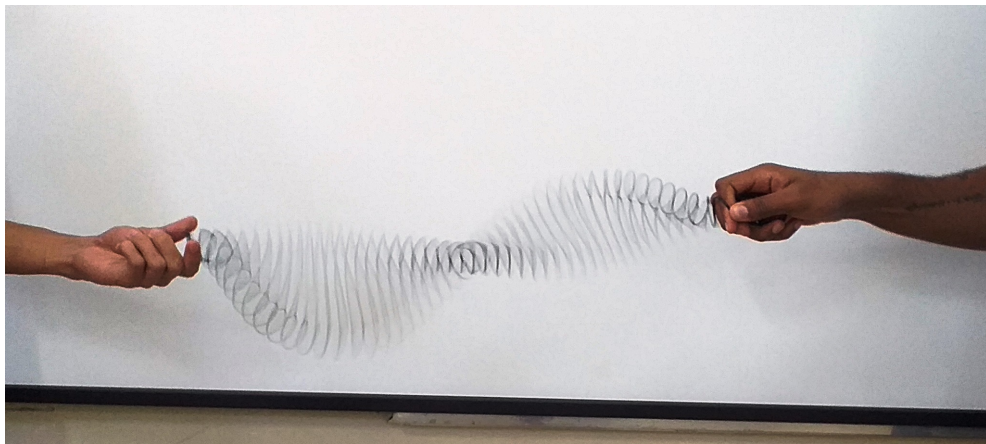
Figura 4.11: Onda se propagando de volta à origem do pulso



Fonte: Arquivo pessoal

Ao tomar esse caminho de volta, a onda refletida encontra e se superpõe à outra onda que ainda se propaga para a esquerda; ao chegar na extremidade de origem, a onda refletida começa a se propagar de volta para a esquerda, encontrando e superpondo-se a outras ondas que se propagam para a direita e para a esquerda. Podemos ver algo parecido na Figura 4.12.

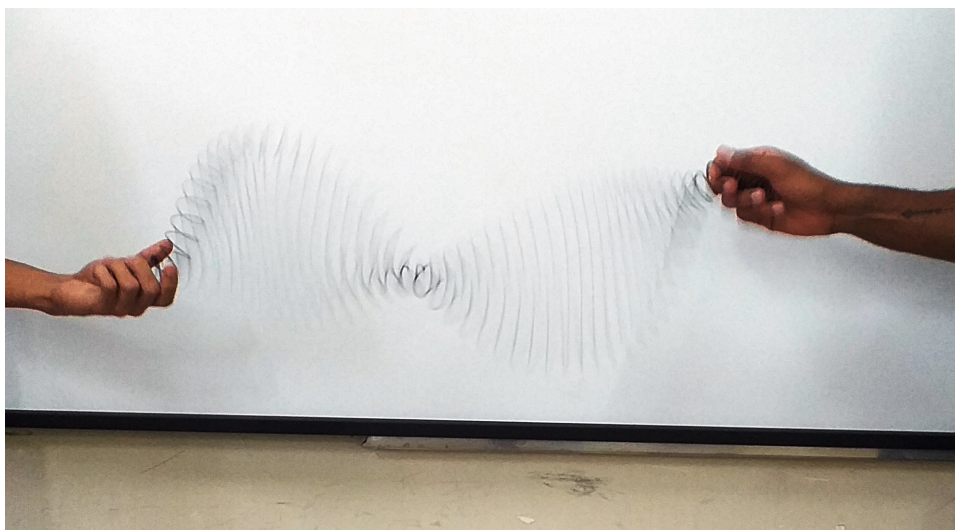
Figura 4.12: Múltiplas reflexões de ondas



Fonte: Arquivo pessoal

Assim, temos múltiplas ondas superpostas interferindo entre si, gerando ondas estacionárias, como queríamos desde o início. Podemos ver mais alguns exemplos de ondas estacionárias gerada pela mesma espiral na Figura 4.13.

Figura 4.13: Ondas estacionárias geradas na espiral de encadernação



Fonte: arquivo pessoal

Observemos que existem alguns pontos na espiral que não se movem, enquanto outros aparentam estar em movimento contínuo. Esses são, respectivamente, os chamados **nós** e **antinós** característicos das ondas estacionárias.

Capítulo 5

Uma aplicação na Introdução às séries de Fourier

Neste capítulo, apresentaremos uma das mais belas das inúmeras aplicações da Trigonometria em Matemática, trataremos das **séries de Fourier**. Nosso objetivo é apresentar alguns conceitos básicos, definições, propriedades, e algumas aplicações dessas séries em Matemática. Vale ressaltar que este capítulo trata-se de uma introdução aos estudos das séries de Fourier, e, por isso, não nos aprofundaremos demasiadamente no assunto. Por ser bastante amplo, o tratamento das séries de Fourier tem potencial de ser o tema principal de um outro trabalho, tendo em vista que suas aplicações em Matemática e em outras ciências e áreas do conhecimento humano são inúmeras.

