



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LARA BORGES VIEIRA

**UMA ANÁLISE SOBRE A MATRIZ DE LESLIE APLICADA AO CRESCIMENTO
POPULACIONAL DOS ESTADOS DE GOIÁS E TOCANTINS E DO BRASIL**

ARAGUAÍNA-TO

2019

LARA BORGES VIEIRA

**UMA ANÁLISE SOBRE A MATRIZ DE LESLIE APLICADA AO CRESCIMENTO
POPULACIONAL DOS ESTADOS DE GOIÁS E TOCANTINS E DO BRASIL**

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco.

ARAGUAÍNA-TO

2019

LARA BORGES VIEIRA

**UMA ANÁLISE SOBRE A MATRIZ DE LESLIE APLICADA AO CRESCIMENTO
POPULACIONAL DOS ESTADOS DE GOIÁS E TOCANTINS E DO BRASIL**

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

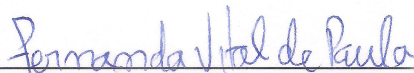
Orientador: Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco.

Aprovada em: 06/12/2019

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco (orientador)



Prof. Dra. Fernanda Vital de Paula



Prof. Dra. Samara Leandro Matos da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

- V658a Vieira, Lara Borges.
 Uma análise sobre a matriz de Leslie aplicada ao crescimento populacional dos estados de Goiás e Tocantins e do Brasil. / Lara Borges Vieira. – Araguaína, TO, 2019.
 78 f.
- Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2019.
 Orientador: Alvaro Julio Yucra Hanco
1. Matriz. 2. Autovalores e Autovetores. 3. Leslie. 4. Crescimento populacional. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dedico este trabalho, a quem sempre acreditou em meu potencial, família, amigos e em especial à Cristhyany.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, que sempre foi meu principal pilar nesta caminhada, pela saúde concedida a mim, pela força para continuar, e pelos sonhos que estão se realizando.

Agradeço à minha família, em especial ao meu pai Vagno, que sempre me incentivou a nunca desistir e sempre acreditou em meus sonhos, à minha mãe Erica, pelo apoio de sempre, ao meu irmão Leonardo, às minhas duas avós, às minhas tias, aos meus tios e primos e à minha amiga Keity Ellen.

Agradeço aos meus padrinhos, Maria do Socorro e Nauilho, que viveram intensamente esse período de graduação comigo.

Agradeço à minha principal inspiração, Cristhyany, foi quem sempre esteve comigo, quem escutou meus "dramas", quem vibrou comigo a cada conquista, quem me incentivou a sempre buscar o meu melhor, quem Deus me presenteou como professora, amiga e anjo da guarda.

Agradeço ao meu orientador, Professor Dr. Alvaro, pela paciência, por compartilhar conhecimento, por ter sempre boas palavras de incentivo e pelo empenho em orientar com dedicação este trabalho.

Agradeço aos professores do colegiado de Matemática, em especial aos professores doutores, José Carlos, Samara, Fernanda, Deive e Sinval, pelas experiências compartilhadas e pelos momentos que foram únicos dentro da Universidade.

Agradeço aos amigos que fiz durante esta caminhada, Thalya Horrany, Teylane França, Hevellyn Tays, Bruno Neres, Aico Alves, Victor Wender, Nelly Almeida, Maria Cristina, Jusciel Kvan, Elissama Birzavite, Kevellyn Samara, Daniela Pereira, Gabriel Costa, Alysson Neres e Maria Caroline, por todos os momentos, pelos corujões de estudos, pelas partidas de truco, pela união desde o primeiro período, por tudo.

A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.

Galileu Galilei

RESUMO

Neste trabalho apresentamos um modelo de aplicação da Álgebra Linear, denominado matriz de Leslie, com o objetivo de apresentar o crescimento populacional feminino de uma determinada população escolhida. Neste caminho, tomamos definições e teoremas relacionados aos autovalores e autovetores de uma matriz quadrada, assim como a diagonalização de matrizes quadradas, em que buscaremos mostrar como o modelo matricial de Leslie, a matriz de Leslie, se comporta para calcular esse crescimento dessa população. Especificamente, através da matriz de Leslie, realizaremos uma análise acerca da projeção da população feminina do Brasil e dos estados de Goiás e Tocantins, em determinados anos e faixas etárias das populações.

Palavras-chave: Álgebra Linear. Matriz de Leslie. Crescimento Populacional.

ABSTRACT

In this paper we present an application model of Linear Algebra, called Leslie matrix, with the objective of presenting the female population growth of a given chosen population. In this way, we take definitions and theorems related to the eigenvalues and eigenvectors of a square matrix, as well as the diagonalization of square matrices, in which we seek to show how the Leslie matrix model, the Leslie matrix, behaves to calculate this growth of this population. Specifically, through the Leslie matrix, we will analyze the projection of the female population of Brazil and the states of Goiás and Tocantins, in certain years and age groups of the populations.

Keywords: Linear algebra. Leslie's matrix. Population growth.

Lista de Figuras

3.1	Distribuição das faixas etárias	28
3.2	Fêmeas nascidas	31
3.3	Fêmeas na faixa etária $i + 1$	31
3.4	Distribuição das faixas etárias do Besouro VW	36
3.5	Comportamento limite da função $q(\lambda)$	42

Lista de Tabelas

3.1	População após um ano.	26
3.2	População feminina com n faixas	29
3.3	População feminina de Renas	37
3.4	População feminina de Renas em 1990	37
4.1	População residente no Brasil no ano de 2010.	53
4.2	Óbitos femininos no Brasil (2010)	54
4.3	Filhas nascidas vivas no Brasil (2010)	55
4.4	População residente no Estado do Goiás no ano de 2010.	60
4.5	Óbitos femininos no Estado do Goiás (2010)	61
4.6	Filhas nascidas vivas no Estado do Goiás (2010)	62
4.7	População residente no Estado do Tocantins no ano de 2010.	66
4.8	Óbitos femininos no Estado do Tocantins (2010)	67
4.9	Filhas nascidas vivas no Estado do Tocantins (2010)	68
4.10	Projeção da população residente no Brasil através da Matriz de Leslie.	73
4.11	Projeção da população residente no estado do Goiás através da Matriz de Leslie.	75
4.12	Projeção da população residente no estado do Tocantins através da Matriz de Leslie.	76

Sumário

1	Introdução	12
2	Noções Preliminares	14
2.1	Autovalores e Autovetores	14
2.2	Diagonalização	18
3	Matriz de Leslie	25
3.1	Introdução ao Modelo	25
3.2	Descrição do Modelo Matricial de Leslie	28
3.3	Comportamento Limite	40
4	Aplicação da Matriz de Leslie	52
4.1	Coleta de dados	52
4.2	Comparação dos dados	71
4.2.1	Projeção das populações analisadas	72
5	Considerações Finais	77
	Referências	78

Capítulo 1

Introdução

Na Álgebra Linear, existem alguns conceitos teóricos tais como, autovalores, autovetores e diagonalização de operadores, que permitem analisar determinados modelos. Um deles, por exemplo, é o modelo matricial de Leslie que consiste em analisar populações animais ou humanas.

A matriz de Leslie é um dos fatores que agrega a interdisciplinaridade entre Matemática e Biologia, e nos traz um modelo matemático, que conduzido pela Álgebra Linear, nos demonstra como pode funcionar os períodos entre nascimento e morte de determinadas espécies, em específico, o gênero feminino de cada população (humana ou animal) escolhida. Neste sentido, podemos explorar como funciona cada momento da vida de uma população e como será sua taxa de crescimento a partir da escolha de dados apropriados.

Compreendemos que, por meio da Álgebra Linear, é possível estudar modelos matemáticos, tais como a matriz de Leslie, apresentada no parágrafo anterior, que descreve o crescimento de uma população e mostra a projeção de vida de suas faixas etárias, desde o seu nascimento até a sua morte. Algumas aplicações do modelo são interessantes de serem estudadas, pois trazem a perspectiva de vida de um determinado grupo de uma espécie escolhida; como através dos anos se reproduzem; e se ao final de um tempo estipulado essa espécie teve um considerável aumento em sua população; ou se houve uma diminuição na população escolhida.

Na realização de nossa pesquisa, surgiram as seguintes questões: na elaboração de dados relevantes sobre determinados períodos e momentos chaves (de uma espécie estipulada), de que forma a Matriz de Leslie auxilia nas análises de determinadas características na vida dessa espécie? Podemos usar a teoria da Álgebra Linear para analisar alguns modelos matemáticos e tentar entender os períodos de nascimento e morte de determinadas espécies? Como utilizar apropriadamente o modelo matricial de Leslie para encontrar dados relevantes sobre uma espécie? Os dados encontrados através do modelo de Leslie, nos permitirão realizar a análise sobre algumas faixas etárias no decorrer da vida de uma espécie?

Sendo assim, queremos demonstrar de que maneira a Álgebra Linear pode aprofundar o estudo da Matriz de Leslie para contribuir com o seu próprio modelo matricial. O presente trabalho tem os seguintes objetivos: apresentar conceitos da Álgebra Linear, em específico, autovalores e autovetores e diagonalização de operadores; definir as características e conceitos prévios da Matriz de Leslie, com exemplos sobre a Matriz de Leslie; e por último, apresentar uma aplicação da Matriz de Leslie.

Para a realização dessa pesquisa, utilizaremos a metodologia qualitativa, isto é, “explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas” (Gerhardt e Silveira 2009, p. 32), apoiando-nos das referências bibliográficas, tais como, livros, artigos, dissertações entre outros.

Esta monografia está dividida em 5 capítulos:

No capítulo 2, apresentaremos algumas noções preliminares, a saber, definições e teoremas relacionados aos autovalores e autovetores de uma matriz, diagonalização de uma matriz, que serão de grande importância para o decorrer do trabalho.

No capítulo 3, estudaremos como o modelo matricial de Leslie se constitui e quais são os meios para investigar o crescimento populacional das fêmeas de uma população.

No capítulo 4, apresentaremos o modelo matricial de Leslie no crescimento populacional do Brasil e dos estados de Goiás e Tocantins, dispostos em faixas etárias com divisões de 5 anos.

No último capítulo, serão apresentadas as considerações finais desse trabalho.

Capítulo 2

Noções Preliminares

Neste capítulo, serão abordadas algumas definições e resultados de alguns conceitos da Álgebra Linear, especificamente, autovalores e autovetores, diagonalização, todos relacionados a matrizes de ordem quadrada, que são a base para a compreensão modelo matricial de Leslie. Para mais detalhes consultar as seguintes referências: ANTON e RORRES (2012), BOLDRINI et al. (1980) e LEON (1999).

2.1 Autovalores e Autovetores

Definição 2.1. Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Um número $\lambda \in \mathbb{R}$, será chamado autovalor de A e v um autovetor de A associado ao autovalor λ , se v for diferente do vetor nulo e se, ambos satisfizerem a seguinte igualdade,

$$Av = \lambda v. \quad (2.1)$$

Exemplo 2.2. Consideremos o vetor

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

e a matriz quadrada,

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 16 & -2 \end{bmatrix}.$$

Temos,

$$Av = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 16 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 6v.$$

Assim, podemos dizer que v é um autovetor de A com autovalor associado $\lambda = 6$.

Exemplo 2.3. Considerando as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 16 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

temos

$$Av = \begin{bmatrix} 12 & 16 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 4v.$$

Portanto, v é um autovetor de A com autovalor associado $\lambda = 4$.

Para compreendermos como funciona a equação (2.1), precisamos da seguinte definição relacionada ao núcleo de uma matriz.

Definição 2.4. Seja A uma matriz de ordem n . O núcleo de A é o conjunto de todas as soluções do sistema

$$Ax = 0$$

O núcleo de uma matriz será denotado por $N(A)$ ou $Ker(A)$.

Assim,

$$N(A) = \{x \in R^n \mid Ax = 0\}.$$

Para mais informações, consultar: LEON (1999) p. 92.

Teorema 2.5. Se A for uma matriz de ordem n , então λ é um autovalor de A se, e somente se, λ satisfaz a equação

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (2.2)$$

Demonstração: (\Rightarrow) Dada a equação (2.1) que define os autovalores e autovetores de A ,

$$Av = \lambda v,$$

em que $v \neq \vec{0}$ é o autovetor associado ao autovalor λ . Temos

$$Av - \lambda v = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{0} = Av - \lambda Iv \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = \vec{0},$$

em que I , denota a matriz identidade de ordem n . Consideremos $B = A - \lambda I$. Daqui

$$Bv = \vec{0} \implies v \in N(B).$$

Lembremos, que para as linhas de uma matriz serem linearmente independentes, o seu núcleo deve conter somente o vetor nulo.

Como $v \in N(B)$, e queremos que $v \neq \vec{0}$ (pois ele é autovetor associado ao autovalor λ), podemos concluir que, as colunas de B são linearmente dependentes, logo,

$$\det(B) = 0,$$

ou seja,

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Note que

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

(\Leftrightarrow) Consideremos o sistema

$$(A - \lambda I)w = \vec{0}. \quad (2.3)$$

Como $\det(A - \lambda I) = 0$, existe pelo menos uma linha ou coluna de $A - \lambda I$ que é combinação linear das outras. Assim, pela teoria da solução de um sistema de equações lineares, podemos afirmar que o sistema (2.3) possui pelo menos uma solução não nula w , ou seja, A possui um autovalor λ com autovetor associado w . \square

Definição 2.6. Seja A uma matriz de ordem n . Então, $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é chamado de *polinômio característico* de A , onde os zeros de $P_A(\lambda)$ serão autovalores de A .

Corolário 2.7. Seja λ um autovalor de uma matriz A , então λ é uma raiz da equação $P_A(x) = 0$.

Demonstração:

Se λ é um autovalor de A , pelo Teorema 2.2 segue que λ satisfaz a equação

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Portanto, λ é uma raiz da equação

$$P_A(x) = 0.$$

\square

Exemplo 2.8. Vamos determinar os autovalores da seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Para encontrar os autovalores associados, devemos calcular $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$,

$$P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 7 - \lambda & 0 \\ 0 & 6 - \lambda \end{bmatrix} = (7 - \lambda)(6 - \lambda) = \lambda^2 - 13\lambda + 42.$$

Agora, calculamos as soluções (ou raízes) da equação $P_A(\lambda) = 0$.

