UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - PPGE

MARCOS JOSÉ PEREIRA BARROS

A SOLUÇÃO DE SITUAÇÕES QUE ENVOLVEM O CONCEITO DE FRAÇÃO POR PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS

PALMAS (TO)

2018

MARCOS JOSÉ PEREIRA BARROS

A SOLUÇÃO DE SITUAÇÕES QUE ENVOLVEM O CONCEITO DE FRAÇÃO POR PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação – PPGE, da Universidade Federal do Tocantins, Campus de Palmas, como requisito para a obtenção do Título de Mestre em Educação, sob a orientação do Professor Doutor Idemar Vizolli

Orientador: Dr. Idemar Vizolli.

PALMAS (TO)

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

B277s Barros, Marcos José Pereira.
A SOLUÇÃO DE SITUAÇÕES QUE ENVOLVEM O CONCEITO DE FRAÇÃO POR PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS. / Marcos José Pereira Barros. – Palmas, TO, 2018.

229 f.

Dissertação (Mestrado Acadêmico) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) em Educação, 2018.

Orientador: Idemar Vizolli

1. Educação. 2. Educação Matemática. Ensino e Aprendizagem de Fração.. 3. Registros de Representação Semiótica. Significados de Fração.. 4. Características das quantidades. Professores de Anos Iniciais.. I. Título

CDD 370

MARCOS JOSÉ PEREIRA BARROS

A SOLUÇÃO DE SITUAÇÕES QUE ENVOLVEM O CONCEITO DE FRAÇÃO POR PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação – PPGE, da Universidade Federal do Tocantins, Campus de Palmas, como requisito para a obtenção do Título de Mestre em Educação, sob a orientação do Professor Doutor Idemar Vizolli.

Orientador: Dr. Idemar Vizolli

Data da Aprovação: **11/ Dezembro / 2018**

Banca Examinadora:

____
Prof. Dr. Idemar Vizolli. Orientador, UFT

____
Prof. Dr. José Ricardo e Souza Mafra. Examinador, UFOPA

____
Prof. Dr. Pedro Franco de Sá. Examinador, UEPA

____
Profa. Dra. Carmem Lucia Artioli Rolim. Examinadora, UFT

Dedico este trabalho a minha esposa Sara Barros, meu filho Isaque Barros, minha mãe Dirce Pereira, meu pai Antonio Pereira, minha irmã Daiane Pereira, pelo apoio e compreensão nos momentos difíceis, estando sempre a meu lado com palavras de incentivo e carinho.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a DEUS, por ter estado sempre comigo, ao meu lado, por ter me dado forças para continuar, perfeita saúde, paciência, determinação, por me amar, por estar sempre me mostrando os caminhos certos a seguir, por não ter me deixado desviar por caminhos tortuosos que possivelmente me fariam ter outros alvos. Por ser o Deus de minha vida.

À minha digníssima esposa Sara Barros e ao meu filho Isaque Barros, pela paciência e compreensão durante o curso. Ao meu pai, Antonio, minha mãe, Dirce, e minha irmã, Daiane, família que amo tanto e sem a qual não seria possível realizar este sonho. Ao meu cunhado, Rodrigo, que nunca mediu esforços em estar auxiliando nos deslocamentos e estadia.

Ao meu professor, orientador e amigo, Idemar Vizolli, por ter me auxiliado e orientado neste trabalho, pela sua amizade, confiança, compreensão, apoio, por ter acreditado em mim e ter me incentivado durante a realização deste trabalho.

Ao meu amigo, Dailson Evangelista Costa, pelos incentivos, orientações, para que me dispusesse a ingressar no campo da pesquisa em Educação e Educação Matemática.

À CAPES, pela bolsa de estudos que propiciou condições para que eu me dedicasse com mais afinco nesta jornada.

Aos professores Dr. José Ricardo e Souza Mafra (grande amigo), Dr. Pedro Franco de Sá e Dra. Carmem Lucia Artioli Rolim, que se dispuseram a fazer parte da BANCA, tanto de Qualificação quanto de Defesa, que com muito carinho apreciaram o trabalho e realizaram orientações importantíssimas à pesquisa.

À Secretaria Municipal de Educação de Araguaína (SEMED) pelo apoio e autorização aos professores para participarem do Curso de Formação Continuada, onde produzimos os dados da pesquisa.

Aos meus amigos Adília, Letícia e Ademir, que estiveram comigo durante a escrita do projeto e desenvolvimento da pesquisa, participando das mesmas alegrias, pressões, angustias (momentâneas) e escrita deste trabalho.

À Colégio Estadual Sonho de Liberdade, nas pessoas de Thelma Oliveira e Walter Viana, diretores que não mediram esforças para dar condições de que fosse possível realizar o Curso de Mestrado em outra cidade, sem prejuízos ao desenvolvimento das atividades escolares e financeiras na época.

Aos professores do Colégio Estadual Sonho de Liberdade, que principalmente no início do Mestrado, não mediram esforços em me ajudarem, substituindo-me na minha ausência sem qualquer tipo de ônus.

Aos professores que se dispuseram a fazer parte da pesquisa.

À Universidade Federa do Tocantins (UFT), em especial aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação que muito contribuíram nesta etapa de minha formação e aos professores, ainda da graduação, que conseguiram despertar em mim o desejo em continuar no campo da pesquisa, em especial ao professor Dr. José Ricardo e Souza Mafra.

“Para que esta mudança no ensino de matemática ocorra é preciso que o professor domine o conceito a ser ensinado, e utilize instrumentos didáticos que possam auxiliá-lo a uma prática docente que e estimule no aluno o interesse pelo assunto, motive a construção do conhecimento de forma ativa e participativa, para que o processo de ensino e aprendizagem tenha bons resultados.”

Rafael Pontes Lima, 2014

RESUMO

Dado os desafios do processo de formação de professores, o ensino e aprendizagem do conceito de fração se reveste de importância singular para o desenvolvimento de pesquisas, especialmente nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. O presente trabalho tem como objetivo verificar o modo como professores que ensinam matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental de Araguaína, TO, resolvem situações que envolvem o conceito de fração, considerando o uso de registros de representação semiótica, os diferentes significados de fração, bem como as características das quantidades. Trata-se de um estudo de abordagem qualitativa e exploratória, desenvolvido em duas fases: a primeira trata da revisão da literatura e elaboração do referencial teórico que constituiu a base de sustentação do presente estudo; já a segunda fase consiste no desenvolvimento de cinco (05) atividades que envolvem o conceito de fração, considerando os registros de representação semiótica, a natureza das quantidades e os diferentes significados de fração. As atividades são compostas de tarefas que consideram a utilização de distintos registros de representação semiótica, equivalência entre frações, diferentes significados de fração e a natureza das quantidades. Participaram do presente estudo 88 professores que ensinam matemática no 4º e 5º Ano do Ensino Fundamental da rede municipal de Araguaína, TO, na ocasião da realização de um Curso de Formação Continuada, ministrado pelos pesquisadores. Os resultados indicaram que os professores apresentam facilidades para resolverem situações que relacionadas ao significado parte-todo, tanto em tarefas que envolvem quantidade discretas quanto contínuas. Verificou-se, também, dificuldades em compreender e solucionar situações que envolvem fração quando se trata da conversão entre registros de representação semiótica e, principalmente dos significados número, medidas, quociente e operador multiplicativo. Constatamos que, em ambos os casos, os participantes recorrem a construções geométricas (retângulos, círculos, triângulos) para solucionarem problemas envolvendo fração, bem como à divisão entre numeradores e denominadores quando se trata da localização de determinada fração em uma reta numérica.

PALAVRAS-CHAVE: Educação. Educação Matemática. Ensino e Aprendizagem de Fração. Registros de Representação Semiótica. Significados de Fração. Características das quantidades. Professores de Anos Iniciais

ABSTRACT

Given the challenges of the process of formation to professors, the teaching and learning of the concept of fraction is of singular importance for the development of research, especially in the Initiatories Years of Elementary School. The present scientific work aims to verify the way professors teaching mathematics in the Initiatories Years of Elementary School in Araguaína, TO, solve situations that involve the concept of fraction, considering the use of semiotic representation registers, the different meanings of fraction, as well characteristics of the quantities. It is a qualitative and exploratory study, developed on two period: the first deals with the literature review and elaboration of the theoretical reference that constituted the base of support of the present study; the second phase consists in the development of five (05) activities involving the concept of fraction, considering the records of semiotic representation, the nature of the quantities and the different meanings of fraction. The activities are composed of tasks which consider the use of distinct registers of semiotic representation, equivalence between fractions, different meanings of fraction and the nature of the quantities. Participating in the present study were 88 professors that teach mathematics in the 4th and 5th Year of Elementary School of the municipal network of Araguaína, TO, at the occasion of a Continuing Education Course given by the researchers. The results indicated that professor have facilities to solve situations related to part-whole meaning, both in tasks involving discrete and continuous quantities. We also found difficulties in understanding and solving fractional situations when it comes to the conversion between registers of semiotic representation and, especially, the meanings number, measures, quotient and multiplicative operator. We find which in both cases, participants use geometric constructions (rectangles, circles, triangles) to solve fractional problems, as well as the division between numerators and denominators when it comes to the location of a certain fraction on a number line.

KEY WORDS: Education. Mathematical Education. Fraction Teaching and Learning. Registers of Semiotic Representation. Fraction Meanings. Characteristics of quantities. Initiatories Years professors.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Desenho retangular 21
Figura 2: Esquema de dupla contagem. 21
Figura 3: Fração da área de uma figura 41
Figura 4: Registros de representação semiótica de fração 72
Figura 5: Cesta de frutas 75
Figura 6: Preparo de uma laranjada 85
Figura 7: Relação professor-aluno-saber na SD. 97
Figura 8: Interação multilateral entre professor e alunos 99
Figura 9: Questionamentos em relação a situação-problema 100
Figura 10: Interação bilateral professor-estudantes na discussão e análise das soluções 102
Figura 11: Desenvolvimento da Sequência Fedathi 103
Figura 12: Esquema de distribuição das atividades 120
Figura 13: Representação de uma barra de chocolate dividida em 4 e 2 partes 136
Figura 14: Definição de fração para Santos (2018) 171
Figura 15: Representações da fração $\frac{2}{4}$ 173
Figura 16: Representação da fração $\frac{2}{4}$ 173
Figura 17: Representação da fração $\frac{2}{4}$ 175
Figura 19: Representação de $\frac{3}{2}$ por Martins (2018) 176
Figura 19: Representação de $\frac{3}{2}$ por Pitágoras (2018) 176
Figura 20: Representações geométricas de $\frac{3}{2}$ 177
Figura 21: Representação da fração correspondente à 0,125 192

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Representação semiótica em tabela 71

Tabela 2: Número de acertos e erros das representações da fração $\frac{3}{2}$.................................... 176

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Pesquisas em desenvolvimento relacionadas ao projeto amplo. 19
Quadro 2: Registros de representação semiótica de Números Racionais. 25
Quadro 3: Lista dos Livros analisados por Marinho e Mandarino (2013) 39
Quadro 4: Tipos de recursos e aplicação identificados nos livros didáticos analisados 40
Quadro 5: Teses e dissertações que versam sobre ensino e aprendizagem de fração 43
Quadro 6: Transformação de Registros de Representação Semiótica 67
Quadro 7: Classificação dos diferentes tipos de representação 68
Quadro 8: Conversão e tratamento 70
Quadro 9: Relação de quantidades extensivas discretas e extensivas contínuas 84
Quadro 10: Relação entre quantidades discretas e contínuas, intensivas e extensivas 86
Quadro 11: Sequências didáticas na concepção de Zabala 95
Quadro 12: Estrutura global das atividades desenvolvidas 105
Quadro 13: Objetivos e aspectos centrais das engenharias de 1ª e 2ª geração 118
Quadro 14: Comparando IDR e IDD 118
Quadro 15: Formação inicial dos participantes da pesquisa 156
Quadro 16: Quantidade de disciplinas de Matemática que os participantes cursaram 158
Quadro 17: Conteúdos de Matemática estudados pelos participantes da pesquisa 161
Quadro 18: Como os participantes aprenderam fração 164
Quadro 19: Dificuldades dos professores para ensinar fração 165
Quadro 20: Modo como os participantes trabalham fração com os estudantes 167
Quadro 21: Definições de fração pelos participantes 169
Quadro 22: Representações de $\frac{2}{4}$ 172
Quadro 23: Quantidade de registros mobilizados pelos participantes 174
Quadro 24: Tempo semanal dedicado para ensinar Matemática 178
Quadro 25: Dificuldades das crianças para aprender fração de acordo com os participantes 179
Quadro 26: Papel do professor no processo de ensino de fração nos anos iniciais 181
Quadro 27: O papel do professor no processo de ensino de fração nos anos iniciais 183
Quadro 28: Respostas sobre o entendimento de sequência didática 185
Quadro 29: Quantitativo de respostas produzidas por bloco 188

Quadro 30: Representações fracionárias de 750 ml de uma jarra que contém 1litro de suco 189
Quadro 31: Respostas dos participantes na tarefa 03..193

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Representação semiótica gráfica 72
Gráfico 2: Número de professores no 1º Encontro 154
Gráfico 3: Quantidade de professores por faixa idade 155
Gráfico 4: Formação dos professores em nível de pós-graduação 156

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **15**

1.1 PERCURSOS INQUIETANTES **15**

1.2 COMPREENDENDO A PROBLEMÁTICA, A QUESTÃO DE PESQUISA E OS OBJETIVOS **18**

1.3 O REVELAR DA INVESTIGAÇÃO **21**

1.4 CONHECENDO A PESQUISA **26**

2 O ENSINO DE FRAÇÃO **28**

2.1 PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÃO **28**

2.2 APONTAMENTOS SOBRE FRAÇÃO NO LIVRO DIDÁTICO **35**

2.3 APONTAMENTOS DE PESQUISAS SOBRE O ENSINO DE FRAÇÃO **42**

2.4 O ENSINO DE FRAÇÃO NOS ANOS INICIAIS **53**

3 SUSTENTAÇÃO TEÓRICA **62**

3.1 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA **62**

3.2 DIFERENTES SIGNIFICADOS DE FRAÇÃO **73**

3.2.1 Significado parte-todo 74

3.2.2 Significado número 76

3.2.3 Significado medida 77

3.2.4 Significado quociente 79

3.2.5 Significado operador multiplicativo 80

3.3 QUANTIDADES CONTÍNUAS E DISCRETAS, INTENSIVAS E EXTENSIVAS **82**

3.4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA **87**

4 O DESLINDAR METODOLÓGICO **105**

4.1 CARACTERIZANDO A PESQUISA **106**

4.2 ENGENHARIA DIDÁTICA **110**

4.3 OS INSTRUMENTOS DE PRODUÇÃO DE DADOS **119**

4.3.1 Sequência de Atividades 119

4.3.1.1 Atividade 01: Relação Parte-Todo – Grupo 01 .... *121*

4.3.1.2 Atividade 02: Número – Grupo 02 .... *127*

4.3.1.3 Atividade 02: Número – Grupo 03 .... *131*

4.3.1.4 Atividade 03: Medidas – Grupo 04 .... *139*

4.3.1.5 Atividade 04: Quociente – Grupo 05 .... *143*
4.3.1.6 Atividade 05: Operador Multiplicativo – Grupo 06 .... *148*
5 A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE FRAÇÃO 154
5.1 OS PARTICIPANTES 154
5.1.1 Caracterização dos participantes da pesquisa 155
5.2 RELAÇÃO DOS PARTICIPANTES COM A MATEMÁTICA 157
5.3 RELAÇÃO DOS PARTICIPANTES NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÃO 165
5.4 ANÁLISE DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PELOS PROFESSORES 187
5.4.1 Análises Bloco 01 – Significado Parte-Todo 188
5.4.2 Análises Bloco 02 – Significado Número 195
5.4.3 Análises Bloco 03 – Significado Medidas 205
5.4.4 Análises Bloco 04 – Significado Quociente 208
5.4.5 Análises Bloco 05 – Significado Operador Multiplicativo 212
6 CONSIDERAÇÕES 217
REFERÊNCIAS 221

INTRODUÇÃO

Apresentamos nesta seção os percursos inquietantes que nos impulsionaram na busca por compreender os processos de ensino e de aprendizagem do conceito de fração. As experiências vivenciadas desde o ingresso na licenciatura, e com a participação no PIBID, nos motivaram a desenvolver estudos e pesquisas sobre as práticas de ensino de matemática e nos levaram ao aprofundamento desta temática no curso de Mestrado em Educação. A seguir, apresentamos a problemática, a pergunta que direcionou este trabalho, os objetivos, bem como a justificativa e a estruturação das seções seguintes.

1.1 Percursos inquietantes

A minha formação, enquanto sujeito ativo e participativo nos processos de transformação social, foi construída e constituída no âmbito da escola pública. Esse ambiente despertou-me o prazer pela aprendizagem em Matemática, o que me conduziu até aqui – professor e aspirante a pesquisador em Educação Matemática.

A vida pulsante nos processos educacionais da Educação Básica (EB) e, nela, o ensino e aprendizagem de Matemática conduziram-me, ainda adolescente, ao curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Tocantins (UFT), campus de Araguaína. Ao ingressar na Universidade, deparei-me com uma realidade muito diferente e com um tipo de vida distinto daquele que vivera até então: um ambiente repleto de adolescentes, jovens e adultos que buscavam qualificação profissional; uma estrutura organizacional e didático-pedagógica que não era semelhante à da EB, agora uma matriz curricular organizada em disciplinas ofertadas semestralmente e com pré-requisitos; alguns professores ministravam os conteúdos disciplinares preocupados com o processo de ensino, o que não era muito evidente com o de aprendizagem, uma vez que este último é mais dependente da postura dos estudantes; e a falta de articulação entre as disciplinas.

Nesse “mundo” diferente também se encontravam fendas por onde estudantes buscavam preencher lacunas dos processos de ensino e aprendizagem e, ao mesmo tempo, preparar-se para enfrentar a vida profissional, mesmo porque, esse é o objetivo maior de quem ingressa nos cursos superiores. O Programa de Iniciação à Pesquisa Científica (PIBIC), o Programa Institucional de Iniciação à Docência (PIBID), o Programa Nacional de Assistência Estudantil (PNAES), dentre outros, nutriam os sonhos de estudantes, inclusive o meu.

Ao ingressar no PIDID, na ocasião do segundo semestre de 2008, deparei-me com uma realidade diferente da até então vivenciada nas salas de aula. O programa de incentivo à docência pautava-se na metodologia de projetos e na interdisciplinaridade entre as áreas de Matemática, Geografia, História e Letras. As várias leituras, debates e discussões, no âmbito deste programa, proporcionaram-me mudança de postura – enquanto acadêmico e futuro educador matemático.

Em virtude desses estudos e das concepções sobre a metodologia de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos, comecei a inquietar-me com reflexões sobre como ensinar de tal modo que os estudantes compreendam os conceitos. Ao mesmo tempo, passei a me impulsionar no desenvolvimento de pesquisas e escritas de artigos, bem como na apresentação de trabalhos científicos em congressos nacionais e internacionais, versando sobre metodologias de ensino, práticas educativas em sala de aula, formação de professores e a Educação Matemática.

Ao concluir a graduação no início do ano de 2012, fui contatado, ainda em fevereiro, pela Secretaria Estadual de Educação do Tocantins (SEDUC-TO) para ministrar aulas de Matemática e Física para estudantes do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano), Ensino Médio e na Educação de Jovens e Adultos (EJA), em um colégio na cidade de Araguaína, TO.

Ainda nesse período, iniciei o curso de Especialização em Educação Matemática, na UFT-Araguaína, objetivando o aprofundamento de conhecimentos sobre a Educação Matemática e a busca por práticas educativas que levassem os estudantes à compreensão dos conteúdos ensinados em sala de aula, como metodologias alternativas e tradicionais. Em 2013, fui aprovado na Seleção para Professor Substituto na instituição de ensino onde me formei, com um contrato de quase dois anos, mas ainda permanecendo na Educação Básica, concomitantemente.

O primeiro contato com os professores na Educação Básica foi desestimulante. Encontrei pessoas desacreditadas com a educação, argumentando que é uma área de atuação sem futuro e que é muito trabalhoso e desgastante ministrar aulas para estudantes que não querem aprender. Sugeriram-me que procurasse outra área profissional, por ainda ser jovem. No entanto, os argumentos não me fizeram desistir de desempenhar aquilo para o qual fui graduado; continuei na escola com uma carga horária de 40 horas semanais, sendo 32 em sala de aula e 08 para planejamentos e preenchimento de diários.

No primeiro ano de experiência, assumo as aulas de Matemática de três turmas de 6º Ano e três de 7º Ano, além de uma turma de 1ª Série do Ensino Médio com a disciplina de Física. Não era mais o estagiário; agora carregava comigo a responsabilidade de professor regente de disciplinas, que deveriam ser ensinadas com o objetivo de que os estudantes conseguissem aprender.

As vivências em sala de aula, em uma região de periferia, me fizeram perceber que aquilo que se aprende e se ensina na escola não são apenas conteúdos disciplinares, principalmente quando os estudantes não têm estrutura familiar que os ensine o que é correto fazer. Por diversas vezes, interrompia a aula para conversar com os meninos e meninas para saber o que os levava à desatenção nas aulas. Descobri que muitos estavam ali por causa da comida, outros tinham pais alcoólatras, presos. Peripécias que o professor vive todos os dias.

Em relação ao ensino de conteúdo matemático, sempre buscava contextualizar aquilo que ensinava, colocando o conteúdo o mais próximo possível da realidade dos estudantes. Procurava também desenvolver gincanas de Matemática e usar o Laboratório de Matemática (uso de materiais concretos). No entanto, o que sempre predominou foram as aulas expositivas com muita resolução de exercícios.

Sempre que possível, diversificava as aulas seguindo o que havia vivenciado no PIBID, o que não acontecia sempre por causa da escassez de tempo para planejamento. Todavia, sempre ficava a sensação de que poderia fazer algo mais pela aprendizagem dos estudantes, mudando a metodologia de ensino.

Tais experiências me impulsionaram e me levaram à inquietação quanto às problemáticas relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática nos níveis fundamental, médio e superior. Segundo Larrosa (2002, p. 21), a "experiência é o que nos passa, o que nos acontece, o que nos toca", e não simplesmente o que se passa, se acontece ou se toca. Nesse sentido, essas vivências direcionam-se na busca de compreender as dificuldades que estudantes encontram no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos, especialmente os relacionados às frações.

O interesse pela atuação em sala de aula foi sendo nutrido pelas pesquisas desenvolvidas por ocasião da participação no PIBID, que tem como um de seus principais objetivos o incentivo à atuação docente daqueles que estiveram no programa e nas experiências em sala de aula, que me levou à inquietação quanto a metodologia de ensino dos conteúdos matemáticos. Segundo D'Ambrosio (1991; 2005), geralmente, a maneira como a Matemática é ensinada torna os conteúdos obsoletos, inúteis e desinteressantes. Perante essas considerações, apresento no próximo tópico a questão de pesquisa que investigamos, bem como os objetivos que a pesquisa buscou alcançar.

1.2 Compreendendo a problemática, a questão de pesquisa e os objetivos

Durante minha formação inicial e a participação no PIBID, eu notava determinada apatia dos estudantes quanto às suas participações no processo formativo e também percebia uma série de dificuldades de aprendizagem dos conteúdos ministrados. Essa situação talvez fosse consequência das abordagens metodológicas dos professores-formadores ou mesmo o desinteresse pela matemática.

Tal situação é discutida por Schastai, Farias e Silva (2017, p. 17), argumentando que a maioria dos professores passam muitos anos em "bancos acadêmicos, quietos, passivos, enquanto seus professores falam ou escrevem no quadro conteúdos que devem ser decorados e depois repetido nas provas, bastando memorizar para se formar, sair da universidade e colocar em prática o mesmo sistema de ensino que recebeu".

Esta foi uma realidade que vivenciei em algumas disciplinas durante a graduação, com algumas exceções. O ingresso no PIBID permitiu olhar a formação de professores em outra perspectiva: a de tentar dar sentido ao ensino de conteúdos matemáticos para os estudantes, de tal modo que pudessem alcançarem a aprendizagem. Me incomodava o fato de ver as dificuldades dos estudantes aspirantes a docentes da Educação Básica em aprender os conteúdos ensinados.

Desde então, algumas inquietações que dizem respeito à prática de ensino sempre me acompanharam durante a formação inicial, continuada e nas minhas práticas enquanto professor: Até que ponto os cursos de Licenciatura estão conseguindo formar professores para desenvolver práticas inovadoras, reflexivas, com metodologias ativas exigidas na Educação Básica? Quais são as estratégias, as ações, que proporcionam uma formação pautada nas problemáticas da profissão docente? Como esses cursos estão oportunizando aos licenciandos vivenciarem práticas de ensino inovadoras? Tais questionamentos estão relacionados à formação inicial de professores que ensinam matemática e suas práticas em sala de aula, visto que só podemos ensinar aquilo que aprendemos.

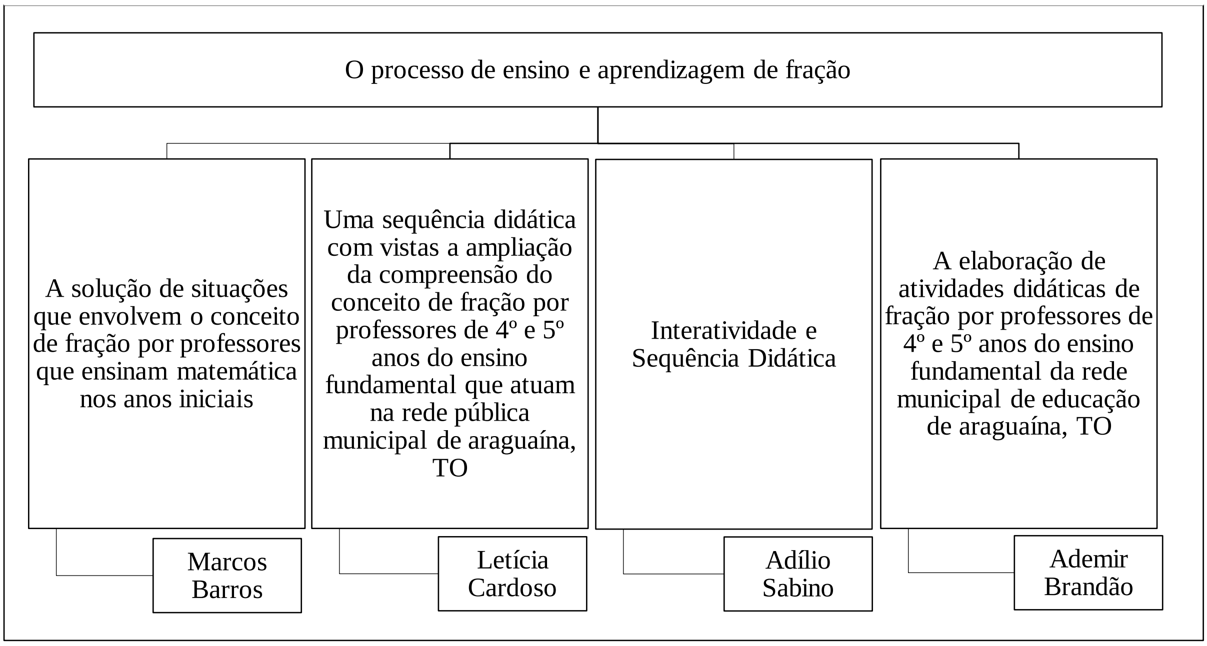
Ao ingressar no Mestrado em Educação, do Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da UFT, deparei-me com uma realidade de discussões mais aprofundadas, principalmente das concepções e práticas da formação de professores. Ao mesmo tempo, iniciam-se as reuniões de orientação com discussões sobre o conceito de fração, que fazem parte do projeto maior intitulado "O processo de ensino e aprendizagem de fração".

Trata-se de um projeto amplo, cujo período de duração ultrapassa 5 (cinco) anos e contempla uma série de pesquisas a serem desenvolvidas tanto com estudantes, como com professores de diferentes níveis de ensino. É importante destacar que já foram realizados estudos que resultaram em duas dissertações defendidas no Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT). Uma das dissertações propõe o uso de sequências didáticas com vistas à compreensão do conceito de fração (CARVALHO, 2017) e a outra em relação à compreensão de adição de fração (PEREIRA, 2017).

Neste momento, há o desenvolvimento de três pesquisas por estudantes do Curso de Mestrado Acadêmico em Educação pelo Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) e uma no Curso de Mestrado Profissional em Educação pelo Programa de Pós-Graduação em Educação (PPPGE) da Universidade Federal do Tocantins (UFT), que também resultarão em dissertações a serem defendidas perante banca pública constituída para tal finalidade. Esses quatro estudos estão interconectados entre si, de modo que os mestrandos atuam conjuntamente no processo de elaboração e desenvolvimento dos estudos, cabendo a cada um as especificidades de seu objeto de investigação.

O esquema a seguir mostra as pesquisas em desenvolvimento, às quais estão relacionadas ao projeto amplo “O processo de ensino e aprendizagem de fração”.

Quadro 1: Pesquisas em desenvolvimento relacionadas ao projeto amplo.



Fonte: Elaboração do autor

O presente estudo tem como objetivo geral verificar o modo como professores de 4º e 5º Ano do Ensino Fundamental da Rede Municipal de Educação de Araguaína, TO, resolvem situações que envolvem o conceito de fração, considerando os registros de representação semiótica, os diferentes significados de fração e as características das quantidades. Estabelecemos como questão de pesquisa: **Como professores que ensinam matemática no 4º e 5º Ano do Ensino Fundamental na Rede Municipal de Educação de Araguaína, TO, resolvem situações que envolvem o conceito de fração?**

Na intenção de responder à pergunta de pesquisa e alcançar o objetivo geral, estabelecemos como objetivos específicos:

a) Averiguar se os professores de 4º e 5º Ano do Ensino Fundamental conhecem diferentes significados de fração e as reconhecem em diferentes registros de representação semiótica;

b) Identificar, por meio de uma sequência de atividades, conhecimentos matemáticos que os professores de 4º e 5º Ano do Ensino Fundamental mobilizam para resolver situações que envolvem fração.

c) Examinar o modo como professores de 4º e 5º Ano do Ensino Fundamental, que atuam na Rede Municipal de Ensino de Araguaína, TO, resolvem situações que envolvem fração, a partir de uma sequência de atividades, considerando significados de fração, o uso de diferentes registros de representação semiótica e a natureza das quantidades.

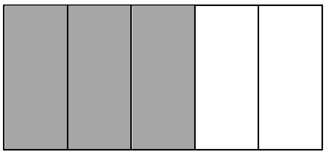
O segundo estudo compreende a elaboração e desenvolvimento de uma Sequência Didática com vistas à ampliação da compreensão do conceito de fração por professores da Rede Municipal de Educação de Araguaína, TO, que ensinam matemática no 4º e 5º ano do Ensino Fundamental, e será desenvolvido pela mestranda Letícia Silva Cardoso. Já o terceiro estudo tem como objetivo deslindar os papéis dos envolvidos no processo de elaboração e desenvolvimento de Sequência Didática, junto a professores da Rede Municipal de Educação de Araguaína, TO, que ensinam matemática no 4º e 5 º ano do Ensino Fundamental, a partir da realização de um curso de formação continuada, observando principalmente a interatividade no processo de elaboração de sequência didática, e será desenvolvido pelo mestrando Adílio Jorge Sabino. O quarto estudo tem como objetivo geral analisar as contribuições que o curso de formação continuada sobre o desenvolvimento de Sequência Didática para ampliar o conceito de fração trouxe aos professores da Rede Municipal de Educação de Araguaína, TO, que ensinam matemática no 4º e 5º ano do Ensino Fundamental, será desenvolvido pelo mestrando Ademir Brandão Costa.

O presente estudo, inspirado na metodologia da Engenharia Didática (ED) e no desenvolvimento de uma Sequência Didática (SD), faz parte do projeto amplo, do qual resultarão várias outras pesquisas. Esta investigação perpassa pelas fases 01 e 02 da ED (análises preliminares e *a priori*) em que a produção de dados ocorreu a partir de dois instrumentos – um constituído de perguntas em que se busca conhecer o perfil dos participantes e o segundo, constituído de uma série de questões, que, na perspectiva da SD, se configura como um pré-teste. As questões desse instrumento contemplam diferentes registros de representação semiótica, significados de fração, equivalência e comparação de fração, sem perder de vista as características das quantidades.

1.3 O revelar da investigação

Minha relação com o ensino de fração se inicia na Educação Básica. Lembro-me que, tradicionalmente, os professores tendiam a promover a transposição didática[1] desse conteúdo por meio da representação parte-todo. Por exemplo, para representar a fração $\frac{3}{5}$, quase sempre, recorria-se a uma figura, normalmente retangular, dividida em cinco partes iguais em que se destacavam três partes do total.

Figura 1: Desenho retangular



Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste caso, usa-se a concepção de dupla contagem, que consiste em contar a quantidade de partes que foram pintadas (3) e sobrepor ao total de partes em que a figura foi dividida (5), sendo que essa sobreposição deve ser separada por um “tracinho”, conforme pode ser observado a seguir.

Figura 2: Esquema de dupla contagem.

$$\frac{\text{partes pintadas}}{\text{total das partes}} = \frac{03}{05} \leftarrow \text{tracinho}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

[1] A transposição didática consistiria, portanto, do ponto de vista do professor, em construir suas próprias aulas retirando da fonte os saberes, levando em conta as orientações fornecidas pelas instruções e pelos programas (saber a ensinar), para adaptá-los à própria classe, ou seja, ao nível dos alunos e aos objetivos buscados. A transposição didática consiste em extrair um elemento de saber do seu contexto (universitário, social etc.) para recontextualizá-lo no ambiente sempre singular, sempre único, da própria classe (D’AMORE, 2007, p. 226).

Segundo Schastai, Farias e Silva (2017), os professores iniciam a abordagem do conceito de fração fazendo uso de figuras geométricas planas, direcionando o ensino e a aprendizagem matemática para os algoritmos.

> Os alunos, então, "dividem" o todo de acordo com a quantidade de partes indicadas no denominador e pintam as partes indicadas no numerador. O termo "dividem" está entre aspas porque, na maioria das vezes, os alunos repartem essas figuras não observando que a divisão deve ser feita em partes iguais. Ou seja, o procedimento considerado adequado para representar as frações utilizando figuras geométricas planas é dividir o todo em partes iguais em relação à área (SCHASTAI; FARIAS; SILVA, 2017, p. 74).

Isso reflete um ensino mecânico e, por isso, desinteressante, pelo fato de os estudantes reproduzirem somente aquilo que os professores ensinam de maneira automática. Quando não se compreende que a divisão de uma figura plana deve ser feita em partes iguais, fica evidente que não houve a aprendizagem do conceito abordado. É necessário romper a barreira de ensinar academicamente as disciplinas e os conteúdos curriculares aos estudantes e considerá-los como indivíduos, com suas dimensões afetivas, morais e sociais. Bessa (2007, p. 20) afirma:

> O esperado e desejável é que o professor tenha respaldo para ir além disso. Há diferenças entre a atuação do professor e a do educador. Cabe ao primeiro estar sempre preocupado em repassar conteúdos acadêmicos. O professor é caracterizado como aquele profissional que visa abrir o leque de possibilidades acadêmicas, para que o estudante seja um potencial competitivo e consiga vencer os diversos desafios que se propõe alcançar. O professor prepara o aluno academicamente. O educador, além de desenvolver os aspectos cognitivos, preocupa-se com a formação global do estudante: busca um trabalho integrado nas dimensões afetivas, moral e social.

O que observamos – ainda na Educação Básica – é uma atuação do professor nos termos apresentados por Bessa (2007), prevalecendo o repasse do conteúdo de fração e os algoritmos de resolução de problemas. Schastai, Farias e Silva (2017, p. 45) entendem que os professores devem se desprender da prática pedagógica que tenha resquícios em uma racionalidade técnica. "Ele precisa ser um profissional que saiba articular o processo pedagógico com as necessidades dos alunos em sua vivência social e cultural", devendo estar capacitado para motivar os estudantes a serem reflexivos.