Na seção inicial, falaremos um pouco da história de **Jean Baptiste Joseph Fourier**, como uma forma de introdução ao estudo sobre as séries que levam seu nome. Na seção seguinte, trataremos propriamente das séries de Fourier, e apresentaremos sua forma matemática. Nessa mesma seção, trataremos de algumas propriedades inerentes às funções trigonométricas que são importantes para a compreensão das séries de Fourier. A seguir, na seção final do capítulo, apresentaremos as fórmulas de Euler-Fourier, que são usadas para encontrar os coeficientes das séries de Fourier. O suporte teórico para a elaboração deste capítulo são as referências [1, 7, 18].

5.1 Breve história de Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier foi um notável Matemático e Físico francês, que nasceu no ano de 1768 em Auxerre, Comuna francesa localizada no nordeste do país, e faleceu em Paris, no ano de 1830. Era filho de um alfaiate, e ficou órfão muito jovem (entre os seus oito ou nove anos de idade, segundo [7]), tanto de pai quanto de mãe, sendo então internado e educado em uma Escola Militar dirigida por monges beneditinos, onde tomou gosto pelos estudos em Matemática, conseguindo vultoso destaque, e sendo reconhecido por seu grande talento para as ciências físicas e matemáticas, de modo que, ainda jovem, foi convidado a tornar-se professor de Matemática na própria Escola Militar onde estudara. Nessa mesma época, Fourier iniciou uma preparação para exercer o sacerdócio e ingressar na ordem dos beneditinos, porém nunca chegou a ser ordenado, renunciando aos seus votos para aderir à causa da Revolução Francesa, ajudando a promovê-la, e recebendo como recompensa uma cadeira na recém-fundada Escola Politécnica Francesa.

Figura 5.1: Jean Baptiste Joseph Fourier



Fonte: Wikipedia (2019)

No ano de 1798, Fourier renunciou ao seu cargo na Escola Politécnica para acompanhar Napoleão Bonaparte, juntamente com Gaspard Monge, em uma expedição ao Egito, sendo indicado governador do Baixo Egito no mesmo ano, e retornando à França no ano de 1801, após as vitórias britânicas e a capitulação francesa. Ainda no ano de 1801, tornou-se prefeito de Grenoble, capital do departamento de Isère, na região centro-leste francesa. Segundo [7], p. 526, foi em Grenoble que Fourier começou suas experiências com o calor:

Em 1807 Fourier apresentou um artigo à Academia de Ciências da França que deu início a um novo e extremamente frutífero capítulo da história da matemática. O artigo trata da propagação do calor em barras, chapas e sólidos metálicos. No desenvolvimento do artigo, Fourier fez a surpreendente afirmação de que toda função definida num intervalo finito por um gráfico descrito arbitrariamente pode ser decomposta numa soma de funções seno e co-seno ([7], p. 526. Grifos do autor).

Mais explicitamente, Fourier afirmou que dada uma função qualquer, definida no intervalo $(-\pi, \pi)$, essa função pode ser representada nesse intervalo por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\pi x) + b_n \operatorname{sen}(\pi x)). \quad (5.1)$$

Na Expressão (5.1), os coeficientes a_n e b_n são números reais a serem determinados. Essa série, conhecida como *Série Trigonométrica*, hoje é chamada de *Série de Fourier*.

5.2 As séries de Fourier

As séries de Fourier são somas infinitas de senos e/ou cossenos, expressas na forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \quad (5.2)$$

Pode-se dizer que as séries de Fourier são análogas às séries de Taylor, no sentido de que ambas as séries fornecem maneiras de se expressar funções não elementares em termos de funções elementares conhecidas.

Fourier afirma que toda função definida em um intervalo $(-L, L)$ pode ser expressa como em (5.2). De acordo com [7], essa afirmação é exagerada, embora a classe de funções para as quais ela é válida seja muito extensa.

Existem inúmeras aplicações das séries de Fourier, desde a resolução de Equações Diferenciais Parciais (EDP), até a investigação de fenômenos periódicos em engenharia e ciência. É possível, por exemplo, obter a solução de diversos problemas importantes envolvendo equações diferenciais parciais, desde que se possa expressar uma dada função como uma série infinita de senos e/ou cossenos (ou seja, algo como o que está expresso na Equação (5.2)). As séries de Fourier também podem ser úteis de outras maneiras, como por exemplo, no método de separação de variáveis para a resolução de EDP, e “na análise de sistemas mecânicos ou elétricos sob a ação de forças externas periódicas” ([1], p.310).