Ou seja, $(7 - \lambda)(6 - \lambda) = 0$ daqui $\lambda = 7$ ou $\lambda = 6$.

Logo, os autovalores de A , são respectivamente 7 e 6.

Exemplo 2.9. Calcularemos os autovalores e autovetores da matriz A

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Primeiro, vamos calcular os autovalores de A ,

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -4 - \lambda & -1 \\ 0 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = (-4 - \lambda)(4 - \lambda) = -16 + 4\lambda - 4\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - 16.$$

Agora, resolvemos a equação, para $P(\lambda) = 0$, isto é,

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 16 = 0 \text{ daqui } \lambda = -4 \text{ e } \lambda = 4.$$

Para calcularmos o autovetor de $\lambda = -4$, vamos determinar o vetor,

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

que satisfaz a equação (2.1), ou seja

$$Av - \lambda v = \vec{0} \Rightarrow (A - \lambda I)v = \vec{0}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 - \lambda & -1 \\ 0 & 4 - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 + 4 & -1 \\ 0 & 4 - (-4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, temos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} -y = 0 \\ 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0.$$

Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = -4$, são dados no subconjunto

$$S_{-4} = \{v = (x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}.$$

Notemos que o subespaço S_{-4} é gerado pelo vetor $(1, 0)$.

Analogamente, para $\lambda = 4$, temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 - \lambda & -1 \\ 0 & 4 - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 - 4 & -1 \\ 0 & 4 - 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, temos o sistema

$$\begin{cases} -8x - y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -8x.$$

Daqui, os autovetores para $\lambda = 4$, formam o subconjunto

$$S_4 = \{v = (x, -8x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}.$$

Notemos que o subespaço S_4 está gerado pelo vetor $(1, -8)$.

2.2 Diagonalização

Definição 2.10. Uma matriz quadrada A , em que somente a diagonal principal é não nula, é chamada de matriz diagonal, isto é,

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = 0, \quad \text{para todo } i \neq j. \quad (2.4)$$

Exemplo 2.11. Consideremos duas matrizes genéricas, de ordem 2 e 3, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix},$$

elas são duas matrizes diagonais.

Exemplo 2.12. Agora, a seguinte matriz genérica de ordem n .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

também é uma matriz diagonal.

Definição 2.13. Sejam A e B duas matrizes de ordem n , dizemos que essas matrizes são semelhantes, se existir uma matriz inversível P , que satisfaz

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P. \quad (2.5)$$

Proposição 2.14. Matrizes semelhantes possuem o mesmo *polinômio característico*.

Demonstração: Sejam A e B , matrizes semelhantes de ordem n , logo, existe P tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Daqui,

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I),$$

como $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$, temos

$$P_B(\lambda) = \det(P^{-1} \cdot A \cdot P - \lambda I)$$

$$P_B(\lambda) = \det(P^{-1} \cdot A \cdot P - \lambda \cdot P^{-1} \cdot I \cdot P).$$

Colocando P^{-1} e P em evidência, obtemos

$$P_B(\lambda) = \det(P^{-1} \cdot (A - \lambda I) \cdot P),$$

usando uma propriedade do determinante, tem-se

$$P_B(\lambda) = \det(P^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det(P),$$

logo,

$$P_B(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Portanto, concluímos

$$P_B(\lambda) = P_A(\lambda).$$

□

Definição 2.15. Seja A uma matriz de ordem n , dizemos que A é diagonalizável se A é semelhante a uma matriz diagonal D .

Teorema 2.16. Uma matriz quadrada A de ordem n é diagonalizável se, e somente se, A tem n autovetores linearmente independentes.

Demonstração: (\Rightarrow) Suponha que A é diagonalizável, então existe uma matriz Q inversível, tal que

$$Q^{-1}AQ = D. \quad (2.6)$$

Sejam $Q = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$, ou seja, v_1, v_2, \dots, v_n são os vetores colunas de Q e

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Logo, de (2.6), temos

$$AQ = QD.$$

Daqui,

$$Av_i = \lambda_i v_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, n;$$

isto é, v_i é autovetor de A com autovalor associado a λ_i .

Dado que Q é inversível, suas colunas v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente independentes.

Portanto, A tem n autovetores linearmente independentes.

(\Leftarrow) Suponha que A tem n autovetores linearmente independentes,

$$v_1, v_2, \dots, v_n.$$

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ seus autovalores associados, respectivamente, ou seja

$$Av_i = \lambda_i v_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Seja $Q = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$, a matriz cujas colunas são os autovetores v_1, v_2, \dots, v_n , daqui

$$AQ = [Av_1 \ Av_2 \ \cdots \ Av_n].$$

De (2.7),

$$AQ = [\lambda_1 v_1 \ \lambda_2 v_2 \ \cdots \ \lambda_n v_n] = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = QD.$$

Dado que v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente independentes, então Q é uma matriz inversível. Assim,

$$QD = AQ.$$

$$Q^{-1}QD = Q^{-1}AQ.$$

$$D = Q^{-1}AQ.$$

Portanto, A é uma matriz diagonalizável. \square

Teorema 2.17. *Se v_1, v_2, \dots, v_n , forem autovetores associados a autovalores distintos de uma matriz A , então v_1, v_2, \dots, v_n é um conjunto linearmente independente.*

Demonstração: A demonstração desse teorema pode ser encontrada em: BOLDRINI; et al. (1980) p. 199. \square

Teorema 2.18. *Uma matriz $A_{n \times n}$ com n autovalores distintos é diagonalizável.*

Demonstração: Sejam v_1, v_2, \dots, v_n , autovetores associados aos n autovalores de A , respectivamente. Então, pelo Teorema 2.17 os vetores v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente independentes.

Portanto, pelo Teorema 2.16, A é diagonalizável. \square

Exemplo 2.19. Vamos encontrar uma matriz P que diagonaliza a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$, e os autovetores associados aos mesmos, são respectivamente $v_1 = (0, 1)$ e $v_2 = (1, 1)$, pois eles verificam a equação (2.1). Seja

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pelo Teorema 2.17 v_1 e v_2 são linearmente independentes, logo P é inversível.

Vamos determinar P^{-1} , ou seja, encontrar uma matriz X , tal que $P \cdot X = I$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que resulta em

$$\begin{cases} x + z = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y + w = 0 \Rightarrow y = -1 \\ z = 0 \\ w = 1 \end{cases}$$

Logo,

$$P^{-1} = X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando a equação (2.5), encontramos uma matriz semelhante à matriz A . Ou seja, obtemos $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

logo,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, como B é uma matriz diagonal, concluímos que a matriz P diagonaliza a matriz A .

Observação 2.20. Lembremos que, a matriz P tem em suas colunas os autovetores da matriz A , assim P^{-1} é a matriz inversa da matriz composta pelos autovetores de A .

Exemplo 2.21. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Encontremos uma matriz P , que diagonaliza a matriz A .

Resolução:

Temos que, os autovalores de A são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ e $\lambda_3 = 9$ e que seus autovetores associados são $v_1 = (\frac{1}{2}, 1, 1)$, $v_2 = (2, 1, -2)$ e $v_3 = (-1, 1, \frac{-1}{2})$, pois verificam a equação (2.1). Consideremos $P = [v_1, v_2, v_3]$, isto é

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

Como os autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 são distintos, a matriz P é inversível.

Analogamente aos passos do exemplo anterior, onde encontramos X que satisfaz a seguinte igualdade $P \cdot X = I$, temos que

$$P^{-1} = X = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \end{bmatrix}.$$

Usando a equação (2.5), obtemos

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix},$$

como B é uma matriz diagonal, concluímos que a matriz P diagonaliza a matriz A .

Exemplo 2.22. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar se a matriz A é diagonalizável.

Resolução:

Temos que, o autovalor é $\lambda = 1$ e que autovetor é $v = (1, 0)$, por (2.2). Logo, pelo teorema (2.18) a matriz A não pode ser diagonalizada.

Exemplo 2.23. Dada a matriz A ,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vamos encontrar uma matriz P que diagonaliza A .

Resolução:

Os autovalores de A são $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 6$ e seus autovetores associados são, respectivamente, $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ e $v_3 = (1, -2, 1)$, como os autovalores são distintos seus autovetores são linearmente independentes. Consideremos a matriz inversível $P = [v_1 \ v_2 \ v_3]$. Assim

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora, encontramos uma matriz X tal que $P \cdot X = I$ ou seja

$$P^{-1} = X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Pela equação (2.5),

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

logo

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz B é diagonal, concluímos que a matriz P diagonaliza a matriz A .

Capítulo 3

Matriz de Leslie

Neste capítulo, temos o intuito de apresentar como a Matemática, se comporta em um modelo denominado Modelo Matricial de Leslie, ou simplesmente, Modelo de Leslie. Sendo assim, temos como principais referências: ANTON e RORRES (2012) e ONOFRE (2017).

3.1 Introdução ao Modelo

Patrick Holt Leslie, que nasceu na Escócia, próximo a cidade de Edimburgo no ano de 1900, tinha bacharel em Fisiologia, pela Christ Church College da Universidade de Oxford, formulou o modelo matricial, que inicialmente tinha sido introduzido pelo matemático Alfred J. Lotka. Segundo Bacaër (2011), por alguns anos ele trabalhou como assistente de bacteriologia no departamento de patologia, e logo depois se juntou a Charles Elton para estudar as estatísticas acerca da população animal.

Se uma população, tem um crescimento estruturado por faixas etárias da vida, como do seu nascimento até a sua morte, podemos buscar descrevê-lo através da Álgebra, visando construir, toda a sua projeção de vida. O modelo de Leslie, com informações importantes sobre as taxas de natalidade e mortalidade de variadas espécies, de uma determinada população escolhida através das fêmeas, é um modo de calcular o crescimento populacional dessa espécie e nos traz a projeção dessa população para diferentes épocas de sua vida.

Para apresentarmos o modelo matricial de Leslie, temos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.1. Uma determinada população, feminina, de animais, é formada por 900 fêmeas com a faixa etária 0-1 ano, 600 fêmeas com a faixa etária 1-2 anos e 400 fêmeas com a faixa etária 2-3 anos. Considerando que essas fêmeas vivem em média 3 anos, qual será a quantidade de fêmeas depois de algum tempo?

Resolução:

Consideremos que, as fêmeas terão os seguintes fatores biológicos: nascimento, envelhecimento, reprodução e morte. Assim,

- Suponhamos que, das fêmeas da faixa etária 0-1 ano, apenas metade sobreviva e passe para a faixa etária seguinte. Para as fêmeas da faixa etária 1-2 anos, vamos supor, também, que apenas a metade sobreviva e passe para a próxima faixa etária. Como a espécie sobrevive apenas 3 anos, as fêmeas da faixa etária 2-3 anos não sobreviverão.
- Em relação a reprodução, admitiremos que, em média, na faixa etária 0-1 ano, as fêmeas não terão filhas, já na faixa etária 1-2 anos, cada fêmea terá uma filha, e na faixa etária 2-3 anos terão duas filhas.

População após um ano

Com isso, após um ano, a população dessa espécie será constituída por:

- Na faixa etária 0-1 ano um total de $0 \cdot 900 + 1 \cdot 600 + 2 \cdot 400$ (*número de filhas nascidas de mães que estavam na primeira faixa etária, mais o número de fêmeas nascidas de mães que estavam na segunda faixa etária, mais o número de fêmeas nascidas de mães que estavam na terceira faixa etária.*)
- A faixa etária 1-2 anos, terá $\frac{1}{2} \cdot 900$ (*metade das fêmeas que estavam na primeira faixa etária e passaram para a segunda faixa etária.*)
- A faixa etária 2-3 anos $\frac{1}{2} \cdot 600$. (*metade das fêmeas que estavam na segunda faixa etária e passaram para a terceira faixa etária.*)

Assim, temos:

Tabela 3.1: População após um ano.

Faixa etária	Quantidade de fêmeas após um ano
0 – 1	$1 \cdot 600 + 2 \cdot 400$
1 – 2	$\frac{1}{2} \cdot 900$
2 – 3	$\frac{1}{2} \cdot 600$

Fonte: Arquivo pessoal.