Minhas experiências permitem afirmar que ainda é predominante, nas escolas, o ensino tradicional[2], especialmente quanto ao conceito de fração. Percebe-se que os professores recorrem ao MMC (Mínimo Múltiplo Comum) para somar e/ou subtrair frações cujos

---

[2] Queremos sugerir, entretanto, que o ensino tradicional de Matemática é caracterizado por certas maneiras de organização da sala de aula, em que as aulas são organizadas em duas partes: primeiro, o professor apresenta alguns conceitos e técnicas matemáticas de resolução, geralmente baseados em algum livro-texto; em seguida os estudantes tentam ou resolvem exercícios fazendo uso das técnicas apresentadas (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 51).

denominadores são diferentes. Segundo Silva (2013), esse é um instrumento muito utilizado pelos professores, mas na maioria das vezes os estudantes não conseguem compreender.

A fim de compreender como se dá a utilização desse procedimento, tomemos o seguinte exemplo: João comeu $\frac{1}{8}$ de uma pizza de 8 pedaços, enquanto Maria comeu $\frac{1}{4}$. Que quantidade de pizza João e Maria comeram juntos?

Neste caso, a operação de soma resolve o problema $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)$. Note que as frações apresentam denominadores diferentes (8 e 4), desse modo, a tendência é recorrer ao procedimento do mínimo múltiplo comum (com exceção do zero) a fim de encontrar um número que seja, ao mesmo tempo, mínimo, múltiplo e comum aos denominadores e, finalmente, realizar o cálculo da adição:

a) Encontram-se os múltiplos de 8 (0, 8, 16, 24, 32, ...);

Encontram-se os múltiplos de 4 (0, 4, 8, 12, 16, 20, ...);

b) Identifica-se o menor múltiplo comum entre os denominadores 4 e 8;

c) Igualam-se os denominadores das frações na operação: $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{}{8}+\frac{}{8}$;

d) Em relação à primeira fração $\left(\frac{1}{8}\right)$: divide-se o denominador 8 pelo denominador da primeira fração (08) e multiplica-se o resultado (01) pelo numerador da primeira fração (01). O resultado desse produto corresponde ao numerador da primeira fração.

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{}{8}+\frac{}{8}=\frac{(8\div 8)\times 1}{8}+\frac{}{8}=\frac{(1)\times 1}{8}+\frac{}{8}=\frac{1}{8}+\frac{}{8};$$

e) Em relação à segunda fração $\left(\frac{1}{4}\right)$: divide-se o denominador 8 pelo denominador da segunda fração (04) e multiplica-se o resultado (02) pelo numerador da segunda fração (02). O resultado desse produto corresponde ao numerador da segunda fração.

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{}{8}+\frac{}{8}=\frac{(8\div 8)\times 1}{8}+\frac{(8\div 4)\times 1}{8}=\frac{1\times 1}{8}+\frac{(2)\times 1}{8}=\frac{1}{8}+\frac{2}{8};$$

f) Somam-se os numeradores conservando-se um denominador: $\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=\frac{1+2}{8}=\frac{3}{8}$.

Para Silva (2013), ao trabalhar com soma e subtração de fração com quantidades discretas, faz-se necessário buscar outras maneiras de resolução, como a equivalência entre as frações.

> [...] torna-se possível a utilização de outros instrumentos que poderão facilitar a compreensão dos conceitos por parte dos alunos, enquanto que o fato de se trabalhar unicamente com o uso do Mínimo Múltiplo Comum, que é instrumento muito comum usado por professores, e muitas vezes não compreendido pelos alunos. Ao estudarmos as frações através das quantidades discretas, podemos usar das equivalências para buscar frações que tenham o mesmo denominador e assim facilitar os cálculos aritméticos (SILVA, 2013, p. 38).

O uso de outras maneiras de solução pode facilitar a aprendizagem das operações com fração. A utilização do mínimo múltiplo comum, como único método de ensinar a soma e a subtração de frações, pode não ser suficiente para que os estudantes compreendam os cálculos aritméticos. Silva (2013) acredita que fazer uso da equivalência de fração poderá facilitar esses cálculos.

A insistência em permanecer com uma postura de exposição de conteúdos e métodos ou técnicas de resolução de exercícios pode fazer com que não haja a compreensão do conceito de fração no processo de ensino e de aprendizagem. Não é possível que a aprendizagem dos estudantes, referente a esse conceito, decorra de uma prática educativa que valorize somente o fazer e operar em detrimento do pensar e abstrair. Há que se valorizar a capacidade que cada um dos estudantes tem de criar situações cuja finalidade é compreender aquilo que está sendo feito (SILVA, 2013).

Enquanto profissionais que se preocupam com a qualidade do ensino, devemos buscar outras maneiras de proporcionar aos estudantes uma aprendizagem diferente da que estamos acostumados em nossas aulas. Não se trata apenas de cumprir um currículo engessado que nos é proposto, é fundamental romper suas barreiras, considerando que o nosso papel é preparar os estudantes com uma formação social e intelectual. O ensino de matemática não pode esquivar-se disso e

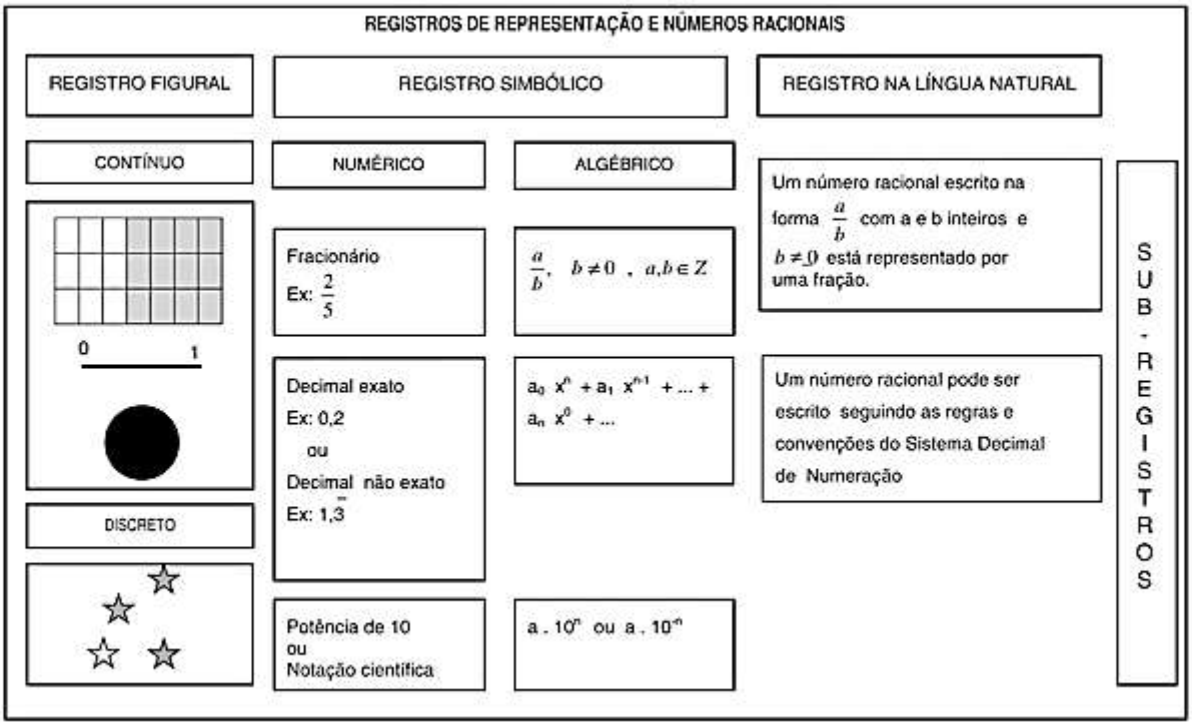
> com certeza os estudos das frações não podem ser deixados como um estudo opcional. Há de se compreender que elas fazem parte do nosso cotidiano, isto é, estão presentes nas atividades mais comuns como em receitas culinárias, e, portanto, não são desconhecidas pelos alunos (SILVA, 2013, p. 18).

Pesquisas apontam que o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de frações é um dos mais difíceis de serem assimilados tanto por estudantes da Educação Básica quanto por professores, assim como, também, de serem ensinados, conforme preconizam Lopes (2008), Proença (2015), Bessa (2007), Cervantes (2011), Silva (2013), Lima (2014), Bolognani (2015), Pinheiro (2014), entre outros. De maneira geral, docentes costumam abordá-lo por meio, unicamente, da metodologia tradicional com a representação parte-todo.

De acordo com os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) de Matemática, os números racionais – e fração pertence a esse conjunto – admitem os significados em contextos distintos por meio de relações parte/todo, divisão e fração (BRASIL, 1998). Segundo Santana *et al* (2013), os registros de representação de uma fração são: registro simbólico-numérico (fração e decimal) ou algébrico; figural (considerando quantidades contínuas e discretas); língua natural.

Maranhão e Igliori (2017), baseadas em Duval (1999) apresentam três fenômenos interligados referentes ao desenvolvimento cognitivo e às dificuldades na aprendizagem do conceito de número racional. O primeiro está ligado à existência de vários registros de representação, e nesse caso, o número racional pode ser apresentado por três tipos deles: simbólico, figural e língua natural, como apontado por Santana *et al* (2013), o que pode ser verificado no quadro 1, a seguir:

Quadro 2: Registros de representação semiótica de Números Racionais.



Fonte: MARANHÃO; IGLIORI (2017, p. 62).

O segundo fenômeno está ligado à diferenciação entre o objeto representado e seus registos de representação semiótica, ou seja, à dificuldade de saber o que é representante e representado. Um exemplo: o estudante não consegue perceber que $(0{,}5)^2 = 0{,}25$ e que $\frac{1}{4} = 0{,}25$ são representações de um mesmo número. E o terceiro está relacionado à coordenação entre os registros de representação semiótica, quando requer o entendimento de que ao escrever $0{,}25$ como $\frac{1}{4}$ há uma conversão e que ao escrever $\frac{1}{4}$ como $\frac{2}{8}$ há um tratamento.

Estudos como os de Lima (2014) e Bolognani (2015), sustentam que o ensino de fração por meio do desenvolvimento de sequências didáticas (SD), quando bem planejado, favorece a aprendizagem, por parte dos estudantes. Sendo a Matemática vista como uma disciplina que gira em torno de cálculos, faz com que as SD, os jogos e os materiais manipuláveis mostrem-se como recursos didáticos valiosos para a aprendizagem do conceito de fração, portanto, lançar mão de diferentes metodologias de ensino se torna fundamental ao processo de compreensão do que se está estudando.

Ao considerar que o ensino de fração é algo temido por professores e estudantes (BOLOGNANI, 2015) e que os professores, mesmo tendo estudado a disciplina de Metodologia da Matemática durante suas formações iniciais, afirmam não ter conhecimento suficiente para ensinar matemática (PINHEIRO, 2014), esta pesquisa reveste-se de importância singular, uma vez que busca compreender como se dá o ensino de fração, bem como o modo como os professores resolvem as situações que envolvem esse conceito. Entendemos que esta pesquisa poderá trazer contribuições importantes para a área da Educação, especialmente para a Educação Matemática, mais especificamente em relação ao processo de ensino e aprendizagem de fração nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Isto porque professores e professoras poderão compreender com maior profundidade o conceito de fração, seus significados, diferentes maneiras de representar um registro fracionário, que normalmente não tiveram a oportunidade em estudar com riquezas de detalhes na universidade.

1.4 Conhecendo a pesquisa

A dissertação está organizada em cinco seções. A primeira traz a apresentação da investigação e os motivos que nos levaram a realizar esta pesquisa. A segunda e terceira seções compõem a parte teórica do estudo; a quarta, trata da metodologia; e a quinta seção constitui-se da análise e discussão das informações e dados coletados, sendo seguida pelas considerações finais.

Na primeira seção apresentamos os percursos inquietantes, a problemática de investigação, os objetivos e a questão que direcionou a pesquisa, bem como as justificativas. Para tanto, nos baseamos em Larrosa (2002), D'Ambrosio (1991, 2005); apresentamos os autores da sustentação teórica, Duval (2009), Merlini (2005), Silva (2007), Nunes et al (2005), Schastai, Farias e Silva (2017).

Na segunda, trazemos uma discussão sobre o que as pesquisas de Lima (2014), Chequetto (2016), Bolognani (2015), Pinheiro (2014), Cervantes (2011), Silva (2013) e Bessa (2007) apontam sobre o processo de ensino e de aprendizagem do conceito de fração, sobre fração no livro didático e sobre o ensino de fração. Há também uma discussão sobre o ensino de fração nos anos iniciais. A sustentação teórica compreende as pesquisas analisadas e também as produções de Lopes (2008), Proença (2015), Brasil (1998), Santana et al (2013), Zabala (2010), Cavalcante e Guimarães (2008) e Schastai, Farias e Silva (2017).

Apresentamos na terceira seção a sustentação teórica da investigação. Fazemos uma discussão sobre os registros de representação semiótica e as frações, de acordo com os pressupostos de Duval (2009); destacamos cinco significados de fração (parte-todo, número, medida, quociente e operador multiplicativo) baseados em Merlini (2005) e Silva (2007). Discutimos a natureza das quantidades contínuas e discretas, intensivas e extensivas, sustentadas por Nunes et al (2005), e Sequência Didática nos pressupostos de Zabala (1998), Oliveira (2013) e Borges Neto (2013).

Na seção quatro apresentamos os aspectos metodológicos da pesquisa, caracterizando-a quanto à abordagem, à natureza, aos objetivos e aos procedimentos. Como método de desenvolvimento das atividades para coleta de dados e informações e da investigação, apresentamos a Engenharia Didática, de acordo com os pressupostos de Artigue (1996). Nesta seção caracterizamos os participantes da pesquisa, bem como, a sequência de atividades desenvolvidas.

As discussões referentes ao modo como os professores resolveram as atividades que envolvem o conceito de fração foram realizadas na seção cinco. Nela realizamos as análises dos dados e informações obtidos com os instrumentos elaborados para esta finalidade. Essa seção é seguida pelas considerações, com as quais concluímos este estudo e indicamos novas possibilidades de pesquisas.

2 O ENSINO DE FRAÇÃO

O objetivo nesta seção, é verificar o que pesquisas que tematizam o ensino de frações apontam como possíveis causas das dificuldades de estudantes da Educação Básica no processo de solução de situações que envolvem esse conceito. Para tanto, realizamos uma busca no banco de dados da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), a fim de encontrar pesquisas de Dissertações e Teses que tratam do ensino de frações, aprendizagem de frações e o processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo.

Verificamos que as dificuldades na aprendizagem desse conceito estão relacionadas às abordagens metodológicas de ensino, à falta de interesse dos estudantes quanto aos conteúdos matemáticos e à descontextualização do conceito de fração com situações concretas. Segundo D'Ambrosio (1991; 2005), a maneira como os conteúdos matemáticos tem sido ensinado torna a Matemática inútil e desinteressante.

Realizamos a busca no banco de Teses e Dissertações da CAPES, utilizando o termo "ensino e aprendizagem de frações", entre aspas, entre os anos de 1987 e 2017. Obtivemos com esse levantamento 07 investigações, sendo seis dissertações de mestrado e uma tese de doutorado, que passamos a analisar na subseção seguinte. Utilizamos o termo entre aspas porque ao usá-lo sem as aspas obtivemos 1.118.208 de pesquisas, o que seria praticamente impossível suas análises.

2.1 Processo de ensino e aprendizagem de fração

Ao ensinar o conceito de fração, fazendo uso de diferentes registros de representação e alguns significados de fração, pode-se despertar nos estudantes o interesse pela aprendizagem desse conteúdo. Segundo Alrø e Skovsmose (2010, p. 52) "a mera resolução de exercícios é uma atividade muito mais limitante para o aluno do que qualquer tipo de investigação", assim, torna-se importante procurar maneiras distintas ao propor o ensino de conteúdos matemáticos.

O conteúdo de fração se reveste de importância singular, uma vez que existem outros conceitos ligados a ele, como porcentagens e números decimais, por exemplo. Isso tem feito com que tal conteúdo se torne tema de discussões e de pesquisas ligadas aos processos de ensino e aprendizagem que apontam o conteúdo de fração como um dos mais difíceis para professores e estudantes em Matemática (SILVA, 2013).

Santos *et al* (2014) verificaram que os estudantes conseguem resolver problemas fracionários quando estes apresentam frações absolutas, no entanto, mostram dificuldades quanto às frações relativas.

A aprendizagem do conceito de número racional é multifacetado e envolve vários significados[3] (parte-todo, número, medida, quociente e operador multiplicativo). Estes significados, o caráter relacional dos racionais e as diferentes representações deste número fazem com que tanto a aprendizagem quanto o ensino sejam um dos mais sérios problemas da Matemática escolar (PONTE; QUARESMA, 2014).

> Na verdade, as dificuldades de muitos alunos na aprendizagem dos números racionais começam logo nos aspectos mais básicos. Ao dividir o todo em partes, alguns alunos perdem de vista a necessidade de todas as partes serem iguais ou contam as partes incorretamente. Outros, dada uma parte, têm dificuldade em relacioná-la com o todo correspondente. Mesmo quando parecem já ter algum conhecimento dos números racionais, falta-lhes com frequência a compreensão de que os números racionais são números e que podem ser representados de várias formas (PONTE; QUARESMA, 2014, p. 1466).

Dentre as maneiras de representação dos números racionais, temos a decimal, a fração, a porcentagem, a razão, a reta numérica, a linguagem natural e representação por meio de figuras geométricas planas. Todas são representações de um mesmo número, sendo necessário que os estudantes as compreendam.

A dificuldade no entendimento desse conceito está ligada à "diversificação dos registros de representação semiótica" (SANTANA *et al*, 2013, p. 1) que, normalmente, não são considerados nas abordagens em sala de aula, o que pode levar ao bloqueio na aprendizagem dos estudantes. Segundo Post *et al* (1993 *apud* PONTE; QUARESMA, 2014, p. 1466), a aprendizagem e/ou compreensão do conceito de número racional estão relacionadas a flexibilidade de conversão entre diferentes representações (semiótica) e na transformação no interior de cada registro.

Merlini (2005) entende que, para estudar e ensinar um "ente matemático", é necessário considerar a Matemática como ciência e como disciplina, em seu processo de ensino e aprendizagem. Portanto, é importante considerar no ensino do objeto matemático os aspectos históricos, o olhar da Educação Matemática e o ambiente escolar em que os estudantes estão inseridos.

Historicamente, a noção de números está presente na vida cotidiana desde a existência da humanidade, devido à necessidade de contar. Conforme Merlini (2005, p. 42) "as primeiras informações sobre a ideia de número são do período paleolítico". Nesse período, a

[3] Estamos considerando, neste estudo, cinco significados de fração: parte-todo, número, medida, quociente e operador multiplicativo.

humanidade vivia da caça, da pesca, da coleta de frutas e provavelmente morava em cavernas, deslocava-se de um lugar para outro, e iniciara a fabricação de facas, lanças e machados feitos de pedras (ROSA; ZINGANO, 2013).

Os números foram utilizados pelos homens, durante muito tempo, com o objetivo de contar e medir. Contudo, após essa utilização de forma primitiva, "o homem começou a especular sobre a natureza e as propriedades dos próprios números" (MERLINI, 2005, p. 42). Desse modo, a Matemática é resultado da ação do homem e de suas especulações das propriedades dos números que eram naturalmente usados no cotidiano das pessoas, exceto seu formalismo, isto é, "a Matemática emerge de uma apreensão sensível do real" (MERLINI, 2005, p. 42).

Da mesma maneira, o conteúdo de fração também é oriundo de apreensões sensíveis da realidade, algo pertencente à vida diária das pessoas e, nesse sentido, o seu ensino não pode estar descontextualizado do cotidiano dos estudantes. Esse contexto pode ser observado desde a antiguidade em "que os egípcios já usavam a fração por volta de 2000 a.C. para operar com seus sistemas de pesos e medidas e para exprimir resultados" (BRASIL, 1998, p. 101).

Lopes (2008) entende que há uma persistência em ensinar esse conteúdo de forma obsoleta, sem sentido. Ensina-se, por exemplo, o conceito de *fração própria* e, mesmo antes de entendê-las, passa-se a ensinar o conceito de *fração aparente*, em que uma fração também pode assumir a forma de número inteiro.

Assim, o ensino dos números racionais (fração) forma os estudantes em concepção simplista de números e operações com estratégias excessivamente mecânicas para resolver determinado número de problemas. Considerando esses termos, o ensino deveria ser direcionado mais para o significado do que para símbolos, e os estudantes deveriam ser encorajados a construir seus próprios conhecimentos, passando a entender que o conhecimento não é dado em um "pacote" de maneira pronta e acabada (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008).

Onuchic e Allevato (2008, p. 82) argumentam:

> O trabalho com números racionais precisa ser feito de um modo diferente daquele em que regras de "como fazer" são privilegiadas. Considere-se, então, um trabalho onde um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e conteúdos; a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho, e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula.

Vaz (2016) salienta que o privilégio de metodologia voltada para a repetição e memorização de fórmulas e regras pode levar ao fracasso na aprendizagem dos estudantes. Nesse sentido, entendemos que é necessário repensar os modos de ensinar o conceito de fração, uma vez que a abordagem tradicional de ensino pode levar os estudantes ao fracasso na aprendizagem.

O que tem sido observado é que o ensino desse conceito se caracteriza por aulas tradicionais, privilegiando a comunicação de conteúdo. Essa metodologia de ensino pode levar os professores a estacionar seus "modos de ensinar" na zona do conforto, onde não há confrontos, nem espaços para perguntas e reflexão daquilo que está sendo ensinado. Desse modo, os professores passam a exercer total controle sobre a aula, privilegiando a realização de exercícios com o objetivo de memorização.

Segundo Borba e Penteado (2015, p. 56), "alguns professores procuram caminhar numa *zona de conforto* onde quase tudo é conhecido, previsível e controlável". Os educadores reconhecem que precisam mudar, mas não conseguem se movimentar por outros caminhos e mudar suas metodologias de ensino, mesmo sabendo que da maneira como estão ensinando não favorecem a aprendizagem dos estudantes. Isso ocorre porque os professores construíram uma ideia do que é ensinar e como ensinar a Matemática, tornando-se algo praticamente intocável. Temos a convicção de que o ensino de Matemática deve transitar por outra direção, contrária à zona de conforto: a zona de risco.

Nas concepções de Onuchic e Allevato (2008), o papel do professor deixa de ser apenas de comunicador do conhecimento e passa a ser o de observador, mediador, incentivador da aprendizagem. Assim, no momento da resolução de determinados problemas, o professor deve lançar perguntas que desafiem os estudantes a superar as dificuldades, apoiando-se uns nos outros. "O professor, ao fazer a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 83). Ao assumir essa postura, o professor não exerce controle sobre a turma e entra em uma zona de risco.

Na zona de risco, os professores não têm tudo sob controle; os estudantes são atores principais em seu processo de aprendizagem. Professores e estudantes constroem, em parceria, o conhecimento e, dessa maneira, os conteúdos da ciência Matemática passam a apresentar algum sentido. Borba e Penteado (2015, p. 57) entendem que em uma zona de risco os professores não podem prever todas os acontecimentos da sala de aula, todas as perguntas, e que é necessário que os próprios educadores avaliem "constantemente as consequências das ações propostas". Nesse sentido, o professor não controla totalmente a turma, no tocante a saber todas as variáveis inerentes ao objeto matemática, uma vez que podem surgir questionamentos que não foram previstos por ele.

O estudo de Bessa (2007, p. 68) preconiza que, dos conteúdos da matemática, os números racionas apresentam-se como um dos mais difíceis, "pois sua compreensão envolve uma variedade de aspectos que se configuram como obstáculos ao seu pleno domínio", e, conforme se propõe, esse conteúdo é abordado em sala de aula como uma sequência dos números naturais, e que as tentativas de estabelecer paralelos entre os dois conjuntos (números naturais e números decimais) ora são válidas, ora não são, o que dificulta a aprendizagem dos estudantes, deixando-os confusos e/ou desorientados quanto ao que está sendo ensinado.

Para realizar operações como a soma, é comum recorrer ao MMC (mínimo múltiplo comum) atribuindo ao ensino de fração um aspecto procedimental "sem compreensão da relação deste procedimento com a equivalência de frações" (SANTANA *et al*, 2013, p. 5). Práticas como essa promovem a dificuldade de compreensão do conceito ensinado, especialmente o de fração.

Para Vaz (2016), o procedimento de memorização e a supervalorização de regras e macetes, com o objetivo de promover o ensino de fração, fazendo uso na resolução de algumas operações matemáticas, torna-se um problema gravíssimo para o processo de ensino e aprendizagem. Portanto, há a necessidade de (re)construir novos métodos de ensino que estejam voltados para a contextualização dos conteúdos ensinados.

Onuchic e Allevato (2008) entendem que o ensino que envolve os números racionais deve ser feito de maneiras diferentes daquelas em que as regras de "como fazer" têm certos privilégios. "Considere-se, então, um trabalho onde um problema é o ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e conteúdos; a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 82). Nesses termos, a aprendizagem acontece de modo colaborativo na sala de aula, em que professor e estudante desenvolvem, juntos, esse trabalho.

É importante repensar os modos de ensinar que privilegiam somente as regras para resolver todo tipo de situação ou problema, principalmente quando levamos em consideração que os conteúdos de Matemática devem estar imbuídos de sentido para os estudantes, o que pode levar à aprendizagem dos mesmos. O ensino por meio de memorização de regras e macetes dos conceitos de fração não dá sentido ao que está sendo ensinado. Para Cavalcanti e Guimarães (2008), há diversas situações em que a fração pode ser encontrada: parte/todo, quociente, probabilidade, operador multiplicativo, número, medida, razão, ambas podem ser contextualizadas em situações problemas, a fim de que tenham sentido.

Segundo Lopes (2008, p. 4), atividades e/ou tarefas com frações complicadas devem ser ensinadas somente no Ensino Superior, e não na Educação Básica: "as frações complicadas e as operações com elas são invenções do professor" e "só podem ser entendidas em nível superior". As representações de frações próprias e aparentes, por exemplo, podem ser ensinadas com tranquilidade, não havendo a necessidade de desprezar um conteúdo com o objetivo de ensinar outro, sem haver aprendizagem do anterior. Nesse sentido, dar o segundo passo é importante somente quando o primeiro está bem firmado.

Santana *et al* (2013) identificam que existem vários registros de representação que comportam o conceito de fração, tais como registro numérico fracionário, numérico decimal, numérico percentual, numérico, divisão, figural contínuo, figural discreto e registro em língua natural. Os autores notaram que "o registro fracionário foi o mais utilizado dentre os registros numéricos" (SANTANA *et al*, 2013, p. 6).

Nota-se que há uma diversidade de representação de fração; no entanto, os estudantes "aprendem" ou decoram apenas um deles: o registro fracionário, quando relacionado à parte de um todo. Isso nos leva a entender que aquilo que está sendo ensinado nas escolas com maior frequência é a representação fracionária do tipo parte/todo, e que outras representações como a decimal, percentual e divisão, não são abordadas como parte de um mesmo conteúdo.

Cardoso e Mamede (2015) consideram que professores não dominam o conceito de fração, nem tampouco suas propriedades, e isso revela que os mesmos apresentam dificuldades em conceituar fração. Muitas vezes reduzem sua definição, associando-a ao significado parte-todo, revelando um conhecimento limitado desse conceito.

A notação de fração como uma associação de uma parte representada por dois números inteiros separados por um tracinho não é trivial. Outro aspecto a ser considerado é que os estudantes apresentam dificuldades em comparar duas frações. Por exemplo, ao comparar $\frac{1}{4}$ com $\frac{1}{3}$, muitos compreendem que $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{3}$ porque o denominador 4 é maior que 3. "Outros dizem que $\frac{1}{2} = 1{,}2$, revelando dificuldades na compreensão do sistema de numeração decimal" (PONTE; QUARESMA, 2014, p. 1467).

Machado e Menezes (2008, p. 5) relatam:

> Apesar dos avanços no ensino da matemática, o ensino de frações continua se caracterizando por uma prática voltada para uma aprendizagem mecânica do algoritmo, constituindo-se em um desafio aos professores que procuram desenvolver uma real compreensão desse conceito em seus alunos.

Nesse sentido, o ensino de frações não tem seguido o mesmo avanço. De maneira geral, professores tem ensinado de acordo com o que está proposto nos livros didáticos, tendo-os como verdadeiras "bíblias", com definições "prontas, nomenclatura obsoleta e pseudoproblemas sobre pizzas e barras de chocolate" (LOPES, 2008, p. 7). Onuchic e Allevato (2008, p. 84), consideram:

> A maneira de implementar aulas de matemática a partir de problemas depende, também, da criatividade e entusiasmo do professor. Os problemas propostos para cada aula têm que ser cuidadosamente preparados pelo professor e novos para os alunos. Muitos deles podem ser retirados ou adaptados das listas que os livros didáticos trazem no final de seus capítulos.

No entanto, o que se percebe é uma tendência dos professores em ensinar os conteúdos da maneira como está descrita nos livros didáticos sem nenhum tipo de adaptação, fazendo com que não haja aprendizagem dos conceitos pelos estudantes e, caso exista, trata-se de algo sem sentido, com abordagens desconexas da realidade e restritas, apenas, a representações geométricas do conceito de fração. E, mesmo dessa maneira, compreendê-lo não é algo tão trivial, uma vez que associar uma parte de alguma coisa com números inteiros e separados por um tracinho não é tão fácil (LOPES, 2008).

De fato, a compreensão de fração demanda esforços tanto de professores quanto de estudantes, uma vez que diferentes "personalidades" dos números racionais (em outros termos, significados de fração) são, em muitos casos, desconhecidas pelos professores, ou mal compreendidas, ignoradas ou trabalhadas de maneira superficial em sala de aula. Para que haja ensino e aprendizagem desse conceito, é necessário, primeiramente, que os professores tenham o conhecimento real e reflitam cuidadosamente sobre os significados de fração e suas diferenças (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008).

Silva, Santiago e Santos (2014) argumentam que, em virtude da variedade de registros de representações e de significados de fração, a compreensão desse conceito se torna difícil para os estudantes. "Além disso, os alunos têm demostrado dificuldades em compreender que algumas propriedades do conjunto dos números racionais só são válidas para esse domínio, favorecendo a criação de entraves à aprendizagem do conjunto dos números racionais" (SILVA; SANTIAGO; SANTOS, 2014, p. 1487), provocando, também, rupturas na relação desse conjunto com o conjunto numérico dos naturais.

Duval (2009) assevera que a utilização de diferentes registros de representação de fração pode favorecer a aprendizagem dos estudantes, uma vez que terão contato com várias maneiras de representar um mesmo objeto matemático, utilizando-se de transformações e/ou conversões de registros. Já Santos *et al* (2014) argumentam que a equivalência de estímulos e o treino de relações condicionais, de acordo com os pressupostos de Sidman e Taiby (1982), podem ser uma maneira eficiente para o ensino de conceitos matemáticos. Enquanto que Cardoso e Mamede (2015) defendem que há necessidade de uma formação que vise superar as dificuldades de professores e futuros professores para o ensino de fração. Assim, será importante o empenho de universidades quanto à superação das fragilidades do conhecimento matemático, de tal modo que atenda às exigências preconizadas em um currículo.

2.2 Apontamentos sobre fração no livro didático

O livro didático (LD) é o recurso mais usado por professores, senão o único. O problema é que, se o docente usa os LDs como único referencial em suas aulas, corre o risco de levar os estudantes a apenas memorizarem os conteúdos da maneira como estão apresentados, o que remente à mecanização na resolução dos problemas propostos (CAVALCANTI; GUIMARÃES, 2008). Em contrapartida, Souza (2013, p. 23) considera que o livro didático se configura como um material indispensável a professores e alunos, tornando-se, portanto, um dos mais importantes instrumentos na construção do saber", no entanto, preconiza que há lacunas no tocante à utilização desse recurso.

Os livros não podem ser considerados mais importantes que os professores; no entanto, possuem uma presença marcante nas salas de aulas. E isso pode fazer com que os docentes se tornem "reféns" do LD, que, dessa maneira, poderá "substituir" o professor, quando na verdade deveria servir apenas de apoio à elaboração de suas aulas.

Souza (2013) entende que o LD é um instrumento que auxilia o professor e os estudantes no processo de ensino e aprendizagem, "não podendo atuar de forma dominante nesse processo, cabendo ao professor garantir sua autonomia pedagógica" (SOUZA, 2013, p. 18). A maneira com que o professor utiliza o livro em sala de aula determina a construção do saber matemático, podendo ser, ou não, motivo de frustração para os estudantes, aumentando as suas dificuldades e impedindo-os de efetivar o conhecimento.

Os LD possuem informações que podem ser usadas na abordagem de algum conteúdo, no entanto, a presença do professor em sala de aula é importante e não pode ser comparada com a do livro, por mais importante que seja. O docente deve exercer controle sobre os conteúdos abordados nos livros, assumindo o papel de facilitador da aprendizagem dos estudantes, o mediador do vasto conhecimento que trazem os livros. Portanto, a relação entre o professor, o livro didático e o aluno deve ser de modo que cada um exerça seu real papel no contexto educacional, ou seja, uma relação autônoma, reflexiva, crítica, construtiva e acima de tudo transformadora (SOUZA, 2013, p. 18).

Documentos oficiais consideram que os números racionais estão presentes no cotidiano dos estudantes e da sociedade em geral. Todavia, alguns livros didáticos abordam determinada significação como se fosse mais importante que as demais. Para Cavalcanti e

Guimarães (2008, p. 10), "já é possível pensar que existe uma forte tendência nos livros didáticos pesquisados em valorizar alguns significados de fração em detrimento de outros, o que compromete a construção do conceito". No entanto, entendemos que é importante que se aborde o maior número possível de significados de fração nos livros, assim tanto professores quanto estudantes entenderão que as frações apresentam vários significados e que devem ser valorizados.

De acordo com Cavalcanti e Guimarães (2008), a abordagem de fração nos livros didáticos ainda está voltada para a ideia de parte/todo e poucas são as pesquisas existentes sobre a abordagem dos significados de fração. Os autores afirmam, ainda, que os LD não abordam todos os significados desse conteúdo; o significado de medidas, por exemplo, é o que menos aparece nos livros mesmo sendo um significado intuitivo presente em nosso meio desde há muito tempo.

De acordo com os PCN matemática, "os egípcios já usavam a fração por volta de 2000 a.C. para operar com seus sistemas de pesos e medidas e para exprimir resultados" (BRASIL, 1998, p. 101). Portanto, é interessante e importante abordar o significado medida ao ensinar o conceito de fração nas aulas de matemática, por ser algo que faz parte do cotidiano dos estudantes.

Souza (2013), ao analisar livros didáticos de 6º Ano do Ensino Fundamental, percebe que a introdução do conceito de fração é realizada por meio de exemplos de situações do cotidiano, em que se faz uso do significado parte/todo para explicar e/ou definir o que é uma fração. Segundo ela, a explicação sobre "o conceito inicial de fração se dá em menos de uma página, e logo após o pequeno exemplo introdutório, [...] e sem fazer demais contextualizações, notamos que já são propostas atividades aos alunos" (SOUZA, 2013, p. 43).

Essas atividades são muito parecidas com aquela apresentada na introdução do conceito. Esse fato pode levar os estudantes a realizar a resolução das atividades de maneira mecanizada, de tal modo que não são levados a pensar criticamente e a participar, de maneira significativa, na construção de seu próprio conhecimento. Para além de conceitos, a educação de maneira geral, deve se preocupar com a formação social dos estudantes e não somente de conteúdos curriculares de forma mecânica. E "é preciso insistir que tudo quanto fazemos em aula, por menor que seja, incide em maior ou menor grau na formação de nossos alunos" (ZABALA, 2010, p. 29).

Os conteúdos que se devem aprender não podem estar relacionados exclusivamente ao conhecimento disciplinar de um currículo de disciplina, a ideia de conteúdo é mais ampla. Zabala (2010, p. 30) declara:

> Deste modo, os conteúdos de aprendizagem não se reduzem unicamente às contribuições das disciplinas ou matérias tradicionais. Portanto, também serão conteúdos de aprendizagem todos aqueles que possibilitem o desenvolvimento das capacidades motoras, afetivas, de relação interpessoal e de inserção social.

Nas aulas sobre fração, os educadores devem compreender que a abordagem não pode ser apenas de exposição de conteúdos, mas deve-se considerar que os estudantes podem aprender outros "conceitos" em sala de aula, como por exemplo, relação interpessoal e respeito (ZABALA, 2010). Ao ficarem presos em um modelo de resolução de exercícios, baseados em livros didáticos, privilegiando regras e macetes, o ensino de fração fica descontextualizado da realidade dos estudantes e pode deixar as aulas cansativas e desinteressantes.