Analisando a série da Expressão (5.2), notemos os seguintes fatos:

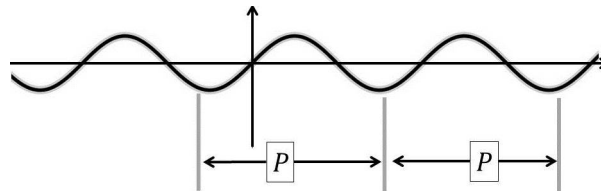
- 1.) Nos pontos em que a série é convergente, uma função f é definida, de modo que os valores dessa função em cada um dos seus pontos x , são a soma da série para aqueles valores de x . Dizemos então que a série da Expressão (5.2) é a *série de Fourier da função f* ;
- 2.) Nossos objetivos imediatos são determinar quais as funções que podem ser representadas como uma série de Fourier, e encontrar maneiras de calcular os coeficientes a_n e b_n na série correspondente a uma função dada.

Antes de estudar mais a fundo sobre as séries de Fourier, é necessário compreender algumas propriedades das funções trigonométricas. Por esse motivo, nas duas próximas subseções, desenvolveremos duas propriedades das funções $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, em que $n \in \mathbb{R}$. A primeira delas consiste no caráter periódico das funções seno e cosseno, e uma segunda propriedade refere-se à ortogonalidade dessas funções.

5.2.1 Periodicidade das funções seno e cosseno

Definição 5.1 (Função Periódica). Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *periódica* se existe um certo $P \in \mathbb{R}$, tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x + P) = f(x)$, ou seja, o domínio de f contém $x + P$ sempre que contém x . Podemos ver o exemplo de uma função periódica na Figura 5.2.

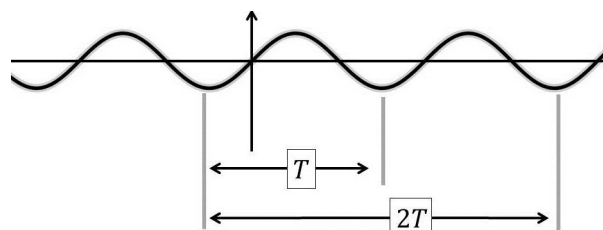
Figura 5.2: Função periódica



Fonte: Arquivo pessoal

O número P é chamado de *período* de f , e dizemos que a função é P -*periódica*. Pode-se obter o gráfico de uma função periódica (como o representado pela Figura 5.2), pela repetição de qualquer intervalo em x , cujo comprimento seja P , ou seja, P “é o comprimento do intervalo em x necessário para a imagem da função se repetir” ([18], p.1). Da Definição 5.1, segue que, se P é um período de f , então qualquer múltiplo inteiro de P também é um período de f , ou seja, $2P, 3P, \dots, nP, n \in \mathbb{Z}$, também são períodos de f . O menor valor de P para o qual vale a Equação (5.2), é chamado de *período fundamental*, o qual denotaremos por T . Qualquer outro período de f será múltiplo inteiro do período fundamental, como podemos ver na Figura 5.3.

Figura 5.3: Período fundamental T e seus múltiplos



Fonte: Arquivo pessoal

De acordo com [1], funções constantes têm período arbitrário, porém não têm período fundamental.

Se duas funções f e g são periódicas, tendo período fundamental T , então:

- O produto $f \cdot g$ é periódico com período T ;
- Qualquer combinação linear $c_1 f + c_2 g$ também é periódica com período T .

As funções periódicas $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $\operatorname{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, têm período fundamental $T = \left(\frac{2L}{n}\right)$. Daí, segue que $nT = 2L$. Como todo múltiplo inteiro de um período também é um período, essas funções têm o período comum $2L$.

Exemplo 5.2. As funções $\operatorname{sen}(x)$ e $\operatorname{cos}(x)$ são periódicas, com período fundamental igual a 2π . Da mesma forma, quaisquer variações de $\operatorname{sen}(x)$ e $\operatorname{cos}(x)$ (ou seja, funções do tipo $A + B \operatorname{sen}(nx + m)$ e $C + D \operatorname{cos}(kx + p)$), também são periódicas, cada uma com seu próprio período fundamental.