Podemos expressar a população feminina de animais após um ano, com a seguinte multiplicação entre uma matriz e um vetor:

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot 600 + 2 \cdot 400 \\ \frac{1}{2} \cdot 900 \\ \frac{1}{2} \cdot 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 900 \\ 600 \\ 400 \end{bmatrix}$$

Chamaremos a matriz de ordem 3, de L , e o vetor composto com a população inicial de $v^{(0)}$. Logo, temos a seguinte igualdade:

$$v^{(1)} = Lv^{(0)}.$$

Admitindo que, a população manterá as mesmas taxas, tanto para nascimento como para sobrevivência, para sabermos qual será a população após dois anos, podemos multiplicar o vetor $v^{(1)}$ pela matriz L , assim,

$$v^{(2)} = Lv^{(1)},$$

sabendo que,

$$v^{(1)} = Lv^{(0)},$$

logo

$$v^{(2)} = L \cdot (Lv^{(0)}) \Rightarrow v^{(2)} = L^2v^{(0)}.$$

Analogamente, após três anos

$$v^{(3)} = Lv^{(2)},$$

como $v^{(2)} = L^2v^{(0)}$, temos

$$v^{(3)} = L \cdot (L^2v^{(0)}) \Rightarrow v^{(3)} = L^3v^{(0)}.$$

Percebemos que, para encontrar o total da população feminina após n anos, temos que multiplicar o vetor inicial $v^{(0)}$ pela matriz L , um número apropriado de vezes. Logo,

$$v^{(n)} = L^n v^{(0)}. \quad (3.1)$$

A seguir, temos a projeção das faixas etárias depois de 0, 3, 6, 9, 12, e 18 anos.

$$v^{(0)} = \begin{bmatrix} 900 \\ 600 \\ 400 \end{bmatrix}$$

$$v^{(3)} = L^3 \cdot v^{(0)} = \begin{bmatrix} 1150 \\ 525 \\ 350 \end{bmatrix}$$

$$v^{(6)} = L^6 \cdot v^{(0)} = \begin{bmatrix} 1187,5 \\ 550 \\ 306,2 \end{bmatrix}$$

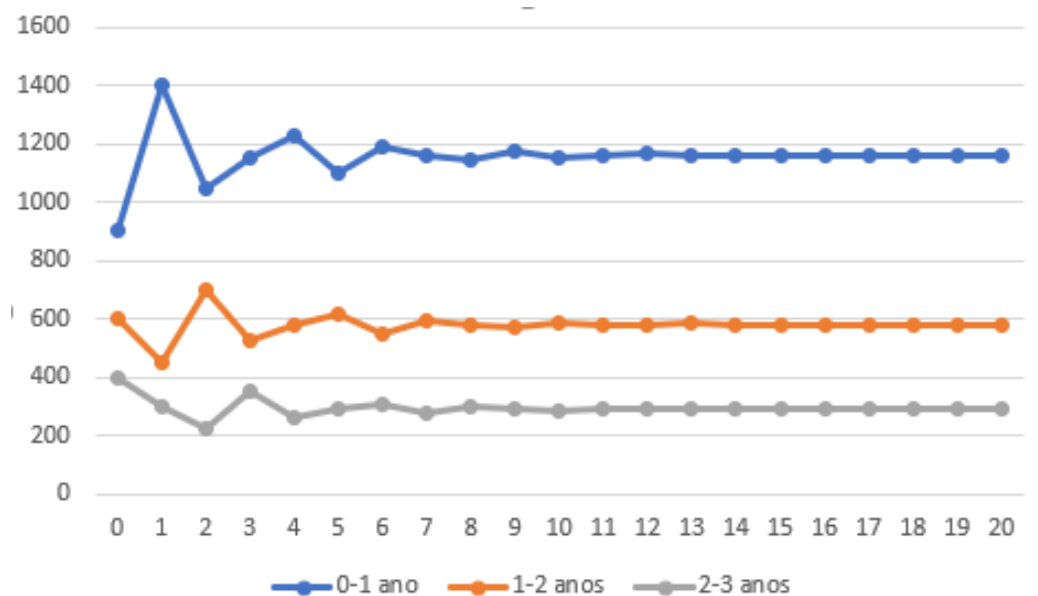
$$v^{(9)} = L^9 \cdot v^{(0)} = \begin{bmatrix} 1175 \\ 571,8 \\ 290,6 \end{bmatrix}$$

$$v^{(12)} = L^{12} \cdot v^{(0)} = \begin{bmatrix} 1164,5 \\ 579,7 \\ 288,3 \end{bmatrix}$$

$$v^{(18)} = L^{18} \cdot v^{(0)} = \begin{bmatrix} 1159,6 \\ 580,5 \\ 289,7 \end{bmatrix}.$$

Na Figura 3.1, temos a representação da distribuição das faixas etárias de 0-1 ano, 1-2 anos e 2-3 anos dessa população feminina, em até 20 anos depois. Ao analisarmos os vetores referentes as faixas etárias 0-1 ano (cor azul), 1-2 anos (cor laranja) e 2-3 anos (cor cinza), é perceptível que, nos primeiros anos a distribuição de dados das faixas etárias, tendem a oscilar, mas a partir do oitavo ano, as faixas etárias começam a seguir um padrão, e logo se estabilizam.

Figura 3.1: Distribuição das faixas etárias



Fonte: Arquivo pessoal.

3.2 Descrição do Modelo Matricial de Leslie

O modelo matricial de Leslie é um dos modelos mais conhecidos para cálculos de crescimento populacional e tem como foco principal o crescimento das fêmeas de uma determinada população, podendo ser animal ou humana, para a estruturação dos dados referentes às fêmeas. Temos que as faixas etárias possuem o mesmo tempo de duração e a estimativa de vida dessa população deve ter L anos, mês, semanas ou até dias. Sendo assim, quando definimos a população com n faixas etárias, o próprio L será dividido por n , criando assim a duração das

faixas etárias (ANTON; RORRES, 2012). A seguir, temos uma tabela exemplificando como se comportam as faixas etárias:

Tabela 3.2: População feminina com n faixas

Faixa etária	Intervalo de idade
1	$[0, \frac{L}{n})$
2	$[\frac{L}{n}, \frac{2L}{n})$
3	$[\frac{2L}{n}, \frac{3L}{n})$
\vdots	\vdots
$n - 1$	$[\frac{(n-2)L}{n}, \frac{(n-1)L}{n})$
n	$[\frac{(n-1)L}{n}, L]$

Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 646).

Supondo que sabemos o número de fêmeas em cada uma das n faixas etárias e que o instante inicial seja $t = 0$, podemos supor também que $v_1^{(0)}$ representa o número de fêmeas da primeira faixa etária. Na segunda faixa etária, representamos o número de fêmeas por $v_2^{(0)}$, e igualmente, na terceira faixa etária representamos esse número com $v_3^{(0)}$. Assim, temos que o vetor coluna inicial das faixas etárias $v^{(0)}$ relacionado ao instante $t = 0$, será

$$v^{(0)} = \begin{bmatrix} v_1^{(0)} \\ v_2^{(0)} \\ v_3^{(0)} \\ \vdots \\ v_n^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Com o passar do tempo, as fêmeas das n faixas etárias sofrem os quatro processos biológicos: nascimento, envelhecimento, reprodução e morte. A partir desses processos, podemos descrever como se dá o processo, e como podemos projetar o vetor inicial das faixas etárias.

Para conhecermos o processo de envelhecimento das fêmeas estipuladas, é necessário, segundo Anton e Rorres (2012, p. 676) “(...) observar a população a intervalos discretos de tempo, digamos, $(t_0, t_1, t_2, \dots, t_k, \dots)$. O modelo Leslie requer que a duração entre dois tempos de observação sucessivos seja igual a duração da faixa etária”. Sendo assim,

$$t_0 = 0, t_1 = \frac{L}{n}, t_2 = \frac{2L}{n}, \dots, t_k = \frac{kL}{n}. \quad (3.2)$$

Por (3.2), temos a hipótese de que as fêmeas que estão na faixa etária $(i + 1)$, no instante t_{k+1} , estavam na faixa etária i e no instante t_k . Assim, por meio dos parâmetros demográficos, podemos descrever como os processos de nascimento e morte funcionam nas seguintes condições de tempo:

- x_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), que representa o número médio de novas fêmeas, isto é, são filhas de mães que estão na faixa etária i .
- y_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$), representando a fração de fêmeas que estão na faixa etária i , que esperamos sobrevivam e passem para a próxima faixa etária ($i + 1$).

Portanto, pelas condições acima, compreendemos que:

$$i) \ x_i \geq 0 \text{ com } i = 1, 2, 3, \dots, n - 1.$$

$$ii) \ 0 < y_i \leq 1 \text{ com } i = 1, 2, 3, \dots, n - 1.$$

Assim, temos a seguinte definição:

Definição 3.2. Denominamos *Matriz de Leslie*, uma matriz real de ordem n da forma

$$L = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & y_{n-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Para o caso em que y_i é igual a 0, podemos concluir que não haverá fêmeas sobreviventes na faixa etária i . Supondo que pelo menos um dos x_i seja positivo, temos que, haverá nascimentos nessa faixa etária, ou seja, todo x_i positivo será considerada como **faixa etária fértil** dessas fêmeas estipuladas.

Dessa forma, podemos definir o vetor de distribuição $v^{(k)}$, onde $v_i^{(k)}$, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, é o número de fêmeas que está na faixa etária i relacionadas ao instante t_k ,

$$v^{(k)} = \begin{bmatrix} v_1^{(k)} \\ v_2^{(k)} \\ v_3^{(k)} \\ \vdots \\ v_n^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Com tudo, notamos que as fêmeas no instante t_k , na primeira faixa etária, serão as filhas das fêmeas nascidas entre os instantes t_{k-1} e t_k . Logo,

Em termos matemáticos, temos

$$v_1^{(k)} = x_1 v_1^{(k-1)} + x_2 v_2^{(k-1)} + \cdots + x_n v_n^{(k-1)}, \quad (3.4)$$

em que,

$$x_i v_i^{(k-1)}, \text{ para todo } i \in \{1, 2, 3, \dots, n\},$$

representa o número de filhas nascidas na i -ésima faixa etária entre os instantes t_{k-1} e t_k . Como vemos na Figura 3.2.

Figura 3.2: Fêmeas nascidas

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{o número de} \\ \text{fêmeas na} \\ \text{faixa etária 1} \\ \text{no instante } t_k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{o número de} \\ \text{filhas nascidas} \\ \text{de fêmeas na} \\ \text{faixa etária} \\ \text{1 entre os} \\ \text{instantes } t_{k-1} \\ \text{e } t_k \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{o número de} \\ \text{filhas nascidas} \\ \text{de fêmeas na} \\ \text{faixa etária} \\ \text{2 entre os} \\ \text{instantes } t_{k-1} \\ \text{e } t_k \end{array} \right\} + \cdots + \left\{ \begin{array}{l} \text{o número de} \\ \text{filhas nascidas} \\ \text{de fêmeas na} \\ \text{faixa etária} \\ \text{n entre os} \\ \text{instantes } t_{k-1} \\ \text{e } t_k \end{array} \right\}$$

Fonte: Anton e Rorres (2012, p.677)

Já na faixa etária $(i + 1)$, para $(i = 1, 2, 3, \dots, n - 1)$, as fêmeas que estão no instante t_k são as fêmeas que estavam na faixa etária i no instante t_{k-1} e que ainda estão no instante t_k , conforme vemos na Figura 3.3.

Figura 3.3: Fêmeas na faixa etária $i + 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{o número de} \\ \text{fêmeas na faixa} \\ \text{etária } i + 1 \text{ no} \\ \text{instante } t_k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{a fração de} \\ \text{fêmeas da faixa} \\ \text{etária } i \text{ que} \\ \text{sobrevive e passa} \\ \text{para a faixa} \\ \text{etária } i + 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{o número de} \\ \text{fêmeas na} \\ \text{faixa etária } i \\ \text{no instante } t_{k-1} \end{array} \right\}$$

Fonte: Anton e Rorres (2012, p.678)

Logo, em termos matemáticos, obtemos,

$$v_{i+1}^{(k)} = y_i v_i^{(k-1)}, \text{ para todo } i = 1, 2, 3, \dots, n - 1. \quad (3.5)$$

Assim, podemos escrever as equações (3.4) e (3.5) da seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} v_1^{(k)} \\ v_2^{(k)} \\ v_3^{(k)} \\ \vdots \\ v_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1^{(k-1)} \\ v_2^{(k-1)} \\ v_3^{(k-1)} \\ \vdots \\ v_n^{(k-1)} \end{bmatrix}.$$

Ou, simplesmente como,

$$v^{(k)} = L v^{(k-1)}, \text{ onde } k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (3.6)$$

Em que, L é a matriz de Leslie. Essa na qual é definida como

$$L = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & y_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Ou seja, a partir da equação (3.6), temos

- Para $k = 1$,

$$v^{(1)} = Lv^{(1-1)},$$

$$v^{(1)} = Lv^{(0)}.$$

- Para $k = 2$

$$v^{(2)} = Lv^{(2-1)},$$

$$v^{(2)} = Lv^{(1)},$$

como $v^{(1)} = Lv^{(0)}$, temos

$$v^{(2)} = L \cdot Lv^{(0)},$$

ou seja,

$$v^{(2)} = L^2 v^{(0)}.$$

- Para $k = 3$

$$v^{(3)} = Lv^{(3-1)},$$

$$v^{(3)} = Lv^{(2)},$$

analogamente, como $v^{(2)} = L \cdot Lv^{(0)}$, temos

$$v^{(3)} = L \cdot L^2 v^{(0)},$$

assim,

$$v^{(3)} = L^3 v^{(0)}.$$

- Logo, para $k = n$

$$v^{(n)} = L^n v^{(0)}. \quad (3.8)$$

Portanto, para determinamos a distribuição das faixas etárias das futuras fêmeas, basta conhecermos o vetor inicial $v^{(0)}$ e a matriz de Leslie L .

Exemplo 3.3. (ANTON; RORRES, 2012), p. 678. Suponha que a idade máxima atingida pelas fêmeas de uma certa população animal seja de 15 anos e que a população seja dividida em três faixas etárias de mesma duração de cinco anos. Suponha que a matriz de Leslie dessa população seja

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Se inicialmente havia 1000 fêmeas em cada uma das faixas etárias, então, pela equação (3.6), temos

$$v^{(0)} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix}.$$

$$v^{(1)} = L \cdot v^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7000 \\ 500 \\ 250 \end{bmatrix}.$$

$$v^{(2)} = L \cdot v^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7000 \\ 500 \\ 250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2750 \\ 3500 \\ 125 \end{bmatrix}.$$

$$v^{(3)} = L \cdot v^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2750 \\ 3500 \\ 125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14375 \\ 1375 \\ 875 \end{bmatrix}.$$

Analisando os resultados, podemos concluir que após 15 anos, na faixa etária 0-5 anos haverá 14375 fêmeas, na faixa etária 5-10 anos terá 1375 fêmeas e na faixa etária 10-15 anos haverá 875 fêmeas.

Exemplo 3.4. (POOLE, 2011), p. 258. Uma população com três faixas etárias tem uma matriz de Leslie

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

Se o vetor populacional inicial é

$$v^{(0)} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ e $v^{(3)}$.

Resolução:

Utilizando a equação (3.8), temos $v^{(1)} = L \cdot v^{(0)}$

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 70 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

$$v^{(2)} = L^2 \cdot v^{(0)} = \begin{bmatrix} 720 \\ 350 \\ 35 \end{bmatrix}.$$

$$v^{(3)} = L^3 \cdot v^{(0)} = \begin{bmatrix} 1175 \\ 504 \\ 175 \end{bmatrix}.$$

Assim, podemos concluir que na primeira faixa etária dessa espécie haverá 1175 fêmeas, na segunda faixa etária terá 504 fêmeas e na terceira faixa etária 175 fêmeas, dado que essa população vive no máximo 3 anos.