Todavia, nos livros didáticos não é possível encontrar conteúdos como os sugeridos por Zabala (2010), uma vez que estes são considerados apenas como um recurso metodológico de facilitação dos conteúdos para os educadores, e os mesmos são descritos e organizados de modo disciplinar segundo um currículo. Dessa maneira, a abordagem na sala de aula, pautada no uso do LD, dependerá de conhecimentos e domínio do conteúdo por parte do professor.

Souza (2013), ao analisar especificamente a coleção "Tudo é Matemática", verificou que os livros didáticos apresentam os significados parte/todo, comparação de dois números naturais, quociente, fração de um número, fração e medidas. No entanto, apresenta os diferentes conceitos de fração de maneira muito simples, rasa e procedimental, de tal modo que não leva os estudantes a analisar e refletir sobre os problemas/atividades propostos a eles. Assim, as situações apresentadas nos LD não incentivam "os alunos a construir de maneira concreta tais modelos[4], ou seja, o autor fica retido apenas a ilustrações através de desenho e figuras" e a procedimentos de resolução de exercícios (SOUZA, 2013, p. 47).

De acordo com Cavalcanti e Guimarães (2008), os livros didáticos apresentam um capítulo específico sobre fração, mas existem abordagens em outros capítulos com outros conteúdos que utilizam a fração. O que é interessante, porque articula conceito de fração com outros conteúdos matemáticos, sendo necessário, portanto, que os estudantes compreendam e tenham propriedade na aprendizagem dos conceitos de frações em seus diversos registros de representação.

A pesquisa de Cavalcanti e Guimarães (2008) apontou que os LD dão preferência às representações pictóricas na forma de figuras geométricas planas. O percentual de livros que

[4] Van de Walle (2009) chama atenção para os modelos fracionários que podem auxiliar no processo da construção significativa dos conceitos fracionários, além de ajudar a elucidar ideias não tão claras que os alunos possuem acerca do conteúdo. O autor destaca três tipos de modelos para frações: modelos de área ou região, modelos de comprimento ou de medida e modelos de conjuntos (SOUZA, 2013, p. 36).

abordam atividades com fração, lançando mão das figuras geométricas, chega a 76,7% dos que foram pesquisados. Percebe-se, portanto, que "a representação pictórica a partir de figuras geométricas planas é um elemento bastante explorado pelas coleções, correspondendo quase que a metade das formas de representação" (CAVALCANTI; GUIMARÃES, 2008, p. 15).

O tipo de representação com figuras geométricas planas em um contexto discreto apareceu em todas as coleções de livros didáticos analisados, todavia o percentual de atividades com essa abordagem foi de apenas 3,1%, muito abaixo das representações quando relacionado com representações geométricas planas (CAVALCANTI; GUIMARÃES, 2008).

Caso os livros didáticos não abordem as diferentes representações de fração, torna-se necessário que os educadores busquem meios para proporcionar seu ensino, pois a aquisição do conhecimento desses números é importante no âmbito da Matemática. Cavalcanti e Guimarães (2008) salientam que é importante que os professores se apropriem dos diferentes significados dos números racionais em diversas situações, a fim de que as dificuldades encontradas pelos estudantes sejam superadas.

Para Souza (2013), é necessário incentivar o caráter investigativo e pesquisador dos estudantes, utilizando-se da histórica da Matemática na abordagem do conceito de fração. No entanto, o que se observa nos livros didáticos são abordagens rasas ou insuficientes para um dos conteúdos mais complicados de ensinar e aprender em Matemática. Normalmente, reduz-se a explicações de procedimentos de resolução de exercícios, sem qualquer tipo de contextualização com a História da Matemática, por exemplo.

É comum nos livros didáticos a apresentação de exemplos e, logo em seguida, propõem-se atividades muito parecidas com os "modelos" apresentados. Isso leva os estudantes a resolver os exercícios de maneira mecânica e operatória, não permitindo a construção do significado desse conceito, porque se trata de um conteúdo mais complexo que os demais (SOUZA, 2013).

Em algumas situações, os livros abordam o conceito de fração de maneira contextualizada, todavia os autores forçam as situações de tal modo que pode levar os estudantes à confusão conceitual, uma vez que são problemas que não são comuns no cotidiano. "Os autores não abordam os diferentes conceitos de fração, se atendo apenas ao conceito parte-todo." E acrescenta: "Exemplos explicativos poucos e limitados, não atendendo as propostas dos PCN (1998)" (SOUZA, 2013, p. 56).

Segundo Lopes (2008, p. 8), "nem todas as ideias têm sido contempladas no tratamento das frações nos livros didáticos, o que é um indicador de lacunas sérias na aprendizagem robusta do conceito", assim, não é possível abandonar somente essa ou aquela ideia representativa das frações, uma vez que todas elas apresentam vinculação entre si.

Marinho e Mandarino (2013) analisaram como livros didáticos de 6º Ano do Ensino Fundamental introduzem o conceito de fração, com o objetivo de compreender o papel que os LD desempenham nas aulas de matemática, bem como o tipo de abordagem que esses livros, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD, 2011).

Esses pesquisadores reiteram que os PCN (BRASIL, 1998) preconizam que há diferentes significados associados às frações, dependendo do contexto em que são usadas. Dentre eles, destacam-se: relação parte-todo, quociente, operador e razão, que não podem ser tratados de maneira isolada. Destacam ainda que se comece o trabalho com conceito de fração por meio da reta numérica, "iniciando pela exploração da divisão de qualquer segmento de reta em partes com comprimentos congruentes" (MARINHO; MANDARINO, 2013, p. 53).

Quanto à análise da abordagem dada pelos livros didáticos, Marinho e Mandarino (2013) apresentam 10 coleções que foram aprovadas pelo PNLD 2011, as quais podem ser observadas no quadro 2.

Quadro 3: Lista dos Livros analisados por Marinho e Mandarino (2013)

	Coleção	Autores	Editora
A	Matemática	Edwaldo Bianchini	Moderna
B	A Conquista da Matemática – edição renovada	José Ruy Giovanni Jr. e Benedicto Castrucci	FTD
C	Aplicando a Matemática	Reis e Trovon	Casa Publ. Brasileira
D	Matemática, Ideia e Desafios	Iracema e Dulce	Saraiva
E	Novo Praticando	Imenes e Lellis	Moderna
F	Matemática e Realidade	Iezzi, Dolce e Machado	Saraiva
H	Matemática na Medida Certa	Jacubovick e Centurión	Scipione
I	Projeto Radrix	Jackson da Silva Ribeiro	Scipione
J	Tudo é Matemática	Luiz Roberto Dante	Ática
L	Vontade de Saber Matemática	Souza e Pataro	FTD

Fonte: MARINHO; MANDARINO (2013, p. 54).

A título de recursos didáticos adotados nos LD como apoio para introduzir o conceito de fração, foram identificados: ilustração de figuras planas (FG); ilustração de objetos do cotidiano (bolo, pizza, etc.) (OC); ilustração de uma coleção (CD); desenhos associados à ideia de comprimento (IC); abordagem histórica (AH); material concreto (MD). E três tipos de atividades: situações que exigem a participação efetiva do estudante (AP); aplicações com referência a situações do cotidiano (AC) ou aplicações em situações próprias da Matemática (AM). Esses dados podem ser observados no quadro 3.

Quadro 4: Tipos de recursos e aplicação identificados nos livros didáticos analisados

Livro	FG	OC	CD	IC	AH	MC	AP	AC	AM
A	X	X	X	X				X	X
B	X	X	X	X	X	X	X	X	X
C	X	X						X	X
D	X	X	X	X	X		X	X	X
E	X	X	X					X	X
F	X		X			X		X	X
G	X		X					X	X
H	X							X	X
I	X	X		X	X			X	X
J	X	X			X			X	X

Fonte: MARINHO; MANDARINO (2013, p. 56).

Quanto aos recursos, nota-se que todos os livros analisados apresentam situações envolvendo partição de ilustração de figuras planas (FG). Em relação ao tipo de atividade, todos fazem referência a situações do cotidiano (AC) e às aplicações próprias da Matemática (AM). Ao observar os dados constantes no quadro 3, percebe-se também que apenas um livro (o livro B: A Conquista da Matemática – edição renovada) contempla todos os tipos de recursos e atividades, "e no livro D apenas o uso de material concreto não se faz presente no capítulo introdutório do conceito de frações" (MARINHO; MANDARINO, 2013, p. 56).

Para Marinho e Mandarino (2013), os livros tendem a valorizar as representações de frações por meio de figuras geométricas planas, especialmente retângulos e círculos. Nota-se, também, que 80% dos livros didáticos analisados não fazem incentivo ao uso de materiais concretos, e que a grande maioria deles aborda apenas ilustrações de figuras geométricas e/ou objetos ligados (ou não) ao cotidiano dos estudantes. Para os autores, é importante que os estudantes "trabalhem a divisão de uma coleção concreta (chapinha, cartões etc.), dividindo-a em grupos com a mesma quantidade de elementos, antes da representação por meio de desenhos e, principalmente, antes de uma abordagem sem qualquer apoio visual" (MARINHO; MANDARINO, 2013, p. 56).

Dentre os vários contextos utilizados pelos livros didáticos (medida de área; medida de comprimento e a reta numérica; medida de volume, massa e capacidade; e coleções) para dar início à sistematização do conceito de fração, o mais frequente é o que envolve divisão de uma superfície, notadamente figuras geométricas em partes iguais. No entanto, não existem discussões importantes a respeito de assuntos ligados ao conceito de área. Normalmente são apresentados exemplos do tipo:

Figura 3: Fração da área de uma figura

Fonte: MARINHO; MANDARINO (2013, p. 58).

Segundo Marinho e Mandarino (2013, p. 58-59), "esse tipo de abordagem pode levar o aluno a representar corretamente frações de ilustrações como a do exemplo, sem um entendimento do conceito que possa levá-lo posteriormente a compreender a fração como um número", o que favorece a aprendizagem de dupla contagem, e não a compreensão do conceito de fração.

Quanto aos contextos que envolvem comprimento e reta numérica, bem como medidas de volume, massa e capacidade, o que se apresenta são exemplos extremamente vagos que, dificilmente, os estudantes conseguirão compreender. São situações do tipo:

> Se você precisar medir um comprimento em metros, pode ser que o resultado não seja um número natural. Por exemplo, pode ser um valor entre 1 e 2. Como se indica parte do metro que está entre 1 e 2? Para situações como essas, foram criados os números fracionários. Vamos estudá-los, começando pelas frações (MARINHO; MANDARINO, 2013, p. 59).

Outra maneira de abordar as frações, pelos livros didáticos, é relacionar o número de elementos das partes de uma coleção com o total de elementos que a compõe. Essa situação aparece em 50% dos LD, havendo diferenças sutis quanto ao tratamento adotado nos exemplos/exercícios. Marinho e Mandarino (2013) apontam que nenhuma coleção de livros provoca os estudantes a fazer uso de material concreto para trabalhar repartição e que os recursos utilizados são ilustrações, desenhos e/ou fotografias.

De maneira geral, os livros didáticos continuam dando ênfase à relação parte-todo por meio de figuras geométricas planas contínuas, mesmo havendo recomendações dos PCNs para que se ensinem os estudantes considerando diferentes significados de fração. “O que mais nos chama a atenção, no entanto, é que, além de pouco diversificada do ponto de vista dos usos, a introdução do conceito de fração é feita de modo bastante superficial” (MARINHO; MANDARINO, 2013, p. 63).

2.3 Apontamentos de pesquisas sobre o ensino de fração

A respeito do ensino do conceito de fração, Cardoso e Mamede (2015) relatam que na prática de sala de aula, aborda-se esse conceito reduzindo-o apenas a interpretações de parte-todo e operador. Segundo as autoras, esse tipo de abordagem de ensino limita a aprendizagem dos estudantes desse conteúdo. “Limita, por exemplo, o desenvolvimento da ideia de que uma fração pode ser maior do que ‘um’. Efetivamente, o procedimento de começar com um ‘todo’ que é dividido em várias partes iguais das quais algumas são retiradas não se adapta facilmente à fração $\frac{4}{3}$, por exemplo” (CARDOSO; MAMEDE, 2015, p. 229).

Cardoso e Mamede (2015), apoiadas em outros pesquisadores (BALL; HILL; BASS, 2005; CONNEL, 2009), argumentam que o professor tem papel crucial na implementação do currículo e suas orientações, considerando que os estudantes deverão ter contato, particularmente sobre o conceito de fração, com diferentes significados (quociente, parte-todo, medida e operador).

Para que haja aprendizagem de maneira significativa da matemática, é fundamental que os professores possuam sólido conhecimento matemático dos conceitos. É desejável que o professor domine aspectos essenciais do conceito de fração, tais como “propriedades do conceito, significados de fração, representação e comparação de frações” (CARDOSO; MAMEDE, 2015, p. 230).

No entanto, o que alguns estudos indicam é que os professores não têm familiaridade, ou mesmo desconhecem, significados de fração distintos do significado parte-todo. Além disso, os professores têm dificuldades em associar uma fração à expressão $a \div b$, ou seja, não compreendem que a divisão de um número a por b corresponde à fração $\frac{a}{b}$ (CARDOSO; MAMEDE, 2015).

Nessa perspectiva, analisamos estudos que versam sobre o processo de ensino e aprendizagem de fração, que foram obtidos no catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior (CAPES). O quadro 4 apresenta os títulos desses estudos, a instituição à qual estão vinculados e o ano de defesa, bem como os nomes dos autores.

Quadro 5: Teses e dissertações que versam sobre ensino e aprendizagem de fração

Título	Tipo	IES[5]/ Ano	Autor
O ensino e a aprendizagem significativa das operações com frações: Sequência didática e o uso de tecnologias digitais para alunos do Ensino Fundamental II.	Tese	REAMEC[6]/ UFPA[7] 2014	Rafael Pontes Lima
Uma experiência didática para a aprendizagem de frações: matemática para residentes de uma casa de passagem.	Dissertação	UFES[8] 2016	Jonas José Chequetto
Ensino e aprendizagem de frações mediados pela Tecnologia: Uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.	Dissertação	UNIFEI[9] 2015	Ana Carla de Almeida Bolognani
Formação de professores dos anos iniciais: conhecimento profissional docente ao explorar a introdução do conceito de frações.	Dissertação	UNIAN[10] 2014	Maria Gracilene de Carvalho Pinheiro
Uma formação continuada sobre frações.	Dissertação	UNIBAN[11] 2011	Patrícia de Barros Monteiro Cervantes
Concepções e práticas de professores do Ensino Fundamental sobre o ensino de frações: um estudo em escolas de Cuiabá.	Dissertação	UFMT[12] 2013	Maria do Socorro Lucinio da Cruz Silva
Concepções e práticas de professores sobre o ensino e a aprendizagem e uma intervenção intencionalmente planejada no ensino de frações, por meio da resolução de problemas em um 5º ano do Ensino Fundamental.	Dissertação	UCB[13] 2007	Márcio Leite de Bessa

Fonte: Elaborado pelo autor.

[5] Instituição de Ensino Superior.
[6] Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática.
[7] Universidade Federal do Pará.
[8] Universidade Federal do Espírito Santo.
[9] Universidade Federal de Itajubá.
[10] Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN-SP.
[11] Universidade Bandeirante de São Paulo.
[12] Universidade Federal de Mato Grosso.
[13] Universidade Católica de Brasília.

O estudo de Bessa (2007) tem o objetivo investigar as concepções e as práticas de professores sobre o ensino e aprendizagem de fração com alunos do Ensino Fundamental, por meio da Resolução de problemas. O pesquisador realizou a coleta de dados em dois momentos: no primeiro, 50 professores responderam um questionário em que se buscou apreender as concepções e práticas dos professores, "identificando os níveis de conhecimento, habilidades, percepções e crenças pedagógicas que influenciam sua prática e marcam suas trajetórias profissionais, criando um estilo próprio de transmissão do saber" (BESSA, 2007, p. 12); e, no segundo, realizou-se um experimento com estudantes do 5º ano, organizando-os em dois grupos, um quase-experimental, com 29 estudantes, e outro controle, com 35.

Os resultados de seu estudo apontaram para uma desatualização dos professores quanto aos conhecimentos metodológicos, que, para o autor, não são bem definidos. "O professor parece não ter renovado sua maneira de ensinar, já que a cultura tradicional de seguir exemplos e o livro texto ainda é constante na prática pedagógica dos professores da série investigada" (BESSA, 2007, p. 150). E, dessa maneira, as aulas acabam seguindo o ritmo de aulas tradicionais, sem contextualização daquilo que está sendo ensinado, muitas vezes sem sentido para os estudantes.

A pesquisa de Bessa (2007) preconiza que os estudantes realizam "atividades de casa" por medo de serem punidos e não porque o que foi ensinado levou os estudantes a se sentirem instigados em resolver os problemas. De maneira geral, "os alunos ainda continuam esperando respostas prontas por parte dos professores" (BESSA, 2007, p. 151).

O planejamento e a realização de aulas mais dinâmicas deve ser responsabilidade do professor; no entanto, muitas vezes eles não as realizam porque se sentem despreparados, por não terem aprendido um processo de ensino mais dinâmico. Isso ocorre porque "a formação acadêmica parece não ser suficiente, não instrumentalizando o professor, do ponto de vista teórico-metodológico para lidar com as situações adversas referentes às dificuldades de aprendizagem dos alunos" (BESSA, 2007, p. 151)

Bessa (2007, p. 142) conclui sua pesquisa argumentando que o método para ensinar fração, "por reconstrução e ressignificação de experiência, poderá resolver um grande problema da aprendizagem da matemática, pois a evidência é a de que é possível despertar o interesse das crianças e promover o aprendizado das frações por meio da resolução de problemas".

Proença (2015), que também realizou um estudo via resolução de problemas com futuras professoras, constatou que o ensino de fração fica limitado às representações com desenhos e materiais concretos. Esse estudo também revelou que a abordagem metodológica valoriza os conteúdos, visto que os estudantes são ensinados a resolver problemas de matemática, ou seja, fazem um movimento contrário ao que propõe a resolução de problemas, em que se deve partir da realidade para ensinar o conteúdo.

Ao ensinar fração, os professores recorrem, com certo privilégio, aos gráficos ou figuras geométricas planas (registro figural contínuo), ou seja, privilegiando o significado parte/todo que consiste em dividir uma figura em várias partes iguais, em que são tomados alguns “pedaços” desse todo dividido por todas as partes resultantes da divisão.

Conforme Santana *et al* (2013, p. 4-5),

> Este procedimento interfere na compreensão da representação numérica fracionária, pois, em situações de ensino é comum formar essa representação pensando que o denominador são as partes em que a fração foi dividida e o numerador as partes tomadas do todo, favorecendo a percepção da fração como a sobreposição de dois números inteiros.

Esse procedimento interfere na aprendizagem significativa[14] dos conceitos, dificultando as relações com outros tipos de representação da fração, como exemplo, o registro simbólico numérico e algébrico. Segundo Proença (2015, p. 749), “sobre o ensino de frações na escola, verificamos que se tem valorizado essas formas de condução apontadas” anteriormente, ou seja, limitam a abordagem em sala de aula ao uso de desenhos e algumas vezes materiais concretos.

A pesquisa de Proença (2015) apontou que as futuras pedagogas apresentaram dificuldades quanto ao conhecimento de conteúdo fração, que os professores ainda usam os LD em suas aulas como se fossem reféns dos próprios livros, que existem lacunas no conhecimento desse conceito e, no trabalho que envolve resolução de problemas, todos são retratos da formação inicial; e que as participantes da pesquisa não estão preparadas para ensinar matemática.

Cervantes (2011) desenvolveu uma formação continuada com professores do ensino fundamental com o objetivo de analisar o conhecimento profissional a respeito do conteúdo de fração quanto a seu processo de ensino e aprendizagem. O foco dessa formação foi a introdução do conceito de fração por meio do significado quociente, fazendo uso de

[14] A teoria da aprendizagem significativa foi desenvolvida por Ausubel na década de 60. Consiste em uma reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem no contexto escolar, tendo como foco a aprendizagem a partir dos conhecimentos e das competências prévias do aluno, com o uso da linguagem e de contextos que representem significado no cotidiano extraescolar. Ausubel, Novak e Hanesian (1978) salientam que “o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe”. Esse conhecimento prévio do aluno é a base para que ocorra a aprendizagem significativa na sua zona de desenvolvimento proximal e potencialize o seu desenvolvimento e aprendizado cognitivo para um nível de conhecimento real, novo e mais elaborado (LIMA, 2014, p. 30).

instrumentos como questionário, registros das observações dos encontros da formação, resolução de problemas respondidos pelos docentes e seus estudantes e entrevista.

O autor identificou que os professores têm dificuldade em entender o conceito de fração, o que se reflete em um receio de ensiná-lo em suas aulas por não sentirem segurança quanto ao seu domínio. Cervantes (2011, p. 8) relata: “Os professores disseram que não entendem ou que não adiantava preparar os exercícios, pois seus alunos às vezes resolviam de maneiras diferentes. Disseram que encontravam dificuldades para a correção das atividades na lousa”. Essa questão está diretamente relacionada à formação inicial dos docentes, que deixa lacunas quanto ao ensino desse conceito, gerando nos professores insegurança ao lecionar em sala de aula por não saberem a abordagem que se deve considerar.

Cervantes (2011, p. 11) considera:

> A formação de professores deve criar estratégias facilitadoras sobre a prática e na prática do professor é que deve contemplar os aspectos do cotidiano para que esse profissional possa repensar e reconstruir a própria prática e ter condições de buscar o devido desenvolvimento profissional.

Entendemos que, para o profissional da educação desenvolver sua aula com entendimento de conteúdo e domínio, é necessário que haja uma formação de qualidade que aborde o ensino de frações de forma objetiva *na* e *para* a prática do professor, uma vez que “o conhecimento pedagógico do conteúdo é o que mais tem se destacado em trabalhos que discutem a prática do professor. Trata-se de um vasto conhecimento, uma combinação entre o conhecimento da matéria e a habilidade de ensiná-la” (CERVANTES, 2011, p. 16).

Cervantes (2011) partiu do princípio de que o ensino de frações deve ser iniciado pela significação de quociente, por ser a melhor maneira para abordar esse conteúdo. Para tanto, o domínio do conteúdo pelo professor que se propõe a ensiná-lo é algo essencial. Os resultados de sua pesquisa apontaram que, dos 20 professores entrevistados, 13 deles ensinam o conteúdo mesmo havendo dificuldade para desenvolvê-lo e 7 não ensinam matemática, de maneira mais acentuada o conceito de fração, porque não se sentem seguros.

É importante destacar que os professores envolvidos na pesquisa têm graduação em Pedagogia e um deles em Letras, ou seja, pressupõe-se que todos foram preparados para ministrar aulas de matemática nas séries iniciais e, se não ensinam, é devido a uma formação incoerente com a realidade de atuação dos docentes. A pesquisa ainda revelou:

> A insegurança para trabalhar com a temática observada no grupo estudado pode ser notado [sic] ainda, quando em alguns dos depoimentos notamos que para não “ensinar frações” alguns professores trocam de turma ou mesmo não tratam o tema quando ensinam matemática. No entanto, o fato parece ser agravado quando observamos que dos treze professores que relatam ensinar frações somente uma professora menciona ter facilidade e segurança para tratar a temática (CERVANTES, 2011, p. 46).

É necessário que os processos de formação inicial de professores, nos cursos de licenciatura, destinem espaços para reflexão sobre o tema, uma vez que pesquisas têm apontado que os professores que atuam nas séries iniciais estão despreparados para ensinar o conteúdo de fração e, dessa maneira, a aprendizagem dos estudantes sofre consequências gravíssimas.

Cervantes (2011, p. 63) conclui sua pesquisa argumentando que a introdução do conteúdo de fração pela "situação quociente pode ser a melhor maneira de abordar esse conceito" e que os professores participantes e estudantes apresentaram mudanças significantes em suas concepções, percebidas nos depoimentos e análises dos protocolos dos estudantes.

A pesquisa de Silva (2013) buscou identificar as concepções e práticas dos professores do Ensino Fundamental que são reveladas ao ensinar fração. Essa análise ocorreu mediante um levantamento bibliográfico sobre aspectos relacionados ao ensino de frações, além de questionários, análise documental, observação de aulas e entrevistas. Participaram da pesquisa 6 professores da Rede Estadual de Educação em Cuiabá.

Com uma breve investigação, Silva (2013) verificou que o conteúdo de fração é ensinado sempre no último bimestre dos anos iniciais do Ensino Fundamental (1º ao 5º ano) e que essa mesma situação se repete nos anos finais (6º ao 9º ano). Verificou também que os professores seguem a ordem cronológica do LD em seu ensino, os quais trazem esse conteúdo nos últimos capítulos, o que também ocorre nos últimos meses do ano letivo. E, devido a isso, ocorre uma triste realidade: "ao deixarem os estudos com frações para o final do ano letivo, a maioria deles não o realiza, ou se o faz, o tempo dedicado é escasso, impossibilitando muitas vezes que as dificuldades dos alunos sejam sanadas" (SILVA, 2013, p. 18).

Silva (2013) fez uma abordagem da educação matemática por meio de duas tendências que estão presentes no contexto escolar brasileiro:

> a perspectiva Tradicional, influenciada pela concepção de que o professor é o transmissor e o aluno apenas receptor daquilo que está sendo apresentado em sala de aula, e [...] perspectiva Construtivista, onde o professor assume o papel de mediador do conhecimento (SILVA, 2013, p. 48).

Na segunda perspectiva, valorizam-se os conhecimentos prévios dos estudantes, enquanto que na primeira perspectiva (tradicional) considera-se que os estudantes não têm conhecimentos que sejam relevantes para a aprendizagem escolar, portanto, tudo o que precisam é receber e repetir as informações que os professores ensinam em sala de aula.

O estudante, quando se discute Educação Matemática, não pode ser considerado como um agente passivo no processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, é necessário que o conhecimento inicial dos estudantes seja considerado pelos professores, uma vez que, numa perspectiva construtivista, o saber é contínuo e "o conhecimento a ser ensinado deve partir do conhecimento que o aluno já traz para a sala de aula" (SILVA, 2013, p. 61).

Os resultados da pesquisa de Silva (2013) revelam que os professores têm um entendimento parcial sobre esse conteúdo e que, de certa forma, não aprenderam fração ou que a aprendizagem foi insuficiente. Tanto os professores dos anos iniciais do ensino fundamental, com formação em Pedagogia, quanto os professores dos anos finais, licenciados em Matemática, entendem que as universidades devem "propiciar aos futuros professores conhecimentos mais abrangentes, do ponto de vista dos saberes docentes, curriculares e experienciais pedagógicos" (2013, p. 92) e não somente alguns saberes disciplinares reduzidos.

Sobre as concepções de ensino e aprendizagem de fração, os professores afirmam se aproximar da perspectiva construtivista de ensino, em que os conhecimentos dos estudantes devem ser valorizados. No entanto, sobre o planejamento de aula e aquilo que de fato ocorre em sala, há vários "desencontros entre o que [...] 'diz' e o que 'faz' em sala de aula" (SILVA, 2013, p. 108). Sobre a aprendizagem dos estudantes, uma das professoras atribui a não aprendizagem ao fato de não prestarem atenção ao que está sendo explicado.

Dos professores que participaram da pesquisa, apenas um se aproxima da perspectiva construtivista, os demais revelam uma forte tendência à perspectiva tradicional. As concepções, nas falas, dos professores mostram que adotam a perspectiva construtivista, todavia, essas concepções, na prática, revelam um ensino tradicional, em que o professor é o transmissor do saber.

Lima (2014) pesquisou o processo de ensino e aprendizagem por meio de uma sequência didática das operações com fração, com uso das tecnologias digitais com estudantes dos anos finais do ensino fundamental. Para tanto, foram analisados livros didáticos e atividades pedagógicas dos professores, e abordou-se a perspectiva da aprendizagem significativa e o aprendizado por meio da resolução de problemas.

A tecnologia adotada na pesquisa de Lima (2014) foi um *software* educacional chamado FRACTRON, pelo qual se desenvolveu a resolução de atividades de adição, subtração, multiplicação e divisão. A pesquisa foi desenvolvida com 40 estudantes na Rede Estadual de Educação de Macapá/AP. Os resultados indicaram que as atividades desenvolvidas foram relevantes e que os estudantes alcançaram uma média de 70% na aprendizagem, comparando-se às atividades do pré com as do pós-teste.

Assim como Silva (2013), Lima (2014) entende que é necessário que haja mudanças no ensino de matemática a fim de que os estudantes se sintam estimulados a aprender o que está sendo ensinado pelos educadores. Lima (2014, p. 25) afirma:

> Para que esta mudança no ensino de matemática ocorra é preciso que o professor domine o conceito a ser ensinado, e utilize instrumentos didáticos que possam auxiliá-lo a uma prática docente que estimule no aluno o interesse pelo assunto, motive a construção do conhecimento de forma ativa e participativa, para que o processo de ensino e aprendizagem tenha bons resultados.

Proporcionar um ensino de qualidade aos estudantes talvez seja a principal função dos professores, mas para que isso ocorra é necessário que tenham uma formação de qualidade tanto inicial quanto continuada, uma vez que só é possível ensinar com empenho e qualidade, estimulando o interesse dos estudantes, se os docentes forem bem preparados. Nos trabalhos analisados por Lima (2014), foi verificado que a maior dificuldade na compreensão do conceito de frações são as estratégias de ensino adotadas pelos professores e os livros didáticos.

O ensino de fração, conforme verificado por Lima (2014), tende a ser iniciado por meio de situações-problemas para, posteriormente, introduzir o conceito e, para que haja a fixação do que foi ensinado, os professores apresentam uma lista de exercícios que são resolvidos em sala de aula e em tarefas fora do ambiente escolar.

Os professores tendem a ensinar da maneira como aprenderam. Conforme ressalta Lima (2014, p. 76), "questionamos os professores sobre se a forma que lecionam o assunto de frações se assemelha ou não à forma que aprenderam na educação básica. Para esta questão, 90% dos professores afirmaram que sim, ensinam da mesma forma que aprenderam este assunto".

Lima (2014) verificou que, ao fazer uso do *software* educacional FRACTRON, a aprendizagem foi significativa e potencializou os conhecimentos prévios dos estudantes. "Constatamos nos resultados que todos os alunos do 6º ano alcançaram nota para a aprovação no pós-teste. Na comparação com o pré-teste e o teste realizado com os alunos do 7º, a evolução dos alunos do 6º ano foi superior a 70%, em média" (LIMA, 2014, p. 209).

Pinheiro (2014) pesquisou sobre a formação de professores dos anos iniciais, a fim de verificar mudanças de concepções relativas ao processo de ensino e aprendizagem, por meio de um curso de formação continuada. Participaram da pesquisa docentes da Rede Estadual de Ensino de São Paulo. Sua coleta de dados foi realizada por meio de instrumentos diagnósticos, intervenção no processo formativo, entrevistas e observação em sala de aula.

Constatou-se que os professores manifestam dificuldades quanto à representação dos números racionais na forma fracionária. Ela cita o relato de um docente que diz: "No trabalho de coordenação o que eu percebia quando discutíamos esse assunto, e os professores diziam que os alunos não aprendiam, é que muitos ensinavam exatamente como os meus professores haviam ensinado" (PINHEIRO, 2014, p. 21). Nesse sentido, entendemos que as dificuldades dos estudantes em aprender o conteúdo de frações e resolver problemas sobre esse tema estão diretamente relacionadas à maneira como ele é ensinado.

Mais uma vez, chamamos a atenção para a necessidade de os cursos de formação inicial e continuada de professores oferecerem oportunidades de vivenciar experiências que oportunizem e permitam aos docentes fazerem uso de novas abordagens metodológicas sobre o ensino de fração, por se tratar de um tema "que professores e alunos encontram grandes dificuldades tanto no que se refere ao ensino quanto à aprendizagem" (PINHEIRO, 2014, p. 22-23).

Richit e Maltempi (2013) reforçam que a escola se constitui o lugar onde o professor aprende sobre sua profissão, "de modo que o desenvolvimento de processos de formação centrados na escola pode favorecer a diversidade, a contextualização e a pertinência das ações viabilizadas por esses processos" (RICHIT; MALTEMPI, 2013, p. 237). Nesse sentido, o ambiente em que o professor está inserido exerce importante papel no pensamento e na prática docente.

Nesses termos, ao considerar a escola como o *lócus* de formação, a formação continuada permite momentos de interação entre os professores e colaboração entre universidade-escola e professor-pesquisador nas discussões sobre práticas pedagógicas (RICHIT; MALTEMPI, 2013).

De acordo com Richit e Maltempi (2013), a concepção de formação continuada está associada ao desenvolvimento profissional concretizado nas vivências do professor na escola, as quais compreendem e promovem práticas reflexivas, ambientes de formação colaborativos, mudanças das práticas em sala de aula.

Schastai, Farias e Silva (2017), ao realizarem um curso de formação de professores sobre fração, sustentam que a formação continuada oportuniza aos docentes momentos de reflexão, o que os leva a perceberem-se como sujeitos que constroem saberes e que podem propiciar aos estudantes a construção de saberes. Segundo as autoras, para o ensino de fração, os professores "comumente constroem [...] organizações baseadas em regras que não privilegiam o trabalho com as ideias matemáticas" (SCHASTAI; FARIAS; SILVA, 2017, p. 109).

Pesquisas evidenciam que o ensino do conceito de fração é difícil, o que mostra a necessidade de cursos de capacitação e/ou formação continuada que levem professores a estudar fenômenos relacionados ao ensino e à aprendizagem de conceitos matemáticos, a refletir sobre sua prática e a aprimorar seus conhecimentos (SCHASTAI; FARIAS; SILVA, 2017).

Assim, os professores conseguirão explorar diferentes situações que envolvem o conceito de fração, dando significado para o estudante. Pinheiro (2014, p. 39) salienta:

> Partindo das ideias construídas pela Teoria dos Campos Conceituais, consideramos que o conceito de fração só terá significado para o aluno se lhe for permitido explorá-lo em diferentes situações, a partir das quais ele poderá desenvolver a compreensão do conceito e dos invariantes que lhes atribui [sic] sentido, bem como expressar o conjunto de símbolos de que ele se utilizou, em uma determinada situação, para representar o conceito, os invariantes e os procedimentos operatórios.

Conforme Pinheiro (2014), o conceito de fração terá significado para os estudantes quando for possível explorá-lo em diferentes situações. Nesse sentido, ao ensinar este conteúdo por meio da comunicação de conhecimentos, poderá levar os estudantes à passividade na aprendizagem. Os mesmos não conseguem assimilar o que o professor está dizendo porque, normalmente, as aulas são desinteressantes e inúteis para eles. É necessário que os estudantes sejam autores do próprio conhecimento e que o docente assuma o papel de mediador entre o saber e o estudante. Todavia, para que isso ocorra, o professor deve exercer domínio sobre o conteúdo que está sendo ensinado em sala de aula.

Pinheiro (2014) identificou que os professores, durante suas formações iniciais, mesmo tendo estudado a disciplina de Metodologia da Matemática, afirmaram não terem sido suficientemente formados para o ensino de Matemática, e muito menos para o ensino de frações. A pesquisadora conclui sua pesquisa argumentando que a tendência dos professores em ensinar o conteúdo de frações se dá através do significado parte-todo, no entanto, este não é suficiente para compreender o conceito de fração; que o domínio necessário para ensinar Matemática ainda se encontra fragilizado no que tange ao conceito de frações; e que "o processo formativo ofereceu aos nossos sujeitos a oportunidade de ampliar seus conhecimentos" (PINHEIRO, 2014, p. 166), todavia, as reflexões da autora levam-na a algumas preocupações e indagações sobre as dificuldades enfrentadas pelos docentes no ensino de Matemática e sobre os cursos de formação inicial e continuada.

Com o objetivo de apresentar o desenvolvimento de uma sequência didática (SD) para ensinar frações equivalentes mediadas pelas tecnologias, Bolognani (2015) elaborou uma SD e a desenvolveu com estudantes de uma turma de 6º Ano do Ensino Fundamental. Os dados foram coletados por meio das atividades dos registros audiovisuais e de um estagiário, que foram analisados à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. O autor não definiu o que seria SD.

