



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS  
CAMPUS DE ARAGUAÍNA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**AICO ALVES DE OLIVEIRA SILVA**

**INTEGRAIS DE FUNÇÕES REAIS ATRAVÉS DA INTEGRAÇÃO COMPLEXA**

ARAGUAÍNA  
2019

**AICO ALVES DE OLIVEIRA SILVA**

**INTEGRAIS DE FUNÇÕES REAIS ATRAVÉS DA INTEGRAÇÃO COMPLEXA**

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco.

ARAGUAÍNA

2019

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins**

---

- S586i Silva, Aico Alves de Oliveira Silva.  
Integrais de Funções Reais Através da Integração Complexa. / Aico Alves de Oliveira Silva Silva. – Araguaína, TO, 2019.  
70 f.
- Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2019.  
Orientador: Alvaro Julia Yucra Hancco
1. Integração Complexa. 2. Teorema dos Resíduos. 3. Probabilidade. 4. Teorema de Cauchy. I. Título

**CDD 510**

---

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

**Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).**

**AICO ALVES DE OLIVEIRA SILVA**

**INTEGRAIS DE FUNÇÕES REAIS ATRAVÉS DA INTEGRAÇÃO COMPLEXA**

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

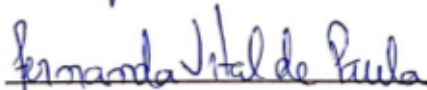
Orientador: Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco.

Aprovada em: 06/12/2019.

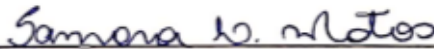
**BANCA EXAMINADORA**



Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco (orientador)



Profa. Dra. Fernanda Vital de Paula



Profa. Dra. Samara Leandro Matos da Silva

A meus pais e a toda a minha família que sempre estiveram comigo.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado forças em todos os momentos dessa longa e gratificante caminhada.

Em segundo lugar e não menos importante, agradeço grandemente a meus pais por sempre me apoiarem e incentivarem todas as minhas decisões, me dando apoio e suporte em frente a momentos bons e ruins.

A todos os professores do colegiado do curso de Matemática, que além excelentes profissionais, se tornaram também grandes amigos, sempre buscando ajudar de todas as formas e especialmente a meu orientador, o professor Alvaro, pela disponibilidade de me orientar durante todo esse tempo, até mesmo aos fins de semana quando solicitado.

A minha neguinha também, que esteve comigo esse tempo, me apoiando e dando forças, às vezes até servindo como examinadora sobre o que eu escrevia, muito obrigado por tudo.

Não poderia esquecer de todos os amigos que conquistei durante esse tempo, vocês são incríveis e sentirei muita falta do convívio de todos os nossos dias, nossas brincadeiras e do carinho. Obrigado a todos os meus colegas de turma, por todos os momentos, todas as brincadeiras, noites em claro em nossos famosos corujões, por todos os detalhes vividos, desde passar fome juntos até a glória da formatura de cada um, que estamos vivendo agora. Sem vocês eu não teria chegado até aqui.

*Os números são as regras dos seres e a Matemática é o regulamento do mundo.*

F. Gomes Teixeira

## RESUMO

As integrais são uma importante ferramenta matemática com muitas aplicações e de relevante interesse para quem as conhece e, principalmente, a quem faz uso delas. Assim, este trabalho apresenta métodos alternativos para a resolução de problemas com integrais de funções reais. Especificamente, para a resolução dessas integrais através da integração complexa, apresentaremos métodos que buscam, se não facilitar, pelo menos mostrar que existem outras formas de resolver esses tipos de problemas. Para isso, foram utilizadas várias referências de diferentes autores, chegando às conclusões esperadas. Também, serão apresentados vários exemplos de funções reais sendo integradas por métodos complexos, e se apoiando principalmente no teorema dos resíduos. Finalmente, aplicamos esses métodos estudados como ferramenta para a resolução de problemas na área da Probabilidade.

**Palavras-chave:** Integração complexa. Teorema dos resíduos. Probabilidade.



## ABSTRACT

Integrals are an important mathematical tool with many applications, and of relevant interest to who know them, and especially to who use them. Thus, this paper presents alternative methods for problem solving with real function integrals. Specifically, for solving these integrals through the complex integration, we will present methods that seek, if not facilitate, at least show that there are other ways to solve these types of problems. For this, several references from different authors were used, reaching the expected conclusions. Also, we will present several examples of real functions being integrated by complex methods, and relying mainly on the residual theorem. Finally, we apply these studied methods as a problem solving tool in the Probability area.

**Keywords:** Complex integration. Residue theorem. Probability.

# Lista de Figuras

2.1	Plano Complexo.	16
2.2	Representação Polar	18
2.3	Representação de $1 + i$ no plano complexo.	18
2.4	Partes congruentes.	20
4.1	Arcos com sentidos contrários	38
4.2	Caminhos por partes	38
4.3	Caminho 1	39
4.4	Curva fechada	39
4.5	Curva de Jordan	39
4.6	Regiões conexas	39
4.7	Integral de linha	41
4.8	Segmento	44
4.9	Caminho	45
4.10	Disco	50
4.11	Região multiplamente conexa	55
4.12	Círculo unitário	56
5.1	Círculo unitário	59
5.2	Região determinada pela curva $C$	60
5.3	Semicírculo $C_R$	63
5.4	Semicírculo $C_R$	65
5.5	Semicírculo $C_R$	67

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Noções Preliminares</b>	<b>14</b>
2.1	Um pouco de História . . . . .	14
2.2	Números Complexos . . . . .	15
2.3	Plano Complexo . . . . .	16
2.4	Representação Polar . . . . .	17
2.5	Extração de Raízes . . . . .	19
2.6	Algumas Funções Complexas . . . . .	20
2.6.1	Funções de uma variável complexa . . . . .	20
2.6.2	Funções polinomiais . . . . .	21
2.6.3	Funções Racionais . . . . .	22
2.6.4	Função exponencial . . . . .	23
2.6.5	Propriedades . . . . .	23
2.7	Limite e Continuidade . . . . .	25
2.7.1	Limite . . . . .	25
2.7.2	Propriedades do limite . . . . .	26
2.7.3	Continuidade . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Funções Analíticas</b>	<b>29</b>
3.1	Derivadas de Funções Complexas . . . . .	29
3.2	Equações de Cauchy-Riemann . . . . .	32
3.2.1	Forma polar das equações de Cauchy-Riemann . . . . .	33
3.2.2	Funções Analíticas . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Integração Complexa</b>	<b>37</b>
4.1	Arcos e Contornos . . . . .	37
4.2	Integral de Contorno . . . . .	39
4.3	Integrais Definidas . . . . .	40
4.3.1	Relação entre integrais de linha complexa e real . . . . .	42

4.4	O Teorema de Cauchy . . . . .	45
4.4.1	Fórmula integral de Cauchy . . . . .	46
4.5	Séries de Taylor e Séries de Laurent . . . . .	48
4.5.1	Série de Laurent . . . . .	49
4.5.2	Singularidades e Resíduos . . . . .	51
4.5.3	Polo . . . . .	52
4.5.4	Teorema dos Resíduos . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Integrais de Funções Reais via Integração Complexa</b>	<b>57</b>
5.1	Integrais do tipo $\int_0^{2\pi} F(\text{sen}(\theta), \text{cos}(\theta))d\theta$ . . . . .	57
5.2	Integrais impróprias de funções trigonométricas . . . . .	59
5.3	Integrais do tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ . . . . .	62
5.4	Integrais definidas do tipo $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \left\{ \text{cos } mx, \text{sen } mx \right\} dx$ . . . . .	64
5.4.1	Aplicação na probabilidade . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>69</b>
	<b>Referências</b>	<b>70</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A Matemática é uma ciência que está presente em cada detalhe de nossa sociedade e, para uma melhor compreensão do nosso meio, é de fundamental importância conhecê-la. Uma das partes ou ferramentas de muita importância dessa ciência é o cálculo diferencial e integral, por ser uma área de aplicações diretas por parte das engenharias, principalmente quando o assunto é o desenvolvimento de grandes projetos ou mais especificamente às grandes construções. Tendo em vista tamanha importância, nesse trabalho procuramos apresentar e discutir métodos ou formas diferentes de integração, trabalhando não só com os tradicionais, mas buscando apoio na teoria dos números complexos, já que algumas funções reais são quase impossíveis de serem resolvidas utilizando apenas os caminhos mais comuns.

Trabalhando com pesquisas em livros, monografias e dissertações, apresentaremos uma parte relevante da integração de funções de uma variável complexa, onde o leitor poderá perceber as relações entre elas e as integrais reais, assim como, mostrar uma proposta alternativa para integração dessas funções reais.

Vamos estudar aqui, funções de uma variável complexa e suas principais características, bem como Teoremas com resultados fortes como o Teorema de Cauchy, teorema dos Resíduos, assim como séries convergente, métodos de derivação e integração de funções de uma variável complexa, enfim, apresentaremos uma parte importante do estudo dos números complexos. Para isso dividimos o trabalho em seis capítulos.

No capítulo 2, traremos a história do surgimento do conjunto dos números complexos, e em seguida apresentamos alguns conceitos e resultados importantes, assim como sua forma de representação e algumas propriedades.

No capítulo 3, trabalharemos com algumas funções especiais do conjunto dos números complexos, e apresentaremos alguns teoremas importantes, assim como as condições que uma função deve cumprir para ser derivável e poder calcular sua derivada.

No capítulo 4, apresentaremos, o que se pode considerar como foco principal do trabalho, que é a integração de funções de uma variável complexa, assim como as séries de Taylor e

Laurent, e o teorema dos resíduos.

E, por fim, no capítulo 5, estudaremos com as aplicações desses métodos de integração complexa, como uma forma de mostrar métodos alternativos, quando se trata da integração de funções reais. Mostraremos ainda uma aplicação da integração complexa, em relação ao cálculo de probabilidades.

Para melhor compreensão deste trabalho, é importante que o leitor tenha algum conhecimento prévio sobre os conteúdos das disciplinas de Cálculo II, III e IV, assim e sobretudo de variáveis complexas.

# Capítulo 2

## Noções Preliminares

Neste capítulo serão abordadas algumas definições e resultados envolvendo as noções preliminares sobre os números complexos, tais como, sua representação polar, extração de raízes, limites e continuidade dessas funções. Todas essas definições servirão de base para a compreensão do trabalho. Para mais informações ao leitor, as principais referências utilizadas para o desenvolvimento do capítulo, foram [1, 4].

### 2.1 Um pouco de História

Na longa história da Matemática, percebemos que o surgimento de novos números sempre causaram grande alvoroço e muitas histórias com finais trágicos. Isso ocorreu especialmente com os números negativos, o zero, os números irracionais e complexos. É interessante destacar que os números complexos surgiram da descoberta de soluções para equações cúbicas em sua forma geral  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  com  $a, b, c \in \mathbb{R}$  no século XVI. No livro *Ars Magna* de Girolamo Cardano, é apresentado um método de resolução de alguns tipos de equações do 3º grau, que quando aplicada à equação  $x^3 = 15x + 4$ , chegavam à solução:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Essa parecia ser uma solução inválida, já que não existe raiz quadrada de números negativos. Porém, após algumas manipulações com as propriedades usuais de números reais, percebeu-se que esse resultado era exatamente igual a 4, e como podemos verificar,  $x = 4$  é uma solução da equação. Assim, por mais que fosse estranho trabalhar com números considerados “ilegais”, ao final obteve-se um resultado verdadeiro. Esse é somente um dos exemplos e talvez o de maior relevância conhecido, em que justifica o uso de raízes quadráticas de números negativos. O desenvolvimento do novo conjunto, onde se admite raízes quadráticas de números negativos, hoje é denominado **conjunto dos números complexos** e, representado por  $\mathbb{C}$ .

## 2.2 Números Complexos

**Definição 2.1.** Chama-se conjunto dos números complexos e representa-se por  $\mathbb{C}$ , o conjunto de pares ordenados  $z = (x, y)$ , onde estão determinadas as seguintes operações soma e produto da seguinte forma: dados apenas  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , onde  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$ .

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \end{cases}$$

São considerados números complexos, os números que satisfazem as propriedades acima.

Todo número complexo  $z$  pode ser representado da forma  $a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ . O símbolo  $i$  representa a **unidade imaginária**, definida como sendo o número complexo cujo quadrado é  $-1$ , ou seja,  $i^2 = -1$ , sendo que o valor de  $i = \sqrt{-1}$ , notação adotada por Euler e usada até hoje. Na forma algébrica  $a + bi$ , os números  $a$  e  $b$ , são denominados respectivamente, **parte real e parte imaginária** do número complexo  $z = a + bi$ . Utilizamos a notação  $\operatorname{Re} z = a$  e  $\operatorname{Im} z = b$ . Os números que possuem a parte imaginária igual a zero são os reais, e aqueles que possuem a parte imaginária diferente de zero, são chamados imaginários. Quando a parte real for igual a zero, chamamos esses números de imaginários puros. Os números complexos, assim como os reais, possuem algumas características e propriedades a serem destacadas. Ao introduzirmos números complexos, vemos a necessidade de definir a adição e a multiplicação, de forma que as propriedades associativa, comutativa e distributiva permaneçam válidas como acontece com os números reais.

i)  $a + bi = c + di$ , significa que  $a = c, b = d$ ;

ii)  $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ ;

iii)  $(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bic + bidi = (ac - bd) + (ad + bc)i$ .

**Exemplo 2.2.** Vejamos alguns exemplos de operações com números complexos:

i)  $(2 + 5i) + (-5 + 7i) = -3 + 12i$

ii)  $(1 - 10i) \cdot (3 + 2i) = 23 - 28i$

A subtração de números complexos, se dá a partir da ideia de oposto de um número. O oposto de um número complexo  $z = a + bi$  é do seguinte modo  $-z = (-a - bi)$ . Dados  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i \in \mathbb{C}$ , temos pela definição que,

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

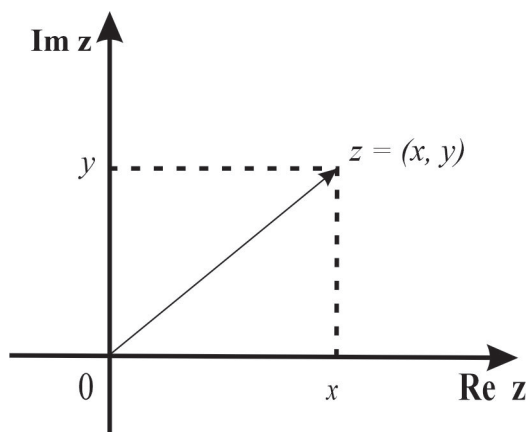


## 2.3 Plano Complexo

O plano complexo, assim como o real, corresponde ao conjunto de representações de todos os números complexos  $z = x + yi$  que comumente chamamos pontos  $z = (x, y)$ .

A representação de números no plano é importante, pois podemos identificar números através de pontos ou vetores e suas coordenadas, como segue na Figura 2.1.

Figura 2.1: Plano Complexo.



Fonte: Arquivo pessoal.

Os números complexos possuem módulo e conjugado.

- i) O módulo de um número complexo  $z = x + yi$  é um número não negativo  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Tal número representa a distância desse ponto à origem do do plano.
- ii) O conjugado de um número complexo  $z = x + yi$  é definido como sendo  $\bar{z} = x - yi$ . A importância dos conjugados está relacionada ao fato de que os mesmos permitem calcular o quociente de números complexos  $z_1$  e  $z_2$ . Para isso basta multiplicar o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador.