Exemplo 3.5. (POOLE, 2011), p. 245. Uma certa espécie de besouro alemão, chamado de *Vollmar-Wasserman* (ou besouro *VW*, para abreviar) vivem no máximo três anos. As fêmeas do besouro *VW* se dividem em três faixas etárias de um ano cada uma: jovens (0-1 ano), adolescentes (1-2 anos) e adultas (2-3 anos). As jovens não colocam ovos; cada adolescente produz em média quatro fêmeas; e cada adulta produz em média três fêmeas. A taxa de sobrevivência para as jovens é de 50% (isto é, a probabilidade de que uma jovem sobreviva até se tornar adolescente é de 0,5), e a taxa de sobrevivência das adolescentes é de 25%. Suponha que a população comece com 100 fêmeas de *VW*: 40 jovens, 40 adolescentes e 20 adultas. Vamos determinar a população de besouros para cada um dos 5 anos seguintes.

Resolução:

População após um ano

- Depois de um ano, o número de jovens será o produzido de fêmeas durante aquele ano:

$$40 \cdot 4 + 20 \cdot 3 = 220. \quad (3.9)$$

- O número de adolescentes será simplesmente o número de jovens que sobreviveram:

$$40 \cdot 0,5 = 20. \quad (3.10)$$

- Do mesmo modo, o número de adultas será o número de adolescentes que sobreviveram:

$$20 \cdot 0,25 = 5. \quad (3.11)$$

Combinando as equações (3.9), (3.10) e (3.11) em uma equação matricial, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Consideremos $v^{(1)} = Lv^{(0)}$, sendo L a matriz de Leslie, dada por

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$v^{(0)} = \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix},$$

o vetor de distribuição inicial dessa população de besouro. Assim,

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 220 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix},$$

é o vetor de distribuição após um ano.

Utilizado a equação (3.6), vamos calcular qual será a população de besouros após 5 anos.

$$v^{(2)} = L \cdot v^{(2-1)},$$

$$v^{(2)} = L \cdot v^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 220 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 110 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$v^{(3)} = L \cdot v^{(3-1)},$$

$$v^{(3)} = L \cdot v^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 110 \\ 110 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 455 \\ 55 \\ 27,5 \end{bmatrix}.$$

$$v^{(4)} = L \cdot v^{(4-1)},$$

$$v^{(4)} = L \cdot v^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 455 \\ 55 \\ 27,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 302,5 \\ 227,5 \\ 13,75 \end{bmatrix}.$$

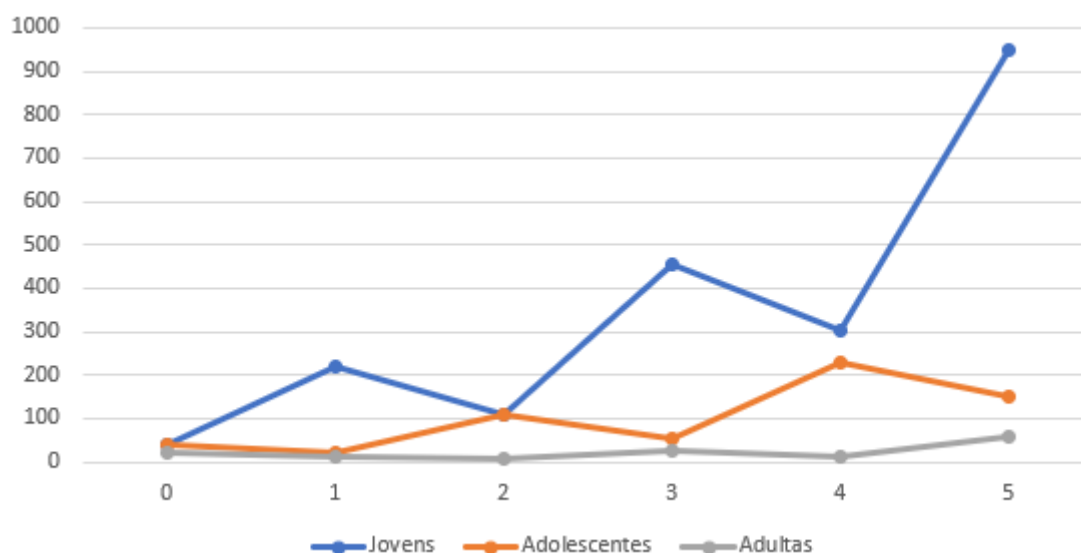
$$v^{(5)} = L \cdot v^{(5-1)},$$

$$v^{(5)} = L \cdot v^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 302,5 \\ 227,5 \\ 13,75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 951,25 \\ 151,25 \\ 56,875 \end{bmatrix}.$$

Portanto, após cinco anos, a população feminina de besouros VW será de 951 jovens, 151 adolescentes e 57 adultas, aproximadamente.

Na figura 3.4, podemos analisar como a distribuição das faixas etárias desta população feminina foi constituída durante os cinco anos, dado que sabemos que os besouros vivem no máximo três anos.

Figura 3.4: Distribuição das faixas etárias do Besouro VW



Fonte: Arquivo pessoal.

Exemplo 3.6. Exemplo adaptado de (POOLE, 2011), p. 258. Dado que, a população de renas ou caribus encontram-se principalmente nas províncias ocidentais do Canadá e no noroeste dos Estados Unidos, e sabendo que as fêmeas desta população vivem no máximo 14 anos, temos que, as taxas de natalidade e sobrevivência para cada faixa etária que é fornecida pela Tabela 3.3 nos mostram que as renas fêmeas não dão a luz durante seus primeiros 2 anos, ou seja, na primeira faixa etária cada fêmea não reproduz, já nas seguintes faixas etárias cada fêmea desta população tem em média um filhote por ano.

Tabela 3.3: População feminina de Renas

Idade	Taxa de natalidade	Taxa de sobrevivência
0 – 2	0,0	0,3
2 – 4	0,4	0,7
4 – 6	1,8	0,9
6 – 8	1,8	0,9
8 – 10	1,8	0,9
10 – 12	1,6	0,6
12 – 14	0,6	0,0

Fonte: Poole (2011, p. 258).

Em 1990, o Parque Nacional de Jasper relatou os dados das renas que vivem no parque, através da seguinte tabela

Tabela 3.4: População feminina de Renas em 1990

Idade	Número de Renas
0 – 2	10
2 – 4	2
4 – 6	8
6 – 8	5
8 – 10	12
10 – 12	0
12 – 14	1

Fonte: Exercício proposto em Poole (2011, p. 258).

Vamos calcular a população de renas que viveram ou vivem no parque durante os anos de 1992, 1994, 2010 e qual será a população dessas renas que vivem no Parque Nacional de Jasper no ano de 2020.

Resolução:

Primeiro, devemos encontrar a Matriz de Leslie L . Sabemos que, a matriz de Leslie L é

definida por (3.3), assim temos

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0,4 & 1,8 & 1,8 & 1,8 & 1,6 & 0,6 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Analisando a Tabela 3.4, encontramos que o vetor inicial $v^{(0)}$ é da forma

$$v^{(0)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 8 \\ 5 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $v^{(0)}$ é o vetor correspondente a população de renas residente no Parque Nacional de Jasper no ano de 1990, para os anos pedidos acima, temos que:

- Para 1992

$$v^{(1)} = Lv^{(0)},$$

dado que, se passaram dois anos, logo

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 46,4 \\ 3 \\ 1,4 \\ 7,2 \\ 4,5 \\ 10,8 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Para 1994

$$v^{(2)} = L^2v^{(0)},$$

sabendo que se passaram quatro anos, assim

$$v^{(2)} = \begin{bmatrix} 42,06 \\ 13,9 \\ 2,1 \\ 1,26 \\ 6,48 \\ 4,05 \\ 6,48 \end{bmatrix} .$$

- Para 2010

$$v^{(10)} = L^{10}v^{(0)},$$

Em que, se passaram vinte anos, temos

$$v^{(10)} = \begin{bmatrix} 69,12 \\ 18,61 \\ 12,24 \\ 10,24 \\ 8,28 \\ 6,51 \\ 3,56 \end{bmatrix} .$$

- Para 2020

$$v^{(15)} = L^{15}v^{(0)},$$

Depois de trinta anos, obtemos

$$v^{(15)} = \begin{bmatrix} 107,67 \\ 29,57 \\ 19,03 \\ 15,69 \\ 12,93 \\ 10,58 \\ 5,70 \end{bmatrix} .$$

Concluimos que, no ano de 2020, a primeira faixa etária dessa população irá aumentar consideravelmente, e que as renas que estavam na faixa etária 12 – 14 passará de 1 rena, isto em 1990, aproximadamente 5 renas em 2020, considerando que a população vive no máximo 14 anos.

3.3 Comportamento Limite

Nesta seção, abordamos lemas e teoremas importantes para a compreensão do processo de crescimento das faixas de distribuição. Para o desenvolvimento desta seção tomamos como principais referências: ANTON e RORRES (2012), CODECO (2018) e ONOFRE (2017).

Na equação (3.8), temos uma leitura sobre a distribuição das faixas etárias de determinadas populações mas, não temos uma base de qual é o processo padrão, voltado para o crescimento dessas populações. Assim, vamos analisar os autovalores e autovetores da matriz de Leslie (3.7), e a partir dela, encontrar seu polinômio característico.

Lema 3.7. Seja uma matriz de Leslie L de ordem n , então o polinômio característico de L é da forma

$$P_L(\lambda) = \lambda^n - x_1\lambda^{n-1} - x_2y_1\lambda^{n-2} - \cdots - x_ny_1y_2\cdots y_{n-1}. \quad (3.12)$$

Demonstração:

Notemos que o polinômio característico da matriz L é

$$P_L(\lambda) = \det(L - \lambda I),$$

como,

$$\det(\lambda I - L) = (-1)^n \det(L - \lambda I),$$

e dado que o intuito de calcular $P_L(\lambda)$ é calcular posteriormente seus zeros, sem perda de generalidade, e dada sua equivalência, vamos assumir que:

$$P_L(\lambda) = \det(\lambda I - L).$$

Partindo do princípio da indução finita, temos que

Para $n = 2$, têm-se

$$P_L(\lambda) = \det(\lambda I - L) = \begin{vmatrix} \lambda - x_1 & -x_2 \\ -y_1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - x_1\lambda - x_2y_1.$$

Assim, a equação (3.12) é válida para $n = 2$.

Vamos supor que, a equação (3.12) também vale para todas as matrizes de Leslie que são de ordem n . Com isso,

$$P_L(\lambda) = \det(\lambda I - L) = \begin{vmatrix} \lambda - x_1 & -x_2 & -x_3 & \cdots & -x_{n-1} & -x_n \\ -y_1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -y_{n-1} & \lambda \end{vmatrix} \quad (3.13)$$

$$P_L(\lambda) = \lambda^n - x_1\lambda^{n-1} - x_2y_1\lambda^{n-2} - \cdots - x_ny_1y_2 \cdots y_{n-1}. \quad (3.14)$$

Agora, consideramos uma matriz de Leslie de ordem $(n+1) \times (n+1)$. Como queremos encontrar o determinante de uma matriz, utilizaremos a expansão em cofatores na última coluna da matriz $\lambda I - L$, obtendo

$$P_L(\lambda) = \det(\lambda I - L) = \begin{vmatrix} \lambda - x_1 & -x_2 & -x_3 & \cdots & -x_n & -x_{n+1} \\ -y_1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -y_n & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$P_L(\lambda) = -x_{n-1}(-1)^{1+(n+1)} \begin{vmatrix} -y_1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -y_2 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -y_n \end{vmatrix} +$$

$$+0 + \cdots + 0 + \lambda(-1)^{(n+1)+(n+1)} \begin{vmatrix} \lambda - x_1 & -x_2 & -x_3 & \cdots & -x_{n-1} & -x_n \\ -y_1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -y_{n-1} & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$P_L(\lambda) = -x_{n+1}(-1)^{n+2}(-1)^n(y_1y_2 \cdots y_n) + \lambda \begin{vmatrix} \lambda - x_1 & -x_2 & -x_3 & \cdots & -x_{n-1} & -x_n \\ -y_1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -y_{n-1} & \lambda \end{vmatrix},$$

por hipótese de indução, as equações (3.13) e (3.14) nos conduzem a

$$\begin{aligned} P_L(\lambda) &= -x_{n+1}(-1)^{2+(n+1)}(y_1y_2 \cdots y_n) + \lambda(\lambda^n - x_1\lambda^{n-1} - \cdots - x_ny_1y_2 \cdots y_{n-1}) \\ &= \lambda^{n+1} - x_1\lambda^n - \cdots - x_ny_1 \cdots x_ny_1y_2 \cdots y_n. \end{aligned}$$

Assim, pelo princípio de indução finita, concluímos

$$P_L(\lambda) = \det(\lambda I - L) = \lambda^n - x_1\lambda^{n-1} - \cdots - x_ny_1y_2 \cdots y_{n-1}.$$

□

Observação 3.8. Notemos que introduzindo uma nova função em λ , podemos analisar as raízes de $P_L(\lambda)$. Logo, considerando $\lambda \neq 0$, temos:

$$\frac{P_L(\lambda)}{\lambda^n} = 1 - \left(\frac{x_1}{\lambda} + \frac{x_2 y_1}{\lambda^2} + \frac{x_3 y_1 y_2}{\lambda^3} + \dots + \frac{x_n y_1 y_2 \dots y_{n-1}}{\lambda^n} \right).$$

Assim, podemos definir

$$q(\lambda) = 1 - \frac{P_L(\lambda)}{\lambda^n}, \quad (3.15)$$

ou seja,

$$q(\lambda) = \left(\frac{x_1}{\lambda} + \frac{x_2 y_1}{\lambda^2} + \frac{x_3 y_1 y_2}{\lambda^3} + \dots + \frac{x_n y_1 y_2 \dots y_{n-1}}{\lambda^n} \right). \quad (3.16)$$

Lema 3.9. Seja uma matriz de Leslie L , existe um único autovalor positivo com multiplicidade algébrica um para $q(\lambda) = 1$.