Ensinar frações com SD torna os estudantes sujeitos de sua própria aprendizagem, por meio das interações com os colegas e os educadores. Para Bolognani (2015, p. 15), os estudantes tendem a apresentar dificuldades quanto à aprendizagem dos conteúdos da ciência matemática e, na trajetória escolar, isso se torna “motivo de preocupação de professores e pesquisadores da área, no sentido de refletir sobre como sanar esse problema”. Sobre o ensino de frações, os docentes dão visibilidade maior a determinado significado, esquecendo-se de outros possíveis.

Bolognani (2015, p. 23) defende:

> Para que o docente possa estar preparado para enfrentar essas diversas situações, além do conhecimento específico necessário, é importante que tenha condições de trabalho que possibilitem o desenvolvimento de suas atividades. Sendo assim, de nada adianta os documentos oficiais ressaltarem a importância da utilização das TIC no contexto escolar se não forem oferecidas políticas públicas que tornem esse trabalho possível.

Nesse contexto, podemos entender que a aprendizagem dos estudantes fica comprometida pela falta de estruturas e políticas públicas que focalizem na formação dos professores. É essencial que a prática dos docentes se modifique, mas não de forma isolada, mas em conjunto com as políticas, orientações dos documentos oficiais e as ações no ambiente escolar.

Bolognani (2015) aponta que o ensino do conceito de fração é temido, tanto por professores quanto por estudantes, e que o trabalho de maneira diferente da que normalmente é adotada fez com que os estudantes se sentissem entusiasmados e interessados em participar das aulas. A abordagem por meio das tecnologias da informação e comunicação aproximou o conteúdo de fração da realidade dos estudantes; diante disso, foi possível a compreensão dos conceitos. “Repensar sobre a prática docente e as inúmeras dificuldades enfrentadas pelo professor ao tentar levar para a sua sala algum elemento tecnológico, na tentativa de realizar um trabalho diferenciado com seus alunos, teve grande valor” (2015, p. 94). A autora também conclui que é necessário mudar os costumes de aulas tradicionais nas escolas.

Chequetto (2016) investigou, por meio de experiência didática, a aprendizagem de fração com residentes de uma casa de passagem de São Mateus-ES. Os participantes foram adolescentes que perderam seus vínculos familiares. Os dados foram coletados por meio de entrevistas, observação participante e diário de campo. Para o autor, não é somente a escola que é responsável pela educação dos estudantes (crianças e adolescentes), mas outros fatores sociais e familiares que são externos ao ambiente escolar. Portanto, entender como está o aprendizado dos adolescentes que são socialmente discriminados pela sociedade é um fator importante.

Chequetto (2016, p. 17) afirma que “no ensino de fração e de outros tópicos da Matemática não podemos nos prender ao que é estritamente parte da vida, pois há aspectos das frações que serão utilizados posteriormente em outros conteúdos matemáticos”, mas sempre que possível é necessário dar sentido ao que está sendo proposto aos estudantes (LOPES, 2008)

Ainda conforme Chequetto (2016, p. 32):

> Diversas experiências pessoais como professor apontam que os alunos se mostram mais interessados em participar de uma atividade, se esta foge dos moldes tradicionais em que estão habituados na sala de aula, diferenciando os moldes rotineiros de apresentação dos conteúdos em aulas puramente expositivas.

A tarefa de ensinar conteúdos matemáticos não é fácil; ela é árdua, mas a partir do momento que o professor se dispõe a procurar outras maneiras de ensinar, saindo do método puramente tradicional de ensino, os estudantes se mostrarão mais interessados, não somente pela abordagem metodológica, mas principalmente em aprender o que está sendo ensinado em sala de aula.

Chequetto aponta que a disciplina de matemática, segundo as concepções dos participantes da pesquisa, é vista como uma disciplina em que se realizam apenas cálculos, na maioria das vezes sem sentido; que a sequência didática, os jogos e os materiais manipuláveis são recursos didáticos valiosos para a aprendizagem do conceito de fração; que "no decorrer dos encontros houve um progresso na aprendizagem, porém não tão significativo quanto esperávamos, preliminarmente, ou como visto em outras pesquisas em ambiente escolar" (CHEQUETTO, 2016, p. 134); e que é importante lançar mão de outras metodologias de ensino com vistas à aprendizagem dos estudantes.

Tratamos nesta subseção de analisar pesquisas que versam sobre o processo de ensino e aprendizagem do conceito de frações. Conseguimos apontar algumas questões que podem influenciar na aprendizagem dos estudantes sobre esse tema. Na próxima, trataremos do ensino do conceito de fração nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

2.4 O ensino de fração nos anos iniciais

Esta subseção sobre o ensino do conceito de fração nos anos iniciais está baseada, principalmente, na obra Formação de professores e o ensino de frações nos anos iniciais, de Schastai, Farias e Silva (2017) e nas pesquisas de Bessa (2007), Cervantes (2011), Silva (2013), Pinheiro (2014) e Lima (2014), as quais trazem contribuições e concepções de professores sobre o tema em estudo.

Schastai, Farias e Silva (2017) fazem um panorama geral e histórico sobre a formação inicial e continuada de professores. Para as autoras, nos últimos anos, tem crescido o número de pesquisas sobre esse tema em todo o mundo e, em meio a esse fato, "os professores passam a ser considerados mediadores no processo de formação de cidadãos, na superação dos fracassos escolares e na redução das desigualdades sociais" (SCHASTAI; FARIAS; SILVA, 2017, p. 15).

Assim,

> enquanto grupo social, em virtude das próprias funções que exercem, os professores ocupam uma posição estratégica no interior das relações complexas que unem as sociedades contemporâneas aos saberes que elas produzem e mobilizam com diversos fins. No âmbito da modernidade ocidental, o extraordinário desenvolvimento quantitativo e qualitativo dos saberes teria sido e seria ainda inconcebível sem um desenvolvimento correspondente dos recursos educativos e, notadamente, de corpos docentes e de formadores capazes de assumir, dentro dos sistemas de educação, os processos de aprendizagem individuais e coletivos que constituem a base da cultura intelectual e científica moderna (TARDIF, 2014, p. 33-34).

Essa posição estratégica que os professores ocupam está voltada para a produção do conhecimento e a formação do estudante imbuído de aspectos científicos e de uma postura crítica e participativa na sociedade. Assim, os docentes devem tomar para si a responsabilidade de proporcionar aprendizagem coletiva e individual, cujo objetivo esteja constituído de uma cultura intelectual e científica.

No entanto, o modelo de ensino tanto escolar quanto da formação de professores está aquém do que é proposto por Tardif (2014), uma vez que é necessária uma postura crítica dos docentes frente aos processos de ensino e de aprendizagem. "Porém, as pesquisas voltadas para a análise docente revelam que as práticas pedagógicas nas organizações escolares não condizem com esse perfil profissional" (SCHASTAI; FARIAS; SILVA, 2017, p. 15). Ou seja, o que se percebe é um enorme distanciamento daquilo que se aprende nos cursos de formação inicial (teoria) e a realidade de sala de aula (prática).

Segundo Bessa (2007, p. 31),

> O professor a ser formado deve ser um profissional que conheça e seja capaz da realização da prática administrativo-pedagógica nas escolas de educação infantil e dos anos iniciais do Ensino Fundamental, onde está inserido, efetivando sua atuação por meio da investigação e análise da realidade e vinculações entre as práticas educativas e as práticas sócio-culturais, objetivando a reconstrução de uma práxis educativa democrática e cidadã, bem como a melhoria do processo ensino-aprendizagem e das relações interpessoais.

Os profissionais na área da Matemática deveriam assumir essa postura de formação crítica e participativa dos estudantes, tanto em ambientes escolares quanto no meio social. Não é mais possível permanecer com uma postura mecânica nos processos de ensino na sociedade em que estamos inseridos atualmente, uma vez que os próprios documentos oficiais da educação no Brasil declaram:

> No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados (BRASIL, 1997, p. 19).

E quanto à aprendizagem, afirma-se:

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos (BRASIL, 1997, p. 19).

O ensino da Matemática deve levar os estudantes a compreender que essa ciência não está isolada das demais e que aprender determinado significado de um objeto leva, a bom termo, a estabelecer relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, conforme propõem os PCN de Matemática (1997), o ensino e a aprendizagem não podem ser lineares, pois a ênfase desses processos não está apenas em resolver cálculos com o uso de fórmulas e macetes, mas em estabelecer conexões com situações do cotidiano.

Schastai, Farias e Silva (2017) preconizam que o estudante vê um mesmo conteúdo durante vários anos, e mesmo ao concluir a Educação Básica não consegue desenvolver cálculos básicos.

> Tomando como exemplo o conteúdo de frações; o Ensino Médio, percebemos que são poucos os alunos que conseguem resolver situações-problema que envolvam cálculos com números fracionários. Quando se deparam com as frações, aos alunos ficam aguardando a explicação do professor sem ter a iniciativa para começar a resolver (SCHASTAI; FARIAS; SILVA, 2017, p. 17).

Nota-se que os estudantes não desenvolveram autonomia quanto à busca por resolver situações-problemas. Isso indica que não houve aprendizagem do conteúdo estudado e tampouco dos algoritmos que normalmente são mobilizados na resolução de atividades e tarefas, mesmo que o conteúdo tenha sido trabalhado em diferentes séries/anos escolares.

A falta de qualidade nas práticas pedagógicas dos professores que ensinam matemática tem sido observada ao longo dos anos tanto nos processos de ensinar quanto nos de aprender. Esse processo de ensino e aprendizagem, “ainda hoje, é esquematizado de uma maneira díspar do objetivo a ser alcançado, que é a interação do ensinar com o aprender, fazendo com que os estudantes se esquivem, sempre que possível, dessa área do conhecimento, que é temida pela maioria” (BESSA, 2007, p. 32).

Normalmente o ensino do conceito de fração não apresenta interação com a realidade dos estudantes, o que o torna difícil de ser aprendido por eles.

> Uma das grandes dificuldades enfrentadas pelos professores do 5º ano do Ensino Fundamental é a de despertar o interesse de seus alunos na resolução de problemas, de maneira prática, especialmente quando exigem conhecimento prévio de frações. Esse é um importante processo, pois dele depende a agilidade e a facilidade na realização de cálculos mentais, necessários para o desenvolvimento progressivo da

> matemática nos anos iniciais e finais, no Ensino Fundamental, no Ensino Médio e na Educação Superior (BESSA, 2007, p. 33).

Os professores reclamam que os estudantes não possuem interesse em aprender esse conceito, com o argumento de que eles não possuem iniciativa e apenas reclamam que não estão conseguindo entender o que está sendo ensinado. É notório que “os alunos resolvem uma grande quantidade de exercícios descontextualizados, prevalecendo o ensino de algoritmos, e, mesmo assim, acabam confundindo os procedimentos utilizados no algoritmo da adição com os utilizados no algoritmo da multiplicação de frações” (SCHASTAI; FARIAS; SILVA, 2017, p. 17).

Isso provavelmente acontece porque os professores tendem a ensinar esse conteúdo considerando apenas um de seus significados (parte-todo) para iniciar os estudos sobre frações: “trata-se das tradicionais divisões de chocolate, de pizza etc., indicando a relação que existe entre um número de partes e o total de partes” (SILVA, 2013, p. 44).

O ensino da matemática torna-se deficitário quando as práticas pedagógicas dos professores estão intimamente e unicamente ligadas ao que está proposto em livros didáticos, que muitas vezes abordam situações totalmente adversas à realidade em que estudantes estão inseridos. Isso pode levar à não aprendizagem do conceito de fração e de algumas operações que podem ser realizadas com esse conceito.

Silva (2013, p. 17) aponta que é possível “que os problemas de aprendizagem que os alunos enfrentam para a formação de conceitos sejam decorrentes de uma prática mecanicista, que valoriza excessivamente o “fazer” e o “operar” e desconsidera a importância do pensar e do abstrair”. Esse tipo de abordagem leva os estudantes a criar aversão à matemática. De modo geral, cria-se um mito de que é muito difícil e complicada, atribuindo que essa ciência é somente para os “gênios”.

O modo como os professores ensinam a Matemática está fortemente relacionado ao que aprenderam durante suas formações (seja na Educação Básica ou nos bancos de universidades). Ou seja, eles ensinam da mesma maneira que aprenderam. Isso também foi observado por Lima (2014), que assevera que 90% dos docentes entrevistados ensinam da mesma maneira que aprenderam.

É importante ensinar o conceito de fração dando mais atenção a atividades de resolução de problemas do cotidiano dos estudantes de maneira contextualizada, o que demanda dos professores constantes atualizações em cursos de formação continuada. “Desta forma o ensino passa a ser mediado por situações didáticas que contextualizem as experiências prévias do aluno, e possibilitam uma aprendizagem significativa” (LIMA, 2014, p. 76).

Schastai, Farias e Silva (2017) elencam diferentes maneiras para o ensino de frações, dentre elas: divisão de figuras geométricas planas em partes iguais em relação à área; o *tangram* como um recurso para o ensino de frações; frações unitárias e comparação de frações; equivalência de frações; adição, subtração e comparação de frações a partir de uma folha de papel; representação de frações em uma reta numérica; fração como parte de um conjunto.

As autoras tratam de oficinas pedagógicas que foram desenvolvidas com professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Em consonância ao desenvolvimento das oficinas, os professores tiveram a oportunidade de vivenciar a dinâmica dos estudantes em sala de aula durante as ações desenvolvidas pelos formadores, que os levaram à construção do conhecimento por meio de questões reflexivas. Schastai, Farias e Silva (2017, p. 103) consideram que "há indícios de que o professor, após ter vivenciado e refletido a respeito da divisão de um todo contínuo em relação à área e não à forma, tenciona inserir esses conhecimentos em sua prática letiva".

Ao se tornar um sujeito reflexivo e que vivencia diferentes maneiras de ensinar determinado conteúdo matemático, o professor será capaz de conduzir os estudantes a desempenhar papel ativo e participativo no processo de aprendizagem da matemática, estando assim aptos a alcançar o entendimento de determinado conceito.

Todavia, a pesquisa de Lima (2014) evidencia que a maioria dos estudantes não possui interesse em aprender aquilo que o professor está ensinando em sala de aula. O autor constata que os discentes se dedicam a aprender apenas às vésperas da realização de provas e exames, revelando o interesse apenas em "passar de ano", sem necessariamente aprender o conceito.

O estudo de Lima (2014) constatou que, ao realizar operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes, 100% dos estudantes não conseguem obter as repostas adequadas às situações-problemas. Quanto aos problemas com denominadores iguais, os resultados praticamente não se alteram, apenas 5% a 10% dos estudantes conseguem responder às questões corretamente (LIMA, 2014).

Uma maneira de mudar essa situação, segundo Lima (2014, p. 195), é o desenvolvimento de atividades e tarefas que contemplem o cotidiano dos estudantes.

> A forma com que as atividades foram apresentadas, utilizando questões-problemas e enunciados que contextualizam o cotidiano dos alunos, permitiu ao professor atuar como mediador do conhecimento, e a intervir de forma individualizada com cada aluno. Neste contexto, os alunos passaram a ser estimulados a produzir seu próprio conhecimento, alcançando um nível de conhecimento real a partir da potencialização dos seus conhecimentos prévios.

Ele declara também:

> O método proposto neste experimento se distancia da prática tradicional empregada em sala de aula para o ensino de matemática, na qual o professor apresenta a regra, com textos descontextualizados, e impõe ao aluno fórmulas estabelecidas e acabadas. Nossa sequência didática emprega uma forma dinâmica e diferenciada de ensinar Matemática. Com o auxílio do software educacional FRACTRON o professor assume o papel de mediador do conhecimento e proporciona ao aluno condições de agir de forma ativa na construção e formação dos seus próprios conceitos (LIMA, 2014, p. 205).

Compreende-se que os professores que ensinam Matemática devem buscar proporcionar um processo de ensino em que se contemplem situações contextualizadas e que a prática tradicional adotada por eles pouco contribui para o desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes, uma vez que há a imposição de fórmulas já estabelecidas, acabadas e abstratas com pouco ou nenhum sentido para que se aprenda.

Entretanto, superar as práticas tradicionais de ensino torna-se um desafio ainda maior devido ao enfrentamento, pelos professores, da desvalorização docente, especialmente em sentido financeiro. Outras questões que contribuem para um ensino mecanizado são a elevada carga horária em sala de aula e a falta de tempo para realizar pesquisas e planejamento de sua prática. Ou seja, não há condições mínimas de autonomia para os docentes quanto à subordinação dos conteúdos disciplinares de um currículo engessado, o que os leva a "reproduzir" apenas aquilo que está pronto nos livros didáticos.

Nesse ponto de vista, Schastai, Farias e Silva (2017, p. 18-19) preconizam que os questionamentos que emergem da prática educativa dos professores devem acontecer durante a sua formação profissional. "A opinião generalizada é a de que houve, por muito tempo, nas ciências da educação, negligência em relação aos saberes necessários para que o desenvolvimento da capacidade e competência do professor fosse suficiente para o ensino formal que hoje se pretende".

O professor que ensina Matemática não aprende, durante a formação inicial, a se apropriar do conhecimento, mas a recebê-lo. Assim, quando leciona suas aulas, a preocupação fica concentrada na prática matemática, e não na prática do professor que ensina matemática. Já a "formação do pedagogo – professor que atua nos anos iniciais – concentra-se muito no 'como fazer', considerando princípios metodológicos e didáticos, e carece de conteúdos específicos para o ensino das áreas do conhecimento" (SCHASTAI; FARIAS; SILVA, 2017, p. 19).

Segundo Bessa (2007, p. 20-21),

> Há diferenças entre a atuação do professor e a do educador. Cabe ao primeiro estar sempre preocupado em repassar conteúdos acadêmicos. O professor é caracterizado

> como aquele profissional que visa abrir o leque de possibilidades acadêmicas, para que o estudante seja um potencial competitivo e consiga vencer os diversos desafios que se propõe alcançar. O professor prepara o aluno academicamente. O educador, além de desenvolver os aspectos cognitivos, preocupa-se com a formação global do estudante: busca um trabalho integrado nas dimensões afetivas, moral e social.

Assim, a participação em cursos de formação continuada torna-se necessária para todos os professores. O foco dessa formação continuada deve levar em consideração as duas frentes apontadas por Bessa (2007) no que se refere aos processos de ensino e de aprendizagem. O objetivo, ao ensinar os estudantes, deve ser tanto acadêmico, no que se refere ao conhecimento da própria Matemática, quanto de uma formação global, considerando os aspectos afetivos, morais e sociais.

> Todos os alunos têm um talento a ser trabalhado e desenvolvido. Com isso, acredita-se estarem mais aptos a viver nesse mundo dinâmico, participando de uma escola em busca de mudanças, adaptando-se aos novos tempos. Levando o professor a cumprir o seu papel de educador, mediador, fazendo com que o aluno, sob sua responsabilidade, seja um ser reflexivo, adquira conhecimentos, seja transformador de sua realidade, capaz de satisfazer suas necessidades, sendo um sujeito ativo. O sujeito ativo de que falamos aqui é aquele que compara, exclui, ordena, categoriza, classifica, reformula, comprova, formula hipóteses etc. em uma ação interiorizada (pensamento) ou em ação efetiva (segundo seu grau de desenvolvimento) (BESSA, 2007, p. 42).

Além de educador e mediador do conhecimento, o professor deve assumir o papel de pesquisador da sua própria prática, ou seja, refletir sobre a sua ação pedagógica no ensino do conceito de fração. Dessa maneira, "o professor torna-se capaz de refletir criticamente sobre as dificuldades enfrentadas tanto em relação ao ensino quanto à aprendizagem de conteúdos, e no nosso caso específico, do conteúdo frações" (PINHEIRO, 2014, p. 32).

Pinheiro (2014) salienta que pesquisar e refletir sobre os porquês que levaram os estudantes a responder determinada atividade, ou como eles pensaram na tentativa de encontrar a solução da situação proposta, pode fazer com que o professor repense sobre sua prática educativa ao ensinar, suas concepções do conteúdo abordado e as maneiras de aprendizagem dos estudantes.

Questões relacionadas às dificuldades do conhecimento matemático, às crenças e concepções de ensino e aprendizagem criadas com anos de experiência, não podem servir de escudo para professores que ministram aulas de determinado conteúdo por muito tempo. Segundo Pinheiro (2014), esses pontos interferem e prejudicam o desenvolvimento profissional dos professores, porque, ao serem questionados a respeito de suas atuações em salas de aula, sentem-se confrontados quanto ao que sabem e construíram durante anos.

Tal situação mostra que a formação de professores "deve criar estratégias facilitadoras sobre a prática e na prática do professor e que deve contemplar os aspectos do cotidiano para que esse profissional possa repensar e reconstruir a própria prática e ter condições de buscar o devido desenvolvimento profissional" (CERVANTES, 2011, p. 11).

Quanto ao ensino do conceito de fração, as pesquisas apontam para a não aprendizagem desse conteúdo. Merlini (2005) e Silva (2007) indicam que a apresentação de diferentes significados inerentes a esse conceito potencializa sua aprendizagem, porém, os professores devem ter clareza desses significados a fim de não proporem situações que limitam tanto o ensino quanto a aprendizagem a maneiras de transmitir o conhecimento.

O estudo de Cervantes (2011) indicou que muitos professores não se sentem confiantes ao ensinar fração. Em depoimentos para a pesquisa, os professores pesquisados indicaram que se sentem inseguros com essa temática. Alguns chegam ao ponto de trocar de turma ou mesmo de não tratar o tema quando lecionam Matemática. Cervantes comenta que, dos treze professores que relatam ensinar frações, somente uma professora revelou ter facilidade e segurança ao ensinar esse assunto.

Isso reflete não somente a falta de conhecimento para ensinar esse conteúdo, mas, principalmente, a falta de formação profissional que abranja esses conceitos e metodologias para seu ensino. Ao trocarem de turma para não "ensinar fração", fica nítido que desconhecem o que é fração. Desse modo, é "necessário que os processos de formação destinem espaços para refletir sobre o tema" (CERVANTES, 2011, p. 49).

Silva (2013) verificou que o ensino do conteúdo de fração nos anos iniciais do Ensino Fundamental é realizado sempre no último bimestre, e essa mesma situação se repete nos anos finais. Os professores seguem a ordem do livro didático, em que esse conteúdo aparece no final do livro, correspondendo aos últimos meses do ano letivo. Ao deixarem o ensino de fração para o final do ano, a maioria dos professores não o realiza e, quando o realiza, não dedica tempo suficiente para a aprendizagem dos estudantes.

Percebe-se que os professores "de certa forma não aprenderam sobre frações, ou o seu aprendizado foi insuficiente e que não deixou registrado em sua formação de maneira que contribuísse com sua atuação em sala de aula" (SILVA, 2013, p. 91), assim, seu ensino torna-se limitado, fazendo com que os docentes se esquivem quando se trata desse assunto.

Muitas vezes se atribui a não aprendizagem desse conceito aos estudantes, salientando que os mesmos não prestam atenção nas aulas. Silva (2013) aponta que é evidente a falta de conhecimento dos professores em relação ao conteúdo de fração, mesmo para aqueles licenciados em Matemática.

> As falas dos professores demonstram a insatisfação dos mesmos com relação à sua formação e preparação para a docência. É presente a angústia deles no que se refere

> ao ensino de frações. Diante disso, acreditamos que o ensino de frações em turmas de 6º anos também possa estar sendo feito de maneira deficitária (SILVA, 2013, p. 120).

Isso revela que existem alguns "nós" quanto ao ensino de fração, o que, consequentemente, afeta a aprendizagem dos estudantes. Essa situação aponta para a necessidade de comprometimento por parte das instituições de ensino superior, especialmente nos cursos de Pedagogia e de Matemática, que devem dar mais atenção ao ensino do conceito de fração. Como afirma Silva (2013, p. 143), "podemos também inferir que tais graduações não estão contemplando a formação inicial que garanta ao professor o seu sucesso com o ensino de frações, implicando diretamente no fracasso dos alunos sobre o assunto".

O gargalo não está somente na aprendizagem, mas também nos métodos de ensino, o que contribui para a dificuldade dos estudantes em compreender os conceitos matemáticos. Segundo Schastai, Farias e Silva (2017, p. 22) há uma lacuna na "formação acadêmica dos professores que, presos aos livros didáticos, limitam-se a trabalhar com figuras geométricas divididas igualmente".

No entanto, a fim de que os estudantes possam aprender o conceito de fração, é necessário insistir que o professor pode lançar mão de diferentes registros de representação e de outros significados além do parte-todo, como quociente, medidas, operador multiplicativo e número. É também extremamente importante que os docentes busquem, constantemente, cursos de formação continuada, cujo objetivo seja o de refletir sobre a prática educativa e compreender que um mesmo conceito pode estar imbuído de vários significados.

Levando-se em consideração ao exposto nesta seção, apresentamos a seguir a sustentação teórica da pesquisa. Onde mostramos com mais detalhes a importância de utilizar registros de representação semiótica, significados de fração e características das quantidades no processo de ensino e de aprendizagem do conceito de fração, uma vez que observamos que é um conteúdo multifacetado e complicada tanto para professores quanto para estudantes.

3 SUSTENTAÇÃO TEÓRICA

O estudo sobre o conceito de fração se reveste de uma importância fundamental, principalmente quando se leva em consideração sua complexidade e os vários registros de representação semiótica. Nesse sentido, professores devem ter conhecimento e consciência de que, para haver aprendizagem desse objeto matemático, é necessário que os estudantes reconheçam os diferentes registros da representação semiótica, bem como os diferentes significados de fração e a natureza das quantidades (intensivas, extensivas, contínuas e discretas).

Segundo Maranhão e Igliori (2017), a teoria dos registros de representação semiótica é um referencial importante para a Educação Matemática, uma vez que nos fornece referencial para o ensino de determinado objeto matemático.

3.1 Registros de representação semiótica

No intuito de compreender os registros de representação semiótica e como se dá a aprendizagem dos objetos matemáticos, recorremos à teoria de Raymond Duval (2009). Duval é filósofo, psicólogo e pesquisador francês desde os anos 1970. Suas pesquisas estão ligadas à psicologia cognitiva e trazem contribuições importantes para a Educação Matemática. Dentre suas produções destacamos *Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais*[15], obra estudada para elaborar a fundamentação teórica desta pesquisa.

Professores dos vários níveis de ensino buscam facilitar a aprendizagem dos conteúdos matemáticos lançando mão, sempre que possível, da aplicabilidade em situações do cotidiano e de materiais didáticos[16], cujo objetivo é fazer com que o objeto matemático ensinado tenha significado para os estudantes. Duval (2009) considera a matemática como um campo privilegiado para estudos cuja finalidade é a análise de atividades cognitivas fundamentais, tais

---

[15]Título original: *Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels.*

[16] Para Lorenzato (2006, p. 18), "material Didático (MD) é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem. Portanto, MD pode ser um giz, uma calculadora, um filme, um livro, um quebra-cabeça, um jogo, uma embalagem, uma transparência, entre outros". Para o autor existem vários tipos de MD, mas chama a atenção para o MD manipulável concreto que não possibilitam mudanças em suas formas (sólidos geométricos em madeira ou cartolina) que permitem só a observação, e outros em que os estudantes podem ter maior participação como o ábaco, material dourado, jogos de tabuleiro. Há também os MD dinâmicos, "que permitindo transformações por continuidade, facilitam ao aluno a realização de redescobertas, a percepção de propriedades e a construção de uma efetiva aprendizagem" (LORENZATO, 2006, p. 19). Destacamos como exemplo uma estrela formada por palitos, que podem ser manipulados de diferentes maneiras.

como “a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e mesmo a compreensão de textos” (DUVAL, 2009, p. 13).

De acordo com Duval (2009, p. 13), “a particularidade da aprendizagem das matemáticas considera que essas atividades cognitivas requerem a utilização de sistemas de expressão e de representação além da linguagem natural ou das imagens”. Em outros termos, para que haja aprendizagem em matemática, é necessário que o estudante tenha conhecimento de vários sistemas de representação de um mesmo objeto matemático.

De acordo com o *Dicionário Michaelis,* o termo “representação”[17] tem a acepção de imagem que reproduz uma coisa ou pessoa, bem como exposição oral ou escrita do que temos na mente. Já para o termo “registro”, dentre seus vários sentidos, o dicionário supracitado destaca o “ato ou efeito de registrar”[18] algo em alguma coisa ou lugar.

Para Duval (2009, p. 29), a “noção de representação achou-se introduzida em três retomadas, cada vez com uma determinação totalmente diferente da natureza do fenômeno designado”. Nesse sentido, ele destaca três perspectivas para o termo representação: representação mental, representação interna ou computacional e representação semiótica.

> As representações **mentais** são todas as que permitem uma visão de objeto na ausência de todo significante perceptível. Elas são geralmente identificadas às “imagens mentais” como entidades psicológicas tendo uma relação com a percepção. Mas as representações mentais recobrem um domínio mais amplo que o das imagens (DUVAL, 2009, p. 45).

As representações **mentais** estão relacionadas à objetivação[19] (ou tomada de consciência), que é responsável por formar novas representações, e correspondem às descobertas da própria pessoa; não se limitam às imagens mentais, mas também aos conceitos, ideias, noções e crenças. Portanto, as representações mentais estão relacionadas aos conhecimentos e valores do indivíduo na convivência com seus pares e com a sociedade. Nesse sentido, são também representações conscientes, essenciais, se observarmos pelo ponto de vista cognitivo.

As representações **internas ou computacionais** não são representações conscientes e estão relacionadas ao *tratamento* de informações de forma mecânica por um sistema. “Essas

---

[17] *Dicionário Michaelis.* Editora Melhoramentos, 2018. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/representa%C3%A7%C3%A3o%20/>. Acesso em: 15 jun. 2018.
[18] *Dicionário Michaelis.* Editora Melhoramentos, 2018. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/registro/>. Acesso em: 15 jun. 2018.
[19] “A objetivação corresponde à descoberta pelo próprio sujeito do que até então ele mesmo não supunha, mesmo se outros lhe houvessem explicado” (DUVAL, 2009, p. 41). Ainda segundo Duval (2009, p. 46) a objetivação, “que corresponde à formação de representações mentais novas, é acompanhada de uma produção de representações semióticas”, sendo sua função quase sempre assimilada com a função de expressão, mesmo sendo independente dela.

representações traduzem a informação externa a um sistema sob uma forma que a deixa acessível, recuperável e combinável no interior desse sistema" (DUVAL, 2009, p. 47). Segundo o autor, trata-se de uma inteligência artificial, interna e não consciente ao sujeito, que apenas executa mecanicamente essas representações por meio de regras, macetes ou fórmulas.

> A noção de representação torna-se, então, essencial como **forma** sob a qual uma informação pode ser descrita e considerada em um sistema de tratamento. Isso não tem, então, mais nada a ver com uma "crença", com uma "evocação de objetos ausentes", as quais retornam à consciência vivida de um sujeito. Trata-se, ao contrário, de uma "**codificação da informação**" (DUVAL, 2009, p. 31).

Quanto às representações **semióticas,** estão relacionadas a um sistema de signos, linguagem, gráficos, que podem ser transformados em outros sistemas, também semióticos, de representação equivalente, com significações diferentes. "A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para outro" (DUVAL, 2009, p. 32). Em outros termos, isso seria uma mudança de forma de uma representação inicial na forma de linguagem natural em uma representação gráfica, por exemplo.

Essa mudança, de certo modo, parece não ser trivial para muitos estudantes, ou ainda se mostra até mesmo impossível nos diferentes níveis de ensino. "Em outros termos, a operação de conversão se revela nem trivial nem cognitivamente neutra. Não se pode, então, fazer como se o conteúdo representado estivesse destacado da forma que o representa, como se a *noésis* fosse independente da *semiósis*" (DUVAL, 2009, p. 35).

A dificuldade dos sujeitos em realizar a conversão de um registro de representação em outro traz à tona a necessidade de compreender o papel da *semiósis* no estabelecimento de diferenciação entre representante e representado. Para o autor, a *semiósis* não se constitui somente na diversidade de sistemas semióticos, mas principalmente na possibilidade de fazer correspondência entre os sistemas.

Para Duval, o uso de vários registros de representação (várias escrituras para os números, linguagem natural, figuras geométricas, gráficos cartesianos, operações matemáticas, entre outras) é fundamental para a aprendizagem, primeiramente pelas possibilidades de tratamento matemático e, em seguida, pelo fato de que os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis ou observáveis sem a ajuda de instrumentos. "Um tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza então apenas um registro de representação" (DUVAL, 2009, p. 39).

Não havendo a distinção entre o objeto matemático e suas representações possíveis, a aprendizagem fica comprometida, uma vez que "um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes" (DUVAL, 2009, p. 14). Para Duval, é importante não confundir funções, por exemplo, com sua representação gráfica ou, no caso em estudo, não se deve confundir a fração com suas representações gráficas, decimais, fracionária, percentual.

É possível perceber na educação básica brasileira o desinteresse, ou mesmo o desconhecimento, dos registros de representação. Segundo o autor, essa situação também ocorre na França, onde o mais importante é o objeto representado e não a pluralidade possível de registros de representação, que são importantes e essenciais para a aprendizagem dos conceitos matemáticos. Se o estudante não conhece ou não reconhece os diferentes registros de representação, poderá não compreender o objeto matemático em estudo; "toda confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão" (DUVAL, 2009, p. 14).

Para Duval (2009), os registros são representações que os sujeitos (estudantes, professores) usam para mostrar aquilo que está representado em suas mentes. Assim, os registros de representação semiótica seriam subordinados às representações mentais (cognitivas) e, mediante isso, assumem a função somente de comunicação.

As representações mentais são "todas as que permitem uma visão de objeto na ausência de todo significante perceptível. Elas são geralmente identificadas às 'imagens mentais' como entidades psicológicas tendo uma relação com a percepção" (DUVAL, 2009, p. 45). As noções e ideias dos sujeitos são tipos de representações mentais, no entanto, as crenças e fantasmas, projeções globais como conhecimentos e valores de um grupo ou de uma particularidade, também fazem parte deste grupo. Outro tipo de representação são as computacionais, de natureza homogênea, que "não requerem visão de objetos, e que permitem uma transformação algorítmica de uma sucessão de significantes em uma outra" (DUVAL, 2009, p. 47), portanto, são informações internas de um sistema que traduzem informações externas deixando-as acessíveis, recuperáveis e combináveis.

Quanto às representações semióticas, Duval (2009) utiliza as denominações *semiósis*, referindo-se à produção dos registros de representação semiótica, e *noésis*, relacionada aos atos cognitivos, mentais, responsáveis pela diferenciação e pela capacidade de argumentar e de criar. Dessa forma, a hipótese de que o primeiro é dependente do segundo parece evidente no sentido de que o indivíduo necessita pensar, imaginar e posteriormente exteriorizar aquilo que está representado (interiorizado) primeiramente em sua mente.

> Porém é apenas uma hipótese que vai ao encontro de fenômenos importantes. Para começar, em matemáticas, as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática. Com efeito, a possibilidade de efetuar os tratamentos sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado (DUVAL, 2009, p. 15-16).

Assim, para o desenvolvimento da atividade matemática, é indispensável a manipulação das representações semióticas, porque o tratamento do objeto matemático depende delas, ou seja, a função do tratamento desse objeto só se completa com os registros de representação semiótica e não somente com as representações mentais e/ou computacionais.

Duval (2009) argumenta que as representações mentais (*noésis*) e as representações semióticas (*semiósis*) não são opostas, mas complementares. Ao mesmo tempo que não há registros de representação sem os atributos mentais, também não existem representações mentais (imagens interiorizadas) sem os registros semióticos. “O desenvolvimento das representações mentais efetua-se como uma interiorização das representações semióticas da mesma maneira que as imagens mentais são uma interiorização das percepções” (DUVAL, 2009, p. 17).

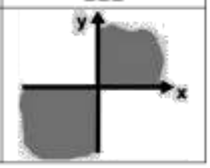
A pluralidade de registros de representação semiótica aumenta a capacidade cognitiva dos estudantes e, nestes termos, a aprendizagem em matemáticas se consolida quando não há a proposição de atividades repetitivas em que se contempla apenas um tipo de registro. Quanto mais se diversificam as atividades no ensino de frações, por exemplo, maior será a aprendizagem por parte dos estudantes. Para Duval (2009), a aprendizagem em matemática ocorre quando o indivíduo consegue estabelecer a passagem de um registro de representação para outro e em um novo sistema (conversão).

> [...] A passagem de um sistema de representação a um outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer de um mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não tem nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos estudantes (DUVAL, 2009, p. 18).