**Exemplo 2.3.** Sejam os números complexos  $z_1 = 2 + 2i$  e  $z_2 = 1 + i$ . Calculamos  $\frac{z_1}{z_2}$ .  
Para dividir dois números complexos, multiplicamos  $z_1$  e  $z_2$  pelo conjugado de  $z_2$ :

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} &= \frac{(2+2i)}{(1+i)} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)} \\
&= \frac{(2+2i)}{(1+i)} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)} \\
&= \frac{(2-2i+2i+2)}{(1-(-1))} \\
&= \frac{4}{2} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

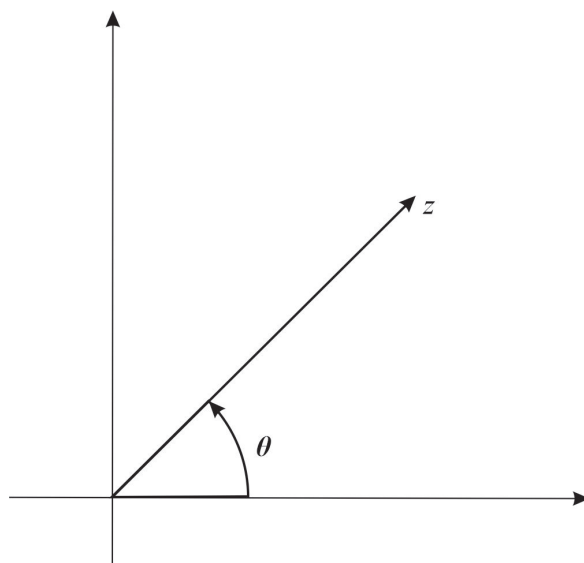
**Exemplo 2.4.** Sejam os números complexos  $z_1 = 5 - 3i$  e  $z_2 = 3 - 5i$ . Calculamos  $\frac{z_1}{z_2}$ . Para dividir dois números complexos, multiplicamos  $z_1$  e  $z_2$  pelo conjugado de  $z_2$ :

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} &= \frac{(5-3i)}{(3-5i)} \cdot \frac{(3+5i)}{(3+5i)} \\
&= \frac{(15+25i-9i+15)}{(9+15i-15i+25)} \\
&= \frac{30+16i}{34} \\
&= \frac{15+8i}{17}.
\end{aligned}$$

## 2.4 Representação Polar

Além da representação em sua forma algébrica e na forma de pontos no plano cartesiano, os números complexos ainda podem ser representados numa forma chamada polar. Considerando-se o número complexo na sua forma geométrica, com  $z \neq 0$ , chamamos de argumento de  $z$ , o ângulo  $\theta$  formado entre o eixo  $Ox$  e o vetor  $Oz$ .

Figura 2.2: Representação Polar



Fonte: Arquivo pessoal

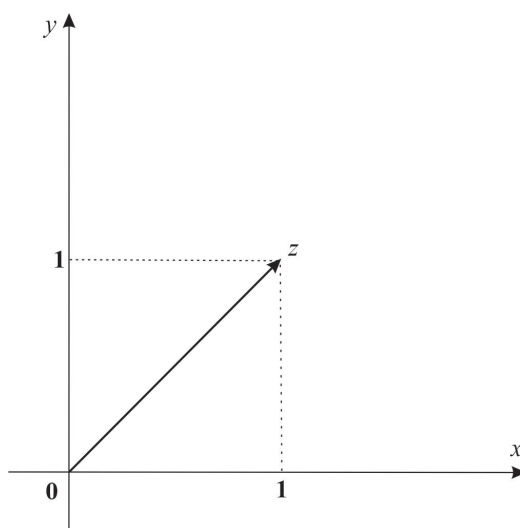
Analisando o triângulo formado pelo eixo  $Ox$  e o vetor  $Oz$ , as coordenadas de  $x$  e  $y$  são dadas da seguinte maneira  $x = |z| \cos \theta$  e  $y = |z| \sin \theta$ . Daí, é sempre possível representar um número complexo  $z$  na forma polar ou trigonométrica:

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ,  $r = |z|$ ; onde  $r$  e  $\theta$  são denominados coordenadas polares de  $z$ .

**Exemplo 2.5.** Vamos mostrar a forma polar de  $1 + i$ .

i)  $1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4}) + i \sin \frac{\pi}{4}$ .

A representação de  $1 + i$  pode ser conferida na figura 2.3,

Figura 2.3: Representação de  $1 + i$  no plano complexo.

Fonte: Arquivo pessoal.

## 2.5 Extração de Raízes

Dado um número complexo  $m$  e um número natural  $n \geq 1$ , dizemos que  $z \in \mathbb{C}$  é uma  $n$ -ésima raiz de  $m$  se

$$z^n = m.$$

Para o caso em que  $m = 0$ ,  $z$  só pode ser igual a 0, pois é a única forma de satisfazer a equação  $z^n = m$ . Assim o zero possui apenas uma raiz  $n$ -ésima que é o próprio zero. Agora veremos para os casos em que temos  $m \neq 0$ , onde a equação possui  $n$  raízes distintas. Para isso, considere a equação (2.1),  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$

**Teorema 2.6.** *Fixando  $n \in \mathbb{N}^*$ . Todo número complexo não nulo  $m$  possui exatamente  $n$  raízes  $n$ -ésimas complexas distintas, a saber,*

$$z_k = \sqrt[n]{|m|} \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right] \quad (2.1)$$

onde  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

**Demonstração:** A demonstração deste teorema encontra-se em [4], p.14. □

**Exemplo 2.7.** Considere as raízes cúbicas de 8, ou seja,  $\sqrt[3]{8}$ . Note que  $8 = 8(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ . Aplicando o teorema anterior, temos que:

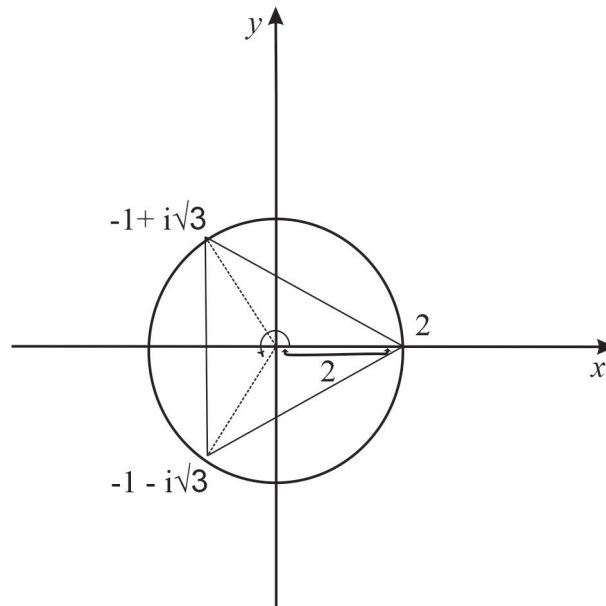
$$z_k = 2 \left( \cos \frac{2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{3} \right) \text{ para } k = 0, 1, 2.$$

Vamos resolver o primeiro caso para  $k = 0$ .

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 \left( \cos \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} \right) \\ &= 2 \left( \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 \right) \\ &= 2(1 + 0) \\ &= 2 \end{aligned}$$

de forma análoga, encontramos que  $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$  e  $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$ . Podemos perceber que  $z_0, z_1$  e  $z_2$  dividem a circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio 2 em três partes congruentes, como mostra a Figura 2.4.

Figura 2.4: Partes congruentes.



Fonte: Arquivo pessoal.

## 2.6 Algumas Funções Complexas

Nesta seção apresentaremos a definição de funções de uma variável complexa, e também algumas das funções de uma variável complexa mais utilizadas, como por exemplo: polinômiais, racionais e a função exponencial.

### 2.6.1 Funções de uma variável complexa

Uma função de uma variável complexa é aquela cujo o domínio está contido no conjunto dos números complexos. Lembramos que dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , uma função entre eles é uma regra de correspondência que relaciona cada elemento  $a$  de  $A$  com um elemento  $f(a)$  em  $B$ . O conjunto representado por  $A$  é chamado de domínio da função  $f$  e o conjunto  $B$  é chamado contradomínio de  $f$ . Uma função de uma variável complexa pode ser representada da seguinte forma  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow B$ . Para ser caracterizada como uma função, não basta apenas a lei de correspondência, precisamos conhecer também o domínio da função. Na maioria dos casos trabalhamos com funções cujas relações são bem definidas  $w = f(z)$ ; sem muitas vezes especificar o domínio. Porém destacamos para os leitores, que o domínio é formado apenas por aqueles valores que fazem sentido para a relação. Como exemplo a seguinte função:

**Exemplo 2.8.** Considere a função de uma variável complexa  $f$ , definida por

$$f(z) = \frac{2z - 5i}{(z - 2i)(z + 15)}.$$

Para funções deste tipo, destacamos que tirando os valores  $z = 2i$  e  $z = -15$  que zeram o denominador, o seu domínio é constituído por todo o plano complexo.

**Observação 2.9.** Uma informação relevante é que, para as funções reais, um recurso muito utilizado é a questão do estudo das mesmas através de seus gráficos. Já para funções de uma variável complexa, os gráficos são subconjunto de  $\mathbb{C}^2$  que identificamos no espaço 4-dimensional  $\mathbb{R}^4$ . Dado isso, perdemos a capacidade de utilizar esse recurso.

## 2.6.2 Funções polinomiais

**Definição 2.10.** Uma função polinomial é uma função da seguinte forma  $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ ; em que os coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . Para os casos em que  $a_n \neq 0$  dizemos que  $f$  é uma função de grau  $n$ .

**Observação 2.11.** Podemos dizer que dado um número complexo  $z_0$  pertencente ao domínio de uma função, esse número é zero da função ou raiz dessa quando  $f(z_0) = 0$ , ou seja, quando ele tornar nossa função igual a zero.

Para as funções polinomiais são definidas algumas propriedades como a soma e o produto. Considere as funções  $f(z) = a_nz^n + \dots + a_1z + a_0$  e  $g(z) = b_mz^m + \dots + b_1z + b_0 \in \mathbb{C}$ , então:

- i)  $h(z) = f(z) + g(z) = c_rz^r + c_{r-1}z^{r-1} + \dots + c_1z + c_0$ , onde  $c_i = a_i + b_i$ ,  $a_i = 0$  se  $i \geq n + 1$  e  $b_j = 0$ , se  $j \geq m + 1$ ,
- ii)  $p(z) = f(z)g(z) = d_sz^s + d_{s-1}z^{s-1} + \dots + d_1z + d_0$ , onde  $d_i = a_ib_0 + a_{i-1}b_1 + \dots + a_0b_i$ ,  $a_i = 0$  se  $i \geq n + 1$  e  $b_j = 0$ , se  $j \geq m + 1$ .

**Exemplo 2.12.** Considere as funções

$$f(z) = iz^4 + 2z^3 - (1 + 2i)z + 3 \quad \text{e} \quad g(z) = -4z^3 + (1 - i)z + 2i.$$

i)  $h(z) = f(z) + g(z) = iz^4 - 2z^3 - 3iz + 3 + 2i.$

ii)

$$\begin{aligned} p(z) = f(z)g(z) &= -4iz^7 - 8z^6 + (1 + i)z^5 + (4 + 6i)z^4 + (-12 + 6i)z^3 \\ &\quad - (3 + 1)z^2 + (4 - 2i)z + 6i. \end{aligned}$$

### 2.6.3 Funções Racionais

**Definição 2.13.** Uma função complexa da forma  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ , onde  $p(z)$  e  $q(z) \neq 0$ , pertencem ao conjunto de todos os polinômios com coeficientes complexos, é chamada *função racional*.

Observe que  $q(z) \neq 0$  dado que a divisão por zero não está definida.

**Exemplo 2.14.** Consideremos a seguinte função

$$f(z) = \frac{iz^5 - 2z^3 - (1+i)z - 3}{z^2 - (2+3i)z + 6i}.$$

Vamos determinar o seu domínio.

Seja  $q(z) = z^2 - (2+3i)z + 6i$ , as raízes de  $q(z)$  são dadas por

$$\frac{2+3i \pm \sqrt{(2+3i)^2 - 24i}}{2} = \frac{2+3i \pm \sqrt{-5-12i}}{2}.$$

Como  $(2-3i)^2 = -5-12i$ , as raízes de  $q(z)$  são

$$\frac{2+3i \pm (2-3i)}{2} = 2 \text{ ou } 3i.$$

Portanto,

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{C} - \{2, 3i\}.$$

**Proposição 2.15.** Seja  $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$  uma função polinomial. Se  $z_0 \in \mathbb{C}$  é uma raiz de  $f$ , então  $z - z_0$  é um fator de  $f$ , isto é, existe uma função polinomial  $g$  tal que

$$f(z) = (z - z_0)g(z),$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

**Demonstração:** Por hipótese,

$$f(z_0) = a_0 + a_1z_0 + \dots + a_nz_0^n = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z) - f(z_0) \\ &= a_1(z - z_0) + a_2(z^2 - z_0^2) + \dots + a_n(z^n - z_0^n). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Agora,

$$z^k - z_0^k = (z - z_0)(z^{k-1} + z^{k-2}z_0 + \dots + zz_0^{k-2} + z_0^{k-1})$$

para todo  $k \geq 1$ . Substituindo estas igualdades na expressão (2.2) e colocando  $(z - z_0)$  em evidência, vemos que  $f(z) = (z - z_0)g(z)$ , onde  $g$  é a função polinomial

$$g(z) = a_1 + a_2(z + z_0) + \dots + a_n(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}).$$

□

A seguir apresentamos uma outra proposição importante:

**Proposição 2.16.** *Toda função polinomial de grau  $n \geq 0$  possui no máximo  $n$  raízes.*

**Demonstração:** A demonstração desta proposição encontra-se em [4] p.32. □

## 2.6.4 Função exponencial

**Definição 2.17.** A função exponencial, é a função  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$\exp z = e^z,$$

dado que  $z$  é um número complexo, ou seja,  $z = x + yi$ . Utilizando séries para o desenvolvimento de  $e^z$ , é possível mostrar que,

$$e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y.) \quad (2.3)$$

Observe que a relação (2.3) é a fórmula de Euler, que é uma relação matemática que mostra uma relação entre funções trigonométricas e a função exponencial, em que  $x$  é o argumento real.

**Exemplo 2.18.** Consideremos a função exponencial  $f(z) = e^z$ , em  $z = \pi i$ , ou seja,

$$f(i) = e^{\pi i}.$$

Aplicando (2.3) temos,

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1.$$

## 2.6.5 Propriedades

Sejam  $v, w \in \mathbb{C}$ . A função exponencial  $f(z) = e^z$  possui as seguintes propriedades:

- i)  $e^0 = 1$ ;
- ii)  $e^{v+w} = e^v \cdot e^w$ ;
- iii)  $e^{-w} = (e^w)^{-1} = \frac{1}{e^w}$ ;
- iv)  $e^{v-w} = \frac{e^v}{e^w}$ ;
- v)  $(e^v)^k = e^{kv}$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .



**Demonstração:** Aqui, mostraremos as propriedades i), ii) e iii).

*Prova de i):*

Pela definição de potências, a demonstração é imediata, já que todo número elevado a zero é igual a 1, logo:

$$e^0 = e^{0+0i} = e^0(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0).$$

*Prova de ii):* Considere  $v = a + bi$  e  $w = c + di$ , logo temos:

$$\begin{aligned} e^{v+w} &= e^a \cdot e^c(\cos b + i \operatorname{sen} b)(\cos d + i \operatorname{sen} d) \\ &= e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)e^c(\cos d + i \operatorname{sen} d) \\ &= e^v \cdot e^w. \end{aligned}$$

*Prova de iii):*

Por i) e ii) podemos escrever que:

$$\begin{aligned} 1 &= e^0 \\ &= e^{z+(-z)} \\ &= e^z \cdot e^{-z} \\ &\Rightarrow e^z = \frac{1}{e^{-z}}. \end{aligned}$$

Essas e as demais demonstrações podem ser encontradas em [8], p.126. □

**Definição 2.19.** Uma função complexa  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A \subseteq \mathbb{C}$  é periódica se existir um número complexo não nulo  $\omega$ , chamado período, tal que  $f(z + \omega) = f(z)$ , para todo  $z \in A$ .

**Observação 2.20.** Um detalhe importante a se destacar das funções exponenciais complexas, que difere das funções reais, é quanto a sua periodicidade, pois a função real não é periódica, enquanto a complexa possui um período bem definido.

Como vem a seguir, a função exponencial complexa  $f(z) = e^z$  é periódica e possui período  $2\pi i$ , pois

$$\begin{aligned} f(z + 2\pi i) &= e^{z+2\pi i} \\ &= e^z \cdot e^{2\pi i} \\ &= e^z(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) \\ &= e^z = f(z). \end{aligned}$$

Portanto se  $k \in \mathbb{R}$ , então:

$$e^{z+2k\pi i} = e^z.$$

## 2.7 Limite e Continuidade

Para abordarmos os conceitos de derivação, é de suma importância o conhecimento das definições e propriedades, tanto dos limites como de continuidade.

### 2.7.1 Limite

**Definição 2.21.** Seja  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função complexa de domínio  $D$  aberto em  $\mathbb{C}$  e  $z_0 \in D$ . Dizemos que  $L \in \mathbb{C}$  é o limite de  $f(z)$  quando  $z$  tende a  $z_0$ , denotado por  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$  se, somente se, para todo  $\varepsilon > 0$ , exista  $\delta > 0$  tal que, para todo

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Na definição, é necessário que  $z$  pertença ao domínio da função e  $z_0$  seja ponto de acumulação desse domínio. Essa definição é similar à apresentada nas funções reais e se voltam para o caso em que estamos acostumados a ver quando os números são reais.

**Observação 2.22.** Seja  $X \subseteq \mathbb{C}$ . Um ponto  $z_0 \in \mathbb{C}$  é ponto de acumulação de  $X$ , quando todo disco aberto de centro em  $z_0$  tem intersecção não vazia com  $X$ , isto é,  $D_r(z_0) \cap X \neq \emptyset$ , para todo  $r > 0$ .

Em outras palavras, entendemos que, se  $L$  é o limite de  $f(z)$  quando  $z$  se aproxima de  $z_0$ , a imagem  $f(z)$  está contida em uma bola  $B_\varepsilon(L)$  extremamente pequena, que possui como ponto central o ponto  $L$ , e que podemos variar a distância da nossa imagem para o centro da circunferência o quão próximo quanto se queira, bastando para isso tomar  $z$  suficientemente próximo de  $z_0$  a uma distância adequada.

**Exemplo 2.23.** Seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função complexa, definida por

$$f(z) = \begin{cases} 2z + i, & \text{se } z \neq 3 + i \\ f(3 + i) = 7. & \end{cases}$$

Mostraremos que  $\lim_{z \rightarrow 3+i} 2z + i = 6 + 3i$ . Dado  $\varepsilon > 0$  devemos determinar  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |z - (3 + i)| < \delta \implies |f(z) - (6 + 3i)| < \varepsilon.$$

Temos:

$$\begin{aligned} |f(z) - (6 + 3i)| &= |(2z + i) - (6 + 3i)| \\ &= |2z - 6 - 2i| \\ &= 2|z - (3 + i)| \quad \text{logo,} \end{aligned}$$

$$|f(z) - (6 + 3i)| < \varepsilon \Rightarrow 2|z - (3 + i)| < \varepsilon \Rightarrow |z - (3 + i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto para todo  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ , segue-se que

$$0 < |z - (3 + i)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(z) - (6 + 3i)| < \varepsilon$$

e isso mostra que

$$\lim_{z \rightarrow 3+i} 2z + i = 6 + 3i.$$

## 2.7.2 Propriedades do limite

No caso das propriedades dos limites em relação a soma, o produto e o quociente, as funções de uma variável complexa admitem propriedades similares da funções reais.

**Teorema 2.24.** Se  $f$  e  $g$  tem limites finitos quando  $z \rightarrow z_0$ , chamemos  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = M$  e  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = N$  temos:

- i)  $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = M + N$ ;
- ii)  $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = M \cdot N$ ;
- iii) se  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$  temos que  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}$ .

**Demonstração:** A demonstração dessas propriedades estão presentes em [1], p.45. □

**Exemplo 2.25.** Se  $f(z) = \frac{p(z)}{g(z)}$  e  $z_0$  não é raiz de  $g(z)$ , então o  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \frac{p(z_0)}{g(z_0)} = f(z_0)$   
De fato,  $\lim_{z \rightarrow z_0} p(z) = p(z_0)$ ,  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g(z_0) \neq 0$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{g(z)} = \frac{p(z_0)}{g(z_0)} = f(z_0).$$

### 2.7.3 Continuidade

Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  uma função complexa com domínio  $D$ , quando o ponto  $z_0$  pertence ao domínio da função e  $f(z_0) = L$ . Dizemos que a função  $f$  é contínua em um ponto  $z_0$  quando as três condições forem satisfeitas:

- i)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  existe,
- ii)  $f(z_0)$  existe,
- iii)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

Se  $f$  é contínua em todos os pontos de seu domínio  $D$ , podemos dizer que  $f$  é simplesmente contínua. Mas, geralmente, se  $S \subset D$  dizemos que  $f$  é contínua em  $S$  se  $f|_S$  é uma função contínua, onde  $f|_S$  é uma restrição de  $f$  ao conjunto  $S$ .

A seguir teremos algumas propriedades das funções contínuas.

**Teorema 2.26.** *Sejam  $D$  um aberto de  $\mathbb{C}$  e  $f, g : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  duas funções complexas contínuas de  $D$  com  $z_0 \in D$ , então:*

- i)  $(f + g)(z)$  é contínua em  $z_0$ ;
- ii)  $(f - g)(z)$  é contínua em  $z_0$ ;
- iii)  $(f \cdot g)(z)$  é contínua em  $z_0$ ;
- iv)  $\frac{f}{g}(z)$  é contínua em  $z_0$ , se  $g(z) \neq 0$  para todo  $z \in D$ .

**Demonstração:** As propriedades acima decorrem das operações com limites, e podem ser encontradas em [7], p.33. □

**Exemplo 2.27.** A função  $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$  é contínua para todo  $z \neq 0$ . Para isso, basta notar que se  $z_0 \neq 0$  então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z}}{z} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z}}{\lim_{z \rightarrow z_0} z} = \frac{\overline{z_0}}{z_0} = f(z_0).$$

**Teorema 2.28.** *Se  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \neq 0$ , então existe uma vizinhança  $V_\delta'(v_0)$  na qual  $f(z)$  é limitada.*

**Demonstração:** A demonstração desse teorema encontra-se em [1], p.45. □

É válido também o limite de funções compostas, sendo assim definido:

**Teorema 2.29.** *Seja  $f$  uma função cujo domínio contenha um ponto  $z_0$  e cuja a imagem esteja contida no domínio de uma função  $g$ . Nestas condições, se  $g$  for contínua em  $z_0$  e  $f$  contínua em  $g(z_0)$ , então a função composta de  $f(g(z))$  será contínua no ponto  $z_0$ .*

**Demonstração:** A demonstração deste teorema pode ser vista em [4], p.70. □

**Exemplo 2.30.** Vamos considerar a função  $m(z) = (z + 1)^3$ .

Considere  $f(z) = z + 1$  e  $g(z) = z^3$ . Note que  $m(z) = g(f(z))$ . Como  $f(z)$  e  $g(z)$  são contínuas, então  $m(z)$  que é a composta dessas funções contínuas também é contínua.

A relação acima diz simplesmente que a composta de funções contínuas é também uma função contínua. E desta relação do Limite de funções compostas, surge uma importante relação entre os limites da parte real e imaginária de um número complexo, como segue:

**Teorema 2.31.** *Seja  $f = u + iv$  uma função com domínio em  $D$ , e seja  $L = A + iB$ . Então:*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L,$$

se e somente se,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(x, y) = A \text{ e } \lim_{z \rightarrow z_0} v(x, y) = B.$$

**Demonstração:** A demonstração desse teorema encontra-se em [1], p.46. □

**Corolário 2.32.** *Uma função  $f = u(x, y) + v(x, y)i$  é contínua num ponto  $z_0 = x_0 + iy_0$  se e somente se sua parte real e imaginária forem contínuas nesse ponto.*

Esse corolário pode ser encontrada em [1], p.47.

**Exemplo 2.33.** De acordo com o corolário 2.2, e observando as partes reais e imaginárias das conhecidas funções exponenciais, seno e cosseno, temos que:

- i)  $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(z_0)$ ;
- ii)  $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{cos} z = \operatorname{cos}(z_0)$ ;
- iii)  $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{exp}(z) = \operatorname{exp}(z_0)$ .

# Capítulo 3

## Funções Analíticas

Neste capítulo, visando o entendimento básico para a derivação de funções complexas, serão apresentados os principais conceitos e definições sobre funções analíticas, também conhecidas como funções holomorfas devido a sua equivalência. Também apresentaremos algumas propriedades das funções analíticas, e para fixação dos principais conteúdos daremos alguns exemplos. Foram usados como base para escrita deste capítulo, as seguintes referências [1, 4, 7].

### 3.1 Derivadas de Funções Complexas

A definição formal de derivadas de funções complexas é semelhante a dada para funções reais, só que agora a função está definida num subconjunto dos números complexos. Seja  $f$  uma função com domínio em  $D \subset \mathbb{C}$  e seja  $z$  um ponto pertencente a esse domínio. Dizemos que  $f$  é derivável ou diferenciável no ponto  $z$  se existir

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

ou, da seguinte forma, ao substituir  $z + \Delta z$  por  $w$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Para os casos em que esses limites existem, esse processo define uma nova função em  $z$ , que por sua vez é a derivada ou função derivada da função  $f$ , e comumente denotada por  $f'$ :

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Destacamos que o limite acima não depende como  $\Delta z$  se aproxima de zero ou  $w$  de  $z$ . Independente do raio tomado, o limite tem que ser o mesmo.

**Exemplo 3.1.** Qualquer função constante  $f(z) = c$  é diferenciável em todo ponto  $z_0$  de  $\mathbb{C}$ , pois

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{c - c}{z - z_0} = 0.$$

Assim, concluímos que  $f'(z) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

**Exemplo 3.2.** Vamos mostrar que a função  $f(z) = z^n$  é diferenciável, com  $n \in \mathbb{N}$ . Dado  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}) \\ &= n z_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto, a função  $f$  é diferenciável em todos os pontos de  $\mathbb{C}$  e,

$$f'(z) = n z_0^{n-1},$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

A diferenciabilidade de uma função implica em sua continuidade como mostra a proposição a seguir.

**Proposição 3.3.** *Se a função  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  é diferenciável em um ponto  $z_0$ , então  $f$  é contínua em  $z_0$ .*

**Demonstração:** A demonstração dessa proposição encontra-se em [4], p. 69.  $\square$

As regras de derivações para funções reais, nos induzem às regras de derivação para as funções complexas.

**Proposição 3.4.** *Se  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : A \rightarrow \mathbb{C}$  são diferenciáveis em um ponto  $z_0$ , então:*

i) *Para todo  $c \in \mathbb{C}$ ,  $cf$  é diferenciável em  $z_0$  e,*

$$(cf)'(z_0) = cf'(z_0).$$

ii)  *$f + g$  é diferenciável em  $z_0$  e,*

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0).$$

iii)  *$fg$  é diferenciável em  $z_0$  e,*

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

iv) *Quando  $g(z) \neq 0$ ,  $\frac{f}{g}$  é diferenciável em  $z_0$  e,*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

**Demonstração:** A demonstração dessas propriedades encontram-se em [4], p.70.  $\square$

**Exemplo 3.5.** Seja  $g_n(z) = z^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Vamos verificar que  $g'_n(z) = -nz^{-n-1}$  para todo  $z \neq 0$ .

Note que  $g_n = \frac{1}{f_n}$  em que  $f_n(z) = z^n$ . Portanto, se  $z \neq 0$ ,

$$g'_n(z) = -\frac{f'_n(z)}{[f_n(z)]^2} = -\frac{nz^{n-1}}{z^{2n}} = -nz^{-n-1}.$$

**Exemplo 3.6.** Seja a função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = z^2$ . A derivada de  $f$  no ponto  $z_0 \in \mathbb{C}$  é dada por:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0) \cdot (z + z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) \\ &= 2z_0. \end{aligned}$$

**Exemplo 3.7.** Consideremos a função  $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ .

Derivando-a teremos:

$$f'(z) = a_1 + 2a_2z + \dots + na_nz^{n-1}.$$

Um dos teoremas mais famosos nos cursos de Cálculos, também é visto para funções de variáveis complexas, e esse teorema é a regra da cadeia, enunciado a seguir:

**Teorema 3.8.** (Regra da Cadeia) Sejam  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : B \rightarrow \mathbb{C}$  funções tais que  $f(A) \subset B$ . Se  $f$  é diferenciável em um ponto  $z_0$  e  $g$  é diferenciável no ponto  $f(z_0)$ , então a função composta  $g \circ f$  é diferenciável em  $z_0$  e,

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

**Exemplo 3.9.** Consideremos a função

$$h(z) = \left[ \frac{z^2}{z+1} \right]^{100},$$

notemos que  $h = g \circ f$ , onde  $f(z) = \frac{z^2}{z+1}$  e  $g = z^{100}$ .

Temos que suas derivadas são respectivamente  $f'(z) = \frac{z^2 + 2z}{(z+1)^2}$  e  $g'(z) = 100z^{99}$ .



Usando a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} h'(z) = g'(f(z))f'(z) &= 100 \left( \frac{z^2}{z+1} \right)^{99} \frac{z^2 + 2z}{(z+1)^2} \\ &= \frac{100(z+2)z^{199}}{(z+1)^{101}}. \end{aligned}$$

## 3.2 Equações de Cauchy-Riemann

Nesta seção, apresentamos as condições necessárias e suficientes para garantir a existência das derivadas de uma função complexa em um determinado ponto, pois não basta existir derivada da sua parte real e imaginária, precisamos de mais algumas ferramentas, e essa condição são garantida pelas equações de Cauchy-Riemann.

**Teorema 3.10.** *Seja  $D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$  e  $f(z)$  é derivável em um ponto  $z_0 = x_0 + y_0i \in \mathbb{C}$ . Então as derivadas parciais de primeira ordem  $u$  e  $v$  com relação a  $x$  e  $y$  existem em  $x_0$ , e satisfazem:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Além disso,

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

**Demonstração:** A demonstração desse importante teorema, pode ser acompanhada em [7], p. 42. □

**Exemplo 3.11.** Consideremos a função  $f(z) = e^z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

Como vimos anteriormente,  $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ . Daqui, temos a parte real e imaginária

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad \text{e} \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Logo,  $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$  e  $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$   
ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Assim,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. Portanto, a função  $f(z) = e^z$ , é derivável em todo ponto  $z \in \mathbb{C}$ .