Demonstração: Analisando a equação (3.15), é perceptível que

$$q(\lambda) = 1 - \frac{P_L(\lambda)}{\lambda^n},$$

é equivalente a

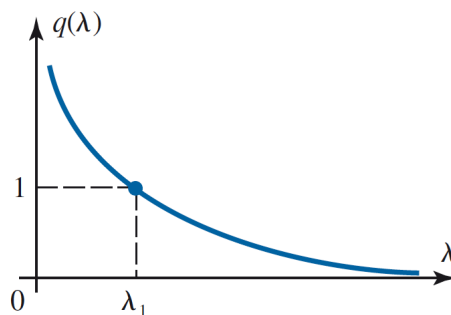
$$P_L(\lambda) = (1 - q(\lambda))\lambda^n. \quad (3.17)$$

Logo,

$$P_L(\lambda) = 0 \text{ implica que } q(\lambda) = 1, \text{ quando } \lambda \neq 0. \quad (3.18)$$

Provaremos que podemos encontrar um autovalor $\lambda > 0$ da matriz de Leslie L . De fato, por (3.18), estudaremos o comportamento da função $q(\lambda)$.

Figura 3.5: Comportamento limite da função $q(\lambda)$



Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 679).

Analisando a Figura 3.5, podemos concluir que

- $q(\lambda)$ para $\lambda > 0$, é decrescente, ou seja, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ implica que $q(\lambda_1) > q(\lambda_2)$.

- $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} q(\lambda) = +\infty$.
- $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} q(\lambda) = 0$.

Portanto, existe um único autovalor $\lambda > 0$, em que, $q(\lambda) = 1$. \square

Observação 3.10. Utilizaremos o lema a seguir, para demonstrar o *Teorema da Existência de um Autovalor Positivo*.

Lema 3.11. Um polinômio $P(\lambda)$ tem raiz λ_1 simples se, e somente se, $P(\lambda)$ em λ_1 tem a derivada diferente de zero.

Demonstração: Vamos considerar um polinômio qualquer,

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}. \quad (3.19)$$

Em que, todas as raízes desse $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, são distintas.

- i) Começamos supondo que λ_1 é uma raiz simples de $P_L(\lambda)$, ou seja, $n_1 = 1$ em (3.19), assim

$$P_L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}.$$

Logo, se derivarmos $P(\lambda)$, obtemos

$$P'(\lambda) = [(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}] + (\lambda - \lambda_1)[(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}]'.$$

Substituindo λ por λ_1 , temos

$$P'(\lambda_1) = (\lambda_1 - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda_1 - \lambda_k)^{n_k}.$$

Sabendo que, $\lambda_1 \neq \lambda_k$, para todo $k \neq 1$, têm-se que

$$P'(\lambda_1) \neq 0.$$

- ii) Agora, supomos que, $P'(\lambda_1) \neq 0$, ou seja, a derivada do polinômio (3.19) associado ao autovalor λ_1 é diferente de zero. Assim,

$$P'(\lambda) = n_1(\lambda - \lambda_1)^{(n_1-1)}[(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}] + (\lambda - \lambda_1)^{n_1}[(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}]'.$$

Substituindo λ por λ_1 , temos

$$P'(\lambda_1) = n_1(\lambda_1 - \lambda_1)^{(n_1-1)}[(\lambda_1 - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda_1 - \lambda_k)^{n_k}] + (\lambda_1 - \lambda_1)^{n_1}[(\lambda_1 - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda_1 - \lambda_k)^{n_k}]'.$$

Logo,

$$P'(\lambda_1) = 0.$$

Note que, para que $P'(\lambda_1) \neq 0$, qualquer uma das duas parcelas da soma, tem que ser diferente de 0. Analisando a segunda parcela, é perceptível que, a mesma sempre será nula, independente de qual seja o expoente. Logo, a primeira parcela da soma, tem que ser diferente de 0.

Ou seja, o expoente $n_1 - 1$ tem que ser igual a 0, assim

$$n_1 - 1 = 0 \Rightarrow n_1 = 1.$$

Portanto, de (3.19) segue que λ_1 é uma raiz simples de $P(\lambda)$.

□

Teorema 3.12. (*Existência de um Autovalor Positivo*) Uma matriz de Leslie L possui um único autovalor positivo λ_1 . Esse autovalor tem multiplicidade 1 e um autovetor v_1 , em que todas as suas entradas são positivas.

Demonstração:

Dada a matriz de Leslie L , definida como

$$L = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Por (3.17), podemos reescrever $P_L(\lambda)$ como

$$P_L(\lambda) = (1 - q(\lambda))\lambda^n.$$

Pelo Lema 3.9 existe um único autovalor $\lambda > 0$, tal que

$$q(\lambda) = 1.$$

Logo, existe um único $\lambda > 0$, em que

$$P_L(\lambda) = 0,$$

chamaremos este autovalor de λ_1 . Assim, λ_1 é o único autovalor positivo da matriz de Leslie L . Para analisar a multiplicidade de λ_1 , utilizaremos o Lema 3.11 e provaremos que

$$P'_L(\lambda_1) \neq 0.$$

Derivando $P_L(\lambda)$ em λ_1 , temos

$$P'_L(\lambda_1) = -q'(\lambda_1)\lambda_1^n + n(1 - q(\lambda_1))\lambda_1^{n-1}.$$

Sabemos que,

$$q(\lambda_1) = 1,$$

assim,

$$P'_L(\lambda_1) = -q'(\lambda_1)\lambda_1^n, \text{ com } \lambda_1 \neq 0.$$

Precisamos provar que $q'(\lambda_1) \neq 0$, vamos calcular a derivada de $q(\lambda)$ em λ_1 , logo

$$q'(\lambda_1) = -\frac{x_1}{\lambda_1^2} - \frac{2x_2y_1}{\lambda_1^3} - \frac{3x_3y_1y_2}{\lambda_1^4} - \dots - \frac{nx_ny_1y_2 \cdots y_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}}$$

Pela definição, todos os y_k são positivos e não são nulos, e pelo menos algum dos x_k não é nulo. Sabendo que $\lambda_1 > 0$, logo $q'(\lambda_1) \neq 0$, portanto, λ_1 tem multiplicidade igual a 1. Agora, vamos provar que o autovetor v , associado ao autovalor λ_1 , tem todas suas entradas positivas. Dado que a multiplicidade de λ_1 é igual a 1, seu autoespaço de autovetores associados

$$V_{\lambda_1} = v \in \mathbb{R}^n : Lv = \lambda_1 v,$$

tem dimensão 1. Assim, consideremos

$$v_1 = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

um autovetor associado ao autovalor λ_1 , baseado na equação (2.1) temos

$$Lv_1 = \lambda_1 v_1,$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a_1 \\ \lambda_1 a_2 \\ \lambda_1 a_3 \\ \vdots \\ \lambda_1 a_n \end{bmatrix}.$$

Assim, temos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \cdots + x_{n-1} a_{n-1} + x_n a_n = \lambda_1 a_1 \\ y_1 a_1 = \lambda_1 a_2 \\ y_2 a_2 = \lambda_1 a_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} a_{n-1} = \lambda_1 a_n \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Por (3.20), temos na segunda linha

$$a_2 = \frac{y_1 a_1}{\lambda_1}. \quad (3.21)$$

Substituindo (3.21) na terceira linha de (3.20), temos

$$a_3 = \frac{y_2 a_2}{\lambda_1} = \frac{y_1 y_2 a_1}{\lambda_1^2}. \quad (3.22)$$

Repetindo esse processo, na última linha do sistema, substituindo a igualdade correspondente a a_{n-1} , temos a seguinte equação

$$a_n = \frac{y_1 y_2 \cdots y_{n-1} a_1}{\lambda_1^{n-1}}.$$

Portanto, o autovetor v_1 é da forma

$$v_1 = \left(a_1, \left(\frac{y_1}{\lambda_1} \right) a_1, \left(\frac{y_1 y_2}{\lambda_1^2} \right) a_1, \cdots, \left(\frac{y_1 y_2 \cdots y_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \right) a_1 \right)$$

$$v_1 = a_1 \left(1, \frac{y_1}{\lambda_1}, \frac{y_1 y_2}{\lambda_1^2}, \cdots, \frac{y_1 y_2 \cdots y_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \right), a_1 \neq 0.$$

Assim, todos os autovetores associados a λ_1 são múltiplos do vetor

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{y_1}{\lambda_1} \\ \frac{y_1 y_2}{\lambda_1^2} \\ \vdots \\ \frac{y_1 y_2 \cdots y_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Concluimos que o autovetor v_1 possui todas as suas entradas positivas, pois

$$\lambda_1, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \text{ são positivos.}$$

□

Apresentamos a seguir, teoremas relacionados a matriz de Leslie L , que garantem o comportamento de uma determinada população a longo prazo, isto é, através da distribuição das faixas etárias com o autovalor positivo λ_1 associado ao autovetor v_1 .

Teorema 3.13. (Teorema de De Moivre) Se n é um número inteiro, então

$$[\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)]^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta).$$

Demonstração:

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [IEZZI, 2005] p. 35. □

Teorema 3.14. (Autovalores de uma matriz de Leslie) Se uma matriz de Leslie L , tem um único autovalor λ_1 positivo, e λ_k é outro qualquer autovalor real ou complexo de L , então $|\lambda_k| \leq \lambda_1$.

Demonstração: Suponhamos que, $\lambda_1 > 0$ é o autovalor da matriz de Leslie L , e que satisfaz a seguinte igualdade

$$q(\lambda_1) = 1.$$

Assim, temos

$$\frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2 y_1}{\lambda_1^2} + \cdots + \frac{x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1}}{\lambda_1^n} = 1. \quad (3.24)$$

Podemos reescrever (3.24) como

$$x_1 \lambda_1^{-1} + x_2 y_1 \lambda_1^{-2} + \cdots + x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1} \lambda_1^{-n} = 1. \quad (3.25)$$

Seja $\lambda_k \neq 0$ um autovalor qualquer de L , temos

$$\lambda_k = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \quad (3.26)$$

e como nesse caso que λ_k também satisfaz a igualdade

$$q(\lambda_k) = 1,$$

temos

$$1 = \frac{x_1}{\lambda_k} + \frac{x_2 y_1}{\lambda_k^2} + \cdots + \frac{x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1}}{\lambda_k^n}, \text{ com } \lambda_k \neq 0. \quad (3.27)$$

Substituindo (3.26) em (3.27), resulta

$$1 = \frac{x_1}{r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)} + \frac{x_2 y_1}{r^2(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^2} + \cdots + \frac{x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1}}{r^n(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n},$$

daqui,

$$1 = \frac{x_1}{r}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{-1} + \frac{x_2 y_1}{r^2}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{-2} + \cdots + \frac{x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1}}{r^n}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{-n}.$$

Assim, pelo Teorema de Moivre, temos

$$\begin{aligned} 1 = & \frac{x_1}{r} [\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)] + \frac{x_2 y_1}{r^2} [\cos(-2\theta) + i \operatorname{sen}(-2\theta)] + \\ & + \cdots + \frac{x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1}}{r^n} [\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Sabendo que, $\cos(-n\theta) = \cos(n\theta)$ e que $\operatorname{sen}(-n\theta) = -\operatorname{sen}(n\theta)$, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\begin{aligned} 1 = & \frac{x_1}{r} [\cos(\theta) - i \operatorname{sen}(\theta)] + \frac{x_2 y_1}{r^2} [\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta)] + \\ & + \cdots + \frac{x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1}}{r^n} [\cos(n\theta) - i \operatorname{sen}(n\theta)]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Agora, vamos separar a parte real e a parte imaginária da equação (3.29), segue que, para a parte real, temos a seguinte igualdade

$$1 = \frac{x_1}{r} \cos(\theta) + \frac{x_2 y_1}{r^2} \cos(2\theta) + \cdots + \frac{x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1}}{r^n} \cos(n\theta). \quad (3.30)$$

Já na parte imaginária, temos

$$0 = -\frac{x_1}{r} \operatorname{sen}(\theta) - \frac{x_2 y_1}{r^2} \operatorname{sen}(2\theta) - \cdots - \frac{x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1}}{r^n} \operatorname{sen}(n\theta).$$

Admitindo o valor absoluto em ambos os lados da equação (3.30) e aplicando a desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} 1 &= \left| \frac{x_1}{r} \cos(\theta) + \frac{x_2 y_1}{r^2} \cos(2\theta) + \cdots + \frac{x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1}}{r^n} \cos(n\theta) \right| \leq \\ &\leq \frac{x_1}{|r|} |\cos(\theta)| + \frac{x_2 y_1}{|r^2|} |\cos(2\theta)| + \cdots + \frac{x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1}}{|r^n|} |\cos(n\theta)| \leq \\ &\leq \frac{x_1}{|r|} + \frac{x_2 y_1}{|r^2|} + \cdots + \frac{x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1}}{|r^n|} \end{aligned}$$

Assim,

$$1 \leq x_1 |r|^{-1} + x_2 y_1 |r|^{-2} + \cdots + x_n y_1 y_2 \cdots y_{n-1} |r|^{-n}. \quad (3.31)$$

Comparando as equações (3.24) e (3.31), têm-se que

$$|r| \leq \lambda_1.$$

Portanto,

$$|\lambda_k| \leq |\lambda_1|.$$

□

Observação 3.15.

- i) Analisando o Teorema 3.14, percebemos que, o teorema não nos garante que $|\lambda_k| < \lambda_1$, e que serve para todo $k \neq 1$.
- ii) Se $|\lambda_k| < \lambda_1$ para todo $k \neq 1$, temos que λ_1 é um *autovalor dominante* da matriz L , porém, nem todas as matrizes de Leslie satisfazem a condição dada para λ_1 .