Em outros termos, os estudantes não conseguem reconhecer um mesmo objeto matemático (função, por exemplo) em mais de uma representação semiótica. Portanto, há uma separação no processo de ensino no sentido da incapacidade de relacionar duas ou mais representações semióticas de um mesmo objeto matemático. Para Duval (2009), essa dificuldade ocorre especialmente quando se trata de transformações não congruentes, ou seja, sair de um sistema semiótico do objeto e representá-lo por meio de outro sistema (conversão). Normalmente há maior facilidade na passagem de uma representação a outra quando essas são congruentes (tratamento).

Essa passagem entre representações é congruente quando obedece a três critérios: “correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem; mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações; e conversão de uma unidade significante da representação de partida em uma só unidade de chegada” (DUVAL, 2009, p. 18). Observe o quadro seguinte:

Quadro 6: Transformação de Registros de Representação Semiótica

I	II	III
3... o conjunto dos pontos cuja abscissa e ordenada são de mesmo sinal	$xy \geq 0$	

Fonte: Duval (2009, p. 76; adaptado).

Observe que há três registros de representação semiótica: língua natural, expressão algébrica e gráfico. Nesse caso, a congruência ocorre na transformação da linguagem natural (I) para a representação gráfica (III) obedecendo os critérios de correspondência semântica da expressão linguística com o gráfico, “univocidade semântica terminal” (DUVAL, 2009, p. 77). Já na passagem III → II não ocorrem os mesmos critérios da passagem I → III, “posto que nenhuma unidade semiótica no registro algébrico permite traduzir a observação ‘mesmo sinal para x e y’” (DUVAL, 2009, p. 77).

Para Duval (2009), quando a conversão entre registros de representação semiótica ocorre com fenômenos congruentes, a taxa de sucesso é elevada, e em toda tarefa cuja conversão necessita de fenômenos não congruentes há uma taxa fraca de sucesso. Nesse sentido, justifica-se a necessidade de um ensino pautado na pluralidade de registros de representação semiótica.

> Um trabalho de aprendizagem específico centrado sobre a diversidade de sistemas de representação, sobre a utilização de suas possibilidades próprias, sobre sua comparação por colocar em correspondência e sobre suas ‘traduções’ mútuas uma dentro da outra parece necessário para favorecê-la (DUVAL, 2009, p. 19).

Portanto, diante de uma situação de aprendizagem, os professores e estudantes não deverão tratar os objetos matemáticos com rapidez, uma vez que o objetivo maior deve estar na construção do conhecimento, na qualidade das produções e não nas quantidades cada vez maiores de conceitos/conteúdos. “Esse salto qualitativo no desenvolvimento das competências e das performances aparece ligado à coordenação de sistemas semióticos nos alunos” (DUVAL, 2009, p. 19).

Duval (2009) cita três fenômenos, que são estreitamente inter-relacionados ao desenvolvimento do conhecimento e aos impedimentos quanto à aprendizagem encontrada nas representações: diversificação dos registros de representação semiótica (gráficos cartesianos, esquemas, tabelas, cada um exige aprendizagens específicas); diferenciação entre representante e representado (objeto matemática e sua representação semiótica); e coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica disponíveis.

É importante considerar duas definições quanto à transformação de registros de representação semiótica. Na resolução de tarefas, os sujeitos podem usar de conversão e/ou tratamento, atribuindo o mesmo significado para ambos; no entanto, há uma diferença considerável entre esses termos. O **tratamento** é uma transformação de uma representação em outra que se dá no interior do mesmo sistema semiótico; portanto, não há a mobilização de um novo registro, o que é característico da **conversão**.

Duval (2009, p. 43) classifica os diferentes tipos de representação (mentais, computacionais e semióticas) em conscientes/não conscientes e interna/externa e os dispõe em um quadro, articulando-os.

Quadro 7: Classificação dos diferentes tipos de representação

	INTERNA	**EXTERNA**
CONSCIENTE	**Mental** função de objetivação	**Semiótica** função de objetivação função de expressão função de tratamento intencional função de conversão
NÃO CONSCIENTE	**Computacional** função de tratamento automático ou quase instantâneo	

Fonte: Duval (2009, p. 43; adaptado).

A oposição interna/externa é a diferença entre o que não é visível, tocável, fisicamente observável e aquilo que o é. As representações externas se efetuam por meio das representações semióticas, portanto têm uma função de comunicação, objetivação e tratamento, enquanto que as representações internas não são comunicadas ou expressas, ou seja, elas são internas ao sujeito. Já a oposição consciente/não consciente "é a oposição entre o que, de uma parte, aparece ao sujeito e que ele nota, e, de outra parte, o que lhe escapa completamente e que ele não pode notar" (DUVAL, 2009, p. 40). As representações conscientes possuem um caráter de intenção do sujeito, o que contempla uma função de objetivação. "A significação é a condição necessária de objetivação para o sujeito, isto é, da possibilidade de tomar consciência" (DUVAL, 2009, p. 41).

> As representações semióticas são representações ao mesmo tempo conscientes e externas. Com efeito, elas permitem uma “visão do objeto” através da percepção de *estímulos* (pontos, traços, caracteres, sons...), tendo valor de *“significante”.* Há uma grande variedade de representações semióticas possíveis: figuras, esquemas, gráficos, expressões simbólicas, expressões linguísticas, etc. (DUVAL, 2009, p. 44).

Duval organiza essas representações semióticas em duas grandes classes: analógicas (imagens) e não analógicas (línguas), com o objetivo de mostrar que existe uma diversidade e heterogeneidade de registros de representação semiótica.

O autor apresenta três atividades cognitivas fundamentais de representação ligadas à *semiósis*: formação, tratamento e conversão. A formação de uma representação semiótica é um recurso utilizado para atualizar a atenção voltada para um objeto ou para substituir essa atenção. Os signos fazem parte de um sistema de registros semióticos já constituído ou usado por outro indivíduo. “Os atos mais elementares de formação são, conforme os registros, a designação nominal de objetos, a reprodução de seu contorno percebido, a codificação de relações ou de certas propriedades de movimento” (DUVAL, 2009, p. 55).

> A formação de representações semióticas é, com efeito, mais complexa que a aplicação de regras de conformidade. Ela implica a *seleção de certo número de caracteres de um conteúdo* percebido, imaginado ou já representado em função de possibilidades de representação próprias ao *registro escolhido* (DUVAL, 2009, p. 56).

A formação de uma descrição (registro de representação língua natural) necessita de dados para que a mesma ocorra. Esses dados ou informações podem ser extraídos de uma lembrança, da exploração do objeto a ser descrito, de representações imaginárias (*noésis*). A formação de um registro sugere o respeito às regras, denominadas por Duval como **regras de conformidade**, específicas ao sistema semiótico empregado. “As regras de conformidade são aquelas que definem um sistema de representação e, por consequência, os tipos de unidades constitutivas de todas as representações possíveis num registro” (DUVAL, 2009, p. 25).

Para Duval (2009, p. 57),

> Um tratamento é uma **transformação de representação interna a um registro** de representação ou a um sistema. O cálculo é um tratamento interno ao registro de uma escritura simbólica de algarismos e de letras: ele substitui novas expressões em expressões dadas no mesmo registro de escritura de números.

Nesse sentido, segundo o autor, não há mudança de registro de representação semiótica e sim a transformação dentro de um mesmo registro e, de maneira geral, o tratamento tem característica de informação.

A conversão de representação ocorre quando há a transformação de um objeto, situação ou informação dada em um mesmo registro em outras representações desse objeto, situação ou informação em outro sistema de representação semiótica. Portanto, ao contrário do que ocorre no tratamento, as transformações são externas ao registro de representação de partida. Um exemplo de conversão seria a passagem de um número decimal em registro fracionário. Consideremos a seguinte situação:

Quadro 8: Conversão e tratamento

Situação Matemática	Representação Decimal	Representação Fracionária
Converta o número 0,2 em um número fracionário.	0,2	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na situação anterior, temos dois tipos de representação semiótica (decimal e fracionária) que correspondem à representação de 0,2. Aqui temos a ocorrência de dois tipos de transformação: a conversão de um numero decimal (0,2) em um número fracionário $\left(\frac{2}{10} \text{ ou } \frac{1}{5}\right)$; e o tratamento no registro de representação fracionária transformando a fração $\left(\frac{2}{10}\right)$ em uma representação equivalente $\left(\frac{1}{5}\right)$. Para Duval, os estudantes não encontram muita dificuldade nas atividades que tratam da transformação por meio do tratamento, mas sim na de conversão.

Duval (2009, p. 63) afirma:

> Numerosas observações em sala de aula, assim como a análise dos resultados de investigações e de avaliações, e experiências de aprendizagem mostram que *a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos.*

Essa situação ocorre por causa de lacunas no processo de ensino e de aprendizagem em todos os níveis de ensino. A falta de coordenação entre diferentes registros de representação semiótica leva a dificuldades na aprendizagem dos conceitos matemáticos. Assim sendo, a mudança de representação de registros se configura como um meio importante na compreensão de algum objeto em estudo.

Segundo Duval (2009, p. 78), “quando a conversão se efetua no sentido escritura algébrica de uma equação → gráfico, nenhuma dificuldade específica parece surgir. Mas, tudo muda quando é preciso tomar a conversão inversa, mesmo depois de um ensino sobre as funções lineares”. Cabe, portanto, aos educadores matemáticos a responsabilidade de proporcionar aos estudantes um ensino que leve em consideração as diferentes representações semióticas, com vistas à compreensão do objeto matemático em estudo.

> [...] a mudança de registro constitui uma variável cognitiva que se revela fundamental em didática: ela facilita consideravelmente a aprendizagem ou ela oferece procedimentos de interpretação. Por exemplo, as operações sobre os racionais podem ser mais facilmente introduzidas e praticadas sobre as figuras se destacando de um fundo quadriculado que com a escrita de frações (DUVAL, 2009, p. 81).

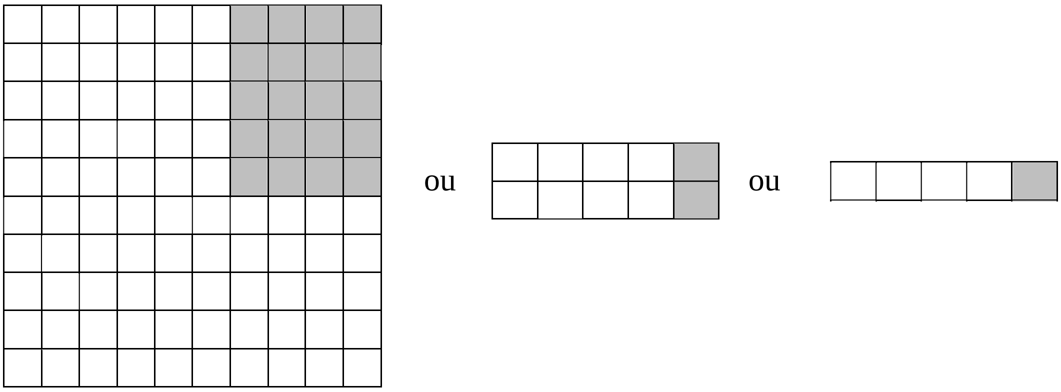
Quanto aos números racionais, Vizolli (2001; 2006) argumenta que os estudantes conseguem dar um tratamento com representações decimais e algumas vezes representações fracionárias; no entanto, não percebem que $0{,}1$ e $\frac{1}{10}$ são representações de um mesmo número ou objeto matemático (número racional).

O objeto matemático *número racional* admite diferentes registros de representação semiótica que merecem atenção no processo de ensino e aprendizagem. Consideremos, por exemplo, o número 0,2. Segundo Vizolli (2001; 2006), esse número admite pelo menos os seguintes registros de representação semiótica ligados a ele:

a) Registros de Representação Semiótica Numéricos:

- Decimal: 0,2
- Fracionário: $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
- Proporcional: “20 a cada 100”.
- Percentual: 20%

b) Registros de Representação Semiótica Geométricos:



c) Representação Semiótica em língua natural: “dois décimos”, “vinte centésimos”.

d) Representação Semiótica em tabela:

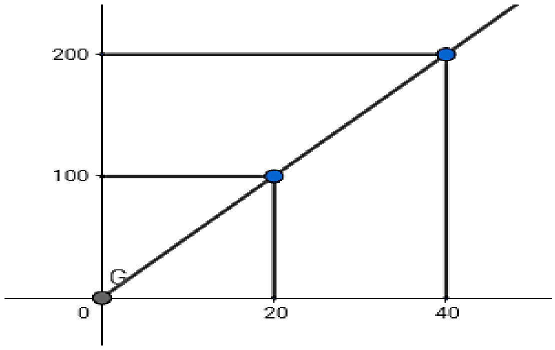
Tabela 1: Representação semiótica em tabela

Quantidade de transformação	Universo
20	100
40	200

Fonte: Elaborado pelo autor.

e) Representação Semiótica gráfica:

Gráfico 1: Representação semiótica gráfica



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os registros de representação semiótica no ensino de fração podem ser: registro simbólico (que compreende os numéricos ou algébricos); figural, no qual se devem levar em consideração as quantidades contínuas e discretas; linguagem natural, por exemplo, "dois terços"; registros concretos; e os registros numéricos de porcentagem e de divisão. Santana *et al* (2013) sintetizam esses possíveis registros em um quadro, como segue.

Figura 4: Registros de representação semiótica de fração

Registros de representação da fração			
Registro figural	*Registro simbólico*	*Registro Concreto*[1]	*Registro na língua natural*
Contínuo 	Numérico $\frac{4}{6}$ 0,5 66, 66% $4 \div 6$		Uma fração pode ser escrita seguindo as regras e convenções do Sistema Decimal de Numeração. Um número racional escrito na forma $\frac{a}{b}$ com *a* e *b* inteiros e $b \neq 0$ está representado por uma fração
Discreto 	Algébrico $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, $a,b \in Z$ a. $10^{n/3}$		

Fonte: Santana *et al* (2013, p. 4).

Para que ocorra a aprendizagem do conceito de fração, é importante mobilizar vários registros de representação para um mesmo objeto matemático. É comum os professores fazerem uso do registro de representação numérico-fracionário do tipo $\frac{a}{b}$ (a representa a quantidade de partes "pintadas" e b a quantidade total das partes).

Conforme apontam Santana *et al* (2013), os registros fracionários são os mais utilizados dentre os numéricos, o que pode ser justificado pelo fato de serem os mais usados nas aulas sobre esse conteúdo. Dessa maneira, ao passar de um registro para outro, os fracassos e bloqueios aumentam consideravelmente porque os estudantes não aprenderam que para um mesmo objeto matemático existem diferentes representações.

> Isto significa que há um "enclausuramento" provocado pelo mono-registro que impede o reconhecimento de outro objeto matemático em representações diferentes. Tal fato denota ainda a confusão entre representante e representado, ou seja, entre a fração e seus registros de representação semiótica (SANTANA *et al*, 2013, p. 11).

Nesse sentido, o educador deve dispor de vários registros de representação semiótica a fim de possibilitar-lhe expressar ideias relacionadas a um determinado objeto matemático nos processos de ensino e de aprendizagem. O conceito de fração pode ser representado de diferentes maneiras, seja por tratamento seja por conversão de registros, porque assim haverá, de fato, a compreensão de determinado conteúdo.

3.2 Diferentes significados de fração

Pesquisas apontam que, mesmo sendo um conteúdo abordado sistematicamente a partir do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental, o ensino de fração é complexo, tanto para professores quanto para estudantes (SCHASTAI; FARIAS; SILVA, 2017). Campos *et al* (2009 *apud* SCHASTAI; FARIAS; SILVA, 2017) afirmam que o conteúdo de fração não é aprendido com facilidade, embora tenha início nos primeiros anos do Ensino Fundamental e seja retomado e ampliado na segunda etapa do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Segundo Schastai, Farias e Silva (2017) é comum observar a tendência dos educadores em fazer uso de problemas com dupla contagem para ensinar fração, por se tratar de uma abordagem mais simples (parte-todo).

> Toma-se como exemplo os anos finais do primeiro segmento do Ensino Fundamental (4º e 5º ano), quando os professores introduzem o conceito de fração por meio da representação de frações utilizando figuras geométricas planas (círculos, quadrados, retângulos). Os alunos, então, "dividem" o todo de acordo com a quantidade de partes indicadas no denominador e pintam as partes indicadas no numerador. O termo "dividem" está entre aspas porque, na maioria as vezes, os alunos repartem essas figuras não observando que a divisão deve ser feita em partes iguais (SCHASTAI; FARIAS; SILVA, 2017, p. 74).

Trata-se de comparar partes com o total de partes, o que direciona os estudantes à "compreensão" e utilização do algoritmo, remetendo a uma aprendizagem com pouca ou nenhuma contextualização. Esse processo de dividir uma quantidade em n partes iguais, em que cada parte pode ser representada como $\frac{1}{n}$, é denominado por Nunes *et al* (2003), Silva (2005) e Merlini (2005) como significado parte-todo.

Segundo Nunes *et al* (2003 *apud* MERLINI, 2005), a classificação teórica do conceito de fração contempla cinco significados, a saber: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo. "Consideramos que é importante conhecer as diferentes ideias das frações porque essas têm relação com a construção do conceito de números fracionários" (SCHASTAI; FARIAS; SILVA, 2017, p. 87).

3.2.1 Significado parte-todo

O ensino de um conceito ou proposição matemática passa a ser significativo quando o mesmo é abordado por meio de uma variedade de situações. Assim, restringir o ensino do conceito de fração à ideia de "dividir" algo em várias partes e representá-las por meio da sobreposição de dois números inteiros, numerador e denominador $\left(\frac{a}{b}, a \text{ e } b \in \mathbb{Z}\right)$, não é justificável. O significado parte-todo é importante, mas não pode ser o único.

Para Magina e Campos (2010, p. 3), a aprendizagem do conceito de fração "poderá ser obtida com maior êxito quando explorado esse conceito em seus cinco significados". Quanto às situações que envolvem o significado parte-todo, sabe-se que são bastante usados nas escolas brasileiras (MAGINA; CAMPOS, 2010).

Segundo Merlini (2005, p. 28), "a ideia presente nesse significado é a da partição de um todo (contínuo ou discreto) em n partes iguais e que cada parte pode ser representada como $\frac{1}{n}$". Silva (2005, p. 106) define a concepção desse significado como aquela que

> emerge da ação de dividir uma grandeza contínua (comprimento, área, volume, ...) em partes equivalentes ou uma grandeza discreta (coleção de objetos) em partes iguais em quantidades de objetos. Usualmente, são manipulados dois tipos de objetos *ostensivos*: o registro da escrita simbólica a/b, associado ao registro figural em que regiões ou conjunto de figuras, representando elementos discretos, aparecem em partes "iguais".

Em outros termos, considera-se um todo (contínuo ou discreto) organizado em partes iguais/equivalentes, em que se faz uso do procedimento de dupla contagem que nos permite chegar a uma representação correta de determinada situação. Esse procedimento consiste em considerar o "todo" (denominador) e tomar algumas partes deste (numerador). E, conforme vimos, os problemas podem apresentar grandezas tanto contínuas quanto discretas, que podem ser verificadas nos exemplos a seguir.

Adílio foi ao supermercado e comprou uma barra de chocolate branco, partiu-o em 5 partes iguais e deu a seu amigo Ademir 2 partes. Qual a fração que representa a parte de chocolate que sobrou para Adílio?

Esse exemplo trata de uma barra de chocolate (quantidade contínua) que foi dividida em 5 partes iguais, e que 2 delas foram distribuídas para Ademir. Nesse caso, o estudante deve perceber e identificar que o total das partes (5) se refere ao denominador e que a parte que coube a Adílio depois da divisão (3) corresponde ao numerador. Essa situação se trata de uma comparação entre parte e todo (significado).

Tomemos, agora, outra situação com o significado parte-todo, mas dessa vez envolvendo quantidade discreta (conjunto/coleção de objetos).

Em uma fruteira há 4 maçãs vermelhas e 5 laranjas. Qual a fração que representa a quantidade de laranjas em relação às frutas que estão na fruteira?

Figura 5: Cesta de frutas

Fonte: Microsoft Office, adaptado.

Nesta situação, tem-se um conjunto de frutas reunidas em uma fruteira. Os sujeitos, quando se depararem com situações desse tipo, deverão identificar a quantidade total de frutas (9, denominador), perceber que há dois tipos de frutas diferentes (maçãs e laranjas) e que cada uma delas corresponde a uma fração do total de frutas da fruteira. Segundo Merlini (2005, p. 29), nessas situações,

> o aluno necessita, previamente, desenvolver algumas competências, como: identificação de uma unidade (que o todo é tudo aquilo que considera como a unidade em cada caso concreto), de realizar divisões (o todo conserva-se, mesmo quando dividimos em partes, há a conservação da unidade), manipular a ideia da conservação da área (no caso das representações contínuas).

Conforme Merlini (2005), os estudantes devem compreender que a unidade em cada caso concreto representa o todo ou total das partes em que determinada quantidade foi dividida, e que esse todo não se altera mesmo sendo dividido em partes, ou seja, há a conservação da unidade. Ao considerar a situação anterior, os sujeitos devem perceber que o todo foi dividido em 9 partes iguais, portanto, trata-se de uma comparação entre parte e todo (significado). E que, nos exemplos dos quadros 2 e 3, o número total das partes se referem aos denominadores e as partes tomadas correspondem ao numerador da fração.

3.2.2 Significado número

Esse significado se refere ao fato de que a fração, da mesma maneira que os números inteiros, não precisa necessariamente remeter a uma determinada quantidade (contínua ou discreta). E, ao compreender que a fração é um número, “existem duas formas de representação fracionária, a ordinária e a decimal” (MERLINI, 2005, p. 27). Assim, o sujeito não precisa recorrer às situações particulares no contexto das quantidades contínuas e/ou discretas para compreender e resolver problemas do tipo: *“converta o número decimal 1,5 em uma representação fracionária”*.

Para Santana (2012), ao admitirmos esse significado como número, faz-se necessário considerar a percepção de que o uso do número fracionário significa ampliar as maneiras de quantificar algo ou alguma coisa, o que era suscetível aos números naturais. Em outros termos, “esses números surgiram da necessidade de subdividir a unidade num certo número de partes iguais, constituindo-se, dessa forma, em *frações da unidade*” (SANTANA, 2012, p. 56).

Ilustramos, nos exemplos a seguir, o significado número em dois exemplos.

Represente na reta numérica os números $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$.
Compare os números fracionários em $>$ (maior que), $<$ (menor que) ou $=$ (igual a).
a) $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$.   b) $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$.   c) $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{10}$.

Frente a esses problemas, os sujeitos devem compreender que todas as frações $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \frac{5}{10}\right)$ são números (significado) e não se tratam apenas da sobreposição de dois números inteiros (numerador e denominador). Ainda, deverá perceber que cada um desses números representa um ponto sobre a reta numérica "e que sua localização depende do princípio de ordenação" (MERLINI, 2005, p. 27), ou seja, que entre duas frações existem infinitos números.

3.2.3 Significado medida

O significado medida está associado à ideia de comparação entre duas quantidades (intensivas e extensivas), sendo que algumas medidas são obtidas por meio da relação entre variáveis. "Para tal se faz necessário o estabelecimento de um referencial de comparação único para grandezas de mesma espécie como, por exemplo, centímetros para metros" (SANTANA, 2012, p. 59), em outros termos, esse significado está ligado à identificação de quantas vezes uma unidade "cabe" em outra e que fração corresponde a essa comparação.

Por exemplo, a fração $\frac{15}{40}$ pode ser entendida como uma quantidade extensiva quando representa o número de estudantes que foram aprovados (15) na disciplina de Matemática dentre o total de estudantes (40) de determinada sala de aula. Nesse caso, a medida é obtida ao realizar o quociente entre os aprovados (parte) e o total das partes (40), em que o resultado deve variar entre 0 e 1.

Merlini (2005, p. 29) nos apresenta uma situação que envolve a probabilidade de um evento acontecer. Para ela, "a probabilidade de um evento é medida pelo quociente do número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis. Portanto, a probabilidade de um evento varia de 0 a 1, e a maioria dos valores com os quais trabalhamos é fracionária".

O significado medida pode ser observado em situações que envolvem tanto as quantidades extensivas quanto as intensivas, conforme apresentado nos exemplos seguintes.

Exemplo 01: Dona Maria utiliza no preparo de um litro de suco 3 medidas de água e 2 medidas de polpa de fruta. Qual a fração que representa a quantidade de água no suco?

Exemplo 02: Júlia foi ao supermercado fazer uma cesta de frutas. Ela colocou 4 maçãs, 3 bananas e 3 peras dentro da cesta. Qual a fração que representa a quantidade de bananas da cesta?

De acordo com Santana (2012), para reconhecer o significado medida nas situações problemas com quantidades contínuas (exemplo 01), é necessário perceber três importantes aspectos: (a) relacionar variáveis diferentes, (b) compreender que quantidades contínuas estão diretamente relacionadas com as intensivas, em que se juntam duas quantidades distintas (água e polpa de fruta) e obtém-se uma terceira (o suco), (c) que é a relação entre as partes.

No exemplo 01, tanto a quantidade de água quanto a de polpa de fruta são expressas por uma medida (significado), e o resultado é obtido pelo quociente entre as medidas de água (03) e a quantidade total de medidas (05). Ao fazer o suco, deve-se considerar, ainda, que para 2 medidas de polpa de fruta tem-se 3 medidas de água, assim a receita é medida por meio da razão 2 para 3 que podemos representar como sendo $\frac{2}{3}$ ou, 3 para 2 $\left(\frac{3}{2}\right)$.

O exemplo 02 trata de quantidades discretas, ou seja, mesmo juntando as três partes de frutas (04, 03 e 03, respectivamente) não obtemos uma terceira mistura, isso porque as unidades de frutas não se dissolveram, permanecendo suas características iniciais (frutas). Neste caso, tem-se que a quantidade total das partes (10) é obtido pela reunião das outras três $(4 + 3 + 3 = 10)$, em que o resultado da situação problema é expresso por uma medida (significado) por meio da razão entre o número de bananas (03) e o total de frutas dentro da fruteira (10), ou seja, pela fração $\left(\frac{3}{10}\right)$.

Conforme Santana (2012), para compreender fração com o significado medida envolvendo quantidade discretas, é necessário considerar dois aspectos: primeiro, obtém-se a medida pelo quociente entre o numerador a e o denominador b, ou seja, a fração $\left(\frac{a}{b}\right)$, em que a remete à quantidade de elementos considerados de um todo e b ao total das partes; segundo, perceber que as quantidades de natureza contínuas estão diretamente relacionadas com as extensivas, em que a medida (significado) é resultado da relação entre duas variáveis.

Silva (2005) salienta:

> As tarefas associadas à concepção de medida de comprimento, geralmente, podem solicitar a manipulação de três tipos de objetos *ostensivos*: a figura de uma reta numérica ou algum esquema de medida, o número fracionário $\frac{1}{b}$ que representa uma subunidade, isto é, a unidade escolhida foi dividida em *b* partes para permitir a medição e o número fracionário $\frac{a}{b}$ que representará o resultado da medição realizada (SILVA, 2005, p. 118).

Ao tomar uma unidade de medida e dividi-la em unidades menores, isso nos possibilitará relacionar o significado medida com parte-todo e, por sua vez, realizar a divisão. O número fracionário $\frac{a}{b}$ nos permite compreender que a subunidade $\frac{1}{b}$ representa a quantidade de vezes que a medida a foi dividida.

3.2.4 Significado quociente

Segundo Merlini (2005), o significado quociente está presente nas situações em que a operação de divisão se torna uma estratégia eficaz na resolução de uma determinada situação problema. “Isso significa que conhecido o número do grupo a ser formado, o quociente representa o tamanho de cada grupo” (MERLINI, 2005, p. 30).

Silva (2005) afirma:

> As tarefas que solicitam a mobilização da concepção de quociente para números fracionários estão, geralmente, associadas a distribuição de grandezas. O *ostensivo* $\frac{a}{b}$ que representa o resultado de uma distribuição significa que a foi distribuído em b partes, ou seja, a foi dividido em um número b de partes iguais. Diferente dos tipos de tarefas que associam a concepções tratadas anteriormente, nestas o a pode ser menor, maior ou igual a b e podem representar objetos diferentes como, por exemplo, “crianças” e “chocolates” (SILVA, 2005, p. 121).

Nesse sentido, a operação de divisão consiste na técnica apropriada na resolução de situações de significado quociente, em que o ato de dividir (distribuir) uma quantidade a em partes iguais b está ligado à ideia de relacionar um número fracionário $\frac{a}{b}$ à operação $a \div b$. Logo, a fração $\frac{3}{4}$ pode ser vista como três dividido por quatro, o que nos leva a compreender a fração de outra maneira e associá-la aos números naturais, uma vez que $\frac{3}{4} = 0{,}75$. E que o número fracionário $\frac{7}{3}$ pode ser representado de duas maneiras possíveis, $\frac{7}{3} = 2{,}33\ldots$ ou $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$, que é a representação em número *misto* (PAULA, 2013).

Para compreender melhor os aspectos relativos a esse significado, apresentamos a seguir dois exemplos em que se inserem quantidades contínuas e discretas.

Exemplo 01: Ao dividir uma pizza entre 4 (quatro) amigos, com que fração da pizza cada um ficará? Exemplo 02: Júlia comprou 35 bolinhas de gude para dividir igualmente a seus 5 filhos. Que fração representa essa divisão?

Na situação anterior, especialmente no exemplo 01, o sujeito deverá perceber que a operação de divisão é a estratégia que melhor soluciona o problema, ou seja, o resultado representará o quociente (significado) da quantidade de pizza (contínua) que cada amigo irá receber. Deve-se aceitar que $1 \div 4$ é igual a $\frac{1}{4}$, e que esse número fracionário é a melhor solução para a situação, que também pode ser representado por $0{,}25 = 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Em relação ao exemplo 02, deve-se que reportar a uma fração diferente de $\frac{1}{4}$, uma vez que não há sentido em dividir uma bolinha de gude para quatro pessoas. Segundo Merlini (2005), quando se trata de quantidades discretas, exige-se que o numerador (35 bolinhas de gude) seja divisível pelo denominador (5 crianças). Assim, realiza-se a divisão $\frac{35}{5} = 35 \div 5 = 7$, o que corresponde à fração $\frac{1}{5}$ de bolinhas de gude (igual a 7 bolinhas) para cada criança.

Santana (2012, p. 59) preconiza que esse "significado também supõe que as ideias relativas ao significado parte-todo sejam extrapoladas, pois é preciso se levar em consideração duas grandezas distintas ao passo que no significado parte-todo temos referência a uma variável (o inteiro ou unidade)."

3.2.5 Significado operador multiplicativo

O significado operador multiplicativo está associado ao papel de transformação, isto é, "a representação de uma ação que se deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, transformando seu valor nesse processo" (MERLINI, 2005, p. 31). As situações que mobilizam essa concepção consideram que frações $\frac{a}{b}$ são tidas como números e compreendidas com operações de multiplicação dos fracionários com as quantidades iniciais que foram consideradas. Ou seja, a ação do operador multiplicativo modifica um estado inicial produzindo um estado final (SILVA, 2005).

Conforme Santana (2012, p. 62), "as quantidades contínuas no significado operador multiplicativo funcionam como uma máquina que reduz ou amplia a quantidade sob a qual se aplica". Nesse sentido, o número fracionário pode ser visto como um escalar (como um número inteiro) que, ao realizar a operação de multiplicação a uma determinada quantidade contínua ou discreta, a modifica de tal modo que a aumenta ou diminui. Observe os exemplos a seguir, que evidenciam aspectos relacionados a esse significado em dois tipos de quantidades.

Exemplo 01: João tomou $\frac{3}{5}$ de um litro de suco. Qual a quantidade de suco que ele tomou?

Exemplo 02: Marcos tinha uma coleção de 30 figurinhas e deu a seu amigo Adílio $\frac{2}{3}$ dessa coleção. Com quantas figurinhas Marcos ficou?

No exemplo 01, apresentando anteriormente, a quantidade de suco pode ser representada por um número inteiro após a conversão de litro em mililitro $(1l = 1000ml)$. O número fracionário $\frac{3}{5}$ é operador multiplicativo (escalar) que determinará a solução dessa tarefa, considerando pelo menos três maneiras possíveis:

a) Multiplicando o numerador 3 pela quantidade de suco $(1000\ ml)$ e dividindo o resultado desse produto pelo denominador 5 $\left(\frac{3}{5} \times 1000 = \frac{3 \times 1000}{5} = \frac{3000}{5} = 600\ ml\right)$, obtendo como solução a quantidade de $600\ ml$; ou

b) Dividindo a quantidade de suco $(1000\ ml)$ pelo denominador 5 e multiplicando o resultado desse quociente $\left(\frac{1000}{5} = 200\right)$ pelo numerador 3 $\left(\frac{3}{5} \text{de } 1000 = \frac{3}{5} \times 1000 = 3 \times \frac{1000}{5} = 3 \times 200 = 600\ ml\right)$; ou

c) Dividindo o numerador 3 pelo denominador 5 e multiplicando o resultado obtido pela quantidade de suco $\left(\frac{3}{5} \times 1000 = 0{,}6 \times 1000 = 600\ ml\right)$.

O mesmo procedimento é realizado com as quantidades discretas expressas no exemplo 02 da situação anterior. Para Silva (2005), tarefas que se referem a grandezas discretas podem ser solucionadas de maneira similar aos casos com quantidades contínuas.

Ensinar o conceito de fração considerando cinco significados – número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo – é de fundamental importância tanto para os professores quanto para os estudantes, porque dessa maneira pode-se evitar dificuldades de compreensão desse conteúdo.

Considerando os apontamentos apresentados neste tópico, e reconhecendo que se tratam de possibilidades de representação que podem ser abordadas quanto aos números racionais, exemplificaremos as maneiras de abordagem de $\frac{2}{5}$, a fim de que tenhamos maior clareza quanto aos significados de fração apresentados anteriormente (PAULA, 2013).

a) Número – a representação $\frac{2}{5}$ é um número, como os inteiros, e que pode ser colocado sobre uma reta numérica ou comparado com outro (ordenação);

b) Parte-todo – um inteiro dividido em cinco partes iguais, em que foram tomadas duas delas;

c) Medida – tem-se um segmento de medida, em que foram tomadas duas unidades de medidas de $\frac{1}{5}$;

d) Quociente – divisão de 2 por 5;

e) Operador Multiplicativo – considera-se uma medida, número ou grandeza e calculam-se dois quintos por meio de um produto.

Compreende-se, portanto, que um mesmo número fracionário pode ser representado de diferentes maneiras e que é necessário considerar diferentes significados no processo de ensino e aprendizagem a fim de não condicionar os estudantes a um único significado.

3.3 Quantidades contínuas e discretas, intensivas e extensivas

Especialmente no ensino do conceito de números racionais, o entendimento e domínio a respeito das características das quantidades é fundamental para a sua compreensão. Não raro, professores da Educação Básica, e mesmo do Ensino Superior, lançam mão do conceito de fração entendendo-o como uma quantidade discreta.

Quando compreendemos as características das quantidades e conseguimos diferenciar quantidade contínuas e discretas (descontínuas), intensivas e extensivas, o processo de ensino e aprendizagem do conceito de fração se torna significativo, tanto para o professor quanto para o estudante. Para tanto, nos baseamos em Nunes *et al* (2005), Merlini (2005) e Carvalho (2017).

Consideremos, por exemplo, a seguinte situação: *João tinha 15 bolinhas de gude. Jogou com seu amigo José e ganhou 3 bolinhas. Com quantas bolinhas João ficou depois de ter jogado?* Nessa situação-problema, temos as bolinhas de gude como um conjunto de objetos distintos, totalizando, neste exemplo, uma quantidade de dezoito objetos. Para Nunes *et al* (2005), ao dizermos "dezoito bolinhas de gude", estamos nos referindo a uma unidade natural, porque bolinha de gude é um objeto. Dessa maneira, estamos tratando de uma quantidade discreta.

Entende-se, portanto, que quantidade discreta é um conjunto de objetos de mesma natureza (ou unidades naturais) que, mesmo depois de realizar algum tipo de operação matemática, continuam sendo da mesma natureza inicial, formando novo conjunto ou subconjuntos. Em outros termos, dizem respeito a um conjunto de objetos idênticos, que representam um único todo, e o resultado da divisão deve produzir subconjuntos com o mesmo número de unidades.