5.2.2 Ortogonalidade das funções seno e cosseno

Um conjunto de funções é chamado *ortogonal*, se cada par de funções diferentes que pertencem a esse mesmo conjunto também for ortogonal. As funções $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $\operatorname{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, constituem um conjunto ortogonal de funções no intervalo $-L \leq x \leq L$, pois satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\bullet \int_{-L}^L \operatorname{cos}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\bullet \int_{-L}^L \operatorname{cos}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad \forall m, n; \quad (5.4)$$

$$\bullet \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases} \quad (5.5)$$

As provas das relações (5.3), (5.4) e (5.5) podem ser encontradas em ([18], p. 7), ([16], p.7) e ([1], p. 311), respectivamente.

5.3 As fórmulas de Euler-Fourier para os coeficientes de uma série de Fourier

Suponhamos que a série da Expressão (5.2) seja convergente. Como vimos anteriormente, nos pontos em que essa série converge, ela define uma função f , cujos valores em cada ponto x é a soma da série para aquele valor de x . Vamos supor que a soma descrita seja convergente, e então chamá-la de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right) \quad (5.6)$$

Observemos que cada termo da série expressa pela Função (5.6) é periódico com período $2L$. Isso quer dizer que a série converge para todo x sempre que for convergente para qualquer valor em $-L \leq x \leq L$, de modo que sua soma também é uma função periódica com período $2L$. Logo, $f(x)$ é determinada para todo x por seus valores no intervalo $-L \leq x \leq L$.

Podemos encontrar uma forma de relacionar os coeficientes a_n e b_n com $f(x)$, e calcular os coeficientes de Fourier da série expressa na Equação (5.6) através de duas fórmulas conhecidas como *fórmulas de Euler-Fourier para os coeficientes de uma série de Fourier*. São elas:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.7)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.8)$$

Essas fórmulas são explícitas para a_n e b_n em função de f , e os coeficientes são determinados independentemente um do outro. Notemos que, se a série expressa na Função (5.6) converge para $f(x)$, podendo também ser integrada termo a termo (ou seja, todos os termos são integráveis), então, obrigatoriamente os coeficientes a_n e b_n são dados pelas Equações (5.7) e (5.8). Notemos também que, escrevendo o termo constante da Equação (5.6) como $\frac{a_0}{2}$, é possível calcular todos os termos a_n da Equação (5.7), com $n = 0, 1, 2, \dots$. Caso contrário, teríamos uma fórmula a mais, somente para a_0 .

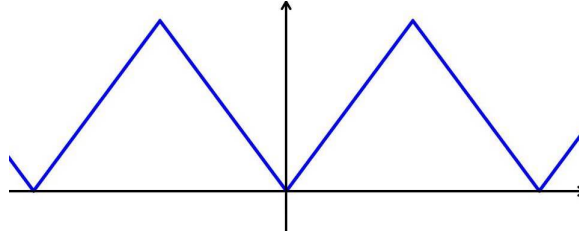
Exemplo 5.3. Suponhamos que existe uma série de Fourier convergindo para a função f , definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -4 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad (5.9)$$

Vamos determinar os coeficientes dessa série de Fourier.

Essa função representa a onda triangular da Figura 5.4, e é periódica, com período fundamental 8.

Figura 5.4: Onda triangular



Fonte: Arquivo pessoal

Nesse caso, notemos que $L = 4$ e a série de Fourier tem a forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) \right), \quad (5.10)$$

em que os coeficientes são calculados pelas fórmulas de Euler-Fourier (Equações (5.7) e (5.8)), com $L = 4$. Obtemos a_n , substituindo $f(x)$ na Equação (5.7), inicialmente com $n = 0$. Assim,

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-4}^0 -x \, dx + \frac{1}{4} \int_0^4 x \, dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{-x^2}{2} \right)_{-4}^0 + \frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{2} \right)_0^4 \Rightarrow a_0 = 4. \quad (5.11)$$

Para $n > 0$, temos:

$$a_n = \frac{1}{4} \int_{-4}^0 -x \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) \, dx + \frac{1}{4} \int_0^4 x \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) \, dx$$

Podemos utilizar o método de integração por partes para calcular essas integrais, obtendo como resultado:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4} \left[-\left(\frac{4}{n\pi}\right)^2 + \left(\frac{4}{n\pi}\right)^2 \cos(n\pi) + \left(\frac{4}{n\pi}\right)^2 \cos(n\pi) - \left(\frac{4}{n\pi}\right)^2 \right] \\ &\Rightarrow a_n = \frac{8}{(n\pi)^2} [\cos(n\pi) - 1], \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Logo,

$$a_n = \begin{cases} -\frac{16}{(n\pi)^2}, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases} \quad (5.12)$$

Analogamente, podemos fazer o mesmo com a Equação (5.8), a fim de obter o coeficiente b_n . Realizando os mesmos procedimentos anteriores, obtemos:

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.13)$$

Substituindo os coeficientes encontrados nas Equações (5.11), (5.12) e (5.13) na Série (5.10), colocando $\frac{-16}{(n\pi)^2}$ em evidência e mantendo $\frac{1}{n^2}$ na soma, obtemos a série de Fourier de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) \Rightarrow f(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) \\ &\Rightarrow f(x) = 2 - \frac{16}{\pi^2} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \frac{1}{3^2} \cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right) + \frac{1}{5^2} \cos\left(\frac{5\pi x}{4}\right) + \dots \right) \\ &\Rightarrow f(x) = 2 - \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) \Rightarrow f(x) = 2 - \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{4}\right). \end{aligned}$$

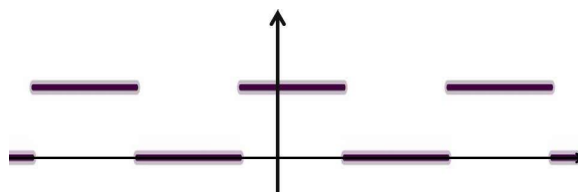
Exemplo 5.4. Reprodução do exemplo encontrado em [1], p.312.

Seja

$$g(x) = \begin{cases} 0, & -3 \leq x \leq -1 \\ 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad (5.14)$$

e suponhamos que $g(x+6) = g(x)$, ou seja, g é periódica. Vamos encontrar os coeficientes de Fourier de g .

Figura 5.5: Onda quadrada



Fonte: Arquivo pessoal

A Equação (5.14) representa a onda quadrada mostrada na Figura 5.5. Como neste caso g tem período 6, segue que $L = 3$, e a série de Fourier de g pode ser escrita na forma

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{3} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{3} \right) \right). \quad (5.15)$$

Os coeficientes a_n e b_n da série expressa na Equação (5.15) são dados pelas Equações (5.7) e (5.8), fazendo $L = 3$. Assim, para o termo a_0 , temos

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 g(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 dx = \frac{2}{3}. \quad (5.16)$$

De maneira análoga para a_n , temos

$$a_n = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \cos \left(\frac{n\pi x}{3} \right) dx = \frac{1}{n\pi} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{n\pi} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{3} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.17)$$

Finalmente, para b_n , obtemos

$$b_n = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{3} \right) dx = -\frac{1}{n\pi} \cdot \cos \left(\frac{n\pi x}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.18)$$

Portanto, a série de Fourier de g é

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(\frac{n\pi x}{3} \right) = \\ & 13 + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \left[\cos \left(\frac{\pi x}{3} \right) + \frac{\cos \left(\frac{2\pi x}{3} \right)}{2} - \frac{\cos \left(\frac{4\pi x}{3} \right)}{4} - \frac{\cos \left(\frac{5\pi x}{3} \right)}{5} + \dots \right]. \quad (5.19) \end{aligned}$$

5.4 O Teorema de Fourier

Vimos na Seção 5.3 que, se uma série de Fourier como a que está expressa na Equação (5.2) converge, ela define uma função f , periódica com período $2L$. Neste caso, os coeficientes a_n e b_n são determinados pelas fórmulas de Euler-Fourier, expressas pelas Equações (5.7) e (5.8). No entanto, não mencionamos em que situações essa série converge. Existem exemplos que mostram que uma série de Fourier correspondente a uma determinada função f pode não convergir para essa função, ou pode até mesmo divergir. Funções com essa característica são simples de se construir.

Nesta seção, apresentamos um resultado que nos mostra as condições para a convergência de uma série de Fourier. Esse resultado é conhecido como *O Teorema de convergência de Fourier* (ou, simplesmente, *O Teorema de Fourier*).

Para que uma série de Fourier de fato convirja para a função da qual calculamos os

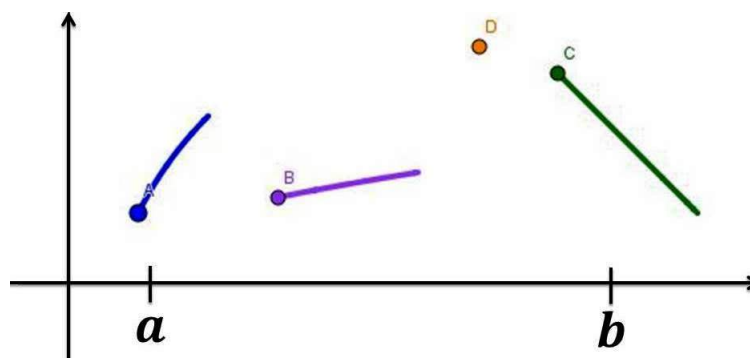
seus coeficientes, devemos antes estabelecer algumas condições adicionais sobre a função. De acordo com [1], “de um ponto de vista prático, tais condições devem ser fracas o suficiente para cobrir todas as situações de interesse, e simples o suficiente para serem verificadas para funções particulares” (p.315). Para cumprir esse propósito, diversos conjuntos de condições foram desenvolvidas ao longo dos anos.