Exemplo 3.16. Vamos determinar os autovalores da seguinte matriz de Leslie

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Para encontrarmos os autovalores de L , primeiro temos que determinar as raízes de $P_L(\lambda)$.

Sabendo que $P_L(\lambda) = (\det(\lambda I - L))$, temos

$$P_L(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -6 \\ \frac{1}{3} & \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 1.$$

Logo, as raízes de $P_L(\lambda)$ são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, sendo respectivamente os autovalores da matriz L , tendo $\lambda_1 = 1$ como único autovalor positivo.

Segundo Anton e Rorres (2012), os autovalores λ_1 , λ_2 e λ_3 tem valor absoluto igual a 1, com isso, o único autovalor positivo λ_1 não é dominante. Logo, é perceptível que a matriz L tem a propriedade $L^3 = I$, ou seja, seja qualquer a escolha sobre a distribuição etária inicial $v^{(0)}$, temos

$$v^{(0)} = v^{(3)} = v^{(6)} = v^{(9)} = \dots = v^{(3k)} = \dots$$

Assim, Anton e Rorres (2012, p. 680) salientam que “(...) o vetor de distribuição etária oscila com um período de três unidades de tempo. Tais oscilações (denominadas ondas populacionais) não podem ocorrer se λ_1 for um autovalor dominante (...)”.

Com isso, temos o seguinte teorema

Teorema 3.17. (Autovalor Dominante) Se duas entradas sucessivas y_i e y_{i+1} da primeira linha de uma matriz de Leslie L são não nulas, então o autovalor positivo de L é dominante.

Demonstração: A demonstração deste teorema pode ser consultada em [MESQUITA, Artigo 03] p. 68. \square

Observação 3.18. A partir de agora, neste trabalho, assumiremos que está sendo satisfeita a condição do Teorema do Autovalor Dominante.

Suponhamos que L é diagonalizável, ou seja, L tem n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, que não necessariamente são distintos, e n autovetores associados que são linearmente independentes v_1, v_2, \dots, v_n .

Consideremos uma matriz Q , em que, suas colunas são os autovetores de L .

Logo, a diagonalização de L é dada por

$$L = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} Q^{-1},$$

Daqui, resulta

$$L^k = Q \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} Q^{-1},$$

para $k = 1, 2, \dots$. Segue que, para qualquer vetor de distribuição etária inicial $v^{(0)}$, temos

$$L^k v^{(0)} = Q \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} Q^{-1} v^{(0)}, \text{ com } k = 1, 2, \dots. \quad (3.32)$$

Dividindo a equação (3.32) em ambos os lados por λ_1^k , em que $\lambda_1^k \neq 0$ e sabendo que $v^{(k)} = L^k v^{(0)}$, obtemos

$$\frac{1}{\lambda_1^k} v^{(k)} = Q \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k} \end{bmatrix} Q^{-1} v^{(0)}. \quad (3.33)$$

Como λ_1 é o autovalor dominante, concluímos que

$$\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1, \text{ para } i = 2, 3, \dots. \quad (3.34)$$

Lema 3.19. Para valores grandes de tempo, todo vetor de distribuição etária é múltiplo constante do vetor anterior de distribuição.

Demonstração: De (3.34), temos que a série geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k$$

é convergente, logo

$$\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$, para $i = 2, 3, 4, \dots, n$.

Aplicando o limite quando k tende ao infinito em (3.33), temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_1^k} \cdot v^{(k)} \right) = Q \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} v^{(0)}, \quad (3.35)$$

a matriz Q tem ordem n , dado que, suas colunas são os n autovetores de L .

Pela igualdade (3.35), podemos desenvolver o seu lado direito, logo, temos

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_1^k} \cdot v^{(k)} \right) = \\ & = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & v_{3n} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot Q^{-1} \cdot \begin{bmatrix} v_1^{(0)} \\ v_2^{(0)} \\ \vdots \\ v_n^{(0)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sabemos que o produto de Q^{-1} por $v^{(0)}$ é uma matriz coluna. Assim denotaremos a primeira entrada desta matriz pela constante a , obtendo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_1^k} \cdot v^{(k)} \right) = \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ v_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} av_{11}^{(0)} \\ c_2 v_{12}^{(0)} \\ \vdots \\ c_n v_{1n}^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Segue que, podemos reescrever a igualdade (3.35) como av_1 , em que a é uma constante positiva, e que a , depende de $v^{(0)}$. Substituindo todo o lado direito de (3.35) por av_1 , temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_1^k} \cdot v^{(k)} \right) = av_1. \quad (3.36)$$

Aproximando (3.36), resulta

$$v^{(k)} \approx a\lambda_1^k v_1, \quad (3.37)$$

para valores expressivos de k .

Por (3.37), temos

$$v^{(k-1)} \approx a\lambda_1^{(k-1)} v_1. \quad (3.38)$$

Logo, comparando (3.37) e (3.38), concluímos que

$$v^{(k)} \approx \lambda_1 v^{(k-1)}, \quad (3.39)$$

para valores de k suficientemente grandes. \square

Observação 3.20. A constante λ_1 de (3.39) é o autovalor positivo da matriz de Leslie. De fato, sabemos que

$$v^{(k)} = Lv^{(k-1)},$$

logo, de (3.39), resulta

$$Lv^{(k-1)} \approx \lambda_1 v^{(k-1)},$$

para valores arbitrariamente grandes de tempo.

Capítulo 4

Aplicação da Matriz de Leslie

4.1 Coleta de dados

No capítulo anterior deste trabalho, estudamos de que forma a Matriz de Leslie pode nos auxiliar para calcular o crescimento populacional feminino de uma determinada população. Assim, apresentamos neste capítulo dados referentes à população brasileira, dados estes, que foram coletados no site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE. O IBGE é o principal provedor de dados sobre o Brasil, com informações geográficas e estatísticas do país, podemos ter acesso aos dados através do endereço <https://www.ibge.gov.br/>. Com foco na população residente no Brasil no ano de 2010, analisamos o crescimento populacional neste ano e como as projeções se deram até os dias de hoje. Partindo de dados referentes à população nacional, fizemos uma comparação com dados referentes às populações residentes nos estados do Goiás e Tocantins localizados, respectivamente, nas regiões Centro-Oeste e Norte. A partir da análise dos dados, os apresentamos em, faixas etárias de cinco anos cada uma, cada faixa etária referentes à população feminina do Brasil, assim como dos estados Goiás e Tocantins em cinco anos, cada faixa etária.

Sabemos que o modelo matricial de Leslie, para que seja aplicado, são necessárias informações sobre os nascimentos e óbitos de cada faixa etária. Tomamos como referência inicial as informações do ano 2010, a partir do SIDRA/IBGE (2010) ¹. Tendo em vista, que o modelo é proposto para quantidades de tempos iguais a amplitude das faixas etárias, sendo assim para que seja perceptível a mudança de cada faixa etária e como se da a sua projeção.

Primeiro, calculamos os parâmetros x_i e y_i , apresentados na seção 3.2 referentes a cada faixa etária do Brasil. Após a coleta de todos os dados, analogamente calculamos os parâmetros referentes a cada faixa etária dos estados Goiás e Tocantins. Ressalta-se que, nossas faixas etárias são agrupadas de 5 em 5 anos e que a idade máxima desta pesquisa para a população feminina é de 100 anos.

¹Disponível em: <https://sidra.ibge.gov.br/home/pms/brasil>. Acesso em: 04 de nov. de 2019.

Com isso, temos a Tabela 4.1, com dados referentes as pessoas residentes no Brasil em 2010, que podem ser encontrados em <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/200>.

Tabela 4.1: População residente no Brasil no ano de 2010.

Intervalo de Idade	Homens	Mulheres	% Homens	% Mulheres
[0, 5)	7025701	6781032	3,68	3,55
[5, 10)	7623609	7344159	4,00	3,85
[10, 15)	8727095	8440040	4,58	4,42
[15, 20)	8557608	8429180	4,49	4,42
[20, 25)	8627665	8613199	4,52	4,52
[25, 30)	8458790	8644127	4,43	4,53
[30, 35)	7718081	8026535	4,05	4,21
[35, 40)	6767177	7121014	3,55	3,73
[40, 45)	6319971	6688525	3,31	3,51
[45, 50)	5692722	6141925	2,98	3,22
[50, 55)	4825839	5308482	2,53	2,78
[55, 60)	3912544	4371889	2,05	2,29
[60, 65)	3033130	3470156	1,59	1,82
[65, 70)	2224862	2627927	1,17	1,38
[70, 75)	1675553	2069185	0,88	1,08
[75, 80)	1089024	1481662	0,57	0,78
[80, 85)	666031	995492	0,35	0,52
[85, 90)	311493	505310	0,16	0,26
[90, 95)	113116	206843	0,06	0,11
[95, 100)	29994	66437	0,02	0,03

Fonte: SIDRA/IBGE (2010)

Analogamente à Tabela 4.1, usamos dados do IBGE, para levantar dados referentes a óbitos femininos que podem ser encontrados em <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2654>, e que estão especificados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Óbitos femininos no Brasil (2010)

Intervalo de Idade	Mulheres
[0, 5)	16672
[5, 10)	1688
[10, 15)	2116
[15, 20)	3803
[20, 25)	4866
[25, 30)	6211
[30, 35)	7734
[35, 40)	9358
[40, 45)	12867
[45, 50)	18194
[50, 55)	23134
[55, 60)	27962
[60, 65)	32990
[65, 70)	38605
[70, 75)	48392
[75, 80)	54830
[80, 85)	61224
[85, 90)	50780
[90, 95)	33193
[95, 100)	16294

Fonte: SIDRA/IBGE (2010).

O nascimento também é um dos dados importantes para realizar o cálculo de crescimento da população brasileira.

Partindo de dados disponíveis em <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2612> pelo IBGE, a Tabela 4.3 dispõe de todas as filhas nascidas no ano de 2010.

Tabela 4.3: Filhas nascidas vivas no Brasil (2010)

Intervalo de Idade das mães	Filhas nascidas vivas
[0, 5)	0
[5, 10)	0
[10, 15)	10672
[15, 20)	235610
[20, 25)	369161
[25, 30)	338789
[30, 35)	236441
[35, 40)	111004
[40, 45)	28421
[45, 50)	2009
[50, 55)	142
[55, 60)	0
[60, 65)	0
[65, 70)	0
[70, 75)	0
[75, 80)	0
[80, 85)	0
[85, 90)	0
[90, 95)	0
[95, 100)	0

Fonte: SIDRA/IBGE (2010).

Para a aplicação do modelo matricial de Leslie, temos que calcular os parâmetros x_i e y_i , para $i = 1, 2, \dots, 20$, e para isso, utilizamos os dados das Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3. Começamos com o número médio de filhas que nasceram em 2010 multiplicado por 5, dado que as faixas etárias tem intervalos de 5 anos. Esse número médio de filhas corresponde às nascidas por mulheres durante o mesmo período, na i -ésima faixa etária, assim

$$x_i = \frac{\text{quantidade de filhas nascidas na faixa } i \text{ (Tabela 4.3)} \cdot 5}{\text{quantidade de mulheres na faixa } i \text{ (Tabela 4.1)}}$$

Obtemos os seguintes resultados

- $[0, 5) : x_1 = 0$.
- $[5, 10) : x_2 = 0$.
- $[10, 15) : x_3 = 0,006322$.

- [15, 20) : $x_4 = 0,139759$.
- [20, 25) : $x_5 = 0,214300$.
- [25, 30) : $x_6 = 0,195965$.
- [30, 35) : $x_7 = 0,147287$.
- [35, 40) : $x_8 = 0,077941$.
- [40, 45) : $x_9 = 0,021246$.
- [45, 50) : $x_{10} = 0,001635$.
- [50, 55) : $x_{11} = 0,000134$.
- [55, 60), [60, 65), [65, 70), [70, 75), [75, 80), [80, 85), [85, 90), [90, 95) e [95, 100):
 $x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}$ e $x_{20} = 0$, já que nessas faixas etárias não nascem filhas.

Para encontrar o número de mulheres que passaram para a próxima faixa etária, é necessário calcular o parâmetro y_i , com $i = 1, 2, \dots, 20$, ou seja, o número de mulheres que estavam, por exemplo, na faixa etária $[0, 5)$ e após cinco anos foram para a faixa $[5, 10)$. Assim, subtraímos a quantidade de mulheres na faixa i pela quantidade de óbitos femininos na faixa i multiplicado por 5, que ocorreram em 2010, e dividimos pela quantidade de mulheres na faixa i , em termos matemáticos, temos

$$y_i = \frac{\text{quantidade de mulheres na faixa } i \text{ (Tabela 4.1)} - \text{óbitos femininos na faixa } i \cdot 5 \text{ (Tabela 4.2)}}{\text{quantidade de mulheres na faixa } i \text{ (Tabela 4.1)}}$$

Logo, temos os seguintes resultados

- [0, 5) : $y_1 = 0,987707$.
- [5, 10) : $y_2 = 0,998851$.
- [10, 15) : $y_3 = 0,998746$.
- [15, 20) : $y_4 = 0,997744$.
- [20, 25) : $y_5 = 0,997175$.
- [25, 30) : $y_6 = 0,996407$.
- [30, 35) : $y_7 = 0,995182$.
- [35, 40) : $y_8 = 0,993429$.

- $[40, 45) : y_9 = 0,990381$.
- $[45, 50) : y_{10} = 0,985189$.
- $[50, 55) : y_{11} = 0,978210$.
- $[55, 60) : y_{12} = 0,968021$.
- $[60, 65) : y_{13} = 0,952466$.
- $[65, 70) : y_{14} = 0,926549$.
- $[70, 75) : y_{15} = 0,883065$.
- $[75, 80) : y_{16} = 0,814971$.
- $[80, 85) : y_{17} = 0,692494$.
- $[85, 90) : y_{18} = 0,497536$.
- $[90, 95) : y_{19} = 0,197628$.
- $[95, 100) : y_{20} = 0$. Dado que, consideramos que essa faixa etária não sobreviverá.