Assim, as unidades naturais são características que definem uma quantidade discreta. São exemplos de unidades naturais: três botões, quatro tijolos, dez bonés, quinze bolinhas de gude, conjuntos de pessoas, votos, e assim por diante. Enfim, independentemente da quantidade de unidades que se considere, elas terão a mesma natureza e continuarão sendo unidade de objeto.

O mesmo não ocorre com as quantidades contínuas, que são unidades convencionais (dois metros, três quilos etc.). Para Nunes *et al* (2005), quando se toma um padrão e se compara esse mesmo padrão, estamos tratando de quantidades contínuas, que "são aquelas divididas exaustivamente sem necessariamente perderem suas características" (CARVALHO, 2017, p. 33).

As unidades convencionais, como o comprimento de uma mesa, o peso de algum objeto, a quantidade de água em uma limonada, por exemplo, são características de quantidades contínuas. Imaginemos que uma pessoa foi a um determinado supermercado comprar uma mesa que deve ser colocada em uma sala pequena; ela sabe que a mesa não pode ser muito grande, então conversa com sua esposa por telefone para saber o tamanho do lugar reservado para colocar a mesa; se ela usar o "palmo" como medida, com certeza ele não saberá o tamanho certo, mas se fizer uso de uma unidade convencional (metro, centímetro) conseguirá comprar o tamanho correto.

Nunes *et al* (2005, p. 121) declaram:

> Apesar das diferenças entre quantidades contínuas e descontínuas, elas estão baseadas na mesma estrutura lógica, que é a relação parte-todo: a soma das unidades é igual ao valor do todo. Essa estrutura lógica relaciona-se ao fato de que a medida dessas quantidades é essencialmente uma comparação entre duas quantidades de mesma natureza.

Nesse sentido, quando se comparam "três metros" com o comprimento de uma mesa, e "uma bolinha de gude" com o conjunto de bolas de gude, por exemplo, estamos tratando de quantidades de mesma natureza. Há uma comparação entre a unidade convencional "metro" com o comprimento da mesa e, "uma bolinha de gude" com um conjunto maior de bolinhas. Quando existe essa comparação, estamos tratando de outro tipo de quantidade: a extensiva.

Segundo Nunes et al (2005, p. 122), "quando a medida de uma quantidade se baseia na comparação de duas quantidades da mesma natureza e na lógica parte-todo, dizemos que a medida se refere a uma quantidade extensiva." Se a medida se baseia na comparação entre duas quantidades diferentes, trata-se de quantidades intensivas (NUNES *et al*, 2005). Em outros termos, as quantidades extensivas estão baseadas no princípio aditivo e as quantidades intensivas no princípio multiplicativo.

A diferença entre esses dois tipos de quantidades pode ser compreendida com um exemplo. Consideremos uma jarra e tomemos dois recipientes menores (ambos estão com suco de laranja) com capacidades de $80\ ml$ e $20\ ml$ respectivamente, e colocamos tudo na jarra de suco. Qual a quantidade de suco na jarra? (NUNES *et al,* 2005). Nessa situação, estamos juntando duas quantidades de mesma natureza (suco de laranja) e formando um todo maior, ou seja, estamos usando o princípio aditivo, em que o todo $(100\ ml)$ é igual à soma das partes $(80\ ml$ e $20\ ml)$; nesse caso, temos quantidades extensivas.

Tomemos agora o mesmo problema, mas com outra abordagem. “Temos suco de laranja com 80% de suco concentrado numa vasilha e 20% em outra. Colocamos tudo numa vasilha maior. Qual a concentração do suco na vasilha maior?” (NUNES *et al,* 2005, p. 122). Nessa situação, temos duas vasilhas com concentrações de suco diferentes $(80\%$ e $20\%)$, mas quando as juntamos em um recipiente maior a concentração de suco não permanece a mesma e não é igual a $80 + 20 = 100$. Isso porque tem-se que considerar, especificamente, que em uma vasilha há 80 partes de suco concentrado para 20 partes de água e em outra há 20 partes de suco concentrado para 80 partes de água. Portanto, estamos tratando de quantidades intensivas, porque não é possível estabelecer uma relação de adição.

Para Nunes *et al* (2005, p. 123), “a lógica das quantidades extensivas baseia-se, como vimos, na relação parte-todo: portanto, no raciocínio aditivo. A lógica das quantidades intensivas baseia-se numa relação entre duas quantidades: portanto, no raciocínio multiplicativo”.

Nunes *et al* (2005) apresentam vários exemplos com a finalidade de compreender as quantidades extensivas e intensivas e argumentam que não há dificuldades em medir quantidades extensivas discretas, mas não acontece o mesmo com as quantidades extensivas contínuas. Note que as quantidades extensivas podem ser tanto discretas quanto contínuas. Tomemos os exemplos seguintes para compreender essas relações.

Quadro 9: Relação de quantidades extensivas discretas e extensivas contínuas

Quantidade extensiva discreta	Quantidade extensiva contínua
Exemplo 01: Numa fruteira encontram-se 4 maçãs e 6 laranjas. Qual a fração que representa a quantidade de maçãs da fruteira?	**Exemplo 02:** Uma pizza circular foi dividida em oito partes iguais. Uma pessoa comeu três pedaços da pizza. Que fração da pizza ela comeu?

Fonte: Elaborado pelo autor.

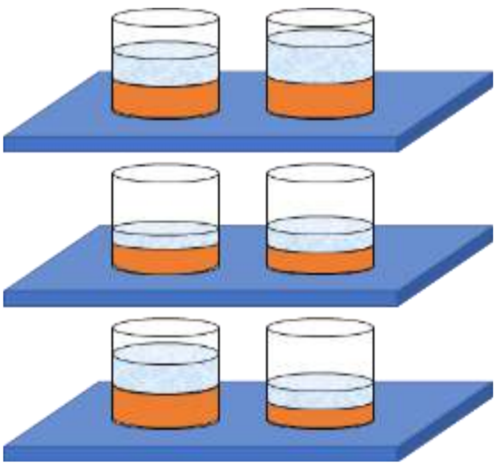
Nos exemplos do quadro 8, nota-se que as situações possuem a mesma natureza (frutas e pizza, respectivamente) e estão baseadas na lógica parte-todo (princípio aditivo). No exemplo 01, comparam-se as quantidades de duas frutas distintas (04 maçãs e 6 laranjas) com a quantidade total de frutas (10 frutas), e pede-se a fração que representa as maçãs (04) em relação ao todo que está na fruteira. Nesse caso, a solução seria $\left(\frac{4}{10}=\frac{2}{5}=40\%\right)$, ou seja, a parte que resta na fruteira é igual ao todo menos a parte considerada $(6=10-4)$, portanto, trata-se de uma quantidade discreta e extensiva.

No exemplo 02, a situação é parecida, no entanto, estamos tratando de uma quantidade contínua, que nesse caso é a pizza. A natureza da quantidade é a mesma e, por mais que tomemos pedaços dessa quantidade, eles continuarão sendo pizza, ou seja, não estamos tratando de coisas ou objetos. Nessa situação, temos quantidades contínuas e extensivas.

Quando se faz uso de unidades de mesma natureza, como nos dois exemplos anteriores, fica mais fácil aos participantes explorarem a lógica das quantidades extensivas. Para Nunes *et al* (2005, p. 135), “uma medida de uma quantidade extensiva expressa o número de unidades que correspondem ao todo medido”, como observamos nos casos das maçãs e laranjas na fruteira e dos pedaços de pizza.

A fim de compreendemos o desenvolvimento das quantidades intensivas, tomemos a situação seguinte, adaptada da obra de Nunes *et al* (2005):

Figura 6: Preparo de uma laranjada



Ilustrações para cada problema: Dois garotos estão fazendo laranjada. A parte de baixo (pintada da cor laranja) mostra a quantidade de suco de laranja no copo. A parte de cima (pintada na cor azul claro) mostra a quantidade de água. Olhe os dois primeiros copos, você acha que a laranjada nos dois copos vai ter o mesmo gosto? Nos outros dois copos, no segundo desenho, e no terceiro desenho, terão o mesmo gosto? Coloque um X naquele que você acha que sim. Coloque uma bolinha naquele que você acha que não.

Fonte: Nunes *et al* (2005, p. 137, adaptado).

Nessa situação, há a comparação entre duas quantidades de naturezas distintas (água e suco de laranja), e as perguntas consistem em saber se os sucos terão o mesmo gosto. Nesse sentido, trata-se de quantidades intensivas e contínuas. Agora consideremos outro exemplo:

> Vamos organizar uma festa para os garotos da classe e outra separada para as garotas. Na classe há 12 garotas e 8 garotos. Para cada festa, compramos 24 bombons. Em casa festa, os bombons vão ser distribuídos igualmente entre os participantes. Os garotos e as garotas vão ganhar o mesmo número de bombons? Por quê? (NUNES et al, 2005, p. 143)

Esse problema trata de unidades descontínuas (discretas) porque a soma total das partes é igual ao todo. Aqui temos a comparação entre duas quantidades distintas, pessoas e bombons, em que se pretende saber a quantidade de bombons para cada grupo de pessoas (garotas e garotos), portanto, tem-se quantidade intensiva e discreta.

Nunes *et al* (2005, p. 152) asseveram:

> Podemos distinguir dois tipos de quantidades intensivas. Em algumas delas, as suas unidades diferentes estão combinadas, formando um todo. Por exemplo, quando misturado suco concentrado e água, estamos formando um todo. Nesse caso, podemos descrever a concentração do suco de duas maneiras: 2 copos de suco concentrado para cada copo de água; ou $\frac{2}{3}$ de suco concentrado e $\frac{1}{3}$ de água.

Podemos observar que uma situação que envolve as quantidades intensivas pode ser expressa de duas maneiras: razão ou fração. Mas nem todas podem ser interpretadas dessa forma, por exemplo, quando falamos “3 reais por quilo de laranjas”. Segundo o que propõe Nunes *et al* (2005), a fração só pode ser aplicada às quantidades intensivas em situações como dois terços de suco concentrado e um terço de água, e a fração escrita tem dois sentidos: representar uma divisão e indicar quantidades.

De acordo com o que discutimos até aqui, propõem-se no quadro seguinte as relações entre as quantidades contínuas e discretas, intensivas e extensivas, e suas relações.

Quadro 10: Relação entre quantidades discretas e contínuas, intensivas e extensivas

Quantidades	**Intensivas**	**Extensivas**
Contínuas	No preparo de um suco de laranja foram utilizados 2 copos de suco concentrado e 1 copo de água. Qual a fração que representa a quantidade de suco concentrado e de água nesse preparo?	$\frac{3}{5}$ de uma estrada corresponde a 75 km. Qual a distância da estrada?
Discretas	No preparo de um litro e meio de suco, foram utilizadas 3 partes de água e 2 partes de polpa de fruta. Qual a fração que representa a quantidade de água no suco?	Numa fruteira encontram-se 4 maçãs e 6 laranjas. Qual a fração que representa a quantidade de maçãs da fruteira?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Conforme apresentamos, a compreensão e/ou aprendizagem de determinado conceito, que nesse caso está relacionada às características das quantidades, ocorre quando é abordado por meio de situações problemas. O quadro anterior mostra quatro exemplos que relacionam quantidades contínuas e discretas com intensivas e extensivas, cujo objetivo é perceber que é possível estabelecer relações entre elas. Quanto ao conceito de fração, vimos que há uma tendência em utilizar as quantidades contínuas no ensino e às vezes as discretas, o que pode ser um indício de que as outras duas não são de conhecimento dos professores.

A organização de sequências de atividades que contemplem tanto o conteúdo de fração quanto as características das quantidades, bem como os registros de representação semiótica e significados de fração, pode fazer com que os estudantes aprendam os conceitos envolvidos nessas atividades. Mas, o que é uma sequência de atividades? Como é organizada? Em que série/ano pode ser desenvolvida?

3.4 Sequência didática

Com o objetivo de compreender sequência didática (SD), suas definições, os papéis dos envolvidos, as etapas, apresentamos nesta subseção algumas concepções e suas contribuições para o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Os elementos teóricos tratados aqui estão ancorados nas teorias de Zabala (1998), que versa sobre a prática educativa, Oliveira (2013), com Sequência Didática Interativa, e Borges Neto (2013), sobre a Sequência Fedathi[20].

Segundo Zabala (1998), ensinar não é uma tarefa simples, requer do professor tomada de decisões, diagnóstico do ambiente e contexto de trabalho, atuação e avaliação tanto dos estudantes quando de sua própria atuação. Superar as dificuldades inerentes à prática educativa, pelo professor, requer uma análise ampla sobre a tarefa de ensinar.

A evolução na e da prática do profissional ocorre mediante a busca de ser cada vez mais competente naquilo que exerce, e isso acontece mediante duas situações: conhecimento e experiência, ou seja, é “o conhecimento das variáveis que intervêm na prática e a experiência para dominá-las” (ZABALA, 1998, p. 13). Ressalta-se que, dentre as variáveis que intervêm na prática, o conhecimento e o domínio de conteúdo por professores devem ser destacados porque a tarefa de ensinar cabe a cada um de nós. Inexistindo isso, o processo de ensino e aprendizagem

---

[20] A Sequência Fedathi foi criada pelo professor Hermínio Borges Neto. O nome FEDATHI foi criado a partir das iniciais dos nomes de seus três filhos, FElipe, DAniel e THIago, os quais inspiraram a denominação para o ensino de Matemática (SOUZA, 2013).

está fadado ao fracasso. Quanto às experiências, faz-se necessário considerar tanto as suas quanto as de outros educadores, estas últimas porque poderão proporcionar ao professor uma avaliação de sua prática, se há necessidade de adequações ou não.

> Provavelmente a melhoria de nossa atividade profissional, como todas as demais, passa pela análise do que fazemos, de nossa prática e do contraste com outras práticas. Mas certamente a comparação com outros colegas não será suficiente. Assim, pois, frente a duas ou três posições antagônicas, ou simplesmente diferentes, necessitamos de critérios que nos permitam realizar uma avaliação racional e fundamentada (ZABALA, 1998, p. 13-14).

Assim, é importante romper a simples constatação e experiência; é necessário que tenhamos argumentos que motivem nossas decisões para além da prática. Outros profissionais, como os médicos, dispõem de argumentos que vão além das experiências (deles e de seus colegas) e da prática, o que lhes permite decidir sobre o tipo de medicamento que devem receitar a seu paciente com segurança. “Existem determinados conhecimentos mais ou menos confiáveis, mais ou menos comparáveis empiricamente, mais ou menos aceitos pela comunidade profissional, que lhes permitem atuar com certa segurança” (ZABALA, 1998, p. 14).

Todavia, nos processos formativos e educativos, existem vários outros fatores e variáveis (abordagem metodológica, estilo do professor, as relações sociais, conteúdos) que intervêm na prática educativa do professor além do ofício de ensinar. Segundo Zabala (1998), a melhoria da atuação do professor passa pelo conhecimento e pelo controle dessas variáveis, uma vez que os processos de ensino e de aprendizagem são complexos. Portanto, faz-se necessário que busquemos nas teorias a compreensão do que acontece em sala de aula e como superar as dificuldades.

Zabala (1998, p. 16) assevera:

> Necessitamos de meios teóricos que contribuam para que a análise da prática seja verdadeiramente reflexiva. Determinados referenciais teóricos, entendidos como instrumentos conceituais extraídos do estudo empírico e da determinação ideológica, que permitam fundamentar nossa prática; dando pistas acerca dos critérios de análise e acerca da seleção das possíveis alternativas de mudança.

Essas mudanças são fundamentais no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que os mesmos estímulos não levam, necessariamente, aos mesmos resultados. Em outros termos, existem algumas atividades de ensino que contribuem para a aprendizagem em determinadas situações, mas em outras podem não ter o mesmo resultado. Uma determinada abordagem pode desempenhar papel importante na aprendizagem de algum objeto matemático, mas em outros, pode não ser tão eficiente.

Para Zabala (1998), a aula pode ser entendida como um sistema de várias vaiáveis integradas entre si (determinação de tempo, relações de interações com os estudantes e entre os estudantes, a escolha e o uso do recurso didático). Nesse sentido, a prática docente deve ser entendida como uma ação reflexiva, não se limitando ao "fazer em sala de aula". "A intervenção pedagógica tem um antes e um depois que constituem as peças substanciais em toda prática educacional" (ZABALA, 1998, p. 17).

O antes e o depois estão relacionados ao planejamento e à avaliação, respectivamente, e são inseparáveis da prática docente em sala de aula. Para Zabala (1998, p. 17), uma intervenção pedagógica "nunca pode ser entendida sem uma análise que leve em conta as intenções, as previsões, as expectativas e a avaliação dos resultados". Entre esses dois extremos da atuação docente, existem diversas outras variáveis ligadas ao desenvolvimento de tarefas ou atividades.

O desenvolvimento das atividades – debates, exposição, leituras, uma pesquisa bibliográfica – adquire valor quando as colocamos em uma sequência didática, que se caracteriza como uma unidade de análise prática. Sequências didáticas "são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores quanto pelos alunos" (ZABALA, 1998, p. 18).

As sequências didáticas figuram como um importante instrumento para o processo de ensino e aprendizagem do conceito de fração, por exemplo. De acordo com o *Dicionário Michaelis*, a palavra "sequência" significa "ato ou efeito de seguir; continuação de algo iniciado; prosseguimento, seguimento; série de acontecimentos que se sucedem ininterruptamente ou a pequenos intervalos"[21] e "didática" é a "técnica ou arte de ensinar, de transmitir conhecimentos"[22]; logo, o termo *sequência didática* pode ser entendido como um conjunto de atividades ordenadas passo a passo com o objetivo de ensinar um determinado conteúdo.

Conforme Maroquio, Paiva e Fonseca (2015, p. 1), as sequências didáticas "são planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, e organizadas com os objetivos que o professor quer alcançar, envolvem atividades de aprendizagem e avaliação, permitindo, assim, que o professor possa intervir nas atividades elaboradas". Dessa maneira, as sequências

---

[21] *Dicionário Michaelis.* Editora Melhoramentos, 2018. Disponível em: < https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/sequ%C3%AAncia/>. Acesso em: 15 jun. 2018.
[22] *Dicionário Michaelis.* Editora Melhoramentos, 2018. Disponível em: < https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/did%C3%A1tica/>. Acesso em: 15 jun. 2018.

didáticas (SD) não podem ser entendidas como algo intocável, os educadores podem acrescentar ou retirar passos da sequência caso seja necessário.

Para Oliveira (2013, p. 53), sequência didática

> É um procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino-aprendizagem.

A autora acrescenta:

> A Sequência Didática Interativa é uma proposta didático-metodológica que desenvolve uma série de atividades, tendo como ponto de partida a aplicação do Círculo Hermenêutico-Dialético para identificação de *conceitos/definições*, que subsidiam os componentes curriculares (temas), e que são associados de forma interativa com teoria(s) de aprendizagem e/ou propostas pedagógicas e metodológicas, visando à construção de novos conhecimentos e saberes (OLIVEIRA, 2013, p. 58-59).

Segundo Oliveira (2013), as sequências didáticas são utilizadas em diversas áreas do conhecimento e seguem cinco passos básicos, organizados em dois momentos: escolha do tema a ser trabalhado; problematização do assunto a ser trabalhado por meio de questionamentos; planejamento dos conteúdos; definição dos objetivos a serem alcançados no processo de ensino e aprendizagem; e, delimitação da sequência de atividades. Para a autora, a SD é tida como uma proposta didático-metodológica voltada para o desenvolvimento de determinado conteúdo em sala de aula e tem como objetivo principal o processo de ensino e aprendizagem.

Oliveira (2013) organiza a sequência didática em dois momentos: o primeiro é denominado **sequência de atividades,** que consiste em definir um tema a ser trabalhado, como por exemplo o conceito de fração; com o componente curricular escolhido deve-se entregar aos estudantes (ou do grupo de pessoas em uma formação continuada e/ou em uma oficina de matemática) uma folha de papel A4 que deve ser dividida em partes, formando fichas; depois o professor solicita aos participantes que escrevam em suas fichas o que eles entendem sobre fração; posteriormente, quando todos tiverem escrito o que entendem sobre o tema, o professor deve organizar os participantes em pequenos grupos; formados os grupos, os participantes deverão realizar uma síntese daquilo que todos os componentes de seu grupo escreveram resumindo em uma só frase, contemplando o que cada participante disse sobre o tema; em seguida, forma-se um novo grupo somente com os líderes escolhidos de cada pequeno grupo, esse grupo de *líderes* deverá realizar a síntese das sínteses de todos os grupos, constituindo uma definição geral de todos os participantes ou estudantes.

O segundo momento é definido como segundo bloco de atividades. Aqui o professor buscará embasamento teórico para o tema escolhido em livros e textos, que deverá ser apresentado aos participantes de acordo com a metodologia escolhida pelo professor, mas sempre primando pelo diálogo com os estudantes em sua apresentação; após o embasamento teórico o professor escolhe uma determinada atividade para finalizar o tema em questão.

É importante destacar que, em todo o processo de desenvolvimento da sequência didática, levam-se em consideração os conhecimentos prévios dos participantes. Ao trabalhar com essa proposta de ensino, os estudantes podem participar ativamente na construção do conhecimento, isso porque eles estarão envolvidos em todo o processo. Nessa perspectiva, quando o professor lança mão daquilo que os estudantes têm de conhecimento e valoriza seus conceitos, eles se tornarão autores de seus próprios conhecimentos, cabendo ao professor, no fechamento da sequência, validar ou não os conhecimentos dos participantes com embasamentos teóricos de sua escolha.

Ao finalizar uma temática em estudo, o professor pode propor outra sequência didática com outro tema a fim de que os participantes produzam um novo saber. “Concretamente, poderá ser solicitado que os alunos façam pesquisas sobre o conteúdo trabalhado em sala de aula, e construam um *pequeno texto* sobre o tema estudado e/ou façam um *relatório* sobre a sequência de atividades, *associando com a teoria trabalhada* em sala” (OLIVEIRA, 2013, p. 60).

Segundo o que propõe Oliveira (2013), uma SD não tem tempo limitado para que ocorra, cabendo ao professor a definição do tempo de cada etapa em parceria com os estudantes e/ou participantes. Em uma formação continuada, por exemplo, a avaliação pode ser a construção de um artigo científico, neste caso o tempo de término da SD será mais amplo.

> No caso da construção de artigos científicos, o tempo é bem maior e deve ser negociado com os estudantes/participantes da SDI. É muito importante que o resultado final da aplicação dessa ferramenta didática seja socializado com apresentação dos resultados em pequenos eventos na universidade/escola, seminários, congressos e até divulgado em redes sociais (OLIVEIRA, 2013, p. 61).

No desenvolvimento metodológico das sequências didáticas, valorizam-se os conhecimentos dos participantes adquiridos ao longo de suas experiências, ou seja, não se descartam os saberes dos estudantes. Dessa maneira, há a integração estudantes-estudantes e professores-estudantes, que juntos constroem um novo saber a partir das contribuições de cada participante. A utilização da SDI “em sala de aula ou na realização de oficinas pedagógicas facilita o diálogo entre professores e alunos, e dos educadores entre si, tendo como resultado a produção de novos conhecimentos e saberes, que legitimaram pela construção de textos didáticos, relatórios e artigos científicos" (OLIVEIRA, 2013, p. 61).

Para Borges Neto (2013), SD consiste em uma proposta teórico-metodológica que coloca o estudante em um ambiente de elaboração significativa de conceitos matemáticos, em que o professor exerce o papel de mediador da aprendizagem; "nesse processo, o docente deve levar em conta as experiências vivenciadas pelos alunos e seus conhecimentos anteriores acerca das atividades desenvolvidas" (SOUZA, 2013, p. 18). Para Borges Neto (2013, p. 11) a sequência didática "recomenda que os conhecimentos matemáticos sejam ensinados com base no desenvolvimento do trabalho de investigação de um matemático, no sentido de proporcionar uma maior autonomia ao aluno em seu processo de aprendizagem, numa perspectiva transformadora".

Conforme proposto por Borges Neto (2013), a SD é uma proposta para o ensino de matemática e tem sido explorada por professores e pesquisadores da área de Educação Matemática com o objetivo de proporcionar um ensino de matemática mais dinâmico e interessante para os estudantes, colocando-os como participantes ativos no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Dessa maneira, quando o estudante se deparar com um conhecimento matemático novo, ou um problema sobre o conceito de fração, por exemplo, ele poderá seguir os passos de um matemático, no que se refere a observar e analisar os dados do problema; buscar caminhos para solucioná-lo; analisar os caminhos percorridos e tentar encontrar os erros; buscar novos conhecimentos para construir e fundamentar suas soluções; testar os resultados, corrigir e criar um modelo de resolução, sendo validados pelo professor ao final desse processo.

Segundo Oliveira (2013), as sequências didáticas começaram a ser implantadas na França nos anos de 1980 e objetivavam propor um ensino menos fragmentado, cujo objetivo era a melhoria do processo de ensino da língua francesa. Somente em 1992, as SD começaram a ser trabalhadas no Brasil também na área de linguagens, a exemplo da França.

A utilização de SD em salas de aulas abrange todos os níveis de ensino (Educação Básica, Ensino Superior e Pós-Graduação), especialmente em curso de formação de professores (licenciaturas). Seu procedimento metodológico está voltado para a construção e a reconstrução de conceitos (saberes e conhecimentos) ligados às diferentes áreas do ensino.

Para que ocorra o processo de ensino e aprendizagem utilizando a sequência didática, é fundamental que haja efetiva participação tanto dos professores quanto dos estudantes, desde o planejamento inicial, perpassando pela escolha dos objetivos, até o processo de avaliação e informação dos resultados. Nesse sentido, os estudantes se tornarão personagens indispensáveis na construção do conhecimento do objeto matemático.

> O ensinar e o aprender implicam uma relação entre o sujeito que se propõe a trabalhar e socializar *saberes* e alguém que está *aberto a ouvir e aprender* novos saberes para aprofundar conhecimentos já existentes. No âmbito da sala de aula, para que de fato se possa socializar e produzir novos conhecimentos e saberes, é necessário um planejamento que implique na realização de atividades para tornar as aulas mais dinâmicas e produtivas (OLIVEIRA, 2013, p. 53).

A função de ensinar está diretamente relacionada ao papel do professor, sendo sua competência promover o ensino de determinado objeto matemático, enquanto que o interesse por sua aprendizagem cabe aos estudantes. Nesse sentido, podemos entender que nem todas as práticas de ensino proporcionam a aprendizagem, esta última depende de alguém *estar disposto a ouvir e aprender.*

Cabe ao professor (e da equipe escolar, ou corpo docente), portanto, desenvolver aulas que sejam interessantes para os estudantes. Em outros termos, é necessário que as abordagens das práticas educativas no ambiente escolar ultrapassem as aulas puramente expositivas, em que o professor é “detentor” do saber matemático e os estudantes são apenas reprodutores daquilo que observam seus “mestres” realizar em sala de aula.

Segundo Borges Neto (2013), a sequência didática visa contribuir para a formação dos professores no sentido de proporcionar momentos de investigação e de aproximação com os estudantes, e apresenta subsídios para um ambiente de ensino com mais autonomia para estudantes no processo de aprendizagem de conceitos. Nesse sentido, Zabala (1998) preconiza que, em maior ou em menor grau, as nossas aulas influenciam nossos estudantes tanto no que se refere ao aspecto educacional quanto no que diz respeito ao aspecto social.

> É preciso insistir que tudo quanto fazemos em aula, por menor que seja, incide em maior ou menor grau na formação de nossos alunos. A maneira de organizar a aula, o tipo de incentivos, as expectativas que depositamos, os materiais que utilizamos, cada uma destas decisões veicula determinadas experiências educativas, e é possível que nem sempre estejam em consonância com o pensamento que temos a respeito do sentido e do papel que hoje em dia tem a educação (ZABALA, 1998, p. 29).

Aquilo que fazemos em sala de aula influencia direta ou indiretamente nas decisões e atuações de nossos estudantes na vida pessoal, profissional, social e ideológica. Daí a importância de ultrapassar a visão fragmentada do processo de ensino e aprendizagem que considera conteúdos apenas como conhecimentos disciplinares. Para Zabala (1998, p. 30), “também serão conteúdos de aprendizagem todos aqueles que possibilitem o desenvolvimento das capacidades motoras, afetivas, de relação interpessoal e de inserção social”.

Zabala (1998) organiza os conteúdos em três grupos: conceituais, relacionados às respostas referentes à pergunta “*o que se deve saber?*”; procedimentais, ou *“o que se deve saber* *fazer?"*; e atitudinais, *"como se deve ser?"*. Em um sistema que propõe a formação integral (considerando conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais) do estudante, é importante que se apresente equilíbrio entre esses tipos de conteúdo. Dessa maneira, há que se considerar o estudante como agente ativo na construção do conhecimento; assim, as situações de ensino e aprendizagem podem ser consideradas "como um processo dirigido a superar desafios, desafios que possam ser enfrentados e que façam avançar um pouco mais além do ponto de partida" (ZABALA, 1998, p. 38).

Em uma sequência didática, é importante o aparecimento dos conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais, e que o avanço da sequência dependa das técnicas e habilidades dos estudantes. Para Zabala (1998, p. 63-64), em uma sequência didática deve-se questionar se existem atividades:

> a) que nos permitam determinar os *conhecimentos prévios* que cada aluno tem em relação aos novos conteúdos de aprendizagem?
> b) cujos conteúdos são propostos de forma que sejam *significativos e funcionais* para os meninos e as meninas?
> c) que possamos inferir que são adequadas ao *nível de desenvolvimento* de cada aluno?
> d) que representem um desafio alcançável para o aluno, quer dizer, que levem em conta suas competências atuais e as façam avançar com a ajuda necessária; portanto, que *permitam criar zonas de desenvolvimento proximal* e intervir?
> e) que provoquem um *conflito cognitivo* e promovam a *atividade* mental do aluno, necessária para que estabeleça relações entre os novos conteúdos e os conhecimentos prévios?
> f) que promovam uma *atitude favorável*, quer dizer, que sejam motivadoras em relação a aprendizagem dos novos conteúdos?
> g) que estimulem a *autoestima* e o *autoconceito* em relação as aprendizagens que se propõe, quer dizer, que o aluno possa sentir que em certo grau aprendeu, que seu esforço valeu a pena?
> h) que ajudem o aluno a adquirir habilidades relacionadas com o *aprender a aprender*, que lhe permita ser cada vez mais autônomo em suas aprendizagens?

Zabala (1998) nos apresenta quatro exemplos de sequências didáticas, salientando que todas são válidas, mas são incompletas. O autor nos chama a atenção para a SD4, que para ele é mais completa por abordar equitativamente conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais. Segundo o autor, todos já utilizaram ou utilizam formas de ensinar que estão diretamente relacionadas com as sequências apresentadas.

O ensino do conceito de fração não pode se desviar dessa estrutura em que aparecem os três tipos de conteúdo, embora possa haver mudanças nas etapas, acrescentando ou suprimindo algumas delas. Nesse sentido, Maroquio, Paiva e Fonseca (2015, p. 2-3) defendem que

> o uso da sequência didática, como recurso pedagógico, permite um novo olhar sobre a organização curricular, com ênfase no ensino pautado em investigação, por meio de condições reais do cotidiano, partindo de problematizações que levem o aluno a conferir o seu conhecimento prévio com o conhecimento apresentado no espaço de

> aprendizagem, levando-o a se apropriar de novos significados, novos métodos de investigação e a produzir novos produtos e processos.

Os educadores devem estar atentos ao processo de elaboração da sequência didática que visa conteúdos matemáticos, a fim de tornar o ensino pautado em investigações tanto pelos estudantes quanto pelos professores. Deve-se partir de problematizações do cotidiano, considerando os conhecimentos prévios dos estudantes e levando cada um deles a apropriar-se dos novos significados de fração.

Quadro 11: Sequências didáticas na concepção de Zabala

SD	PASSOS DA SD	TIPOS DE CONTEÚDOS		
I	1. Comunicação da lição.	C	_	_
	2. Estudo individual.	C	P	_
	3. Repetição do conteúdo aprendido.	C	P	_
	4. Prova ou exame.	C	_	_
	5. Avaliação.	C	_	_
II	1. Apresentação situação problemática.	C	_	_
	2. Busca de soluções.	C	P	A
	3. Exposição do conceito e algoritmo.	C	P	_
	4. Generalização.	C	P	_
	5. Aplicação.	C	P	_
	6. Exercitação.	P	C	_
	7. Prova ou exame.	C	P	_
	8. Avaliação.	C	P	_
III	1. Apresentação situação problemática.	C	_	_
	2. Diálogo professores/alunos.	C	P	A
	3. Comparação pontos de vista.	C	P	A
	4. Conclusões.	C	_	_
	5. Generalização.	C	_	_
	6. Exercícios de memorização.	C	P	_
	7. Prova ou exame.	C	_	_
	8. Avaliação.	C	_	_
IV	1. Apresentação situação problemática.	C	_	_
	2. Problemas ou questões.	C	P	A
	3. Respostas intuitivas ou suposições.	C	P	A
	4. Fontes de informação.	C	P	A
	5. Busca de informação.	P	C	A
	6. Elaboração de conclusões.	P	C	A
	7. Generalização.	C	_	_
	8. Exercícios de memorização.	P	C	_

	9. Prova ou exame. 10. Avaliação.	C C	_ P	_ A

Fonte: Zabala (1998, p. 60, adaptado).

Conforme propõe Zabala (1998), o número de etapas de uma SD depende dos objetivos definidos pelo professor para ensinar determinado conteúdo, como pode ser observado nos exemplos da tabela 5 e, por mais que se considerem alguns passos pré-estabelecidos, a SD ainda será incompleta. “De qualquer forma, segundo quais sejam nossos objetivos, nosso conhecimento dos processos subjacentes à aprendizagem e o contexto educativo em que se realizam, nos daremos conta de que são incompletas” (ZABALA, 1998, p. 59).

A SD I (sequência didática I) está organizada em 5 passos (comunicação da lição, estudo individual sobre o livro texto, repetição do conteúdo aprendido, prova ou exame, avaliação), em que os conteúdos abordados são, predominantemente, conceituais e a técnica de tratamento dessa sequência é expositiva. Nesse caso, o objetivo dos professores é que os estudantes “saibam” os conteúdos ensinados (que são conceituais).

Já na SD II, nota-se a presença de conteúdos procedimentais e conceituais. Procedimentais no que se refere à utilização de algoritmos e conceituais principalmente na apresentação do problema (1), exposição do conceito e o algoritmo (3) e na generalização (4), em que o professor apresenta e demonstra a função do modelo conceitual. Os conteúdos “são fundamentalmente procedimentais no que se refere ao uso do algoritmo e conceituais quanto à compreensão dos conceitos associados, neste caso os de fração, sintagma nominal ou velocidade” (ZABALA, 1998, p. 59). Essa sequência é organizada em 8 passos fundamentais, conforme pode ser observado na tabela 5.

Na SD III, objetiva-se que os estudantes conheçam determinados conteúdos, predominantemente, conceituais. Segundo Zabala (1998, p. 61), para “sua compreensão se utiliza uma série de técnicas e procedimentos – diálogo e debate, fundamentalmente”. Dos 8 passos fundamentais, todos têm abordagem de conteúdos conceituais, os procedimentais aparecem nas fases (2), (3) e (6), e os atitudinais aparecem na (2) e (3), quando os estudantes podem demonstrar interesse em participar das atividades de diálogo, debates, respeitando as opiniões dos demais colegas.

Zabala (1998) chama a atenção para a SD IV, porque nota-se a presença dos conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais em todas as atividades, em que os estudantes “encontram-se diante de uma série de conflitos pessoais e grupais de sociabilidade que é preciso resolver, o que implica que devem ir aprendendo a 'ser' de uma determinada maneira: tolerantes, cooperativos, respeitosos, rigorosos, etc." (ZABALA, 1998, p. 61).