**Exemplo 3.12.** Analisemos a função  $f(z) = z^3$ . Podemos escrevê-la na forma de suas componentes reais e imaginárias da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + yi)^3 \\ &= (x + yi)^2 \cdot (x + yi) \\ &= (x^2 - y^2 + 2xyi) \cdot (x + yi) \\ &= (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i. \end{aligned}$$

Temos então que  $u(x, y) = (x^3 - 3xy^2)$  e  $v(x, y) = (3x^2y - y^3)$ . De onde percebemos que derivando em relação a  $x$  e  $y$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -6x \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -6x. \end{aligned}$$

Vemos com isso que as igualdades

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

são satisfeitas para todo  $z = x + yi \in \mathbb{C}$ . Portanto,  $f$  é derivável em todo ponto  $z \in \mathbb{C}$ .

**Observação 3.13.** Há casos também em que as funções satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, porém não possuem derivadas parciais contínuas, o que não caracteriza uma função analítica. Para ser consideradas deriváveis, temos a condição suficiente, que diz que além de as partes reais e imaginárias destas funções existirem e satisfazerem as equações de Cauchy-Riemann, elas também devem possuir derivadas parciais contínuas.

**Teorema 3.14.** *Seja uma função  $f = u + iv$  definida em um aberto de  $A \subset \mathbb{C}$  suponhamos que as derivadas parciais  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  e  $\frac{\partial v}{\partial y}$  existem em todos os pontos de  $A$ . Se cada uma dessas derivadas é contínua em um ponto  $z_0$  de  $A$  e se as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas por  $u$  e  $v$  em  $z_0$ , então  $f$  é derivável ou diferenciável em  $z_0$ .*

**Demonstração:** A demonstração do teorema encontra-se em [4], p.75. □

### 3.2.1 Forma polar das equações de Cauchy-Riemann

Podemos ainda expressar as equações de Cauchy-Riemann usando coordenadas polares, a saber:

**Teorema 3.15.** *As equações de Cauchy-Riemann na forma polar são dadas por:*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (3.1)$$

**Demonstração:** A demonstração desse teorema pode ser encontrado em [7], p.58.  $\square$

**Teorema 3.16.** *Suponha que a função*

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta), \quad (3.2)$$

*esteja definida em toda uma vizinhança de um ponto não nulo  $z_0 = r_0 \exp(i\theta_0)$ , e suponha que*

- i) as derivadas parciais de primeira ordem em relação a  $r$  e  $\theta$  das funções  $u$  e  $v$  existam em cada ponto dessa vizinhança e que,*
- ii) essas derivadas parciais sejam contínuas em  $(r_0, \theta_0)$  e que satisfaçam a forma polar das equações de Cauchy-Riemann*

$$ru_r = v_\theta, \quad u_\theta = -rv_r$$

*em  $(r_0, \theta_0)$ .*

*Então existem as derivadas  $f'(z_0)$  e seu valor é dado por*

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r), \quad (3.3)$$

*em que as derivadas parciais do lado direito devem ser calculadas em  $(r_0, \theta_0)$ .*

Esse teorema pode ser encontrado em [2], p.69.

**Exemplo 3.17.** Se  $f(z) = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{(re^{i\theta})^2} = \frac{1}{r^2} e^{-i2\theta} = \frac{1}{r^2} (\cos 2\theta - i \sin 2\theta)$ .

Com  $z \neq 0$ , as funções componentes são

$$u = \frac{\cos 2\theta}{r^2} \quad \text{e} \quad v = -\frac{\sin 2\theta}{r^2}.$$

Como,

$$ru_r = -\frac{2 \cos 2\theta}{r^2} = v_\theta \quad \text{e} \quad u_\theta = -\frac{2 \sin 2\theta}{r^2} = -rv_r,$$

e dadas que as demais condições impostas em 3.3 estão satisfeitas em cada ponto não nulo  $z = re^{i\theta}$ , existe a derivada de  $f$  se  $z \neq 0$ . Além disso, pela equação (3.3)

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-i\theta} \left( -\frac{2 \cos 2\theta}{r^3} + i \frac{2 \sin 2\theta}{r^3} \right) \\ &= -2e^{-i\theta} \frac{e^{-i2\theta}}{r^3} \\ &= -\frac{2}{(re^{i\theta})^3} \\ &= -\frac{2}{z^3}. \end{aligned}$$

### 3.2.2 Funções Analíticas

**Definição 3.18.** Seja  $D \subset \mathbb{C}$  um aberto,  $z_0 \in D$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Dizemos que  $f$  é analítica em  $z_0$  se  $f$  for derivável em todos os pontos de um disco aberto contido em  $D$  e com centro em  $z_0$ . Dizemos que  $f$  é analítica em  $D$  se  $f$  for analítica em todos os pontos de  $D$ .

De acordo com essa definição, uma função que só tenha derivada em alguns pontos isolados, não é analítica. O conceito de analiticidade requer a existência da derivada em todos os pontos de um conjunto aberto e ainda poder ser representada através de uma série de potências. E, dado que toda função potência é holomorfa, podemos concluir que a noção de função analítica é equivalente à noção de função holomorfa.

**Exemplo 3.19.** A função  $f(x) = \frac{1}{z}$  é analítica em cada ponto não nulo do plano finito, pois sua derivada  $f'(z) = \frac{-1}{z^2}$  existe num tal ponto.

**Definição 3.20.** Chama-se *função inteira*, toda função que é analítica em todo o plano complexo.

**Exemplo 3.21.** As funções exponenciais, polinomiais, seno e cosseno (trigonométricas) são exemplos de funções inteiras, pois são deriváveis em todos os pontos de  $\mathbb{C}$ .

Outra característica extremamente útil em relação às funções analíticas é que, se duas funções são analíticas em um domínio  $D$ , então a soma e o produto dessas funções são analíticas em  $D$ . Da mesma forma em que o quociente dessas funções é uma função analítica em  $D$ , desde que a função no denominador não se anule em algum ponto de  $D$ .

**Proposição 3.22.** Se  $f$  e  $g$  são analíticas em um domínio  $D$ , então as seguintes funções também o são:

i)  $\alpha f + \beta g$  onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ;

ii)  $f \cdot g$ ;

iii)  $\frac{f}{g}$  desde que  $g(z_0) \neq 0$ .

**Exemplo 3.23.** Em particular, o quociente  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  de dois polinômios, é uma função analítica em qualquer domínio no qual tenhamos  $Q(z) \neq 0$ .

A partir da derivada da regra da cadeia de uma função composta, vemos que a composição de duas funções analíticas é analítica. Mais precisamente temos,

**Proposição 3.24.** Seja  $f(z)$  uma função analítica em um domínio  $D$ , e suponhamos que a imagem de  $D$  pela função  $w = f(z)$  esteja contida no domínio de definição de uma função  $g(w)$ . Então a composta  $g \circ f$  é uma função analítica em  $D$ , com derivada,

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0), \quad \text{para todo } z_0 \in D$$

**Demonstração:** A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [10], p.52. □

# Capítulo 4

## Integração Complexa

As integrais são extremamente importantes quando se trata dos estudos de funções de variáveis complexas. Ela é conhecida em parte por sua elegância Matemática, com teoremas muito importantes. Serão abordadas as principais características, propriedades e aplicações da integração de funções complexas. Tomamos por base para a escrita desse capítulo as seguintes referências, [1, 4, 2, 7].

### 4.1 Arcos e Contornos

Os arcos contínuos ou simplesmente arcos, são as curvas formadas pelos conjuntos  $C$  de pontos definidos da seguinte forma:

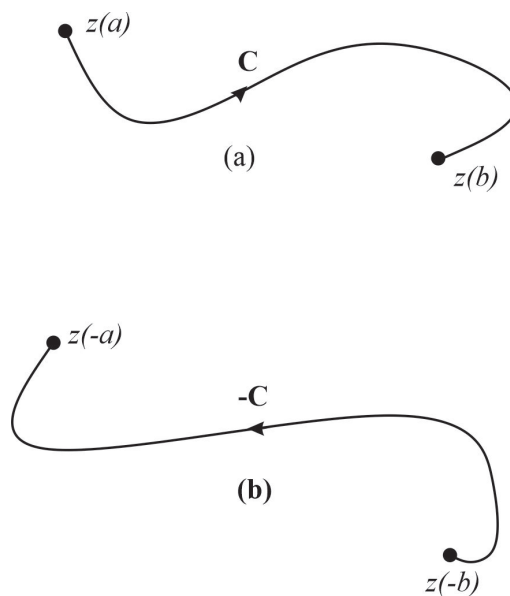
$$C = z(t) = x(t) + iy(t) \text{ onde } , a \leq t \leq b,$$

em que  $z(t)$  é uma função contínua de  $t \in [a, b]$ . A representação paramétrica de  $z = z(t)$  ordena os pontos de maneira crescente em  $t$ , de forma que  $C$  é um conjunto ordenado. Se for ordenado em sentido horário, representamos  $C$  como na Figura 4.1(a). O arco pode ser orientado em sentido contrário e podemos representá-lo por  $-C$ , possuindo representação paramétrica  $z_1(t) = z(-t)$ ,  $-b \leq t \leq -a$ . como mostra a Figura 4.1(b).

Por outro lado, chama-se *arco simples*, as curvas onde cada ponto  $z(t)$  corresponde a um único valor de  $t$ .

**Observação 4.1.** Em outras palavras, de acordo com a variação de  $t$  no intervalo de  $a$  até  $b$ , o ponto  $z(t)$  varia sobre a curva  $C$ , passando somente uma vez por cada ponto. Quando esse arco *não é simples*, ao menos uma vez durante esse percurso, o ponto  $z(t)$  assume um mesmo valor para valores distintos de  $t$ , isto é,  $z(t_1) = z(t_2)$ , com  $t_1 \neq t_2$ .

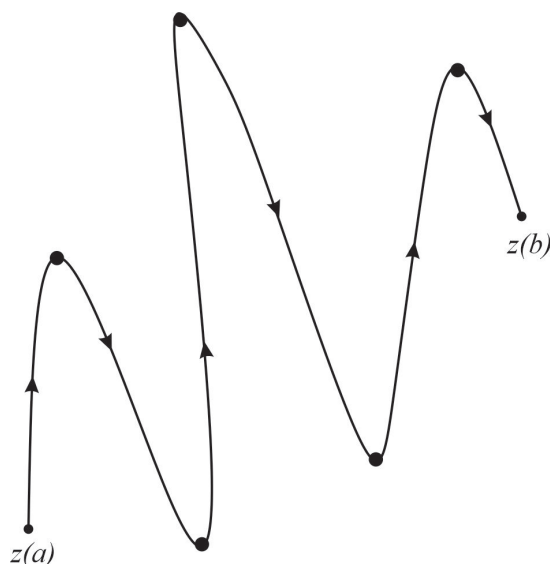
Figura 4.1: Arcos com sentidos contrários



Fonte: Arquivo pessoal

**Definição 4.2.** Chamamos de *contornos ou caminhos*, a todo arco contínuo formado com um número finito de arcos regulares, cada um terminando no começo do seguinte, como mostra a Figura 4.2

Figura 4.2: Caminhos por partes



Fonte: Arquivo pessoal.

Precisamente, um caminho  $C$  tem representação paramétrica dada por uma função  $z = z(t)$ , contínua num intervalo  $[a, b]$ , com uma união finita de subintervalos, sendo estes respectivamente os domínios de cada um dos arcos que formam o caminho.

Existem ainda os *caminhos fechados*, ou seja, as curvas fechadas, que são aquelas onde

os pontos correspondentes as suas extremidades coincidem  $z(a) = z(b)$  Figuras 4.4 e 4.5. Também temos as curvas *fechadas simples*, que são as que com exceção das extremidades, os demais pontos não coincidem, Figura 4.5.

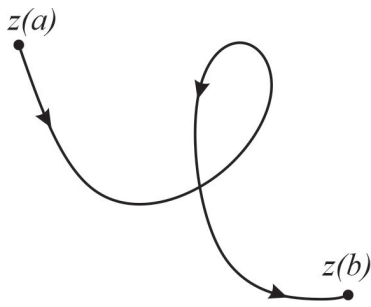


Figura 4.3: Caminho 1

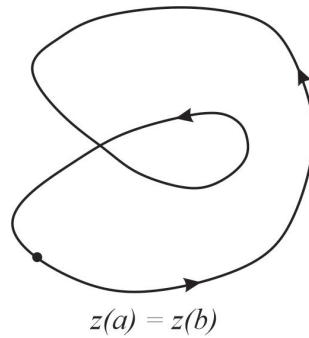


Figura 4.4: Curva fechada

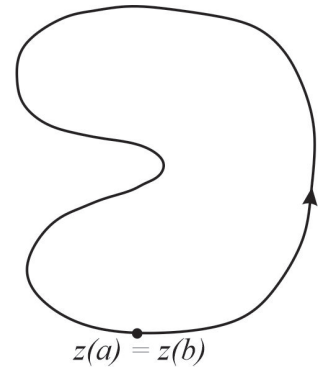
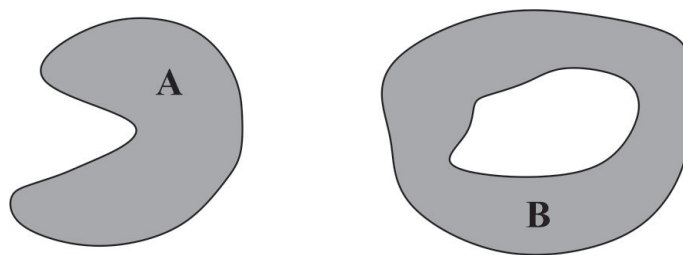


Figura 4.5: Curva de Jordan

**Definição 4.3.** Diz-se que uma região  $R$  é *simplesmente conexa*, se qualquer curva simples contida em  $R$  pode ser deformada continuamente até ser transformada em um ponto, sem sair de  $R$ . Nas figuras abaixo temos o exemplo de uma região simplesmente conexa (A), e uma região (B) com um “buraco” que destrói a “conectividade”, tornando-a em uma região que não é simplesmente conexa. As regiões que não forem simplesmente conexas as chamamos de *multiplamente conexas* Figura 4.6.

Figura 4.6: Regiões conexas



Fonte: Arquivo pessoal.

## 4.2 Integral de Contorno

**Definição 4.4.** Seja  $F(t) = U(t) + iV(t)$  uma função complexa contínua de variável real  $t$  definida em um intervalo  $[a, b]$ . Sua integral está definida em termos da integral das funções reais  $U$  e  $V$ , como mostra a seguinte expressão:

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b U(t)dt + i \int_a^b V(t)dt. \quad (4.1)$$



Dessa definição principal, surgem algumas propriedades,

- i)  $\operatorname{Re} \int_a^b F(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re} F(t)dt$ ;  $\operatorname{Im} \int_a^b F(t)dt = \int_a^b \operatorname{Im} F(t)dt$ ;
- ii)  $\int_a^b [F(t) + G(t)]dt = \int_a^b F(t)dt + \int_a^b G(t)dt$ ;
- iii)  $\int_a^b cF(t)dt = c \int_a^b F(t)dt$ ; onde nosso  $c$  é uma constante complexa;
- iv)  $\left| \int_a^b F(t)dt \right| \leq \int_a^b |F(t)dt|$ , onde  $a < b$ .