A próxima definição tem fundamental importância para o Teorema de Fourier.

Definição 5.5 (Função seccionalmente contínua). Uma função f é dita *seccionalmente contínua* sobre um intervalo $[a, b]$ se esse intervalo puder ser subdividido em um número finito de pontos $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, de modo que f é contínua em cada subintervalo aberto $x_{i-1} < x < x_i$, $i = 1, \dots, n$. Além disso, o limite da função f nas extremidades de cada subintervalo, quando aproximadas do interior do intervalo, é finito.

Em outras palavras, uma função é seccionalmente contínua no intervalo $[a, b]$ se ela for contínua em todo intervalo, com exceção de um número finito de pontos $x_0 < \dots < x_n$ deste intervalo, ou seja, a função não precisa estar definida nos pontos da partição x_i . Observemos que, se uma função f é contínua, então obviamente ela é seccionalmente contínua. Notemos ainda que uma função contínua possui derivada contínua, e, sendo assim, f' também é seccionalmente contínua (certamente, f' não existe onde f é descontínua).

Figura 5.6: Função seccionalmente contínua



Fonte: Arquivo pessoal

No Teorema enunciado a seguir, utilizamos a notação $f(a+)$ para denotar o limite lateral pela direita (o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita) e $f(a-)$ para denotar o limite lateral pela esquerda (o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda).

Teorema 5.6 (Teorema de convergência de Fourier). Sejam f e f' funções seccionalmente contínuas no intervalo $-L \leq x \leq L$. Suponhamos que f esteja definida fora do intervalo $[-L, L]$, de modo que seja periódica com período $2L$. Então, f pode ser representada como uma série de Fourier como a que está expressa na Equação (5.6), cujos coeficientes são dados pelas Equações (5.7) e (5.8). A série mencionada converge para a própria $f(x)$ em todos os

pontos onde a função f é contínua, e converge para $\left[\frac{f(x+) + f(x-)}{2} \right]$ em todos os pontos onde f é descontínua.

Valem as seguintes observações:

- $\left[\frac{f(x+) + f(x-)}{2} \right]$ é o valor médio dos limites laterais no ponto x . Nos pontos em que a função f é contínua, $f(x+) = f(x-) = f(x)$, ou seja, a série de Fourier converge para $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ em todos os pontos;
- Considera-se as condições dadas nesse teorema apenas como suficientes, porém não são necessárias;
- Existem funções não incluídas no teorema pelo fato de não serem seccionalmente contínuas, e terem descontinuidades infinitas no intervalo $[-L, L]$. Por exemplo, as funções $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x^2}$ têm limites laterais infinitos quando $x \rightarrow 0$, assim como a função $\ln|x - L|$, quando $x \rightarrow L$;
- De acordo com [1], existe a possibilidade de haver convergência de uma série de Fourier para uma soma que não é diferenciável e nem contínua, apesar de que todos os termos da série (5.6) sejam infinitamente contínuos e diferenciáveis.

Exemplo 5.7. Reprodução do exemplo encontrado em [1], p.316.

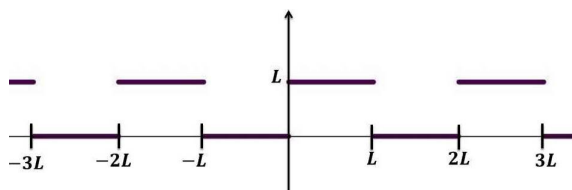
Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < 0 \\ L, & 0 < x < L \end{cases}, \quad (5.20)$$

e seja f definida também fora desse intervalo, de modo que $f(x + 2L) = f(x)$ para todo x . Vamos encontrar a série de Fourier dessa função e determinar onde ela converge.

Pode-se pensar no gráfico dessa função como a onda quadrada representada na Figura 5.7.

Figura 5.7: Gráfico da função do Exemplo 5.7



Fonte: Arquivo pessoal

O intervalo $[-L, L]$ pode ser particionado em dois subintervalos abertos, $(-L, 0)$ e $(0, L)$. Em $(0, L)$, $f(x) = L$ e $f'(x) = 0$, e as funções f e f' são contínuas e seus limites

existem quando $x \rightarrow 0^+$ e $x \rightarrow L^-$. Uma situação semelhante acontece em $(-L, 0)$. Logo, tanto f quanto f' são seccionalmente contínuas no intervalo $[-L, L)$, de modo que f satisfaz as condições do teorema de convergência. Se pudermos calcular os coeficientes a_n e b_n pelas Equações (5.7) e (5.8), então a convergência da série está garantida em todos os pontos onde f é contínua. Notemos que os valores desses coeficientes são os mesmos, independentemente da definição da função nos pontos de descontinuidade, e isso acontece porque o valor de uma integral não é afetado quando se muda o integrando em um número finito de pontos.