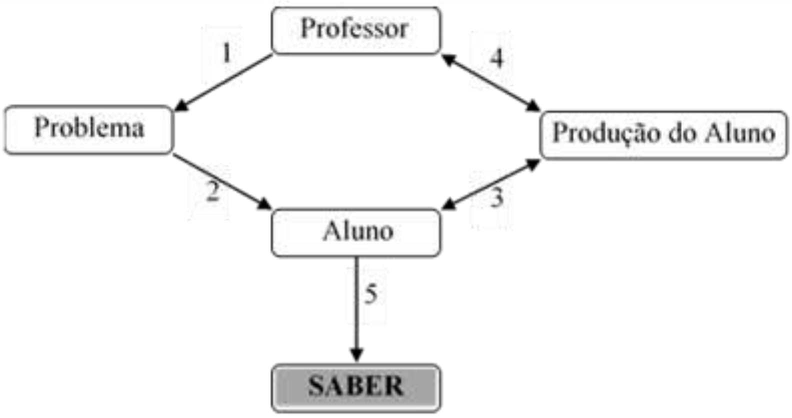
Nesses termos, a SD no modelo tradicional estaria organizada em quatro fases, de acordo com Zabala (1998, p. 54):

> a) Comunicação da lição.
> b) Estudo individual sobre o livro didático.
> c) Repetição do conteúdo aprendido (numa espécie de ficção de haver se apropriado dele e o ter compartilhado, embora não se esteja de acordo com ele), sem discussão nem ajuda recíproca.
> d) Julgamento ou sanção administrativa (nota) do professor ou da professora.

No entanto, o que determinará as fases de uma sequência didática serão os objetivos estabelecidos na abordagem do objeto em estudo.

Borges Neto *et al* (2013) organiza a SD em quatro etapas sequenciais e interdependentes: tomada de posição, maturação, solução e prova, em que o saber é construído por meio da relação professor-aluno-saber, conforme apresentado na figura seguinte.

Figura 7: Relação professor-aluno-saber na SD.



Fonte: SOUZA (2013, p. 19)

Nota-se que o processo de ensino é iniciado pelo professor com uma situação problema, sendo ele o responsável pela escolha do tema a ser desenvolvido com os estudantes. Se o educador tem o objetivo de ensinar o conceito de fração, ele escolherá uma situação problema que contemple esse tema **(1).** É importante considerar que os estudantes podem propor uma situação também. Ao observar a figura 8, percebe-se que o professor deverá apresentar aos estudantes o problema da aula **(2)**; essa exposição deve ser de forma clara e com linguagem acessível.

Depois de apresentado o problema, os estudantes deverão procurar possíveis soluções para a situação proposta ou produzir um modelo de resolução **(3);** encontrando a solução, o professor analisará as propostas com todos os estudantes **(4).** Observe que as setas **(3)** e **(4)** que ligam o termo “aluno” à “produção do aluno” e “produção do aluno” a “professor” estão nos dois sentidos. Isso sugere que a produção do estudante de determinado problema deve ser mediada pelo professor, a fim de que ocorra a formulação do saber **(5)**, em que o professor também aprende, tanto em relação ao objeto de ensino quanto ao processo de ensinar e aprender.

Na tomada de posição, o professor faz a apresentação de uma situação ou problema referente a um objeto matemático, de tal forma que seja generalizável, devendo ter relação com o conhecimento que deverá ser aprendido pelos estudantes. A abordagem do tema pode ser feita de diferentes maneiras (um jogo, texto, uma pergunta, material concreto, data show).

Souza (2013, p. 20) defende que antes “de apresentar o problema, o docente há de realizar um diagnóstico acerca dos pré-requisitos que os alunos necessitam ter ao saber que pretende ensinar”. Em outros termos, o professor deverá investigar, previamente, o conhecimento dos estudantes acerca daquilo que está se propondo a ensinar. Esse diagnóstico, segundo Souza (2013), deve ocorrer em dois momentos: no primeiro, o docente, ao realizar o planejamento de sua aula, deverá definir os conhecimentos necessários para o desenvolvimento e construção do novo saber; no segundo, investigará juntamente com os estudantes se eles detêm esses conceitos.

> Após o diagnóstico, o professor iniciará seu trabalho docente tendo consciência do nível de seus alunos e deverá planejar-se de acordo com essa realidade. Para começar sua proposta de ensino junto ao grupo, deverá fazer uma contextualização inicial acerca do problema a ser trabalhado, a fim de situar os alunos sobre o universo matemático que será explorado (SOUZA, 2013, p. 21).

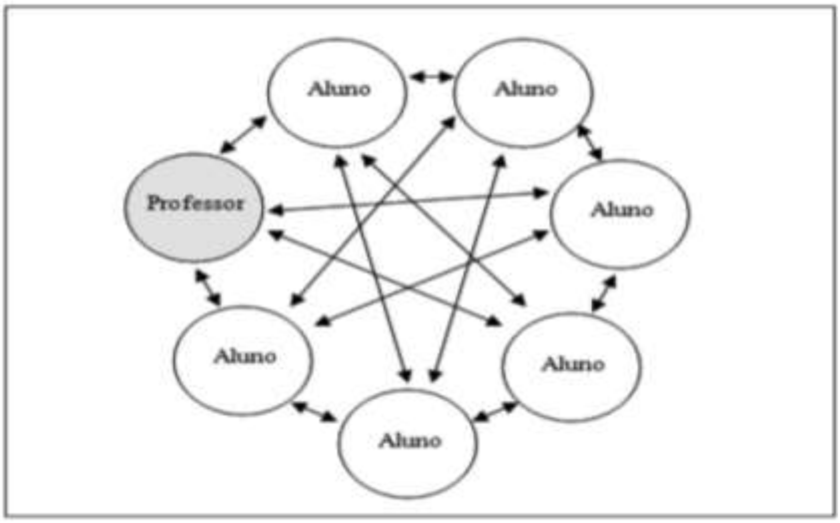
Esse diagnóstico preliminar é determinante para a organização e desenvolvimento da sequência didática em sala de aula. Isso favorecerá que o professor realize um planejamento que atenda às necessidades de aprendizagem dos estudantes, propondo atividades que estejam de acordo com a realidade vivenciada.

Quando assume o papel de mediador do saber, é importante que o professor estabeleça regras a fim de direcionar as atividades, que devem promover a interação professor-estudante(s). O professor “insere-se no grupo com as funções de refletir, ouvir, indagar e levantar hipóteses acerca deste conhecimento, bem como suscitar estes questionamentos entre os alunos” (SOUZA, 2013, p. 21).

Segundo a autora, a interação estabelecida entre educador e estudante torna-se um desafio quando os envolvidos não estão acostumados com abordagens metodológicas baseadas em questionamentos, debates, discussões, interações, que podem ser interpretados como uma perda de tempo. Isso pode ocorrer porque esses personagens do processo de ensino e aprendizagem não estão habituados a pensar, refletir, construir, mas reproduzir os saberes matemáticos. Nesse sentido, o “planejamento será uma condição *sine qua non* para que se consiga produzir os resultados esperados nas próximas etapas da Sequência” (SOUZA, 2013, p. 22).

A figura 8 mostra como ocorre a interação multilateral entre professor e estudante no desenvolvimento da sequência didática. Quando essa interação acontece no desenvolvimento da aula, todos os envolvidos passam a ter a mesma importância. Portanto, o conhecimento não estará centrado no professor, mas na sua construção.

Figura 8: Interação multilateral entre professor e alunos



Fonte: Souza (2013, p. 22).

Para Souza (2013, p. 22-23), “é tarefa do docente preparar o ambiente, conquistar, orientar e preparar os alunos”. Nesse contexto, a flexibilidade do planejamento do professor é importante para conduzir a sala e a aula.

Na segunda etapa, maturação, acontece a compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema. Nessa fase, há a necessidade de discussões entre professor e estudantes a respeito da situação proposta a fim de entendê-la. Os estudantes devem tentar resolver vislumbrando caminhos que levem à solução. Segundo Souza (2013), nesse momento de formulação de solução e entendimento do objeto matemático, a realização de questionamentos é fundamental para a compreensão do conteúdo.

> Destacamos que um dos momentos de grande relevância na formação do raciocínio matemático são os ***questionamentos,*** pois, além de promoverem o desenvolvimento

> intelectual dos alunos, proporcionam ao professor o *feedback* necessário para certificar se estes estão acompanhando-o no desenvolvimento dos conteúdos ensinados (SOUZA, 2013, p. 23).

Conforme argumenta Souza (2013), os questionamentos podem ser feitos tanto pelos professores quanto pelos estudantes. Normalmente as perguntas dos estudantes estão relacionadas ao processo de solução do problema, portanto, são questionamentos relacionados às suas dúvidas, reflexões e formulação de hipóteses. As perguntas do professor devem ser dos tipos: estimuladoras, esclarecedoras e orientadoras. Vejamos na figura 9, a seguir, como os questionamentos no ambiente de sala de aula podem acontecer.

Figura 9: Questionamentos em relação a situação-problema

Fonte: Souza (2013).

Note que os questionamentos do professor, que se coloca como mediador do conhecimento, são no sentido de levar o estudante à reflexão daquilo que está produzindo. Nesse sentido, os estudantes poderão questionar ao professor acerca de definições e como devem proceder para resolver o problema (dúvidas); o professor esclarecerá as dúvidas com outras perguntas, tais como: “o seu desenho ajudará você a chegar nos resultados?”, “por que você utilizou esse conceito?” (perguntas esclarecedoras), de modo que os leve à reflexão daquilo que produziram e os faça chegar às soluções.

Após os questionamentos do professor, os estudantes refletirão a respeito dos novos questionamentos levantados por ele. Para que isso ocorra, os educandos deverão ter elaborado algum tipo de solução para o problema e poderão fazer perguntas do tipo: “professor, a resposta está correta?”, “fiz assim, está correto?”. O professor, mais uma vez, não fornecerá a resposta do problema, mas realizará outros questionamentos de tal forma que leve os estudantes a refletir sobre aquilo que produziram (perguntas estimuladoras).

As perguntas estimuladoras têm o objetivo de instigar os estudantes a fazer novas descobertas e levá-los a uma determinada solução do problema. Assim poderão formular e verificar as hipóteses iniciais, que deverão ser levadas ao professor a fim de constatar se o caminho percorrido e as possíveis conclusões encontradas estão corretas. Nesse momento, podem surgir perguntas como: "professor, como faço para verificar se minha resposta está correta?"; "medi os lados e eram todos iguais e os ângulos mediram 90 graus. Então, está correta, não é?". E, mais uma vez, os professores auxiliarão os estudantes com outros tipos de perguntas (perguntas orientadoras), "aquelas que o professor leva o aluno a tentar estabelecer compreensões e relações entre o problema e o caminho a seguir para chegar à solução" (SOUZA, 2013, p. 27).

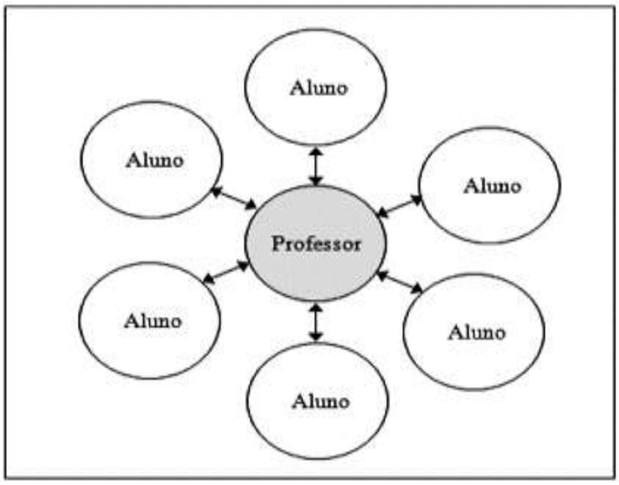
> O trabalho do aluno na fase da maturação é imprescindível para o desenvolvimento de seu raciocínio e da aprendizagem final. Sem essa participação, eles absorverão apenas informações temporárias e passageiras, tendo, consequentemente, uma aprendizagem superficial e volátil. Alguns professores consideram as discussões como perda de tempo e atraso no cumprimento de seus planos de aula (SOUZA, 2013, p. 28).

De fato, há necessidade de investimento de mais tempo para o desenvolvimento do conteúdo, considerando o nível de dificuldade de cada um deles. No entanto, o objetivo do professor não pode estar centrado somente na quantidade de conteúdo, mas, também, na qualidade e aprendizagem dos conceitos matemáticos.

A terceira etapa da SD é a solução, em que acontece a representação e organização de esquemas ou de modelos que têm a finalidade de resolver o problema. Nesse momento deve acontecer a apresentação, discussão, opiniões, das possíveis respostas para o problema, que poderá ser de maneira escrita, em linguagem natural, desenhos, gráficos. "Este é um importante momento para que os alunos exercitem a autonomia e percebam a importância de cada um na elaboração de sua aprendizagem" (SOUZA, 2013, p. 29).

Nessa etapa, o professor fará a mediação do conhecimento e das apresentações, conduzindo os estudantes a encontrar um modelo que melhor representa a solução do problema. Souza (2013) define esse momento como **interações bilaterais**, em que o professor assume que detém o conhecimento e tem a responsabilidade de conduzir os estudantes à construção do saber.

Figura 10: Interação bilateral professor-estudantes na discussão e análise das soluções



Fonte: Souza (2013).

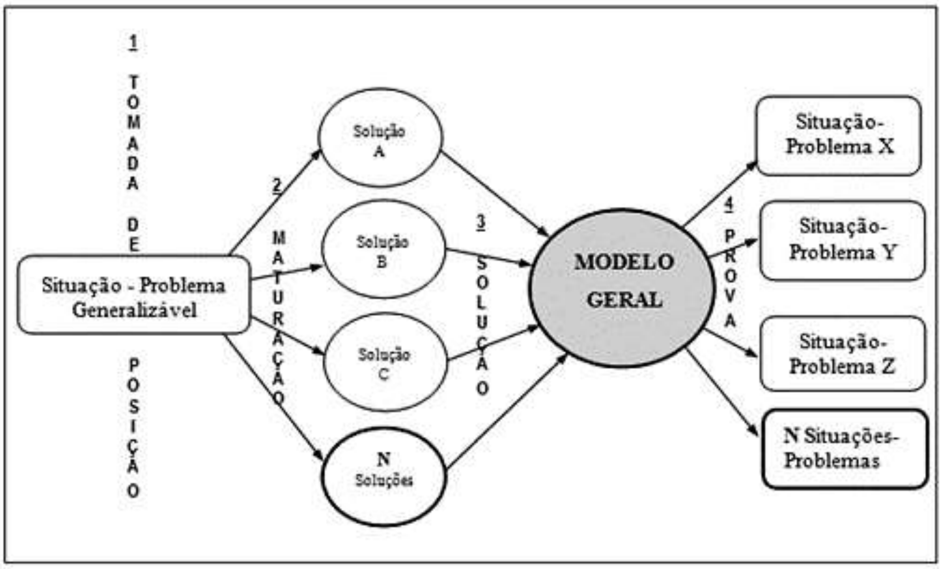
Nessa etapa, é importante que o professor tenha conhecimento e domínio dos conceitos matemáticos para que possa direcionar os estudantes em suas exposições. “Esta competência resulta da formação do professor desde os conhecimentos inicialmente adquiridos na educação básica, até os saberes consolidados na educação superior pela formação inicial e continuada” (SOUZA, 2013, p. 32).

A quarta etapa é a prova, na qual ocorrem a apresentação e a formalização do modelo matemático a ser ensinado. Nesse momento, o professor mostrará o conhecimento matemático aos estudantes, fazendo conexão com as possíveis soluções encontradas por eles. A didática do professor nessa fase é fundamental tanto para manter os educandos motivados na construção do conhecimento quanto para fazer conexão com as apresentações dos estudantes (terceira etapa) com o conhecimento matemático científico. Souza (2013, p. 33-34) explica:

> A Prova constitui finalização do processo, levando o aluno a elaborar o ***modelo geral*** do conhecimento em jogo. Podemos dizer que o modelo geral refere-se ao conceito final, representação genérica ou fórmula a ser apreendido pelo aluno, a qual será um objeto de conhecimento tanto para a resolução do problema em questão, como para sua aplicação na resolução de outras situações-problema.

A figura 11 mostra o desenvolvimento da sequência didática e como ela acontece desde a *Tomada de Posição* até a última etapa, a *Prova*:

Figura 11: Desenvolvimento da Sequência Fedathi



Fonte: Souza (2013).

Na quarta etapa, o professor deverá propor algum tipo de avaliação (exposições orais, atividades escritas, jogos, novas situações-problema) em que o objetivo é verificar se realmente houve a aprendizagem do conteúdo desenvolvido.

De acordo com Souza (2013), das quatro etapas apresentadas, o modelo tradicional de ensino centra-se em apenas duas delas: tomada de posição e prova, ou seja, não há possibilidade de o estudante propor possíveis soluções para o problema, tampouco tentar resolvê-lo. Considera-se somente uma situação, que é generalizada pelo professor, em que ele próprio propõe a prova. Essa postura, "além de sobrecarregar o professor antes, durante e depois das aulas, subtrai do aluno a possibilidade de participar e contribuir com o desenvolvimento de sua aprendizagem e dos alunos" (SOUZA, 2013, p. 37).

As duas possibilidades de realização de sequência didática aqui apresentadas coadunam com o que é proposto por Zabala (1998). Embora as sequências Fedathi e interativa apresentem determinados passos ou fases a serem seguidas em seu desenvolvimento, consideramos que se fazem necessárias determinadas adequações dependendo dos objetivos de ensino.

Ao admitir que uma SD pode ser estruturada de acordo com o objeto matemático e/ou objetivos de ensino, nos aproximamos do que é apresentada por Zabala (1998), quando argumenta que não é possível determinar um número exato de passos a serem seguidos, rigorosamente, para ensinar determinado conteúdo. Nesse sentido, caracterizamos SD como conjunto de atividades, compostas de tarefas, organizadas, estruturadas e ordenadas passo a passo sobre determinado conteúdo, em que tanto estudantes quanto professores conhecem os objetivos que devem ser alcançados, sendo que a qualquer momento de seu desenvolvimento o professor pode intervir nas atividades previamente elaboradas, sem perder de vista o objetivo programado.

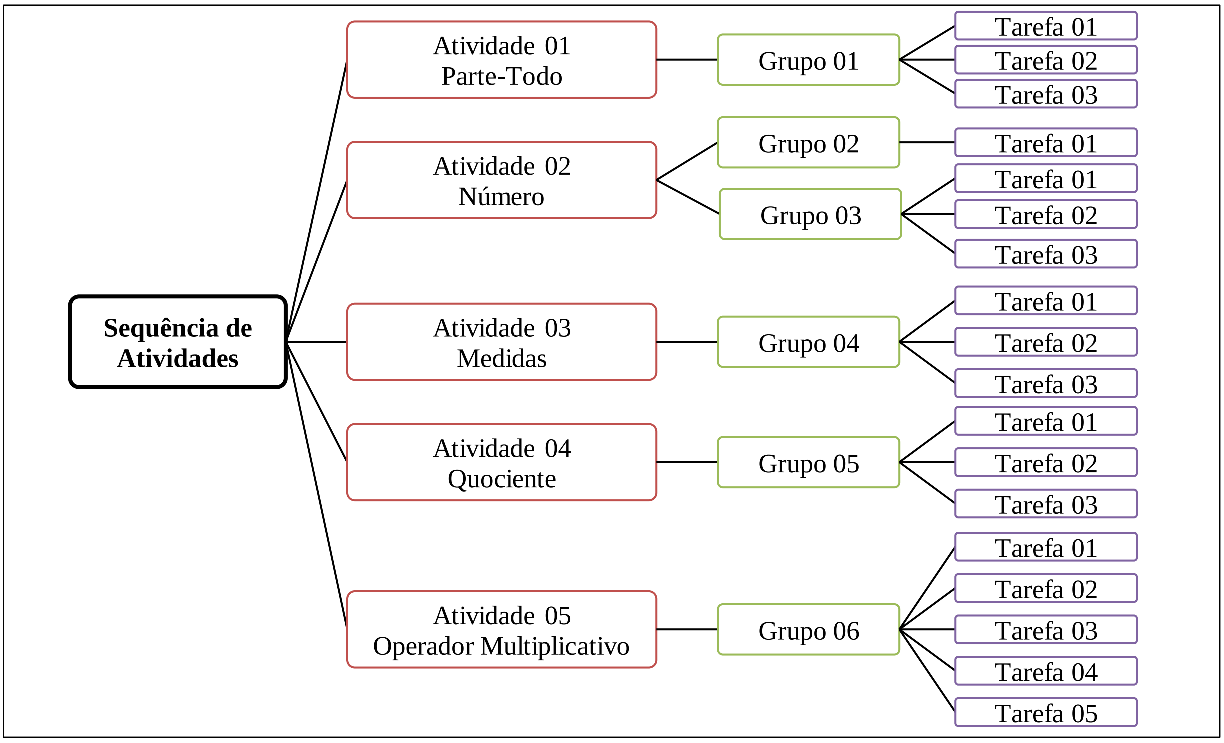
4 O DESLINDAR METODOLÓGICO

Nesta seção, apresentamos os encaminhamentos metodológicos, os procedimentos e os percursos que seguimos, os quais estão ancorados na Engenharia Didática.

Trata-se de uma pesquisa de abordagem qualitativa e exploratória, em que o seu desenvolvimento ocorre em duas fases: a primeira trata da revisão da literatura e elaboração do referencial teórico que constituiu a base de sustentação deste estudo; a segunda fase consiste no desenvolvimento de uma sequência de atividades que envolvem o conceito de fração, considerando os registros de representação semiótica, as características das quantidades e os diferentes significados de fração.

Desenvolvemos 5 atividades, subdivididas em 6 grupos, com os sujeitos participantes da pesquisa, ambas foram organizadas em tarefas, as quais consideram a utilização de distintos registros de representação semiótica, a equivalência entre frações, os diferentes significados de fração e a natureza das quantidades. Consideramos que as atividades desenvolvidas são suficientes para a obtenção dos resultados, uma vez que nosso objetivo está em verificar o modo como professores respondem essas atividades. As mesmas foram organizadas conforme o quadro seguinte.

Quadro 12: Estrutura global das atividades desenvolvidas



Fonte: Elaborado pelo autor

Participaram do presente estudo 88 professores que ensinam Matemática no 4º e 5º Ano do Ensino Fundamental, da Rede Municipal de Araguaína, TO. Esse número representa 89,7% dos professores que atuam no 4º e 5º Ano, sendo que a totalidade de profissionais que trabalham com essas turmas corresponde a 98 docentes.

4.1 Caracterizando a pesquisa

A abordagem de nossa pesquisa é qualitativa, em que adotamos estratégias de produção de dados e informações no *site* da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior (CAPES), leituras de livros e artigos, análise dos dados, bem como a utilização de questionários e desenvolvimento de sequência de atividade com os participantes, inspirados na Engenharia Didática.

Araújo (2009, p. 55) aponta:

> Na Pesquisa Qualitativa é necessário utilizar instrumentos e procedimentos específicos, que garantam uma descrição confiável e desejável de todos os passos da pesquisa. O delineamento, a coleta, a transcrição e análise dos dados fazem parte desse desenvolvimento. Uma forma de organizar esses elementos e delinear uma pesquisa qualitativa é o estudo de caso.

Nesse sentido, utilizamos dois instrumentos de coleta de dados (que são apresentados mais à frente), os quais têm como objetivo obter informações pessoais, profissionais, a relação dos participantes com a Matemática e com o processo de ensino e de aprendizagem de fração.

Silveira e Córdova (2009, p. 32) consideram:

> Na pesquisa qualitativa, o cientista é ao mesmo tempo o sujeito e o objeto de suas pesquisas. O desenvolvimento da pesquisa é imprevisível. O conhecimento do pesquisador é parcial e limitado. O objetivo da amostra é de produzir informações aprofundadas e ilustrativas: seja ela pequena ou grande, o que importa é que ela seja capaz de produzir novas informações.

Ainda segundo Silveira e Córdova (2009), na pesquisa qualitativa, o pesquisador não está preocupado em quantificar os aspectos da realidade, mas em compreender e explicar as dinâmicas relacionadas à sociedade. Suas características são:

> objetivação do fenômeno; hierarquização das ações de *descrever, compreender, explicar,* precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; observância das diferenças entre o mundo social e o mundo natural; respeito ao caráter interativo entre os objetivos buscados pelos investigadores, suas orientações teóricas e seus dados empíricos; busca de resultados os mais fidedignos possíveis; oposição ao pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências (SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009, p. 32).

Realizamos buscas teóricas com o objetivo de compreender o ensino e a aprendizagem do conceito de fração; esse movimento de investigação teórica faz parte de uma análise preliminar do objeto investigado; realizamos a descrição mais fidedigna possível de todos os passos da pesquisa, buscamos a compreensão da problemática relacionada à formação do professor que ensina Matemática nas séries iniciais no Ensino Fundamental e de seus conhecimentos sobre o conceito de fração considerando registros de representação semiótica, diferentes significados de fração e as características das quantidades (contínuas e discretas, intensivas e extensivas).

Segundo Prodanov e Freitas (2013, p. 70), "os dados coletados nessas pesquisas são descritivos, retratando o maior número possível de elementos existentes na realidade estudada. Preocupa-se muito mais com o processo do que com o produto".

As pesquisas com esse tipo de abordagem se preocupam mais com o processo de desenvolvimento da investigação; o interesse mais amplo não é com o produto mas com o processo. Tais aspectos, no entanto, "não eliminam a existência de um quadro teórico que direcione a coleta, a análise e a interpretação dos dados" (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 70).

Assim, buscamos compreender o fenômeno em sua totalidade e não focalizar somente em conceitos específicos, em que o pesquisador não exerce controle no contexto da pesquisa, mas busca compreender, descrever e analisar o contexto de maneira que atenda aos objetivos da investigação.

Trata-se de uma pesquisa de natureza básica que tem o objetivo de gerar novos conhecimentos "úteis para o avanço da Ciência, sem aplicação prática prevista. Envolve verdades e interesses universais" (SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009, p. 34; PRODANOV; FREITAS, 2013).

Em relação aos objetivos, trata-se de uma pesquisa exploratória, na qual buscamos maior familiaridade com o problema investigado a fim de torná-lo mais explícito, construindo hipóteses a respeito do objeto investigado (SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009). Segundo Gil (2002, p. 41), o planejamento nesse tipo de investigação é bastante flexível, pois consideram-se diferentes aspectos sobre o objeto em estudo; essas pesquisas envolvem "(a) levantamento bibliográfico; (b) entrevistas com pessoas que tiveram experiências práticas com o problema pesquisado; e (c) análise de exemplos que 'estimulem a compreensão'".

Em relação aos procedimentos, trata-se de uma pesquisa de campo. Marconi e Lakatos (2010, p. 169) afirmam:

> Pesquisa de campo é aquela utilizada com o objetivo de conseguir informações e/ou conhecimentos acerca de um problema, para o qual se procura uma resposta, ou de uma hipótese, que se queira comprovar, ou, ainda, de descobrir novos fenômenos ou as relações entre eles.

Prodanov e Freitas (2013, p. 59) salientam que a pesquisa de campo “consiste na observação de fatos e fenômenos tal como ocorrem espontaneamente, na coleta de dados a eles referentes e no registro de variáveis que presumimos relevantes, para analisá-los”. Segundo Silveira e Córdova (2009, p. 37), esse tipo de pesquisa se caracteriza pelas investigações, que podem ser bibliográficas e documentais, e a coleta de dados e informações é realizada “junto a pessoas, com o recurso de diferentes tipos de pesquisa (pesquisa *ex-post-facto*, pesquisa-ação, pesquisa participante, etc.)”.

Para Gil (2002), as pesquisas de campo são semelhantes às de levantamento, mas apresentam duas distinções importantes: na primeira há uma maior profundidade quanto ao objeto investigado, enquanto que na segunda há alcance mais amplo. Em outros termos, o estudo de campo “procura muito mais o aprofundamento das questões propostas do que a distribuição das características da população segundo determinadas variáveis” (GIL, 2002, p. 53).

A produção de dados e informações de nosso estudo foi realizada no primeiro encontro de um Curso de Formação Continuada para professores da Rede Municipal de Educação da cidade de Araguaína, TO. Fizemos uso de dois instrumentos: questionário (instrumento 01), composto por perguntas de caráter pessoal e profissional, cujo objetivo é delinear o perfil dos participantes da pesquisa e obter informações a respeito do conceito de fração; e uma sequência de atividades (instrumento 02) composta por tarefas, em que buscamos capturar o que os participantes conhecem sobre fração e verificar o modo como respondem às situações propostas.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 116), o questionário é “um dos instrumentos mais tradicionais de coleta de informações e consiste numa série de perguntas” dos tipos *fechadas*, *abertas* e *mistas*. As perguntas *fechadas* são aquelas que apresentam alternativas que o pesquisador pressupõe como possíveis respostas, portanto, não existe a possibilidade de se obterem respostas diferentes daquelas consideradas pelo pesquisador. As questões *abertas* não apresentam alternativas prontas, assim poderão surgir respostas que não foram imaginadas, podendo ou não existir na bibliografia estudada. Já nas *mistas* faz-se uso das outras duas.

Os instrumentos de coleta de dados são compostos por questões abertas, em que os participantes responderam tarefas que versam sobre os diferentes significados de fração – número, parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo (MERLINI, 2005) –, considerando os registros de representação semiótica (DUVAL, 2009), “registro simbólico-numérico (fração e decimal) ou algébrico, figural (considerando quantidades contínuas e discretas), língua natural" (SANTANA *et al*, 2013, p. 3), assim como as características das quantidades: contínuas e discretas, intensivas e extensivas (NUNES *et al*, 2005).

Quanto ao primeiro instrumento, buscou-se capturar informações como dados pessoais – nome, idade, sexo –; profissionais – formação (médio ou superior, especialização, mestrado ou doutorado), em que ano (série) o participante atua, tempo de atuação no Magistério e há quanto tempo ele/ela atua nos anos iniciais do Ensino Fundamental; relação do participante com a Matemática em seu curso superior (se teve disciplina de Matemática, quais delas davam atenção ao processo de ensino e aprendizagem, que conteúdos de Matemática estudou), relação com a Matemática, com o conteúdo de fração e como aprendeu fração.

Buscamos ainda compreender as convicções dos participantes a respeito da definição de fração, se eles têm dificuldades em ensinar esse conteúdo e como trabalham metodologicamente com as crianças. Solicitamos que os professores representassem de diferentes maneiras as frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{2}$, cujo objetivo é saber quais os registros de representação semiótica seriam mobilizados em suas respostas.

Questionamos aos participantes que quantidade de tempo, por semana, eles dedicam para ensinar Matemática nas turmas em que atuam e quais seriam as dificuldades das crianças em aprender o conceito de fração. O objetivo é compreender o papel que os participantes desempenham no processo de ensino e de aprendizagem de fração nos anos iniciais, bem como o papel dos estudantes nesses processos e o que os professores entendem por sequência didática.

A Sequência de Atividades (Instrumento 02) foi organizada em 05 tipos de atividades, sendo que cada uma delas é composta de tarefas contemplando cinco significados de fração (número, parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo). Os professores foram organizados em 06 grupos de modo que cada um resolvesse um conjunto de tarefas.

A Atividade 01 contempla o significado parte-todo e foi organizada em 03 tarefas, que foram respondidas pelo Grupo 01 de professores. As perguntas estão relacionadas a uma jarra contendo suco de laranja, a uma pizza dividida em partes iguais e à associação entre diferentes representações numéricas de fração.

A Atividade 02 está relacionada ao significado número e foram organizadas 04 tarefas, em que o objetivo da primeira era localizar algumas frações em uma reta numérica. As alternativas foram pensadas de maneira que algumas delas se referiam ao mesmo número e, portanto, à mesma localização na reta. Essa tarefa foi respondida pelo Grupo 02 de professores, e solicitava que os participantes explicassem como procederam para encontrar o resultado. As demais tarefas (03) foram resolvidas pelo Grupo 03, em que os participantes deveriam associar diferentes registros de representação semiótica, comparar números (maior que, menor que ou igual) e escrever frações equivalentes aos registros dados.

Já a Atividade 03 foi composta por três tarefas considerando o significado medida, e ficou sob a responsabilidade do Grupo 04. As tarefas contemplaram questões de probabilidade de determinado evento acontecer, de preparo de um suco em que foram usadas medidas de água e de polpa de fruta (quantidade contínua) e de uma fruteira com maçãs e laranjas (quantidade discreta), sendo que foram feitos questionamentos com o objetivo de saber a fração que representaria cada quantidade em relação ao todo, ao denominador e numerador, além de representações percentuais e decimais.

Os integrantes do Grupo 05 responderam à Atividade 04, que foi organizada em três tarefas, que eram compostas de perguntas relacionadas a (1) divisão de pizzas (quantidade contínua) para grupos de amigos, (2) ao preparo de um litro e meio de suco composto de 3 medidas de água e 2 de polpa de fruta (quantidade contínua e intensiva), e (3) a um litro de molho para tempero (quantidade contínua e intensiva) composto por 03 partes de vinagre e 01 parte de azeite de oliva. Em ambos os casos, pergunta-se qual a fração que representa cada uma das situações.

A Atividade 05, respondida pelo Grupo 06, foi composta por cinco tarefas contemplando o significado operador multiplicativo. As tarefas solicitaram que os participantes realizassem cálculos de multiplicação, e em alguns casos divisão, de uma fração por um número, de um número percentual por uma quantidade de pessoas (discreta e extensiva) e de uma fração por uma quantidade contínua.

Os procedimentos de sistematização e análise dos dados e informações se constituirão das análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*, que se constituem na Engenharia Didática.

4.2 Engenharia Didática

O desenvolvimento da presente pesquisa e da sequência de atividades foi inspirado nas fases da Engenharia Didática (ED), fundamentadas principalmente em Artigue (1996), com contribuições de Pais (2015), Oliveira (2013), Machado (1999) e Almouloud e Silva (2012).

A Engenharia Didática é tida como uma metodologia de pesquisa cuja finalidade é analisar situações didáticas no âmbito da didática da Matemática. Segundo Artigue (1996), a ED surgiu na década de 1980 como uma maneira de trabalho didático e é comparada ao trabalho de um engenheiro ao realizar um projeto arquitetônico, em que se faz necessário o conhecimento de outras ciências que podem influenciar em seu desenvolvimento.

A Engenharia Didática pode ser abordada de duas maneiras determinantes no desenvolvimento da didática da Matemática. A primeira busca entender as relações existentes entre investigações e as ações no sistema de ensino, enquanto que a segunda está em compreender o papel de realizações didáticas que convêm levar em sala de aula quanto às metodologias da investigação didática (ARTIGUE, 1996).

Machado (1999, p. 198) entende que "a noção de engenharia didática foi se construindo na Didática da Matemática com essa dupla função, na qual ela pode ser compreendida tanto como um produto resultante de uma análise *a priori*, caso da metodologia da pesquisa, quanto como uma produção para o ensino".

Chevallard (2009) apresenta de imediato dois tipos de engenharia: uma de investigação e outra de desenvolvimento. Segundo o autor, existe uma tensão entre dois pólos, designada como engenharia didática de uso e engenharia didática para o conhecimento. "Se eliminarmos o objetivo do conhecimento, nos deparamos com a engenharia didática com um objetivo 'prático', que às vezes tem apenas o nome da engenharia, e nem mesmo a intenção[23]" (CHEVALLARD, 2009b, p. 2; tradução nossa).

Almouloud e Silva (2012, p. 23), fundamentados em Chevallard (2009b), preconizam que

> a revisão da literatura permite identificar duas orientações, de um lado uma orientação de investigação em didática, em que se fala claramente da metodologia da engenharia didática, do outro uma orientação de desenvolvimento, que parece relativamente estranha à tradição estabelecida em didática da matemática.

Conforme aponta Chevallard (2009b), ao realizar uma pesquisa sobre engenharia educativa, é possível identificar duas direções: de um lado as orientações de pesquisa em didática, em que se desenvolve a metodologia da engenharia; por outro, "uma orientação desenvolvimentista, que parece ser relativamente alheia – e, ao mesmo tempo, derivada dela – à tradição estabelecida na didática da matemática" (CHEVALLARD, 2009b, p. 3).

A engenharia como metodologia está sendo usada diferentemente do que propõe Brousseau, inclusive por alguns pesquisadores da didática da Matemática. "Assim, a expressão

---

[23] On pourrait distinguer ici, d'emblée, une ingénierie didactique *de recherche* d'une ingénierie didactique *de développement*. On saisit en tout cas l'existence d'une tension entre deux pôles, que je désignerai, provisoirement, comme l'ingénierie didactique *pour l'usage* et l'ingénierie didactique *pour la connaissance*, tension bipolaire qui existerait donc […] Si l'on supprime la visée de connaissance, on tombe sur l'ingénierie didactique à visée « pratique », qui n'a parfois d'ingénierie que le nom, et pas même l'intention.

‘engenharia de formação’ está hoje presente no título de um número importante de másters de formação de adultos” (ALMOULOUD; SILVA, 2012, p. 24).