**Demonstração:** Essas propriedades podem ser verificadas em [1], p.80. □

**Exemplo 4.5.** Consideremos a função  $F(t) = e^{it}$ , integrável no intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

Aplicando a propriedade i) (4.1), vamos ter:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{it} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t + i \operatorname{sen} t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt + i \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} t dt \\ &= \left[ \operatorname{sen} t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + i \left[ -\cos t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right). \end{aligned}$$

### 4.3 Integrais Definidas

**Definição 4.6.** Um caminho  $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é dito suave se,  $C$  é diferenciável em todos os pontos de  $[a, b]$  e sua derivada  $C'$  é contínua em  $[a, b]$ .

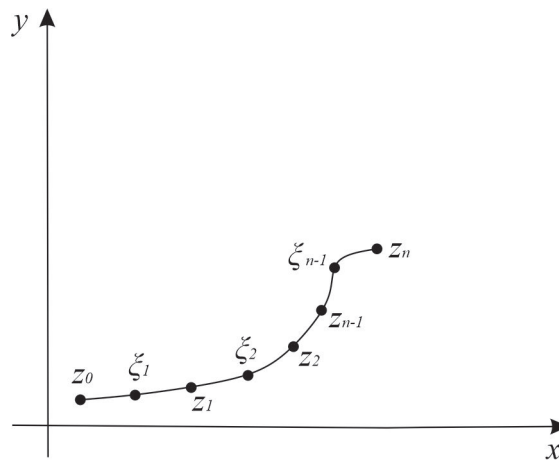
Seja  $D \subset \mathbb{C}$  um aberto de  $\mathbb{C}$ ,  $f : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$  uma função complexa contínua, e ainda  $C \subset D$  uma curva suave contida em  $D$ , como mostra a Figura 4.7:

Podemos dividir  $C$  em  $n$  partes iguais, representando essas subdivisões pelos pontos  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ .

Para cada um dos arcos  $z_{k-1}$  à  $z_k$  representados acima, podemos tomar um ponto arbitrário  $\xi_k$  entre eles. Calculamos o valor de  $f(\xi_k)$  para todo  $k = 1, 2, \dots, n$  e, efetuamos a seguinte soma:

$$S_n = f(\xi_1)(z_1 - z_0) + f(\xi_2)(z_2 - z_1) + \dots + f(\xi_n)(z_n - z_{n-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Figura 4.7: Integral de linha



Fonte: Arquivo pessoal.

Podemos ainda fazer a variação entre esses pontos da seguinte maneira  $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ , obtendo,

$$S_n = f(\xi_1)\Delta z_1 + f(\xi_2)\Delta z_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta z_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta z_k.$$

Fazendo o número de pontos da partição tender ao infinito, de forma que os comprimentos dos arcos representados por  $|\Delta z_k|$  se aproximem de zero, esse somatório tende a um limite. A esse limite chamamos de integral de  $f$  ao longo de  $C$ , que se estende desde um ponto  $z = z_1$  até um outro ponto  $z = z_n$  do plano complexo.

Desta forma são consideradas integrais de linhas ou curvilíneas, onde a função  $f$  está definida sobre um caminho  $C$ , e o representamos como segue:

$$\int_C f(z)dz \quad \text{ou} \quad \int_{z_1}^{z_n} f(z)dz. \quad (4.2)$$

**Definição 4.7.** Se  $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é um caminho suave e se  $f$  é uma função complexa definida e contínua em  $C$ , definimos a integral de  $f$  sobre  $C$  por:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(C(t))C'(t)dt. \quad (4.3)$$

Como a função integrando da integral do lado direito de (4.3) é contínua em  $[a, b]$ , temos que a integral do lado direito da igualdade em (4.3) existe.

#### Observação 4.8.

- i) A integral definida acima é chamada de integral de linha ao longo da curva  $C$ .
- ii) Notemos que se a função  $f$  é analítica em  $D$ , então ela é integrável ao longo da curva  $C$ .
- iii) Vale ressaltar que as integrais reais definidas no Cálculo podem ser interpretadas como áreas, volumes e outras interpretações, o que difere das integrais complexas que exceto em casos bem particulares, não dispõem de interpretações geométricas diretas.

### 4.3.1 Relação entre integrais de linha complexa e real

Uma importante relação que podemos traçar entre ambas as integrais, é que as integrais de linhas complexas podem ser representadas ou reescritas em função das integrais de linhas reais da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_C (u(x, y) + \mathbf{i}v(x, y)) \cdot (dx + \mathbf{i}dy) \\ &= \int_C (u(x, y)dx - v(x, y)dy + \mathbf{i} \int_C (v(x, y)dx + u(x, y)dy).\end{aligned}\tag{4.4}$$

Para ilustrar esse fato, apresentamos o exemplo a seguir, onde calculamos duas integrais.

**Exemplo 4.9.** Sejam  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função definida por  $f(z) = z = x + yi$  e,  $C$  o círculo de centro  $z_0 = a + bi$  e raio  $r$ .

Como a função é  $f(z) = z$  temos que  $u(x, y) = x$  e  $v(x, y) = y$ . Vamos agora parametrizar essa curva. Dado que  $C$  é uma curva de centro em  $z_0 = a + bi$ , uma possível parametrização é  $x = a + r \cos(t)$  e  $y = b + r \sin(t)$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ . As derivadas de  $x$  e  $y$  são respectivamente:  $dx = -r \sin(t)dt$  e  $dy = r \cos(t)dt$ , e com isso podemos calcular as integrais separadamente com as partes reais e imaginárias:

$$\begin{aligned}\int_C [u(x, y)dx - v(x, y)]dy &= \int_C (x dx - y dy) \\ &= \int_0^{2\pi} [(a + r \cos(t)) \cdot (-r \sin(t)) - (b + r \sin(t)) \cdot r \cos(t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-ar \sin(t) - br \cos(t) - 2r^2 \sin(t) \cos(t)) dt \\ &= (ar \cos(t) - br \sin(t) - 2r^2 \frac{\sin^2(t)}{2}) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Para a segunda integral temos o seguinte:

$$\begin{aligned}\int_C [u(x, y)dy + v(x, y)dx] &= \int_C (x dy + y dx) \\ &= \int_0^{2\pi} ((a + r \cos(t)) \cdot r \cos(t) + (b + r \sin(t)) \cdot (-r \sin(t))) \\ &= \int_0^{2\pi} (ar \cos(t) - br \sin(t) - r^2(\cos^2(t) - \sin^2(t))) dt \\ &= 0\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

As integrais complexas assim como as reais obedecem algumas propriedades, caso haja duas funções integráveis em um intervalo.

A seguir, apresentaremos uma proposição com tais propriedades, que são análogas às propriedades das integrais definidas.

**Proposição 4.10.** Seja  $D \subset \mathbb{C}$  um aberto  $f, g : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  duas funções complexas integráveis sobre a curva suave  $C \subset D$ , então:

- i)  $\int_C (f + g)(z)dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz;$
- ii)  $\int_C \alpha f(z)dz = \alpha \int_C f(z)dz, \quad \alpha \in \mathbb{C};$
- iii)  $\int_{-C} f(z)dz = - \int_C f(z)dz;$
- iv)  $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz,$  onde  $C,$  é um caminho suave por partes, onde  $C \subset D.$

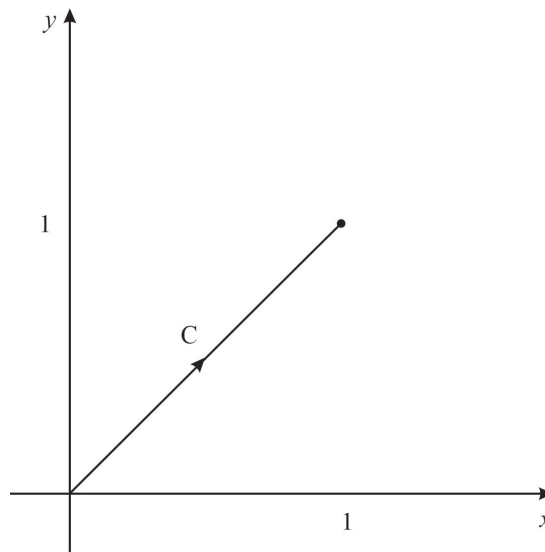
**Demonstração:** A demonstração dessas propriedades podem ser encontradas em [4], p.117.  $\square$

**Exemplo 4.11.** Considerando a função  $f(z) = y - x - 3x^2i.$  Vamos calcular o valor da integral  $\int_C f(z)dz,$  considerando  $C$  o segmento de  $z = 0$  a  $z = 1 + i$  como mostra a Figura 4.8.

Uma parametrização dessa curva é  $x = t$  e  $y = t, \quad t \in [0, 1].$  Usando a equação (4.4), teremos,

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_0^1 f(t + it) \cdot (1 + i)dt \\ &= \int_0^1 (-3t^2i)(i + 1)dt \\ &= \int_0^1 (-3t^2i + 3t^2)dt \\ &= \left( -\frac{3t^3i}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= 1 - i. \end{aligned}$$

Figura 4.8: Segmento



Fonte: Arquivo pessoal

**Definição 4.12.** (*Caminho suave por partes*) Um caminho  $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é dito suave por partes, se existir uma partição  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  do intervalo  $[a, b]$  tal que, para cada  $1 \leq k \leq n$ , a restrição  $C_k$  de  $C$  a  $[t_{k-1}, t_k]$  é um caminho suave, ou seja,

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n.$$

E com isso temos que todo caminho suave por partes pode ser escrito como uma soma de caminhos suaves. Assim, se  $f$  é uma função complexa contínua em  $C$ , a integral de  $f$  sobre  $C$  está definida por

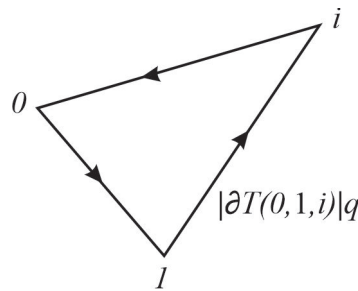
$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \dots + \int_{C_n} f(z)dz. \quad (4.5)$$

**Exemplo 4.13.** Considere um triângulo que tem como vértices os pontos  $T(0, 1, i)$  onde o triângulo é limitado pelos segmentos que ligam 0 a 1, 1 a  $i$  e  $i$  a 0 e seja  $\partial T(0, 1, i)$  o caminho suave dado por  $\partial T(0, 1, i) = [0, 1] + [1, i] + [i, 0]$ . Como na Figura 4.9.

Pela definição da integral de uma função sobre um caminho suave por partes, e pela equação (4.5), temos:

Tomando a função contínua  $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ , obtemos,

Figura 4.9: Caminho



Fonte: Arquivo pessoal

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial T} (\operatorname{Re} z) dz &= \int_{[0,1]} (\operatorname{Re} z) dz + \int_{[1,i]} (\operatorname{Re} z) dz + \int_{[i,0]} (\operatorname{Re} z) dz \\
 &= \int_0^1 t dt + \int_0^1 (1-t)(i-1) dt + \int_0^1 0(-i) dt \\
 &= \frac{1}{2} + (i-1) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{i}{2}.
 \end{aligned}$$

## 4.4 O Teorema de Cauchy

Como vimos anteriormente, as funções analíticas entre dois pontos  $z_0$  e  $z_n$  podem ser calculadas, através da integral da função sobre um caminho ou contorno que une esses dois pontos. Se o integrando for uma função analítica, a integração depende apenas dos pontos finais e iniciais. Esta informação estabelece o teorema de Cauchy que estudaremos a seguir. Trabalharemos com funções definidas em regiões simplesmente conexas. Porém isso não significa que seus domínios sejam apenas esses tipos de regiões; mas esses domínios podem ser restritos a subdomínios que sejam simplesmente conexas.

**Teorema 4.14.** (Teorema de Cauchy) *Seja  $f$  uma função analítica definida em uma região simplesmente conexa  $R$ . Então:*

$$\int_C f(z) dz = 0, \tag{4.6}$$

para todo contorno fechado  $C$  contido em  $R$ .

**Demonstração:** Por (4.4), temos que

$$\int_C f(z) dx = \int_C (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + \int_C (v(x, y) dx + u(x, y) dy).$$

As duas integrais reais são iguais a 0 desde que  $u$  e  $v$  tenham derivadas contínuas em  $D$  e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Essas são exatamente as equações de Cauchy-Riemann. Logo,

$$\int_C f(z)dz = 0 + i \cdot 0 = 0.$$

□

Esse teorema pode ser estendido para regiões multiplamente conexas, como segue,

**Teorema 4.15.** *Seja  $C$  um caminho fechado e sejam  $C_j$  com  $(j = 1, 2, 3, \dots, n)$  um número finito de caminhos fechados contidos em  $C$  tais que os interiores de  $C_j$  não tenham pontos em comum. Seja  $R$ , a região fechada consistindo de todos os pontos de  $C$  e de todos os pontos interiores a  $C$ , exceto os pontos interiores a cada  $C_j$ , e seja  $B$  a fronteira orientada de  $R$ , consistindo de  $C$  e todos os  $C_j$ , orientados de forma a deixarem os pontos de  $R$  à esquerda de  $B$ . Então, se  $f(z)$  é analítica em  $R$ ,*

$$\int_B f(z)dz = 0. \quad (4.7)$$

Esse teorema pode ser encontrada em [3], p.105.

**Exemplo 4.16.** Se  $C$  for algum caminho fechado simples, com qualquer orientação, então:

$$\int_C \text{sen}(z^2)dz = 0.$$

Isso ocorre porque a função composta  $f(z) = \text{sen}(z^2)$  é analítica em todo o plano complexo, e sua derivada  $f'(z) = 2z \cos(z^2)$  é contínua em toda parte.

#### 4.4.1 Fórmula integral de Cauchy

A seguir, apresentaremos mais um resultado importante.

**Teorema 4.17.** *Seja  $f$  uma função analítica nos pontos interiores e em cada ponto de um caminho fechado simples  $C$  orientado positivamente. Se  $z_0$  for um ponto interior qualquer de  $C$ , então*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{z - z_0}. \quad (4.8)$$

**Demonstração:** Tomemos  $z_0$  um ponto no interior de  $C$  e considere a função  $g : C \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & \text{se } z \neq z_0, \\ f'(z_0), & \text{se } z = z_0. \end{cases}$$

Temos que  $g$  é analítica em  $C/z_0$  e como

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = g(z_0),$$

$g$  é contínua em  $C$ . Pelo Teorema de Cauchy,

$$\int_C g(z) dz = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} \int_C g(z) dz &= \int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int_C \frac{dz}{z - z_0} \\ &= \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) 2\pi i. \end{aligned}$$

Logo concluímos que a fórmula se verifica. □

Essa expressão é denominada fórmula integral de Cauchy e, em outras palavras, nos diz que se uma função  $f$  for analítica nos pontos interiores e em cada ponto de um caminho fechado simples  $C$ , então os valores de  $f$  no intervalo de  $C$  são completamente determinados pelos valores de  $f$  em  $C$ .