Da Equação (5.7), temos

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^L dx = L. \quad (5.21)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad n \neq 0. \quad (5.22)$$

Analogamente, da Equação (5.8),

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &\implies \frac{L}{n\pi} \cdot (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{2L}{n\pi}, & n \text{ ímpar} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Portanto, a série de Fourier que representa a Função (5.20) é

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \frac{1}{5} \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{L}\right) + \dots \right) \\ &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{n} = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right]}{2n-1}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Nos pontos $x = 0$ e $x = \pm nL$, onde a função f não é contínua, todos os termos na série após o primeiro desaparecem, e a soma é $\frac{L}{2}$, que é o valor médio dos limites laterais. Podemos,

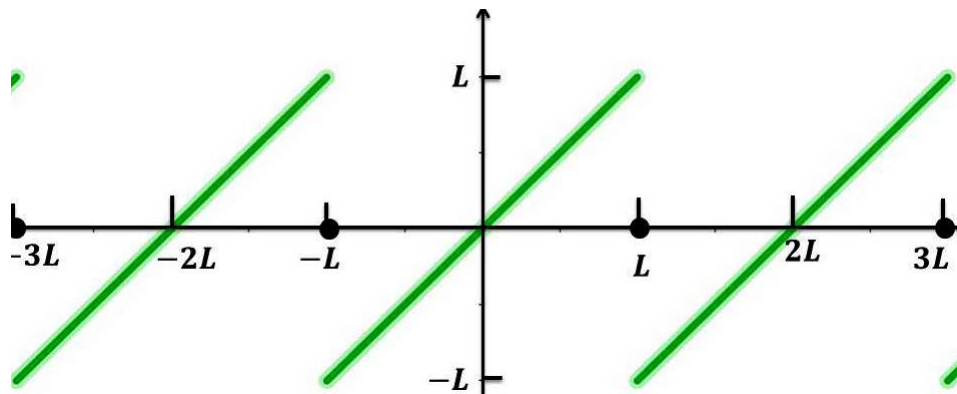
por exemplo, definir f nesses pontos como tendo o valor $\frac{L}{2}$. Se escolhermos outros valores, a série ainda nos dá o valor $\frac{L}{2}$ nesses pontos, já que não há modificação em nenhum cálculo efetuado anteriormente, e a série simplesmente não converge para esses pontos a menos que f tome esses valores.

Exemplo 5.8. Reprodução do exemplo encontrado em [1], p. 320.

Seja $h(x) = x$, $-L < x < L$, e seja $h(-L) = h(L) = 0$. Seja h definida no restante da reta de modo a ser periódica com período $2L$. Vamos encontrar a série de Fourier dessa função.

A função definida no enunciado é conhecida como *dente de serra* (ver Figura 5.8).

Figura 5.8: Função dente de serra



Fonte: Arquivo pessoal

Realizando todos os procedimentos já conhecidos, encontramos os coeficientes de Fourier da função h , que são dados por

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L x \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{2}{L} \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 \left[\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) - \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right]_0^L \\ &= \frac{2L}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier da função h (função dente de serra) é

$$f(x) = \frac{2L}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right). \quad (5.25)$$

A função periódica h é descontínua nos pontos $\pm L, \pm 3L, \dots$. Nesses pontos, a série da Equação (5.25) converge para o valor médio dos limites à esquerda e à direita, a saber, zero.

Capítulo 6

Considerações Finais

A Trigonometria oferece um abundante material teórico e prático para os alunos e os professores de todos os níveis de ensino, bem como para pesquisadores das mais diversas ciências e áreas do conhecimento humano. Devido às inúmeras aplicações dessa parte da Matemática em situações reais, alguns autores chegam a considerá-la como uma ciência à parte que faz uso dos atributos da Matemática para se desenvolver. Observa-se, no entanto, que esse objeto de estudo da Matemática dificilmente é aproveitado de forma prolífica, tanto por alunos quanto por professores, que por muitas vezes acabam tratando-o apenas como uma parte do currículo a ser cumprida e posteriormente esquecida, talvez por não entenderem a sua real utilidade no mundo real.