Com os parâmetros x'_i s e y'_i s, temos a seguinte matriz de Leslie, definida em (3.3):

Analisando os parâmetros y'_i 's, é perceptível que, o mesmo, satisfaz o Teorema 3.17, dado que, pelo menos, existem mais de duas faixas sucessivas férteis. Segue-se que, de (3.12) temos o seguinte polinômio característico

$$P_B(\lambda) = \lambda^{20} - 0,0062\lambda^{17} - 0,1377\lambda^{16} - 0,2107\lambda^{15} - 0,1921\lambda^{14} - \\ - 0,1439\lambda^{13} - 0,0758\lambda^{12} - 0,0205\lambda^{11} - 0,0016\lambda^{10} - 0,0001\lambda^9.$$

Utilizando o software *Octave*², encontramos que $\lambda_B \approx 0,960271$, onde λ_B é o autovalor positivo de L . Partindo de (3.23), podemos encontrar um autovetor v_B associado a λ_B , da forma

$$v_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,028557 \\ 1,069895 \\ 1,112762 \\ 1,156186 \\ 1,200619 \\ 1,245800 \\ 1,291092 \\ 1,335674 \\ 1,377555 \\ 1,413301 \\ 1,439703 \\ 1,451322 \\ 1,439526 \\ 1,388973 \\ 1,277299 \\ 1,084029 \\ 0,781741 \\ 0,405036 \\ 0,083358 \end{bmatrix}.$$

Para analisarmos os dados do estado do Goiás, temos a Tabela 4.4, que analogamente à Tabela 4.1, contém os dados as pessoas residentes no estado do Goiás no ano de 2010.

²Octave é um software matemático gratuito, que está disponível em: <https://www.gnu.org/software/octave/>

Tabela 4.4: População residente no Estado do Goiás no ano de 2010.

Intervalo de Idade	Homens	Mulheres	% Homens	% Mulheres
[0, 5)	222940	215463	3,71	3,59
[5, 10)	241589	231122	4,02	3,85
[10, 15)	270046	261246	4,50	4,35
[15, 20)	268598	264739	4,47	4,41
[20, 25)	279267	274766	4,65	4,58
[25, 30)	277343	279466	4,62	4,65
[30, 35)	262848	270132	4,38	4,50
[35, 40)	232721	240852	3,88	4,01
[40, 45)	211396	219706	3,52	3,66
[45, 50)	181500	190451	3,02	3,17
[50, 55)	147029	156284	2,45	2,60
[55, 60)	118309	125525	1,97	2,09
[60, 65)	89852	96618	1,50	1,61
[65, 70)	67271	70446	1,12	1,17
[70, 75)	50040	53972	0,83	0,90
[75, 80)	31279	35213	0,52	0,59
[80, 85)	17646	20730	0,29	0,35
[85, 90)	8037	9564	0,13	0,16
[90, 95)	2806	4267	0,05	0,07
[95, 100)	856	1298	0,01	0,02

Fonte: SIDRA/IBGE (2010).

Na Tabela 4.5, a partir dos dados do IBGE, temos a quantidade por faixa etária de óbitos femininos em Goiás.

Tabela 4.5: Óbitos femininos no Estado do Goiás (2010)

Intervalo de Idade	Mulheres
[0, 5)	556
[5, 10)	63
[10, 15)	66
[15, 20)	145
[20, 25)	205
[25, 30)	212
[30, 35)	308
[35, 40)	328
[40, 45)	458
[45, 50)	554
[50, 55)	716
[55, 60)	904
[60, 65)	976
[65, 70)	1196
[70, 75)	1457
[75, 80)	1486
[80, 85)	1441
[85, 90)	1045
[90, 95)	647
[95, 100)	309

Fonte: SIDRA/IBGE (2010).

A partir dos dados disponíveis pelo IBGE em <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2612>, a Tabela 4.6 destaca de todas as filhas nascidas nos anos de 2010.

Tabela 4.6: Filhas nascidas vivas no Estado do Goiás (2010)

Intervalo de Idade das mães	Filhas nascidas vivas
[0, 5)	0
[5, 10)	0
[10, 15)	368
[15, 20)	7922
[20, 25)	12503
[25, 30)	11271
[30, 35)	7190
[35, 40)	2796
[40, 45)	593
[45, 50)	46
[50, 55)	3
[55, 60)	0
[60, 65)	0
[65, 70)	0
[70, 75)	0
[75, 80)	0
[80, 85)	0
[85, 90)	0
[90, 95)	0
[95, 100)	0

Fonte: SIDRA/IBGE (2010).

Analogamente ao que foi feito em relação a população brasileira, iremos aplicar o modelo matricial de Leslie, logo, temos que calcular os parâmetros x_i e y_i , para $i = 1, 2, \dots, 20$, e para isso, utilizamos os dados das Tabelas 4.4, 4.5 e 4.6. Inicialmente calculando o número de filhas que nasceram em 2010 multiplicado por 5. Destacamos que esse número médio de filhas corresponde às nascidas por mulheres durante o mesmo período, na i -ésima faixa etária, assim

$$x_i = \frac{\text{quantidade de filhas nascidas na faixa } i \cdot 5 \text{ (Tabela 4.6)}}{\text{quantidade de mulheres na faixa } i \text{ (Tabela 4.4)}}$$

Assim, temos os seguintes resultados

- $[0, 5) : x_1 = 0$.
- $[5, 10) : x_2 = 0$.
- $[10, 15) : x_3 = 0,007043$.

- [15, 20) : $x_4 = 0,149619$.
- [20, 25) : $x_5 = 0,227521$.
- [25, 30) : $x_6 = 0,201652$.
- [30, 35) : $x_7 = 0,133083$.
- [35, 40) : $x_8 = 0,058044$.
- [40, 45) : $x_9 = 0,013495$.
- [45, 50) : $x_{10} = 0,001208$.
- [50, 55) : $x_{11} = 0,000096$.
- [55, 60), [60, 65), [65, 70), [70, 75), [75, 80), [80, 85), [85, 90), [90, 95) e [95, 100):

$x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}$ e $x_{20} = 0$, já que consideramos que nessas faixas etárias não há nascimentos.

Analogamente, para descobrirmos o número de mulheres que passaram para a próxima faixa etária, precisamos calcular o parâmetro y_i , com $i = 1, 2, \dots, 20$, ou seja, o número de mulheres que estavam em uma faixa etária i e após cinco anos foram para a faixa $i + 1$. Dessa forma, subtraímos a quantidade de mulheres na faixa i pela quantidade de óbitos femininos na faixa i multiplicada por 5, que aconteceram em 2010, e dividimos pela quantidade de mulheres na faixa i , em termos matemáticos, temos

$$y_i = \frac{\text{quantidade de mulheres na faixa } i \text{ (Tabela 4.4)} - \text{óbitos femininos na faixa } i \cdot 5 \text{ (Tabela 4.5)}}{\text{quantidade de mulheres na faixa } i \text{ (Tabela 4.4)}}$$

Logo, temos os seguintes resultados

- [0, 5) : $y_1 = 0,987098$.
- [5, 10) : $y_2 = 0,998637$.
- [10, 15) : $y_3 = 0,998737$.
- [15, 20) : $y_4 = 0,997261$.
- [20, 25) : $y_5 = 0,996270$.
- [25, 30) : $y_6 = 0,996207$.
- [30, 35) : $y_7 = 0,994299$.
- [35, 40) : $y_8 = 0,993191$.

- [40, 45) : $y_9 = 0,989577$.
- [45, 50) : $y_{10} = 0,985456$.
- [50, 55) : $y_{11} = 0,977093$.
- [55, 60) : $y_{12} = 0,963991$.
- [60, 65) : $y_{13} = 0,949492$.
- [65, 70) : $y_{14} = 0,915112$.
- [70, 75) : $y_{15} = 0,865023$.
- [75, 80) : $y_{16} = 0,788998$.
- [80, 85) : $y_{17} = 0,652436$.
- [85, 90) : $y_{18} = 0,453680$.
- [90, 95) : $y_{19} = 0,241856$.
- [95, 100) : $y_{20} = 0$. Nesta faixa , consideramos que essa faixa etária não sobreviverá.

Assim, por (3.23), temos que o polinômio característico referente ao estado de Goiás é da forma

$$P_G(\lambda) = \lambda^{20} - 0,006943\lambda^{17} - 0,147301\lambda^{16} - -0,223382\lambda^{15} - 0,197246\lambda^{14} - \\ -0,129681\lambda^{13} - 0,056238\lambda^{12} - 0,012986\lambda^{11} - 0,001150\lambda^{10} - 0,000090\lambda^9.$$

Através do software *Octave* encontramos que o autovalor positivo associado a matriz L é $\lambda_G \approx 0,956356$, assim, por (3.23), encontramos autovetor v_G associado ao autovalor λ_G é

$$v_G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,032145 \\ 1,077777 \\ 1,125539 \\ 1,173681 \\ 1,222665 \\ 1,273614 \\ 1,324144 \\ 1,375145 \\ 1,422914 \\ 1,466211 \\ 1,498004 \\ 1,509964 \\ 1,499127 \\ 1,434476 \\ 1,297482 \\ 1,070429 \\ 0,730258 \\ 0,346423 \\ 0,087608 \end{bmatrix} .$$

Agora, analisaremos a população do estado do Tocantins a partir das Tabelas 4.7, 4.8 e 4.9, realizando mesmo processo realizado para a população do Brasil e do estado do Goiás.

Na Tabela 4.7 temos a população residente no ano de 2010, dividida em faixas etárias.

Tabela 4.7: População residente no Estado do Tocantins no ano de 2010.

Intervalo de Idade	Homens	Mulheres	% Homens	% Mulheres
[0, 5)	62025	60716	4,48	4,39
[5, 10)	67054	63935	4,85	4,62
[10, 15)	73781	70463	5,33	5,09
[15, 20)	70715	68561	5,11	4,96
[20, 25)	66423	65462	4,80	4,73
[25, 30)	62472	62704	4,52	4,53
[30, 35)	56758	57698	4,10	4,17
[35, 40)	48353	47049	3,50	3,40
[40, 45)	42901	42076	3,10	3,04
[45, 50)	36461	34861	2,64	2,52
[50, 55)	29687	29127	2,15	2,11
[55, 60)	24361	22259	1,76	1,61
[60, 65)	19429	17375	1,40	1,26
[65, 70)	14699	13717	1,06	0,99
[70, 75)	11307	10178	0,82	0,74
[75, 80)	7955	6961	0,58	0,50
[80, 85)	4592	4318	0,33	0,31
[85, 90)	2128	1994	0,15	0,14
[90, 95)	1005	1117	0,07	0,08
[95, 100)	234	328	0,02	0,02

Fonte: SIDRA/IBGE (2010).

Na Tabela 4.8, temos, por faixa etária, a quantidade de óbitos femininos nos anos de 2010.

Tabela 4.8: Óbitos femininos no Estado do Tocantins (2010)

Intervalo de Idade	Mulheres
[0, 5)	167
[5, 10)	22
[10, 15)	20
[15, 20)	35
[20, 25)	39
[25, 30)	56
[30, 35)	54
[35, 40)	75
[40, 45)	85
[45, 50)	92
[50, 55)	132
[55, 60)	139
[60, 65)	145
[65, 70)	163
[70, 75)	215
[75, 80)	229
[80, 85)	205
[85, 90)	201
[90, 95)	132
[95, 100)	62

Fonte: SIDRA/IBGE (2010).

Na Tabela 4.9, com dados do IBGE, temos todas as filhas nascidas no ano de 2010.

Tabela 4.9: Filhas nascidas vivas no Estado do Tocantins (2010)

Intervalo de Idade das mães	Filhas nascidas vivas
[0, 5)	0
[5, 10)	0
[10, 15)	134
[15, 20)	2573
[20, 25)	3539
[25, 30)	2661
[30, 35)	1471
[35, 40)	584
[40, 45)	144
[45, 50)	4
[50, 55)	0
[55, 60)	0
[60, 65)	0
[65, 70)	0
[70, 75)	0
[75, 80)	0
[80, 85)	0
[85, 90)	0
[90, 95)	0
[95, 100)	0

Fonte: SIDRA/IBGE (2010).

A partir das tabelas, vamos calcular os parâmetros x_i e y_i para $i = 1, 2, 3, \dots, 20$, para x_i temos

$$x_i = \frac{\text{quantidade de filhas nascidas na faixa } i \cdot 5 \text{ (Tabela 4.9)}}{\text{quantidade de mulheres na faixa } i \text{ (Tabela 4.7)}}$$

Assim, temos os seguintes resultados para o estado do Tocantins

- $[0, 5) : x_1 = 0$.
- $[5, 10) : x_2 = 0$.
- $[10, 15) : x_3 = 0,009509$.
- $[15, 20) : x_4 = 0,187643$.
- $[20, 25) : x_5 = 0,270309$.

- [25, 30) : $x_6 = 0,212187$.
- [30, 35) : $x_7 = 0,127474$.
- [35, 40) : $x_8 = 0,062063$.
- [40, 45) : $x_9 = 0,017112$.
- [45, 50) : $x_{10} = 0,000574$.
- [50, 55) : $x_{11} = 0$., neste caso, consideramos que no ano de 2010 não houveram nascimentos nesta faixa etária.
- [55, 60), [60, 65), [65, 70), [70, 75), [75, 80), [80, 85), [85, 90), [90, 95) e [95, 100):
 $x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}$ e $x_{20} = 0$, dado que consideramos que nessas faixas etárias há nascimentos.

Para o número de mulheres que passaram para a próxima faixa etária, calculamos o parâmetro y_i , com $i = 1, 2, \dots, 20$. Assim, temos

$$y_i = \frac{\text{quantidade de mulheres na faixa } i \text{ (Tabela 4.7)} - \text{óbitos femininos na faixa } i \cdot 5 \text{ (Tabela 4.8)}}{\text{quantidade de mulheres na faixa } i \text{ (Tabela 4.7)}}$$

Resultando em

- [0, 5) : $y_1 = 0,986247$.
- [5, 10) : $y_2 = 0,998280$.
- [10, 15) : $y_3 = 0,998581$.
- [15, 20) : $y_4 = 0,997448$.
- [20, 25) : $y_5 = 0,997021$.
- [25, 30) : $y_6 = 0,995535$.
- [30, 35) : $y_7 = 0,995320$.
- [35, 40) : $y_8 = 0,992030$.
- [40, 45) : $y_9 = 0,989899$.
- [45, 50) : $y_{10} = 0,986805$.
- [50, 55) : $y_{11} = 0,977341$.