Agora, apresentaremos um exemplo

**Exemplo 4.18.** Consideremos o círculo  $C$  denotado por  $|z| = 1$  centrado na origem do plano e com uma orientação positiva, representado pela função  $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 + 9}$ . Essa função é analítica em todos os pontos de  $C$  e como a origem  $z_0 = 0$  é um ponto interior a  $C$ , podemos utilizar o teorema (4.17):

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\cos z}{z(z^2 + 9)} dz &= \int_C \frac{\cos z / (z^2 + 9)}{(z - 0)} dz \\ &= 2\pi i f(0) \\ &= \frac{2\pi i}{9}. \end{aligned}$$

Continuando com nosso estudo, vamos apresentar alguns teoremas importantes que são aplicações da fórmula integral de Cauchy.

Como uma primeira aplicação do Teorema de Cauchy, temos como resultado, que toda função analítica é infinitamente diferenciável.

**Teorema 4.19.** *Se  $f$  é uma função analítica em um aberto  $A$  em  $\mathbb{C}$ , então todas as suas derivadas  $f', f'', \dots, f^{(k)}, \dots$  existem e são analíticas em  $A$ .*



**Demonstração:** A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [4], p.138.  $\square$

**Teorema 4.20.** (Teorema de Moreira). *Seja  $f$  uma função contínua em uma região  $R$  tal que*

$$\int_C f(z)dz = 0$$

*para todo contorno fechado  $C \subset R$ , então  $f$  é analítica em  $R$ .*

**Demonstração:** Podemos encontrar essa demonstração em [1, 4], em p.107 e p.139, respectivamente.  $\square$

**Teorema 4.21.** (Teorema de Liouville) *Se uma função  $f$  for inteira e limitada no plano complexo, então  $f(z)$  é constante em todo o plano.*

**Demonstração:** Para informações adicionais, a demonstração encontra-se em [4], p.141.  $\square$

**Teorema 4.22.** (Teorema fundamental da Álgebra). *Toda função polinomial de grau  $n \geq 1$ , possui ao menos uma raiz.*

**Demonstração:** O Teorema de Liouville, permite fazer uma demonstração simples do teorema fundamental da Álgebra.

De fato, consideremos o polinômio

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

onde  $n \geq 1$  e  $a_n \neq 0$ . Suponhamos por absurdo que  $P$  não se anule, de forma que

$$f(z) = \frac{1}{P(z)} = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0},$$

é uma função inteira. Como  $f(z) \rightarrow 0$  a medida que  $z \rightarrow \infty$  e  $f$  é contínua, resulta que  $f$  é limitada em qualquer parte finita do plano, e concluímos que  $f$  é limitada em todo o plano. Pelo teorema de Liouville segue que,  $f$  é constante, o que implica que  $P(z)$  também é constante. Logo,  $f$  é identicamente nula (pois é igual ao seu limite no infinito). Isto é absurdo, pois nos conduz a que  $P(z)$  é infinito para todo  $z$ , tornando o teorema verdadeiro.  $\square$

## 4.5 Séries de Taylor e Séries de Laurent

A fórmula integral de Cauchy, estudada anteriormente, nos fornece uma representação integral das funções analíticas, essa fórmula é muito importante quando se trata do estudo dessas funções. Trabalharemos agora com uma outra forma de representar as funções analíticas. Dessa vez utilizamos séries, dando foco principal às séries de Taylor e Laurent. A expressão *função regular* será usada como sinônima de *função analítica*.

**Teorema 4.23.** (*Série de Taylor*). Sejam  $f$  uma função analítica em uma região  $R$ ,  $z_0$  um ponto qualquer em  $R$  e  $D(z_0, r)$  um disco centrado em  $z_0$  e de raio  $r$  contido em  $R$ . Então, nesse disco a função  $f$  pode ser desenvolvida em séries de potências de  $z - z_0$ . Conhecida como a “série de Taylor” de função  $f$  relativo ao ponto  $z_0$  e pode ser representado por,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

O caso em que  $z_0 = 0$  é conhecido como série de MacLaurin da função  $f$ .

**Demonstração:** A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [1], p.134.  $\square$

Se for sabido que uma função é analítica em cada ponto de um disco centrado em  $z_0$ , decorre que a série de Taylor dessa função, centrada em  $z_0$ , sempre converge a  $f(z)$ , não sendo necessário qualquer teste para garantir essa convergência. Como exemplo de séries de potências, podemos analisar:

**Exemplo 4.24.** (*A exponencial*). Vamos considerar a função exponencial  $f(z) = e^z$ . Temos assim  $f^n(z) = e^z$  e com isso  $f^{(n)}(0) = 1$ . Portanto, neste caso quando desenvolvermos para  $z_0 = 0$ , vamos obter a série de MacLaurin da exponencial:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

válido para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

A constante de Euler é dada da seguinte maneira:

$$e = e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

### 4.5.1 Série de Laurent

Vimos no caso das séries de Taylor, que sempre é possível desenvolver uma função que seja regular em  $z_0$  através de séries de potências de  $z - z_0$ . Agora, veremos um teorema que pode ser considerado como uma generalização das séries de Taylor, onde esse desenvolvimento pode ser possível, mesmo que a função não seja regular em  $z_0$ , bastando para isso admitir potências com expoentes negativos. Esse tipo de série, conhecida como série de Laurent, é uma generalização da fórmula de Taylor.

**Teorema 4.25.** *Seja  $f$  uma função univalente e analítica em uma região anular  $G : r < |z - z_0| < R$ . Então, para todo  $z$  nessa região,*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (4.9)$$

onde os coeficientes  $a_n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

sendo  $C$  um contorno fechado em  $G$ , envolvendo  $z_0$  uma vez no sentido positivo.

**Demonstração:** Para informações adicionais, a demonstração deste teorema pode ser encontrada em [1], p.145.  $\square$

Como dissemos antes, a série de Laurent é uma generalização da série de Taylor. Se a função  $f$  é regular mesmo para  $|z - z_0| \leq r$ , então, para  $n = -1, -2, \dots$ , é também regular em todo o disco  $|z - z_0| < R$  a função de  $z$  dada por

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = f(z)(z - z_0)^{-n-1},$$

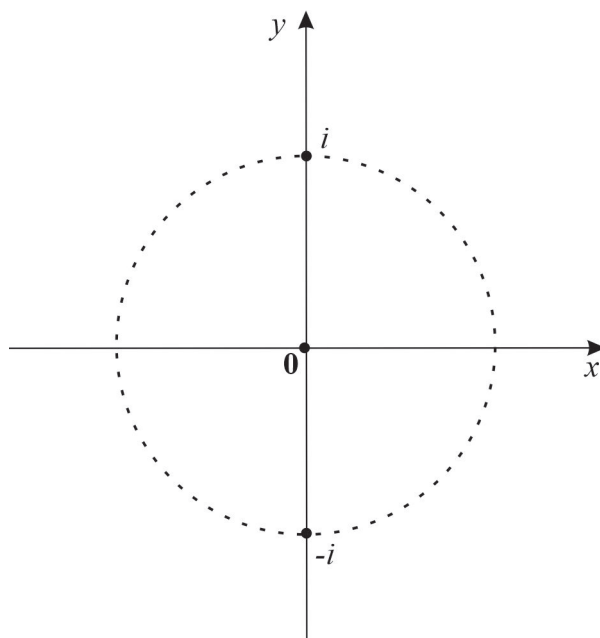
Em consequência,  $a_{-n} = 0$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , e a série de Laurent se reduz à série de Taylor.

**Exemplo 4.26.** A função

$$f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+z^2}$$

não é analítica nos pontos  $z = 0$  e  $z = \pm i$ . Procuremos a representação de  $f(z)$  em série de Laurent que seja válida no disco perfurado  $0 < |z| < 1$  como na Figura 4.10

Figura 4.10: Disco



Fonte: Arquivo pessoal.

Como  $|-z^2| < 1$  se  $|z| < 1$  podemos substituir  $z$  por  $-z^2$  na expansão em série de Maclaurin

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1).$$

O resultado é

$$\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad (|z| < 1).$$

Assim,

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n-1} \quad (0 < |z| < 1).$$

Segue que,

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{2n+1} \quad (0 < |z| < 1).$$

### 4.5.2 Singularidades e Resíduos

Trabalharemos agora com um importante teorema, conhecido como Teorema dos resíduos, que é uma generalização do Teorema de Cauchy. O Teorema de Cauchy afirma que a integral de uma função analítica sobre um círculo suave definido em um aberto  $A$ , é sempre nula. O Teorema dos Resíduos, permite que existam pontos isolados em  $A$  nos quais  $f$  não é analítica, que são as chamadas singularidades isoladas de  $f$ , que definiremos a seguir.

**Definição 4.27.** Diz-se que um ponto  $z_0$  é singularidade isolada de uma função  $f$  se existir uma vizinhança de  $z_0$  na qual  $f$  é univalente e regular, exceto no próprio ponto  $z_0$ .

A seguir, apresentamos um exemplo sobre singularidades de uma função.

**Exemplo 4.28.** A função

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)},$$

possui singularidades isoladas nos zeros do denominador, que são os pontos  $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

**Observação 4.29.** Seja  $z_0$  uma singularidade isolada de uma função  $f$ , e considere o desenvolvimento da série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (4.10)$$

A singularidade de  $f$  em  $z_0$  é classificada de acordo com a forma da série (4.10), da seguinte maneira:

- i)  $f$  tem uma *singularidade removível* em  $z_0$  se  $a_n = 0$  para todo índice  $n$  negativo.
- ii)  $f$  tem um *polo* em  $z_0$  se  $a_n \neq 0$  para apenas um número finito não nulo de índices  $n$  negativos.
- iii)  $f$  tem uma *singularidade essencial* em  $z_0$  se  $a_n \neq 0$  para uma infinidade de índices  $n$  negativos.

Vamos nos aprofundar um pouco nos polos de uma função, que será essencial para os resultados posteriores.

### 4.5.3 Polo

**Definição 4.30.** Seja  $f$  uma função tal que o desenvolvimento em série de Laurent em torno de um ponto singular isolado  $z_0$  possua um número finito de potências negativas. Vamos representar  $f$  por

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (b_n \neq 0),$$

isso quando  $0 < |z - z_0| < r$  para algum  $r > 0$ . A esse ponto  $z_0$  chamamos *pólo* de ordem  $m = n$  da função  $f$ . Quando  $m = 1$ , dizemos que  $z_0$  é um polo simples de  $f$ .

### 4.5.4 Teorema dos Resíduos

Seja  $f$  uma função regular e univalente em uma região  $R$ , exceto em uma singularidade isolada  $z_0 \in R$ . Então, numa vizinhança de  $z_0$  vale o desenvolvimento da serie de Laurent,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

onde os coeficientes  $a_n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad (4.11)$$

sendo  $C$  um contorno fechado em  $R$ , envolvendo  $z_0$  uma vez no sentido positivo.

**Definição 4.31 (Resíduo).** O coeficiente  $a_{-1}$  da equação (4.11) é chamado de *resíduo* de  $f$  no ponto  $z_0$ , e denotado por  $(res.f)(z_0)$ .

Agora apresentemos algumas proposições importantes para se trabalhar os resíduos.

**Proposição 4.32.** *Seja  $z_0$  uma singularidade isolada de uma função  $f$ , podemos determinar o resíduo dessa função da seguinte forma,*

$$(res.f)(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]. \quad (4.12)$$

Se  $m = 1$  (pólo simples), então o resultado é especialmente simples e é dado por,

$$(res.f)(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (4.13)$$

**Demonstração:** A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [5], p.42.  $\square$

**Exemplo 4.33.** Se  $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ , então  $z = 1$  e  $z = -1$  são polos de ordem 1 e 2 respectivamente. Usando as equações (4.12) e (4.13) para encontrar os resíduos em  $z = 1$  e

$z = 2$ , respectivamente, obtemos,

$$\text{Resíduo em } z = 1 \text{ é } \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \left[ \frac{z}{(z - 1)(z + 1)^2} \right] = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Resíduo em } z = -1 \text{ é } \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{(1)!} \frac{d}{dz} \left[ (z + 1)^2 \left( \frac{z}{(z - 1)(z + 1)^2} \right) \right] = -\frac{1}{4}.$$

**Proposição 4.34.** *Sejam  $p(z)$  e  $q(z)$  funções analíticas em um ponto  $z_0$ ,  $p(z_0) \neq 0$ ,  $q(z_0) = 0$  e  $q'(z_0) \neq 0$ . Se  $z_0$  é polo simples da função  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ , seu resíduo é igual a  $\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$ . Assim pela equação (4.13)*

$$(\text{res.} f)(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

**Demonstração:** A demonstração dessa proposição pode ser verificada em [5], p.44. □

Podemos ver essa propriedade sendo aplicada no exemplo a seguir.

**Exemplo 4.35.** Calculemos o resíduo da seguinte função:

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}. \tag{4.14}$$

Primeiramente precisamos determinar os pontos singulares da função (4.14), ou seja, os pontos onde  $z^4 + 1 = 0$ . Já vimos anteriormente que as raízes  $n$ -ésimas de um número complexo são dadas pela fórmula (2.1),

$$\sqrt[n]{|m|} \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \text{sen} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right] \quad \text{onde } k = 1, 2, 3, \dots, n - 1.$$

assim, as raízes quarta de  $z^4 = -1 = 1(\cos(\pi)) + i \text{sen}(\pi)$  são

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{1} \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_1 &= \sqrt[4]{1} \left( \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_2 &= \sqrt[4]{1} \left( \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_3 &= \sqrt[4]{1} \left( \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Agora vamos encontrar o resíduo de  $f$  no ponto  $z_0$ . A função  $f(z)$  é quociente das funções  $p(z) = 1$  e  $q(z) = z^4 + 1$  que são analíticas em  $z_0$ . Assim,

$$p(z_0) = 1 \neq 0 \text{ e } q(z_0) = 0.$$

Temos ainda que  $q'(z) = 4z^3$  e  $q'(z_0) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \neq 0$ . Logo  $z_0$  é polo simples e é dado por,

$$(res.f)(z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}. \quad (4.15)$$

Para  $z_1 = \frac{-\sqrt{2}sq}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$  temos

$$p(z_1) = 1, \text{ ou seja, } p(z_1) \neq 0,$$

$$q(z_1) = 0$$

e

$$\begin{aligned} q'(z_1) &= 4z^3 \\ &= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \\ &= 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \text{ ou seja, } q'(z_1) \neq 0. \end{aligned}$$

Para as demais raízes ( $z_2$  e  $z_3$ ), o resíduo segue de maneira análoga e ainda pode ser encontrado em [5], p.45.

Mostraremos a importância dos resíduos no seguinte teorema.

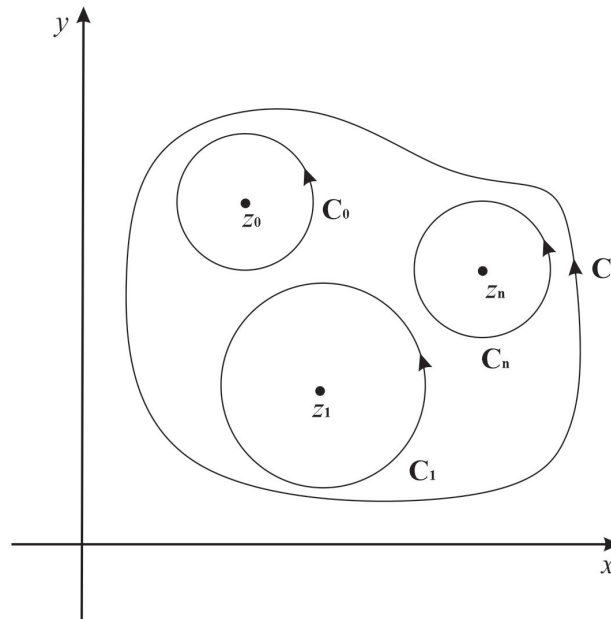
**Teorema 4.36.** (Teorema do resíduo) *Se  $f$  é regular e univalente em uma região simplesmente conexa  $R$ , exceto em um número finito de singularidades isoladas,  $z_1, \dots, z_k$ , então*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k (res.f)(z_j),$$

onde  $C$  é um contorno fechado de  $R$ , envolvendo  $z_1, \dots, z_k$  uma vez no sentido positivo.