No desenvolvimento desta monografia, mostramos a real importância da Trigonometria e de seus estudos teóricos, suas aplicações teóricas e suas aplicações práticas, tanto para a Matemática quanto para outras ciências e áreas do conhecimento humano. A proposta inicial do trabalho era apresentar algumas aplicações da Trigonometria em ciências e áreas como Engenharia Civil, Astronomia, Física, Música, e também na própria Matemática. No decorrer da pesquisa, observamos que as discussões seriam demasiadamente longas e cansativas, e então decidimos limitar os estudos e apresentar aplicações da Trigonometria em duas dessas áreas citadas.

Para cumprir com o objetivo do trabalho, apresentamos diversas definições, teoremas e exemplos teóricos e práticos de Trigonometria, além de realizar um experimento prático simples que mostra uma aplicação da Trigonometria na Física. O estudo das séries de Fourier nos proporcionou uma nova visão a respeito da Trigonometria na própria Matemática, além de possibilitar a abertura de novos horizontes para futuros estudos a respeito desse tema. Todas as aplicações estudadas nos mostraram que o conhecimento teórico de Trigonometria é essencial para o entendimento da prática.

O contexto histórico empregado na abertura de duas seções do trabalho serviu tanto para evidenciar o quão fascinante é a história da Matemática, e, em particular, a história da Trigonometria.

metria, como também serviu de introdução para os assuntos tratados nos respectivos capítulos. Nesse sentido, observamos que a história da Matemática enriquece as discussões, tendo em vista que nos leva a conhecer a origem e a forma primitiva dos conhecimentos matemáticos outrora produzidos pela humanidade, e que evoluíram significativamente através dos anos até nos alcançar nos dias de hoje.

Referências

- [1] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2006. Tradução de Valéria de Magalhães Iorio.
- [2] BOYER, Carl B. **História da matemática**. 2 ed. São Paulo: Blucher, 1996. Tradução de Elza F. Gomide.
- [3] CHAVES, Alaor. **Física básica: Gravitação, fluidos, ondas, termodinâmica**. Rio de Janeiro: LTC, 2007.
- [4] CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história, Vol.1**. 3. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.
- [5] DOS SANTOS, Ana Maria Quaresma; SANTOS, Fábio Henrique da Costa; DE OLIVEIRA, Reinaldo Melo. **Teorema de Pitágoras: Demonstrações**. 2019. 60f. Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) - Universidade Federal do Amapá. Macapá, 2015.
- [6] Editorial Conceitos. **Escrita Hierática**, Sao Paulo, Brasil. Disponível em: <<https://conceitos.com/escrita-hieratica/>>. Acesso em: 21 ago. 2019.
- [7] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. Tradução de Hygino H. Domingues.
- [8] FÍSICA, Mago da. **Mago da Física - Ondas Estacionárias**. 2007. (5min43s). Disponível em: <<http://bit.ly/2K2gDsB>>. Acesso em: 22 maio 2019.
- [9] GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Daiane Tolfo. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. E-book. ISBN 978-85-386-0071-8. Disponível em: <www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf>. Acesso em: 22 maio 2019.
- [10] Gonçalves, Eliete Maria; Chueiri, Vanilda Miziara Mello. **Trigonometria**. São Paulo: Cultura Acadêmica: Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Graduação, 2008.

- [11] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física, volume 2:** gravitação, ondas e termodinâmica. Rio de Janeiro: LTC, 2009. Tradução e revisão técnica: Ronaldo Sérgio de Biasi.
- [12] Iezzi, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 3:** trigonometria. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.
- [13] JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2019. Disponível em: <<http://bit.ly/2rJrt0Z>>. Acesso em: 25 abr. 2019.
- [14] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, et al. **Temas e Problemas.** Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro-RJ, 2001.
- [15] MADRID, Antonio. **Biografia de Jean Fourier.** Matemática na veia, 2008. Disponível em: <<http://matematica-na-veia.blogspot.com/2008/02/biografia-de-jean-fourier.html>>. Acesso em: 17 set. 2019.
- [16] MARTINS, Fabio Cardoso D'Araujo et al. **Séries de Fourier.** 2019. UFF - Universidade Federal Fluminense. Rio de Janeiro, 2010.
- [17] OLIVEIRA, Joerk da Silva. **Aplicações da Trigonometria nas ciências.** 2019. 126f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Roraima. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Boa Vista, 2015.
- [18] SANTOS, Fabiano J. **Introdução às Séries de Fourier.** Matemática - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2004.
- [19] PLIMPTON 322. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <<http://bit.ly/2rAhs5U>>. Acesso em: 29 ago. 2019.
- [20] RHIND MATHEMATICAL PAPYRUS. In: Wikipedia: a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2019. Disponível em: <<http://bit.ly/2E4OmOM>>. Acesso em: 29 ago. 2019.