- [55, 60) : $y_{12} = 0,968777$.
- [60, 65) : $y_{13} = 0,958273$.
- [65, 70) : $y_{14} = 0,940585$.
- [70, 75) : $y_{15} = 0,894380$.
- [75, 80) : $y_{16} = 0,835512$.
- [80, 85) : $y_{17} = 0,762622$.
- [85, 90) : $y_{18} = 0,495988$.
- [90, 95) : $y_{19} = 0,409132$.
- [95, 100) : $y_{20} = 0$. Nesta faixa , consideramos não haverá sobreviventes.

Por (3.23), o polinômio característico é da seguinte forma

$$P_T(\lambda) = \lambda^{20} - 0,009362\lambda^{17} - 0,184482\lambda^{16} - 0,265078\lambda^{15} - 0,207460\lambda^{14} - \\ - 0,124078\lambda^{13} - 0,060127\lambda^{12} - 0,016446\lambda^{11} - 0,000546\lambda^{10}.$$

Pelo software *Octave*, temos que o autovetor positivo associado a matriz de Leslie L é $\lambda_T \approx 0,974949$, que por (3.23) tem um autovetor v_T da forma

$$v_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,011588 \\ 1,035795 \\ 1,060901 \\ 1,085383 \\ 1,109955 \\ 1,133391 \\ 1,157072 \\ 1,177343 \\ 1,195397 \\ 1,209933 \\ 1,212900 \\ 1,205221 \\ 1,184606 \\ 1,142852 \\ 1,048407 \\ 0,898464 \\ 0,702793 \\ 0,357533 \\ 0,150037 \end{bmatrix}$$

Na seção seguinte, temos uma análise acerca dos resultados encontrados sobre as populações destacadas nesta seção.

4.2 Comparação dos dados

Nas Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 da seção anterior, trazemos dados do IBGE sobre a população do Brasil, assim como dados sobre população do estados Goiás, nas Tabelas 4.4, 4.5 e 4.6, e Tocantins, nas Tabelas 4.7, 4.8 e 4.9, todos estes dados foram específicos do ano de 2010. Com isso, analisaremos como será o crescimento das populações citadas, a partir do ano de 2010 até o ano de 2035, de 5 em 5 anos, utilizando o modelo matricial de Leslie. As faixas etárias de todas as populações, foram divididas de 5 em 5 anos, assim, analisamos o crescimento e decréscimo de cada população:

i) Crescimento

Se o autovalor positivo λ é maior que 1, haverá um crescimento.

ii) Decréscimo

Se o autovalor positivo λ é menor que 1, ocorrerá um decrescimento.

Assim, temos que a porcentagem de crescimento ou decrescimento de cada população será determinada da seguinte maneira

$$\lambda - 1. \quad (4.1)$$

- **Brasil**

Para a população do Brasil, encontramos o autovalor positivo $\lambda_B \approx 0,960271$, logo, por (4.1), temos

$$\lambda_B - 1 = 0,960271 - 1 = -0,039729,$$

ou seja, ocorrerá um decrescimento de aproximadamente 3,97% a cada 5 anos.

- **Goiás**

Já na população do estado do Goiás, temos que seu autovalor positivo é $\lambda_G = 0,956356$, por (4.1), temos

$$\lambda_G - 1 = 0,956356 - 1 = -0,043644,$$

portanto haverá um decrescimento de aproximadamente 4,36% a cada 5 anos.

- **Tocantins**

Para a população do estado do Tocantins, o seu autovalor positivo foi $\lambda_T = 0,974949$, analogamente, por (4.1),

$$\lambda_T - 1 = 0,974949 - 1 = -0,025051,$$

assim, terá um decrescimento de aproximadamente 2,50% a cada 5 anos.

4.2.1 Projeção das populações analisadas

Partindo da equação (3.1), podemos analisar a projeção de cada população escolhida, isto, através da Matriz de Leslie, definida por (3.3) e o vetor de distribuição inicial associado as populações.

- Para a população do **Brasil**:

Sabendo que a Matriz de Leslie (3.3) é constituída por todos os parâmetros x'_i s e y'_i s associados a população brasileira L_B , e que o vetor inicial relacionado a população é a população inicial, temos as seguintes igualdades:

i) Para 2015

$$v_B^{(1)} = L_B v_B^{(0)}$$

ii) Para 2020

$$v^{(2)} = L_B^2 v^{(0)}$$

iii) Para 2025

$$v^{(3)} = L_B^3 v^{(0)}$$

iv) Para 2030

$$v^{(4)} = L_B^4 v^{(0)}$$

v) Para 2035

$$v^{(5)} = L_B^5 v^{(0)}$$

Na Tabela 4.10, temos as projeções acerca da população feminina do Brasil.

As projeções foram calculadas a partir do modelo matricial de Leslie.

Tabela 4.10: Projeção da população residente no Brasil através da Matriz de Leslie.

Idade	2015	2020	2025	2030	2035
[0, 5)	6661245	6762999	6621526	6274655	5890145
[5, 10)	6697672	6579357	6679861	6540127	6197520
[10, 15)	7335719	6689975	6571796	6672184	6532611
[15, 20)	8429460	7326523	6681589	6563558	6663820
[20, 25)	8410165	8410444	7309996	6666516	6548752
[25, 30)	8588869	8386408	8386687	7289347	6647685
[30, 35)	8613072	8558012	8356279	8356557	7263159
[35, 40)	7987865	8571576	8516782	8316021	8316297
[40, 45)	7074224	7935379	8515255	8460821	8261379
[45, 50)	6624190	7006179	7859051	8433349	8379439
[50, 55)	6050955	6526077	6902408	7742648	8308440
[55, 60)	5192812	5919107	6383876	6752007	7573938
[60, 65)	4232079	5026749	5729818	6179724	6536083
[65, 70)	3305206	4030912	4787808	5457457	5885978
[70, 75)	2434902	3062434	3734835	4436137	5056599
[75, 80)	1827225	2150177	2704328	3298103	3917398
[80, 85)	1207512	1489136	1752332	2203950	2687859
[85, 90)	689372	836184	1031217	1213479	1526222
[90, 95)	251410	342987	416037	513068	603750
[95, 100)	40878	49686	67784	82221	101397

Fonte: Arquivo pessoal.

- Para a população do estado **Goiás**:

Dado que a Matriz de Leslie (3.3) é constituída por todos os parâmetros x'_i s e y'_i s associados a população do estado do Goiás L_G , e que o vetor inicial relacionado a população é a população inicial, temos as seguintes igualdades:

i) Para 2015

$$v^{(1)} = L_G v^{(0)}$$

ii) Para 2020

$$v^{(2)} = L_G^2 v^{(0)}$$

iii) Para 2025

$$v^{(3)} = L_G^3 v^{(0)}$$

iv) Para 2030

$$v^{(4)} = L_G^4 v^{(0)}$$

v) Para 2035

$$v^{(5)} = L_G^5 v^{(0)}$$

Na Tabela 4.11, temos as projeções acerca da população do estado do Goiás, calculadas a partir do modelo matricial de Leslie.

Tabela 4.11: Projeção da população residente no estado do Goiás através da Matriz de Leslie.

Idade	2015	2020	2025	2030	2035
[0, 5)	213460	212083	204493	192460	180709
[5, 10)	212683	210706	209346	201855	189977
[10, 15)	230807	212393	210419	209061	201580
[15, 20)	260916	230515	212125	210153	208797
[20, 25)	264014	260201	229884	211544	209577
[25, 30)	273741	263029	259231	229027	210755
[30, 35)	278406	272703	262031	258247	228158
[35, 40)	268592	276819	271148	260538	256775
[40, 45)	239212	266763	274934	269302	258763
[45, 50)	217416	236719	263983	272068	266495
[50, 55)	187681	214254	233276	260143	268111
[55, 60)	152704	183382	209346	227932	254184
[60, 65)	121005	147205	176778	201808	219724
[65, 70)	91738	114893	139770	167850	191615
[70, 75)	64466	83950	105140	127905	153601
[75, 80)	46687	55764	72619	90949	110641
[80, 85)	27783	36836	43998	57296	71758
[85, 90)	13525	18127	24033	28706	37382
[90, 95)	4339	6136	8224	10903	13023
[95, 100)	1032	1049	1484	1989	2637

Fonte: Arquivo pessoal.

- Para a população do estado **Tocantins**:

Analogamente, a Matriz de Leslie (3.3) é constituída por todos os parâmetros x'_i s e y'_i s associados a população do estado do Tocantins L_T , e que o vetor inicial relacionado a população é a população inicial, temos as seguintes igualdades:

i) Para 2015

$$v^{(1)} = L_T v^{(0)}$$

ii) Para 2020

$$v^{(2)} = L_T^2 v^{(0)}$$

iii) Para 2025

$$v^{(3)} = L_T^3 v^{(0)}$$

iv) Para 2030

$$v^{(4)} = L_T^4 v^{(0)}$$

v) Para 2035

$$v^{(5)} = L_T^5 v^{(0)}$$

Na Tabela 4.12, temos as projeções relacionadas a população do estado do Tocantins, calculadas a partir do modelo matricial de Leslie.

Tabela 4.12: Projeção da população residente no estado do Tocantins através da Matriz de Leslie.

Idade	2015	2020	2025	2030	2035
[0, 5)	55550	58488	59106	57506	54545
[5, 10)	59881	54786	57684	58294	56715
[10, 15)	63825	59778	54692	57585	58193
[15, 20)	70363	63734	59693	54614	57503
[20, 25)	68386	70183	63572	59541	54475
[25, 30)	65267	68182	69974	63382	59363
[30, 35)	62424	64975	67878	69662	63099
[35, 40)	57428	62132	64671	67560	69336
[40, 45)	46674	56970	61637	64156	67022
[45, 50)	41651	46202	56395	61014	63508
[50, 55)	34401	41101	45593	55651	60209
[55, 60)	28467	33621	40170	44560	54390
[60, 65)	21564	27578	32572	38916	43168
[65, 70)	16650	20664	26427	31213	37292
[70, 75)	12902	15661	19436	24857	29358
[75, 80)	9103	11539	14007	17383	22232
[80, 85)	5816	7606	9641	11703	14524
[85, 90)	3293	4435	5800	7353	8925
[90, 95)	989	1633	2199	2877	3647
[95, 100)	457	405	668	900	1177

Fonte: Arquivo pessoal.

Destacamos que as projeções acima são resultados do modelo matricial de Leslie, e não tem qualquer ligação com dados estatísticos do IBGE.

Capítulo 5

Considerações Finais

Neste trabalho, mostramos que ao conhecermos o valor médio de filhas nascidas em um determinado ano e o percentual de sobrevivência em cada faixa etária feminina, seja animal ou humana de uma determinada população, podemos analisar seu crescimento através do modelo matricial de Leslie.

A Álgebra Linear foi de extrema importância para analisarmos a Matriz de Leslie, através de noções preliminares como autovetores, autovalores e diagonalização de matrizes quadradas e com resultados que nos auxiliam na compreensão do modelo. Dessa forma, no capítulo 3, trouxemos resultados que nos garantem a existência e unicidade de um autovalor positivo com multiplicidade igual a um, sendo uma das condições necessárias para que esse autovalor seja dominante. Com esses resultados, em relação ao autovalor dominante, analisamos dados detalhadamente e realizamos cálculos referentes ao crescimento populacional da população escolhida, através da matriz de Leslie.

Com os dados populacionais do SIDRA/IBGE, analisamos a população feminina do Brasil, assim como dos estados de Goiás e Tocantins a partir do ano de 2010; considerando as pessoas que residiram, os óbitos daquele ano, e os nascimentos. E assim, ressaltamos que todas as projeções feitas pela matriz de Leslie não tem nenhuma ligação com o processo de análise de dados que o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística realiza.

Portanto, concluímos que ao conhecermos a matriz de Leslie, e partindo disso, utilizando conceitos da Álgebra Linear, podemos calcular as projeções de uma população feminina, seja qual for, podemos obter resultados que expressam esse crescimento populacional de forma matricial e com faixas etárias definidas.

Referências

- [1] ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- [2] BACAER, N. A. **The leslie matrix (1945)**. In **Shorty history of mathematical populational dinamycs**, p. 117-120. Springer-Verlag, 2011.
- [3] BOLDRINI, J.L. et al. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra Ltda, 1980.
- [4] CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. **Álgebra linear e aplicações**. [S.l.]: Atual, 2007.
- [5] CODECO, P. D. F. **Modelo matricial de Leslie: estudo do crescimento populacional do Brasil e estados do Espírito Santo e Acre**. 2018. 1 recurso online (79 p.). Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Campinas, 2018. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/333425>. Acesso em: 28 set. 2019.
- [6] GERHARDT, T.E.; SILVEIRA, D.T. **Métodos de pesquisa**. 1. ed. Editora da UFRGS: Porto Alegre, 2009. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf>. Acesso em: 08 ago. de 2019.
- [7] IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar, 6: complexos, polinômios, equações**. São Paulo: Atual, 2005.
- [8] LEON, S. J. **Álgebra linear com aplicações**. 4ª edição. [S.l.:s.n.], 1999.
- [9] MESQUITA, D. **Matrizes de Leslie e valores próprios dominantes**. Matemática Universitária, (n. 50/51), Universidade do Porto, 2011.
- [10] ONOFRE, M.M. **Matriz de Leslie aplicada aos modelos populacionais**. 2017 (82 p.). Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/186177>. Acesso em: 26 mar. 2019.

- [11] POOLE, D. **Álgebra Linear**. [S.l.]: Cengage Learning Editores, 2011.