**Demonstração:** Para demonstrar o teorema, vamos considerar caminhos  $C_j$  ( $0 \leq j \leq n$ ) fechados e orientados positivamente. Os caminhos  $C_j$  são traçados em torno dos pontos singulares  $z_j$  de forma que cada caminho  $C_j$  esteja contido inteiramente em  $C$  como vemos na Figura 4.11.

Figura 4.11: Região multiplamente conexa



Fonte: Arquivo pessoal.

Os caminhos  $C$  e  $C_j$  formam a fronteira da região fechada multiplamente conexa em que  $f$  é analítica.

Pelo Teorema 4.36, temos

$$\int_C f(z)dz - \int_{C_0} f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz - \dots - \int_{C_n} f(z)dz = 0.$$

Mas, isso equivale a

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_0} f(z)dz + \int_{C_1} f(z)dz + \dots + \int_{C_n} f(z)dz.$$

Como  $f$  é analítica no interior e sobre  $C_j$ , exceto nos próprios pontos  $z_j$  então pelo Teorema 4.25, podemos escrever

$$(res.f)(z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} f(z)dz,$$

ou seja,

$$\int_{C_j} f(z)dz = 2\pi i (res.f)(z_j), \quad 0 \leq j \leq n.$$

Portanto,

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i [(res.f)(z_0) + (res.f)(z_1) + \dots + (res.f)(z_n)].$$

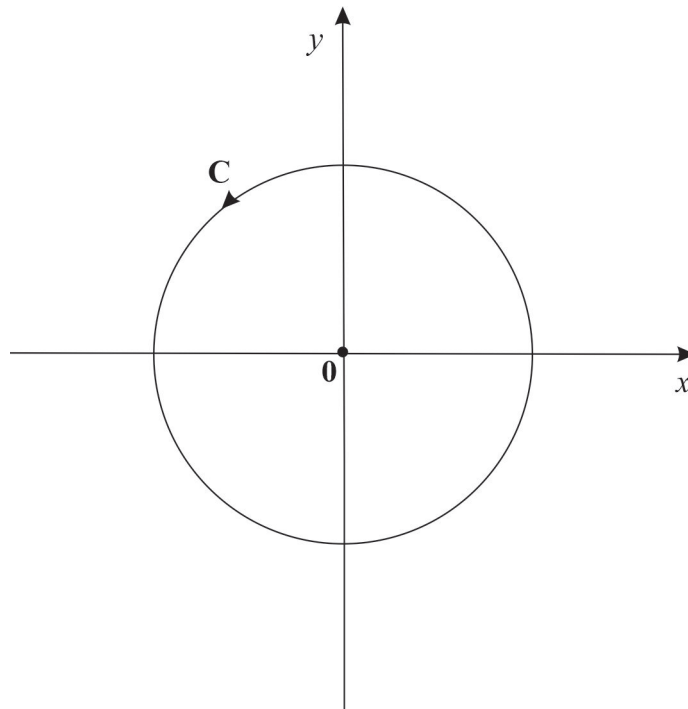
□

**Exemplo 4.37.** Consideremos a integral,

$$\int_C \frac{e^z - 1}{z^4} dz,$$



Figura 4.12: Círculo unitário



Fonte: Arquivo pessoal.

em que  $C$  é o círculo unitário  $|z| = 1$  orientado positivamente como mostra a Figura 4.12,

Como o integrando é analítico em todo o plano finito, exceto em  $z = 0$ , podemos representar o mesmo através de uma série de Laurent, com  $0 < |z| < \infty$ . Assim, o valor da integral é  $2\pi i$  vezes o resíduo do integrando em  $z = 0$ .

Para determinar esse resíduo, vamos nos recorrer as séries de MacLaurin

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (|z| < \infty)$$

e a usamos para escrever

$$\frac{e^z - 1}{z^5} = \frac{1}{z^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-5}}{n!} \quad (0 < |z| < \infty).$$

o coeficiente de  $\frac{1}{z}$  nessa última série ocorre se  $n - 5 = -1$  ou se  $n = 4$ . Logo,

$$\left( \text{res.} \frac{e^z - 1}{z^5} \right) (0) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24};$$

e, portanto,

$$\int_C \frac{e^z - 1}{z^4} dz = 2\pi i \left( \frac{1}{24} \right) = \frac{\pi i}{12}.$$

## Capítulo 5

# Integrais de Funções Reais via Integração Complexa

Neste capítulo, estudaremos algumas aplicações do Teorema dos Resíduos e da teoria de integração complexa, para a resolução de funções reais. Apresentaremos alguns exemplos de funções reais que após realizadas algumas transformações e substituições, podem ser resolvidas facilmente com os métodos aprendidos no decorrer desse trabalho.

Para o desenvolvimento deste capítulo nos basearemos nas seguintes referências [5, 6, 9].

### 5.1 Integrais do tipo $\int_0^{2\pi} F(\text{sen}(\theta), \cos(\theta))d\theta$

O primeiro exemplo que trabalharemos com os métodos complexos para resolver integrais reais, consistem em funções da seguinte forma,

$$\int_0^{2\pi} F(\text{sen}(\theta), \cos(\theta))d\theta, \quad (5.1)$$

onde  $F$  é um quociente de polinômios de  $\text{sen}(\theta)$  e  $\cos(\theta)$ . Para o uso dos métodos complexos, vamos utilizar as transformações aprendidas anteriormente em relação as exponencial  $z = e^{i\theta}$ , e com isso teremos,

$$\cos(\theta) = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \text{sen}(\theta) = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

e ainda,

$$dz = ie^{i\theta} d\theta \quad \text{que podemos escrever como} \quad dz = izd\theta.$$

Realizadas essas transformações, a integral (5.1) acima se comporta como uma integral curvilínea de uma função racional de  $z$  ao longo de um círculo unitário, bastando calcular a integral com uso dos resíduos. Vamos ao nosso primeiro exemplo,

**Exemplo 5.1.** Vamos calcular o valor da seguinte integral,

$$5 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \operatorname{sen}^2(\theta)}. \quad (5.2)$$

Como na integral aparece o  $\operatorname{sen}(\theta)$ , vamos utilizar a seguinte identidade

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{z - z^{-1}}{2i} \quad \text{e} \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

e substituindo na integral (5.2), considerando  $C$  o círculo unitário na Figura (5.1)  $|z| = 1$ , teremos,

$$\begin{aligned} 5 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \operatorname{sen}^2(\theta)} &= 5 \int_C \frac{1}{2 + \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)^2} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{5}{i} \int_C \frac{1}{2 + \left(\frac{z^2 - 2 + z^{-2}}{-4}\right)} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{5}{i} \int_C \frac{1}{\left(\frac{-8 + z^2 - 2 + z^{-2}}{-4}\right)} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{-20}{i} \int_C \frac{1}{z^2 - 10 + z^{-2}} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{-20}{i} \int_C \frac{1}{z^3 - 10z^2 + 1} dz \\ &= \frac{-20}{i} \int_C \frac{z}{z^4 - 10z^2 + 1} dz \end{aligned}$$

Analisando o integrando  $\frac{z}{z^4 - 10z^2 + 1}$ , podemos perceber que ele possui quatro pólos simples que são os pontos

$$z_0 = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}, \quad z_1 = -\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}, \quad z_2 = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \quad \text{e} \quad z_3 = -\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}.$$

Porém, como o círculo  $C$  é unitário, os únicos pontos que estão no seu interior são

$$z_0 = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \quad \text{e} \quad z_1 = -\sqrt{5 - 2\sqrt{6}},$$

cujos resíduos são,

$$(\operatorname{res}.f)(z_0) = \frac{-1}{\sqrt{8\sqrt{6}}} \quad \text{e} \quad (\operatorname{res}.f)(z_1) = \frac{-1}{\sqrt{8\sqrt{6}}}.$$

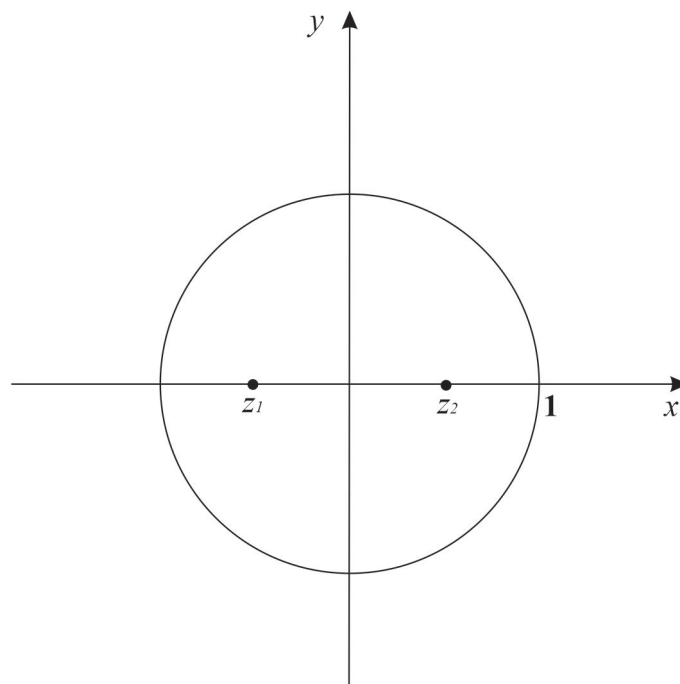
Logo,

$$\begin{aligned}
 \frac{-20}{i} \int_C \frac{z}{z^4 - 10z^2 + 1} dz &= \frac{-20}{i} \left( 2\pi i [(res.f)(z_0) + (res.f)(z_1)] \right) \\
 &= -40\pi \left[ \frac{-1}{8\sqrt{6}} - \frac{1}{8\sqrt{6}} \right] \\
 &= -40\pi \left[ \frac{-2}{8\sqrt{6}} \right] \\
 &= \frac{10\pi}{\sqrt{6}}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$5 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin^2(\theta)} = \frac{10\pi}{\sqrt{6}}.$$

Figura 5.1: Círculo unitário



Fonte: Arquivo pessoal.

## 5.2 Integrais impróprias de funções trigonométricas

Agora, apresentamos um outro resultado que será fundamental para o cálculo de integrais através dos resíduos, das funções que se seguem.

**Lema 5.2.** (Lema de Jordan) Seja  $C_R$  o semicírculo superior do círculo  $|z| = R$ . Considere a integral

$$\int_{C_R} e^{irz} g(z) dz, \quad \text{onde } r > 0.$$

Se  $g$  é analítica sobre e o interior de  $C_R$  exceto em um número finito de pontos singulares isolados, em que  $|g(z)| \geq G(R)$  para  $z$  em  $C_R$  com  $\lim_{R \rightarrow \infty} G(R) = 0$ . Então

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{irz} g(z) dz = 0.$$

**Demonstração:** A demonstração desse lema, pode ser encontrada em [5], p.57. □

Vamos a um exemplo clássico, onde podemos aplicar essas técnicas.

**Exemplo 5.3.** Vamos resolver a seguinte integral

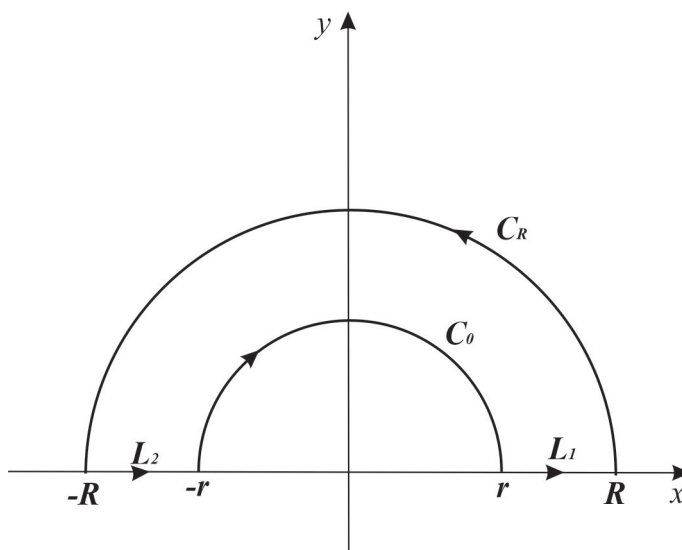
$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx.$$

Pelas identidades estudadas anteriormente sabemos que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \text{Im} \int_0^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Analisando o integrando  $\frac{e^{iz}}{z}$ , percebe-se que o mesmo possui uma irregularidade no ponto  $z = 0$ , o que nos impede de realizar o processo de integração diretamente. Vamos calcular  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$  sobre o caminho indicado na Figura 5.2.

Figura 5.2: Região determinada pela curva  $C$



Fonte: Arquivo pessoal.

Observe que  $C = C_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup C_R$  representa um caminho fechado onde  $f$  é analítica em todos os seus pontos interiores e sobre  $C$ , que nos permite aplicar o Teorema de Cauchy 4.14, isto é,

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0,$$

que pode ser dividido em partes como em (4.5), ou seja,

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_0} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \quad (5.3)$$

Trocando  $x$  por  $-x$  na primeira integral de (5.3), obtemos que

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx = - \int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx.$$

Assim,

$$2i \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} dx + \int_{C_0} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

ou ainda,

$$2i \int_r^R \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = - \int_{C_0} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz. \quad (5.4)$$

pelo lema de Jordan, quando  $R \rightarrow \infty$  a integral

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Vamos analisar

$$- \int_{C_0} \frac{e^{iz}}{z} dz \quad \text{quando } r \rightarrow 0.$$

Temos

$$z = re^{i\theta}, \quad dz = rie^{i\theta} d\theta.$$

logo,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left( - \int_{\pi}^0 \frac{e^{ire^{i\theta}} rie^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta \right) &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( -i \int_{\pi}^0 e^{ire^{i\theta}} d\theta \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n -ie^{ire^{i\theta}} \Delta\theta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n -ie^{ire^{i\theta}} \Delta\theta \\ \lim_{r \rightarrow 0} \left( - \int_{\pi}^0 \frac{e^{ire^{i\theta}} rie^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n -i\Delta\theta \\ &= -i(0 - \pi) \\ &= \pi i. \end{aligned}$$

Fazendo  $R \rightarrow \infty$  e  $r \rightarrow 0$  em (5.4), temos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx &= \frac{\pi i}{2i} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Concluindo assim a resolução.

### 5.3 Integrais do tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

Por outro lado, destacamos ainda a importância da integração complexa na resolução de integrais impróprias de funções reais, que trabalharemos a seguir.

Consideremos agora as integrais reais do tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad (5.5)$$

onde  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , sendo  $p$  e  $q$  polinômios de grau  $q$  e  $p$ , respectivamente com  $q > p$ . Destacamos que  $q$  não possui zeros reais.

Para equações do tipo (5.5), consideremos como região de integração, a região de contorno de um semicírculo  $C_R$  com raio variando de  $-R$  a  $R$ , com  $R$  suficientemente grande, de forma que todos os zeros do polinômio do denominador se encontrem dentro do círculo, consequentemente, todos os zeros da divisão dos polinômios também estarão contidos no círculo.

Integrando a função  $f(x)$  ao longo do caminho semicircular  $C_R$  como mostra a Figura 5.3,

e aplicando a equação 4.11, teremos,

$$\int_{-R}^R f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_j (\operatorname{res}.f)(z_j), \quad (5.6)$$

onde  $z_j$  são os pontos singulares, sendo  $\operatorname{Im} a(z_j) > 0$ . Fazendo  $R \rightarrow \infty$ , encontraremos o valor desejado.

Para ilustrar isso, consideremos o seguinte exemplo,

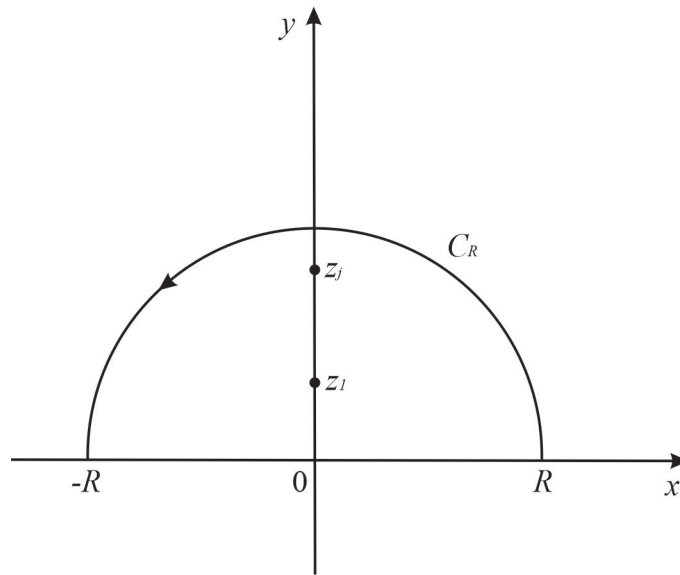
**Exemplo 5.4.** Vamos calcular a seguinte integral  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$ .

Consideremos a integral  $\int_C \frac{dz}{z^6 + 1}$  onde  $C = [-R, R] \cup C_R$  é um contorno fechado, variando na reta de  $-R$  a  $R$ , sendo  $C_R$  o semicírculo exibido pela Figura 5.3, percorrido no sentido positivo.

O polinômio  $z^6 + 1 = 0$ , possui como raízes ou singularidades, os pontos

$$z = e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{3\pi i}{6}}, e^{\frac{5\pi i}{6}}, e^{\frac{7\pi i}{6}}, e^{\frac{9\pi i}{6}}, e^{\frac{11\pi i}{6}},$$

Figura 5.3: Semicírculo  $C_R$



Fonte: Arquivo pessoal.

que são também pólos simples de  $\frac{1}{(z^6 + 1)}$ .

Somente os pólos  $z = e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{3\pi i}{6}}, e^{\frac{5\pi i}{6}}$ , estão contidos dentro do semicírculo  $C$ . Por esse motivo, calculamos apenas o resíduo desses pontos.

Resíduo de  $e^{\pi i/6}$

$$\begin{aligned} e^{\pi i/6} &= \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/6}} \left[ (z - e^{\pi i/6}) \frac{i}{z^6 + 1} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} \\ &= \frac{1}{6} e^{-5\pi i/6}; \end{aligned}$$

Resíduo de  $e^{3\pi i/6}$

$$\begin{aligned} e^{3\pi i/6} &= \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/6}} \left[ (z - e^{3\pi i/6}) \frac{i}{z^6 + 1} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} \\ &= \frac{1}{6} e^{-5\pi i/2}; \end{aligned}$$



Resíduo de  $e^{5\pi i/6}$

$$\begin{aligned} e^{5\pi i/6} &= \lim_{z \rightarrow e^{5\pi i/6}} \left[ (z - e^{5\pi i/6}) \frac{i}{z^6 + 1} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{5\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} \\ &= \frac{1}{6} e^{-25\pi i/6}. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema dos Resíduos 4.36, teremos

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{z^6 + 1} &= 2\pi i \left[ \frac{1}{6} e^{-5\pi i/6} + \frac{1}{6} e^{-5\pi i/2} + \frac{1}{6} e^{-25\pi i/6} \right] \\ &= \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Aplicando a equação (5.6) concluímos que,

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{x^6 + 1} + \int_C \frac{dz}{z^6 + 1} = \frac{2\pi}{3}. \quad (5.7)$$

Fazendo  $R \rightarrow \infty$  em (5.7), obtemos

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{x^6 + 1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{2\pi}{3}.$$

Conclui-se assim que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}.$$

Portanto, o valor da integral é  $\frac{\pi}{3}$ .

## 5.4 Integrais definidas do tipo $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \left\{ \cos mx, \text{sen } mx \right\} dx$

Vamos analisar mais uma aplicação da integração complexa.

**Exemplo 5.5.** Mostremos que  $\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2} e^{-m}$ ,  $m > 0$ .

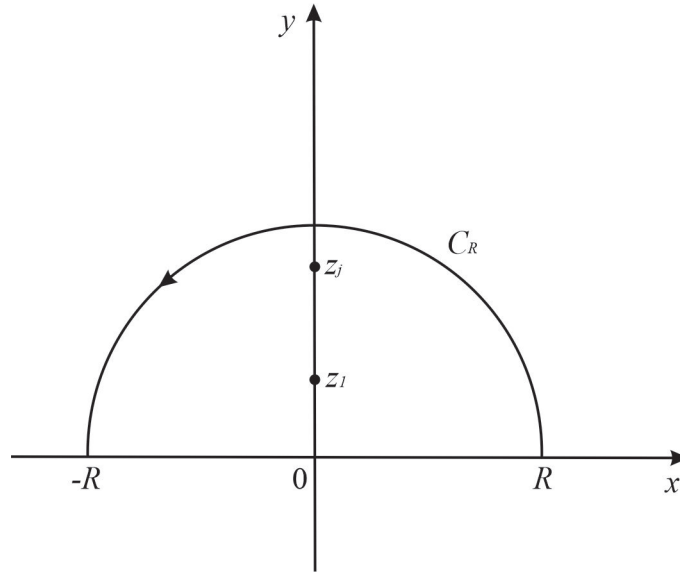
Consideremos  $\int_C \left\{ \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} \right\} dz$ , onde  $C = [-R, R] \cup C_R$  é o contorno da Figura 5.4.

O integrando possui polos simples em  $z = \pm i$ , mas apenas  $z = i$  está no interior de  $C$ .

Assim vamos calcular o resíduo no ponto  $z = i$

$$\lim_{z \rightarrow i} \left\{ (z - i) \frac{e^{imz}}{(z - i)(z + i)} \right\} = \frac{e^{-m}}{2i}$$

Figura 5.4: Semicírculo  $C_R$



Fonte: Arquivo pessoal.

Então, pelo Teorema dos resíduos 4.36,

$$\int_C \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \left\{ \frac{e^{-m}}{2i} \right\} = \pi e^{-m}$$

ou por (5.6), temos

$$\int_{-R}^R \frac{e^{imx}}{x^2 + 1} dx + \int_{C_R} \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz = \pi e^{-m}$$

isto é,

$$\int_{-R}^R \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx + i \int_{-R}^R \frac{\sin mx}{x^2 + 1} dx + \int_{C_R} \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz = \pi e^{-m}$$

e então,

$$2 \int_0^R \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx + \int_{C_R} \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz = \pi e^{-m}.$$

tomando o limite quando  $R \rightarrow \infty$ , notamos que a segunda integral tende a zero. Portanto,

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2} e^{-m},$$

como se desejava.

### 5.4.1 Aplicação na probabilidade

Uma aplicação bem interessante que podemos estudar quando se trata de integrais, é na área da probabilidade, como veremos a seguir.

**Definição 5.6.** Uma função positiva integrável em  $\mathbb{R}$  é chamada *densidade de probabilidade* se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \tag{5.8}$$

A partir da função densidade de probabilidade, definimos a *probabilidade* de um número  $x$  está compreendido entre  $a$  e  $b$  com ( $b > a$ ) por:

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (5.9)$$

Podemos ver a aplicação dessas definições através de um exemplo.

**Exemplo 5.7.** Seja  $\alpha > 0$ , então a função,

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

é densidade de probabilidade.

**Solução:**

Com efeito, notemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx \\ &= \alpha \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-\alpha x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-\alpha b}) \\ &= 1, \end{aligned}$$

Assim, a função  $f(x)$  verifica a equação (5.8). Portanto,  $f(x)$  é uma função densidade de probabilidade.

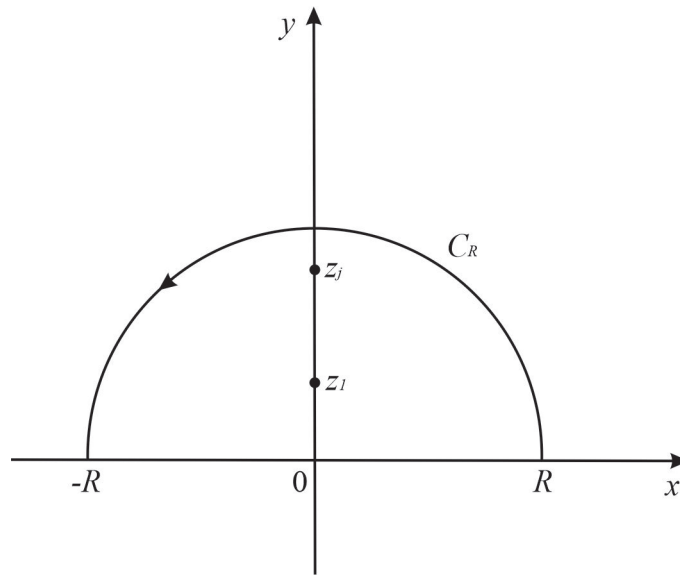
Podemos ainda calcular a probabilidade de  $x$  se encontrar entre 0 e 1 aplicando (5.9), como segue,

$$\begin{aligned} P(0 < x < 1) &= \alpha \int_0^1 e^{-\alpha x} dx \\ &= 1 - e^{-\alpha}. \end{aligned}$$

**Exemplo 5.8.** Numa fábrica de circuitos impressos, suponha que a vida útil desses circuitos tem uma distribuição descrita pela função densidade de probabilidade  $f(x) = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}$ , onde  $x$  é medido em horas.

- a) Mostremos que a função  $f(x)$  é de fato densidade de probabilidade, ou seja,  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2 + 1)} = 1$ .

**Solução:**

Figura 5.5: Semicírculo  $C_R$ 


Fonte: Arquivo pessoal.

Consideremos  $\int_C \frac{dz}{\pi(z^2 + 1)}$ , onde  $C = [-R, R] \cup C_R$  é o contorno fechado como vemos na Figura 5.5, consistindo

na reta de  $-R$  a  $R$  e no semicírculo  $C_R$ , percorrido no sentido positivo. Temos que,

$$\int_C \frac{dz}{\pi(z^2 + 1)} = \frac{1}{\pi} \int_C \frac{dz}{(z^2 + 1)}.$$

Considerando o integrando  $\frac{1}{(z^2 + 1)}$ , percebemos que temos polos simples em  $z = \pm i$ , mas apenas  $z = i$  está dentro de  $C$ .

Vamos calcular o resíduo nesse ponto.

$$\lim_{z \rightarrow i} \left\{ (z - i) \frac{1}{(z - i)(z + i)} \right\} = \frac{1}{2i}.$$

Assim temos que por (4.36),

$$\int_C \frac{1}{(z^2 + 1)} = 2\pi i \left\{ \frac{1}{2i} \right\} = \pi,$$

e por (5.6),

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{(x^2 + 1)} + \frac{1}{\pi} \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2 + 1)} = 1.$$

Tomando o limite quando  $R \rightarrow \infty$ , percebemos que a segunda integral tende a zero.

Daqui,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2 + 1)} = 1.$$

Portanto,  $f(x)$  é uma função densidade de probabilidade.

b) Qual a probabilidade de os circuitos funcionarem menos de 200 horas?

**Solução:**

A probabilidade é calculada por (5.9), ou seja,

$$P(0 < x < 200) = \frac{1}{\pi} \int_0^{200} \frac{dx}{(x^2 + 1)},$$

desenvolvendo as operações necessárias, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{200} \frac{dx}{(x^2 + 1)} &= \frac{\tan^{-1}(x)}{\pi} \Big|_0^{200} \\ &= \frac{\tan^{-1}(200)}{\pi} \\ &= 0.49841. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que a probabilidade de os circuitos funcionarem menos de 200 horas é aproximadamente 50%.

# Capítulo 6

## Considerações Finais

O presente trabalho descreve a aplicação da teoria de integração complexa aplicada ao cálculo de integrais de funções reais que muitas vezes são difíceis e trabalhosas de serem resolvidas através de métodos tradicionais do cálculo, como é o caso das funções impróprias apresentadas. Após a descrição dos conteúdos, fizemos uma aplicação em uma área que é de grande importância em nosso dia-a-dia, que é a probabilidade, mostrando assim, que por mais que seja um universo de números pouco conhecidos pela sociedade em geral, eles formam um conjunto muito vasto, onde podemos encontrar respostas para muitos de nossos problemas.

Além de conhecer novas teorias, também foi possível ao longo do desenvolvimento deste trabalho, rever e explorar conceitos aprendidos ao longo das disciplinas, como o caso das propriedades de números complexos, séries e muitos outros. A aquisição desses significativos conhecimentos impulsionaram o interesse para seguir os estudos e quem sabe uma futura versão desta pesquisa, buscando abranger outras áreas do conhecimento.

Esperamos ter contribuído na divulgação e apresentação desse interessante conjunto formado pelos números complexos, bem como incentivar o leitor a despertar o interesse pelo estudo desse conjunto. Com isso, ansiamos que a escrita desse trabalho possa servir de base para futuras e novas pesquisas na área.

# Referências

- [1] ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. Variáveis Complexas e Aplicações. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- [2] BROWN, James Ward. Variáveis Complexas e Aplicações. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2015. Claus Ivo Doering.
- [3] CHURCHILL, Ruel, V. Variáveis Complexas e suas Aplicações. São Paulo: Editora McGRAW-HILL do Brasil, 1975.
- [4] FERNANDEZ, Cecília S.; BERNARDES JUNIOR, Nilson C.. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- [5] JESUS, Daynitti Ventura de. Aplicações do Teorema do Resíduo. 2007. 79 f. Monografia (Especialização) - Curso de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.
- [6] KAPLAN, Wilfred. Cálculo Avançado. 2. ed. São Paulo: Edcard Blucher Hda., 1972. Frederic Tsu.
- [7] LEITE, José Carlos. Variáveis Complexas. São Cristóvão: Cesad, 2011.
- [8] SOUSA JUNIOR, Luiz Amancio Machado de; JUTUCA, Luiz Pedro San Gil. Introdução às Funções de Variáveis Complexas I. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2015.
- [9] SPIEGEL, Murray R., Variáveis Complexas, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.
- [10] ZANI, Sérgio L.. Funções de Uma Variável Complexa. Disponível em: <<http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/szani/complexa.pdf>>. Acesso em: 10 abr. 2019.