Pierre Pastré (2004 *apud* CHEVALLARD, 2009b, p. 8) escreve:

> A educação continuada tem por trás disso uma tradição de engenharia de treinamento que é quase tão longa quanto sua própria história. Analise uma solicitação, analise as necessidades, construa um dispositivo de treinamento, realize sua avaliação: tantas atividades de engenharia que são um pouco as letras da nobreza da formação profissional contínua. Pois se tem sido historicamente estabelecida como um campo de prática, é uma questão de práticas analisadas e fundamentadas, que ela própria inventou e codificou (tradução nossa).

Ainda segundo Pastré (2004, p. 465 *apud* CHEVALLARD, 2009b), a instituição de uma engenharia de treinamento, provavelmente algo específico da formação continuada do profissional, faz emergir a constituição de uma engenharia didática profissional, em que o objetivo é construir conteúdos e métodos para a formação de competências profissionais por meio da análise do trabalho. Conforme o autor, a necessidade de repensar o ato didático foi sendo adiada até a década de 1980. No entanto, “esta questão da engenharia didática profissional tornou-se a urgência de hoje” (PASTRÉ, 2004, p. 465 *apud* CHEVALLARD, 2009b).

Segundo Almouloud e Silva (2012, p. 25), Pastré (2004) denomina de

> ***engenharia de formação*** tudo o que trata da construção de dispositivos de formação, com a necessidade de articular objetivos, métodos e conteúdos; e ***engenharia didática profissional*** tudo o que diz respeito à produção de recursos educativos, utilizando ou não novas tecnologias, mas apoiando-se sobre situações de trabalho que servem de apoio à formação e ao desenvolvimento das competências profissionais.

Chevallard (2009b) afirma que, no contexto dessas definições, “os ‘sistemas’ e produtos que devem ser ‘concebidos e realizados’ normalmente não são para o benefício da pesquisa básica, [...] mas para usuários externos – se não estrangeiros – para o pequeno mundo da pesquisa[24]” (CHEVALLARD, 2009b, p. 10). Segundo Almouloud e Silva (2012), o autor argumenta que, por um lado, a engenharia didática está a serviço da investigação em didática; por outro, a investigação em didática está a serviço da engenharia didática. Em outros termos, “ela mesma a serviço de um desejo diversificado de desenvolvimento institucional[25]” (CHEVALLARD, 2009b, p. 10).

---

[24] les « systèmes » et produits qu’il s’agit de « concevoir et réaliser » le sont normalement, non au bénéfice de la recherche fondamentale, […] mais à l’intention d’utilisateurs extérieurs – sinon étrangers – au petit monde de la recherche (CHEVALLARD, 2009b, p. 10).

[25] elle-même au service d’une volonté diversifiée de développement institutionnel (CHEVALLARD, 2009b, p. 10).

Essa é a tensão “bipolar” que está relacionada à noção de engenharia didática. Segundo Almouloud e Silva (2012, p. 25-26), vivencia-se essa bipolarização dentro da área de didática da Matemática, em que

> a Engenharia Didática Clássica (amplamente conhecida), denominada Engenharia didática de 1ª Geração, e a Engenharia didática de 2ª geração, segundo o ponto de vista de Marie-Jeanne Perrin-Glorian (2009), bem como a noção de engenharia do PER (Percurso de Estudo e Pesquisa), de Chevallard (2009a e 2009b), e de Domínios de Experiência de Boero (2009).

A Engenharia Didática Clássica, ou de 1ª Geração, emergiu primeiramente com Yves Chevallard e Guy Brousseau em 1982, posteriormente por Michèle Artigue em 1989. “Ela foi apresentada como uma metodologia de pesquisa suscetível de fazer aparecer fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula” (ALMOULOUD; SILVA, 2012, p. 26), em que o termo “engenharia didática” é concebido para o trabalho didático comparável ao trabalho de um engenheiro.

Ao comparar a ED com o trabalho do engenheiro, compreendemos que em uma situação didática, ou o desenvolvimento de uma pesquisa, deve-se considerar a realização de um projeto/pesquisa em sentido amplo, que envolve “desde os desafios da criatividade inicial, por ocasião da gestão de suas primeiras ideias, até a sua execução prática, quase sempre, em uma sala de aula” (PAIS, 2015, p. 100).

A Engenharia Didática está associada a pesquisas com ações didáticas no âmbito da sala de aula, voltadas para a experimentação esquemática de sequência de atividades didáticas no ensino. Compreendendo-a como uma metodologia de pesquisa, ela “privilegia a *sequência didática* como esquema experimental para analisar as diferentes etapas do ensino” (OLIVEIRA, 2013, p. 133).

Assim, deve-se considerar dois níveis da ED, a *macroengenharia*, que compreende fatores externos à sala de aula, mas ligados ao processo de ensino e aprendizagem, e a *microengenharia*, que são aquelas pesquisas cujo objetivo é estudar um determinado assunto, que “são localizadas e levam em conta principalmente a complexidade dos fenômenos de sala de aula” (MACHADO, 1999, p. 199).

Compreendemos que este estudo está inserido no nível da *microengenharia* porque trata do estudo do conceito de fração (objeto de investigação), no qual se busca compreender os fatores ligados aos processos de ensino e de aprendizagem internos ao ambiente de sala de aula. Artigue (1996, p. 196) afirma:

> As investigações de micro-engenharia são as mais fáceis de iniciar mas, se permitem ter em conta, de forma local, a complexidade do fenómeno sala de aula, não permitem compor essa complexidade com a complexidade essencial dos fenómenos ligados à duração nas relações ensino/aprendizagem.

Segundo Artigue (1996), a Engenharia Didática está organizada em quatro fases: fase 01 – análises prévias ou preliminares; fase 02 – concepção e análise *a priori* das situações didáticas da engenharia; fase 03 – experimentação; e fase 04 – análise *a posteriori* e validação.

Nas *análises prévias ou preliminares*, acontece a conceitualização do quadro teórico da pesquisa, em que se busca analisar, epistemologicamente, o conteúdo objeto de estudo, os efeitos de um ensino habitual, as concepções dos estudantes, suas dificuldades e os obstáculos que impedem a evolução da aprendizagem. Em nossa investigação, essa fase se constitui de todo o aparato teórico que a fundamenta, no qual tecemos algumas concepções sobre o ensino e a aprendizagem de fração, os registros de representação semiótica, diferentes significados de fração e características das quantidades.

> As análises preliminares são feitas principalmente para embasar a concepção da engenharia, porém elas são retomadas e aprofundadas durante todo o transcorrer do trabalho. É evidente que cada uma delas acontecerá ou não dependendo do objetivo da pesquisa, e é esse objetivo também que determinará o grau de profundidade dessas análises (MACHADO, 1999, p. 201-202).

Na primeira fase, as análises estão relacionadas com a fundamentação teórica existente da investigação que se pretende realizar, e “perpassa por outros conceitos que possam interagir no desenho epistemológico” (OLIVEIRA, 2013, p. 134). Assim, a primeira fase “está estruturada em torno da análise do funcionamento do ensino habitual, considerado como o estado de equilíbrio do funcionamento de um sistema, um equilíbrio que, durante muito tempo, foi estável, mas cuja obsolescência começa a fazer-se sentir” (ARTIGUE, 1996, p. 199).

A segunda fase constitui-se das *concepções* e *análise a priori*, a qual é composta de uma parte descritiva e uma parte preditiva. Para Artigue (1996, p. 205), essa fase tem como objetivo

> determinar de que forma permitem as escolhas efectuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso, fundamenta-se em hipóteses; será a validação dessas hipóteses que estará, em princípio, indirectamente em jogo no confronto, operado na quarta fase, entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

Busca-se nessa fase descrever as opções feitas relacionadas às escolhas globais e estabelecer variáveis de comando “que estão relacionadas com a *macrodidática, compreendendo a organização geral e/ou planejamento globais da Engenharia Didática* e a *microdidática”,* que está relacionada ao conteúdo objeto de investigação, na qual se realiza o planejamento das fases da sequência didática (OLIVEIRA, 2013, p. 135).

É nessa fase, também, que se analisam os desafios dos estudantes em cada uma das situações didáticas no que diz respeito às possibilidades de ação, escolhas, decisões, controle e validação, prevendo possíveis comportamentos, dificuldades e facilidades na resolução das atividades propostas (MACHADO, 1999). Nota-se que nessa fase do desenvolvimento da pesquisa não há "interferência" do professor na aprendizagem dos estudantes, os quais tornam-se os atores principais.

Em síntese, Almouloud e Silva (2012, p. 27) preconizam que na análise *a priori* devem ser levados em consideração:

> - Descrever as escolhas feitas no nível local (relacionando-as eventualmente com as seleções globais) e as características da situação didática desenvolvida;
> - Analisar o que poderia estar em jogo nesta situação para o aluno, em função das possibilidades de ação, decisão, controle e validação que o aluno terá durante a experimentação;
> - Prever campos de comportamentos possíveis e tentar demostrar como a análise permite controlar seus significados e assegurar, particularmente, que se tais comportamentos esperados ocorreram, é por consequência do desenvolvimento visado pela aprendizagem.

A terceira fase da Engenharia Didática é a *experimentação*, em que ocorre o desenvolvimento da sequência didática com os participantes do estudo. As atividades que farão parte da SD devem estar estreitamente relacionadas com as variáveis priorizadas na segunda fase. Para Almouloud e Silva (2012, p. 27), tem-se "como pressupostos apresentar os objetivos e condições da realização da pesquisa, estabelecer o contrato didático e registrar as observações feitas durante a experimentação".

Nesse momento, há intensa participação do professor/pesquisador e dos estudantes durante o desenvolvimento, em que o pesquisador deverá fazer o maior número possível de registros por meio de observações de todas as aulas que compõem a SD sobre o conteúdo e o processo de ensino e aprendizagem. Essas informações serão necessárias para a fase seguinte da Engenharia Didática, para validar ou não a ED.

Para Machado (1999), a experimentação é o momento em que a engenharia é realizada com alguma população (estudantes, professores, entre outros), em que há o contato entre pesquisador/professor/observador com os participantes da pesquisa, que são professores-objeto de investigação. Para a autora, essa fase supõe:

> - a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;
> - o estabelecimento do contrato didático;
> - a aplicação dos instrumentos de pesquisa;
> - os registros das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc.) (MACHADO, 1999, p. 206).

Segundo Machado (1999), nessa fase devem-se respeitar as escolhas, tempo de duração dos encontros, escolhas e deliberações que foram realizadas nas análises *a priori*, a fim de evitar insucesso da engenharia. Para a autora, ao prever a realização de uma sessão em 60 minutos, há, necessariamente, que desenvolver no tempo previsto. Caso contrário, o pesquisador encontrará dificuldades em confrontar os dados da análise *a priori* embasados em um tempo x, com as análises *a posteriori* baseadas em um tempo y.

A última fase da Engenharia Didática é a análise *a posteriori* e *validação*. Essa fase da pesquisa é inteiramente voltada para a análise das observações, dos registros feitos, de todos dos dados e informações obtidos nas fases anteriores, portanto, “ela se apoia no conjunto dos dados recolhidos quando da experimentação: observações realizadas nas sessões de ensino, mas também produções dos alunos na sala de aula ou fora dela” (ARTIGUE, 1996, p. 208).

Machado (1999) preconiza que as fases de experimentação (03) e análises *a posteriori* e validação (04) não são excludentes entre si, mas complementares no sentido de que poderá ser necessária a implementação de novos instrumentos de coleta de dados (questionários, entrevistas individuais ou em grupos) tanto durante a experimentação quanto no final dela, com o objetivo de melhor compreender o processo.

Na fase quatro, ocorre a confrontação dos dados e informações obtidos nas análises *a priori* com os das análises *a posteriori*, validando ou refutando as hipóteses levantadas no início da engenharia. Oliveira (2013, p. 135) entende que é nesse momento que se deve fazer o relatório final dos resultados, sendo “necessário fazer um confronto entre as expectativas iniciais, a análise *a priori*, a experimentação e a análise da construção didática”, em que se validam ou não as hipóteses iniciais.

Pais (2015) entende que, do ponto de vista metodológico, deve-se na validação garantir a essência do caráter científico da pesquisa. Assim, “a engenharia didática se fundamenta em registros de estudos de casos, cuja validade é interna, circunscrita ao contexto da experiência realizada” (PAIS, 2015, p. 103).

A engenharia didática está na interface entre pesquisa e ensino regular. As primeiras engenharias no ensino da Matemática foram realizadas no primário, “sendo que a elaboração das sequências de ensino foi feita nos anos 70, uma época em que o referencial teórico utilizado não era explicitado, e foi essa elaboração [...] que contribuiu para a explicitação dos quadros teóricos” (ALMOULOUD; SILVA, 2012, p. 27).

Assim, as engenharias tinham o objetivo de elaborar e estudar proposta de transposição didática para o ensino, sendo a transposição didática o objetivo principal da pesquisa, ao mesmo tempo em que se enriqueciam e se ampliavam quadros teóricos por meio do estudo de outros fenômenos didáticos mais gerais (ALMOULOUD; SILVA, 2012).

Almouloud e Silva (2012, p. 28), fazendo referência a Perrin-Glorian (2009), escreve:

> O que era estudado, segundo a autora, do ponto de vista adidático, eram as situações, sem estudar o papel do professor, mesmo sabendo que ele é incontornável na devolução, na institucionalização ou na efetivação da dialética ferramenta objeto. As situações foram elaboradas por professores experientes, muito competentes e interessados pela pesquisa, sendo que depois desta fase de pesquisas, as engenharias didáticas tornaram-se especificamente metodologias de pesquisa, sobretudo após a síntese de Michèle Artigue (1998).

Nesses termos, a ED contempla algumas características de uma pesquisa-ação, uma vez que o pesquisador descreve e analisa resultados provenientes do desenvolvimento de situações didáticas em sala de aula, considerando determinado conceito ou conteúdo.

A Engenharia Didática de 2ª Geração tem como objetivo o desenvolvimento de recursos e/ou objetivos de aprendizagem voltados tanto para o ensino regular quanto para a formação de professores. Segundo Almouloud e Silva (2012), é possível distinguir dois tipos de engenharia didática, levando-se em consideração a pergunta inicial de uma investigação: Engenharia Didática de Investigação (IDR) e Engenharia Didática de Desenvolvimento (IDD).

> Na IDR procura-se fazer emergir fenômenos didáticos e estudá-los, com a intenção de um avanço nos resultados da investigação, por meio de experimentações montadas em função da questão de pesquisa, sem preocupação imediata de uma eventual divulgação mais ampla das situações utilizadas. Por outro lado, na IDD, o objetivo é a produção de recursos para professores ou para a formação de professores (ALMOULOUD; SILVA, 2012, p. 28).

Almouloud e Silva (2012) enfatizam que os conhecimentos dos estudantes são controlados em ambos os casos, mas que essa é uma variável por vezes fixada na IDR; já no caso da IDD faz-se necessário antecipar adequações das situações didáticas e os meios para conduzi-las. No caso da IDR, o papel do professor é controlado pela teoria, enquanto que na IDD as decisões devem ser mais flexíveis.

> No caso da IDR, se o objetivo é estudar as situações e as potencialidades do meio para fazer evoluir os conhecimentos dos alunos, o professor ocupa o lugar de professor e de investigador, porém, suas ações, enquanto investigador, devem ser transparentes. Já no caso da IDD, o professor não faz parte da investigação, ele tem a inteira responsabilidade pelo ensino na sua classe (ALMOULOUD; SILVA, 2012, p. 28-29).

Em síntese, a engenharia didática de primeira geração procura determinar dispositivos de ensino que sejam ao mesmo tempo de fácil comunicação e reprodutíveis e apresenta características de uma pesquisa-ação (em que o pesquisador descreve e analisa resultados oriundos da aplicação de situações em sala de aula). A engenharia didática de segunda geração tem o objetivo de produzir materiais e/ou recursos que devem ser usados pelo professor no desenvolvimento de sua aula, na formação inicial ou continuada, “fazendo com que os professores aprendam a matemática, ou a matemática para ensinar matemática" (ALMOULOUD; SILVA, 2012, p. 46).

Almouloud e Silva (2012) apresentam algumas características dos dois tipos de engenharia, que podem ser observadas no quadro 11.

Quadro 13: Objetivos e aspectos centrais das engenharias de 1ª e 2ª geração

	Objetivo(s)	**Aspectos centrais**
ED 1ª geraç ̃	Elaborar e estudar propostas de transposição didática para o ensino.	Metodologia de pesquisa e produto
ED 2ª geração	Determinar os princípios que comandam a engenharia que se quer transformar em recurso para o ensino regular, e estudar as condições de sua divulgação.	Três funções não independentes: a investigação, o desenvolvimento e a formação de professores por meio da análise. Necessita de vários níveis de construção.

Fonte: Almouloud e Silva (2012, p. 46).

De acordo com Almouloud e Silva (2012), as engenharias didáticas de 1ª e 2ª geração são denominadas de Engenharia Didática de Investigação (IDR) e Engenharia Didática de Desenvolvimento (IDD), respectivamente. No quadro a seguir, descrevemos algumas de suas principais características.

Quadro 14: Comparando IDR e IDD

Engenharias Didáticas de 1ª e 2ª geração	
IDR	**IDD**
❖ Faz emergir fenômenos didáticos para estudá-los; ❖ Visa um avanço no resultado de investigação, fazendo uso de experimentações montadas em função da questão de pesquisa; ❖ Não há a preocupação imediata em divulgar as situações utilizadas.	❖ Produzir recurso(s) para professores ou para a formação de professores; ❖ Liberdade de ação para o professor; ❖ A investigação continua a ser essencial, mas as questões de investigação não são motivadas, em primeiro lugar, pela ampliação dos quadros teóricos; ❖ Baseia-se na engenharia de 1ª geração.

Fonte: Almouloud e Silva (2012, p. 46).

Para Chevallard (2009b *apud* ALMOULOUD; SILVA, 2012), a engenharia didática para investigação é considerada uma engenharia didática para uso, enquanto que a engenharia didática de desenvolvimento como uma engenharia didática para o conhecimento.

Considerando a engenharia didática como uma metodologia de investigação, Artigue (1996) a caracteriza, primeiramente, como um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, "isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino" (ARTIGUE, 1996, p. 196). Nesse sentido, ciência e técnica se apresentam articuladas, sendo que a engenharia didática admite um elo permanente entre esses dois saberes, promovendo a aproximação entre academia e práticas escolares.

4.3 Os instrumentos de produção de dados

O encaminhamento metodológico para o desenvolvimento das atividades constantes nos instrumentos 01 e 02 consistiu em distribuir material fotocopiado aos professores que poderiam responder ou não as atividades propostas. Os participantes foram informados que os mestrandos Marcos José Pereira Barros, Adílio Jorge Sabino e Leticia Silva Cardoso e o professor Dr. Idemar Vizolli ministrariam um Curso de Formação Continuada de Matemática sobre fração, resultado de uma parceria entre o Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da Universidade Federal do Tocantins (UFT) e a Secretaria Municipal de Educação de Araguaína (SEMED).

Na ocasião do desenvolvimento do curso, os mestrandos realizariam observações e anotações para compor as análises de suas pesquisas, que resultariam em dissertações. Todos os professores que estavam presentes nesse encontro foram convidados a participar das investigações, deixando claro que, caso recusassem, não seriam prejudicados na formação continuada.

4.3.1 Sequência de Atividades

A Sequência de Atividades foi organizada a partir dos cinco significados de fração (relação parte-todo, número, medidas, quociente e operador multiplicativo), com o objetivo de verificar o modo como os professores resolveriam as tarefas considerando os significados de fração, as características das quantidades e os registros de representação semiótica. A técnica de obtenção dos dados foi por meio do desenvolvimento de atividades impressas, entregues aos participantes a fim de resolverem, individualmente, as tarefas.

Os participantes foram organizados em quatro salas de aula, não havendo critério específico para essa organização. À medida que iam chegando à escola (disponibilizada pela SEMED), foram sendo direcionados para uma das salas, de modo que não ficassem superlotadas.

Após estarem organizados nas salas de aula, distribuímos atividades para cada um dos participantes, as quais estavam organizadas em 6 grupos:

a) Atividade 01: Relação Parte-Todo – Grupo 01.

b) Atividade 02: Número – Grupos 02 e 03.

c) Atividade 03: Medidas – Grupo 04.

d) Atividade 04: Quociente – Grupo 05.

e) Atividade 05: Operador Multiplicativo – Grupo 06.

Os professores foram organizados em filas; cada um deles recebeu lápis, borracha, canetas, régua, além das atividades. A distribuição das atividades obedeceu ao seguinte critério: primeiramente, organizamos as atividades em 6 grupos; escolhemos uma fila lateral para iniciar a distribuição das atividades; quando os professores estavam organizados em suas respectivas filas, começamos a entregar as tarefas da seguinte maneira:

a) Atividade 01 Grupo 01, para o primeiro participante.
b) Atividade 02 Grupo 02, para o segundo participante.
c) Atividade 02 Grupo 03, para o terceiro participante.
d) Atividade 03 Grupo 04, para o quarto participante.
e) Atividade 04 Grupo 05, para o quinto participante.

Seguimos essa ordem até entregar a atividade para o último professor da primeira fileira. Após todos da fila 01 terem recebido, continuamos a distribuição iniciando com o primeiro participante da segunda fileira, do mesmo modo na terceira, quarta, até chegar no último participante da última fileira. O esquema a seguir, apresentado na figura 12, mostra o modo utilizado para a distribuição das atividades aos professores.

Figura 12: Esquema de distribuição das atividades

Fonte: Nova Escola.[26]

[26] ANNUNCIATO, Pedro; SAMIS, Laís. Qual é a melhor forma de organizar as carteiras na sala de aula? 2018. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/11093/qual-e-a-melhor-forma-de-organizar-as-carteiras-na-sala-de-aula>. Acesso em: 25 jul 2018.

A seguir apresentamos as atividades desenvolvidas com os participantes, descrevendo seus objetivos, suas características e uma análise *a priori* de todas as tarefas. Nessa análise, detalhamos o modo como esperávamos que os participantes fizessem a resolução de cada uma das atividades. Todas as atividades foram desenvolvidas com os professores no início da proposta do Curso de Formação Continuada, oportunidade em que os dados e as informações foram produzidos. Estes serão confrontados com as análises realizadas *a priori,* considerando os registros de representação semiótica, as características das quantidades e os significados de fração.

4.3.1.1 Atividade 01: Relação Parte-Todo – Grupo 01

Objetivos: Essa atividade é composta por três tarefas constituídas de questões que tratam de situações que envolvem fração na relação parte-todo (MERLINI, 2005; SILVA, 2007), com quantidade contínua (NUNES *et al*, 2005). Ela tem como objetivo verificar:

a) o modo como os professores resolvem atividades de fração que envolvem a relação parte-todo;

b) se os professores resolvem atividades de fração em que se faz uso de diferentes registros da representação semiótica;

c) se os professores reconhecem fração em diferentes registros de representação semiótica.

Tarefa 01: Considere uma jarra de suco de laranja com um litro.

a) Faça um desenho para representar a jarra cheia.
b) Faça um desenho para representar a jarra com um quarto.
c) Escreva na forma de fração quanto representa a metade da jarra de suco de laranja.
d) 750 ml representa que fração da quantidade de suco da jarra?
e) 25% corresponde a que fração da jarra de suco de laranja?
f) $\frac{1}{8}$ corresponde a que quantidade de suco de laranja?
g) 0,2 corresponde a que fração da jarra de suco?

Caracterização e análise: Essa tarefa apresenta algumas questões em que se combinam registros de representação semiótica numéricos (percentual, fracionário e decimal) com registros de língua natural e outras foram apresentados em linguagem natural (DUVAL, 2009). A tarefa como um todo remete ao trabalho com quantidades contínuas e extensivas

(NUNES *et al*, 2005). Para responder cada uma das questões da tarefa, os professores deveriam fazer uso de desenhos, ou registros da representação semiótica fracionários, decimais ou percentuais.

Espera-se que para responder à questão “a” os participantes não encontrem dificuldades, visto que se trata da elaboração de um desenho que represente a jarra cheia de suco de laranja. Todavia, ao compararem o enunciado da tarefa com a questão “a” poderão desenhar uma jarra que tenha capacidade maior que um litro e referenciar a quantidade indicada, mesmo que o enunciado indique a capacidade da jarra (litro = 1000 ml).

Na questão “b”, os participantes poderão fazer uso do desenho feito anteriormente (questão “a”) e dividi-lo em quatro partes e dessas destacar (pintar) apenas uma delas para representar $\frac{1}{4}$ da jarra de suco de laranja. Todavia, espera-se que os participantes façam um novo desenho e destaquem apenas uma da quantidade total das partes (04).

Para responder à questão “c”, novamente os participantes podem lançar mão da representação em desenho (DUVAL, 2009) de uma jarra de suco, dividindo-a em duas partes iguais. Dessa forma, tomarão uma dessas partes e estabelecerão relação com a quantidade total das partes (02). Poderão representar a metade da jarra de suco de laranja por $\frac{1}{2}$. Provavelmente representarão por 0,5 ou 50%. Todavia, espera-se que os participantes não encontrem dificuldades para responder essa questão.

Em relação à questão “d”, os participantes poderão encontrar dificuldades para responder ao que é solicitado. O problema nessa questão reside na conversão (DUVAL, 2009) de medidas (750 ml para fração). Para responder essa questão, eles podem transformar 1 litro em mililitros ($1l = 1000ml$) e perceber que a quantidade indicada (750 *ml*) é múltipla de 250, assim como 1000 *ml* também o é, podem efetuar a divisão ($1000 \div 4 = 250$) e perceber que cada parte corresponde a $250\ ml$, e que $750\ ml$ corresponde a três (03) partes do total. Portanto, indicarão que a fração que corresponde aos $750\ ml$ é $\frac{3}{4}$.

Na questão “e”, os sujeitos podem lançar mão da transformação de medidas, visto que se faz uso do registro de representação semiótica percentual e pede-se o registro de representação na forma de fração. Para resolver essa questão, os participantes poderão calcular 25% de um litro do suco de laranja. Para isso, transformarão $1l = 1000\ ml$, calcularão a porcentagem de maneira particionada (10%, 10% e 5%) e encontrarão os resultados ($100\ ml, 100\ ml$ e $50\ ml$), que somados correspondem a $250\ ml$. Assim, perceberão que se trata de uma (01) parte da quantidade total das partes (04) (questão “d”) e responderão que 25% corresponde à fração $\frac{1}{4}$.

Poderão ainda converter a representação percentual para fracionária $\left(25\% = \frac{25}{100}\right)$ e via simplificação de fração chegar à resposta $\left(\frac{25}{100} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}\right)$. Podem também perceber que o registro de representação semiótica 25% é resultado da divisão $(100 \div 4 = 25)$ e que corresponde a uma parte da quantidade total (04), obtendo como resultado a fração $\frac{1}{4}$.

Para responder à questão “f”, os participantes devem entender que a quantidade total das partes é $8\,(\text{todo})$, e questiona-se a quantidade de suco que representa uma dessas partes. Assim, poderão considerar o “todo” como $1000\ ml = 1l$, dividi-lo em 8 partes $(1000 \div 8 = 125)$ e perceber que ela corresponde a $\frac{1}{8}$ da quantidade de suco de laranja que é $(125\ ml)$. Talvez os participantes tenham dificuldade em perceber a relação entre as quantidades totais $(1000\ \text{e}\ 8)$.

Em relação à questão “g”, os participantes poderão encontrar dificuldades na resolução, isso porque deverão fazer a conversão (DUVAL, 2009) de decimal para fracionário $0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Na resolução, os participantes poderão tomar a representação 0,2 e somá-la reiteradas vezes até obter a quantidade total $(1l)$, ou seja, $(0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}2 = 1)$ e perceberem que a quantidade representa corresponde a quinta parte de um litro e, portanto, representar por meio da fração $\frac{1}{5}$.

Tarefa 02: Uma pizza circular foi dividida em oito partes iguais.

a) Uma pessoa comeu 25% da pizza. Que fração da pizza ela comeu?
b) Uma pessoa comeu três pedaços da pizza. Que fração da pizza ela comeu?
c) Uma pessoa comeu 0,125 da pizza. Qual a fração correspondente?
d) Faça um desenho que represente $\frac{1}{8}$ da pizza.
e) Sobrou pizza? (   ) Sim (   ) Não. Se sim, que percentual? ..... Que fração? ......

Caracterização e análise: Essa tarefa é constituída de 05 (cinco) questões em que também se combinaram registros de representação semiótica (DUVAL, 2009) numéricos (percentual, fracionária e decimal) que remetem a quantidades contínuas e extensivas (NUNES *et al*, 2005), cujas respostas requerem registros da forma de fração, percentual e desenho.

A tarefa 02 apresenta uma situação em que se considera uma pizza no formato circular e que foi dividida em 8 partes iguais, dessa forma, os participantes deverão compreender que a quantidade total das partes é 8. Para resolver a questão “a”, deverão ter conhecimento da equivalência de fração. Nesse sentido, podem perceber que a quantidade total das partes (08) corresponde à pizza inteira e, portanto, representa a totalidade (100%). Assim, na resolução, os participantes podem efetuar a conversão (DUVAL, 2009) de percentual para fracionário e chegar à conclusão que $\left(25\% = \frac{25}{100} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}\right)$ e, uma vez que a pizza foi dividida em 8 pedaços, via equivalência fracionária, reconhecer que $\left(\frac{1}{4} = \frac{2}{8}\right)$, e perceber que a pessoa que comeu 25% da pizza, na verdade comeu 1 pedaço a cada quatro e, como são 8 pedaços entenderão que a fração que se pede é $\left(\frac{2}{8}\right)$.

Os participantes podem ainda efetuar cálculos para encontrar 25% de 8 pedaços, o que pode ser resolvido da seguinte maneira $[(25\,.\,8): 100] = [200 : 100] = 2$, reconhecendo assim que uma pessoa comeu 2 de 8 pedaços, portanto $\frac{2}{8}$.

Certamente, os participantes terão dificuldades de efetuar a conversão (DUVAL, 2009), assim como de estabelecer a relação de equivalência fracionária. Provavelmente lançarão mão do cálculo de 25% de 8 pedaços.

Em relação à questão “b”, espera-se que os participantes não encontrem dificuldades para resolver, isso porque se pede a fração que representa a quantidade de pedaços de pizza que se comeu (03) em relação à quantidade total das partes (08). Portanto, entenderão que se trata da relação parte-todo (MERLINI, 2005; SILVA, 2007) e assim obterão o resultado $\left(\frac{3}{8}\right)$.

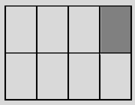
Os participantes poderão encontrar dificuldades para resolver a questão “c”, isso porque deverão usar da conversão (DUVAL, 2009) entre registros de representação semiótica, de número decimal para fracionário $\left(0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{25}{200} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}\right)$. Eles podem também converter o número decimal em percentual $(0{,}125 = 12{,}5\%)$ e perceber que se trata da metade daquilo que se pede na questão “a”, obtendo a fração correspondente $\left(\frac{1}{8}\right)$. Aqui a conversão pode não ser algo trivial para os participantes, especialmente porque no processo de formação dificilmente se estabelece relação entre fração, decimal e porcentagem.

Na questão “d”, solicita-se a representação de $\frac{1}{8}$ da pizza na forma de desenho. Espera-se que os participantes não encontrem dificuldades, mesmo porque poderão fazer o desenho circular da pizza, dividi-la em 8 partes iguais e destas destacar apenas uma parte (01 pedaço de pizza). Essa é uma forma de representação bastante presente em livros didáticos e, também, muito utilizada no processo de ensino e aprendizagem de fração.

A questão “e” da tarefa 02 pergunta se sobrou pizza e, em caso afirmativo, solicita-se a resposta em registro de representação semiótica numérico (percentual e fracionária). Para resolver a questão, os participantes necessitarão dos resultados obtidos nas questões anteriores $\frac{2}{8}$ (questão “a”); $\frac{3}{8}$ (questão “b”); $\frac{1}{8}$ (questão “c”) e, dessa forma, perceber que se comeram 6 pedaços da pizza, ou seja, $\frac{6}{8}$, restando, portanto, duas partes da pizza (8 – 6 = 2), que se trata da mesma quantidade da questão “a”.

Os participantes poderão também representar a quantidade por meio da fração $\left(\frac{2}{8}\right)$, o que é equivalente a $\left(\frac{1}{4}\right)$, e efetuando a conversão (DUVAL, 2009) para percentual, perceberão que se trata de 25%: $\left(\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 1 : 4 = 0,25 = 25\%\right)$. Registra-se, no entanto, que se trata de uma situação elementar, especialmente para professores que ensinam matemática nos anos iniciais, isso porque pouca atenção se dá ao processo de conversão entre diferentes registros de representação semiótica de um mesmo objeto matemático.

Tarefa 03: Associe a segunda coluna de acordo com a primeira.

a) 

b) 20%

c) $\frac{4}{20}$

d) 0,75

e) Um quarto

f) $\frac{2}{10}$

( ) 75%

( ) $\frac{1}{8}$

( ) 0,25

( ) $\frac{2}{10}$

( ) $\frac{1}{4}$

( ) 0,2

( ) 25%

( ) $\frac{3}{4}$

( ) 12,5%

( ) $\frac{3}{15}$

( ) 0,125

Caracterização e análise: A tarefa 03 consiste de 06 (seis) questões em que é solicitada a associação de frações expressas em diferentes registros de representação semiótica (geométricos, percentual, fracionário, decimal e língua natural), nas quais é necessário que os participantes efetuem conversões (DUVAL, 2009), reconheçam a equivalência ou ainda lancem mão da simplificação. Essa tarefa requer, sobretudo, que eles reconheçam que uma mesma fração pode ser representada em diferentes registros da representação semiótica.

Os participantes poderão associar a questão “a” com a fração $\frac{1}{8}$ da segunda coluna, para isso, lançarão mão da conversão de registros de representação semiótica (de um registro geométrico para um registro numérico fracionário). Esse item também pode ser associado com outros registros da segunda coluna ($0{,}125$ e $12{,}5\%$), mas dificilmente conseguirão perceber a relação existente entre eles, dificuldade mencionada em questões anteriores e que também pode ser verificada em uma série de questões presentes nas atividades desse instrumento.

Na associação da questão “b” com a segunda coluna, os participantes também poderão utilizar-se da conversão $\left(20\% = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}\right)$ e depois realizar as associações necessárias. Assim, poderão associar essa questão com os registros equivalentes $\left(\frac{2}{10} \text{ ou } 0{,}2\right)$. Espera-se que eles não encontrem maiores dificuldades para resolver esse item.

Na questão “c”, os participantes poderão usar a simplificação de fração para obter outra na forma irredutível $\left(\frac{4}{20} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}\right)$. Nesse sentido, deverão encontrar uma representação na segunda coluna que seja equivalente à que foi encontrada, para isso, poderão lançar mão da conversão da fração, com o resultado obtido, a fim de relacionar com uma representação que seja equivalente a esta. Portanto, poderão relacionar a questão “c” com a fração $\left(\frac{3}{15}\right)$. De forma geral, poderão encontrar dificuldade na resolução tanto no estabelecimento da equivalência quanto em relação à conversão (DUVAL, 2009).

Para relacionar a questão “d” com alguma ou algumas representações da segunda coluna, os participantes poderão encontrar dificuldades similares às encontradas na questão “c”. Primeiramente, eles poderão usar da conversão e da simplificação de frações $\left(0{,}75 = 75\% = \frac{75}{100} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}\right)$, para, posteriormente, fazer a associação. Logo, poderão associar o item “a” com as representações $\left(75\% \text{ e/ou } \frac{3}{4}\right)$.

Os participantes poderão reconhecer que $\frac{1}{4} = 25\% = 0{,}25$, portanto não encontrarão dificuldades em relacionar a questão “e” com alguma representação da segunda coluna, mas provavelmente ficarão apenas com a relação $\frac{1}{4}$.

Na questão “f”, poderão relacionar, por eliminação, com a representação 0,2 (dois décimos). Dificilmente os participantes perceberão que as questões “b”, “c” e “f” tratam de frações equivalentes e, portanto, representam a mesma quantidade (NUNES *et al*, 2005).

4.3.1.2 Atividade 02: Número – Grupo 02

Objetivos: A atividade 02 é composta por quatro tarefas em que se lançou mão de diferentes registros de representação semiótica (geométrico, decimal, fracionário, percentual, língua natural). As tarefas tratam de frações menores, maiores ou iguais à unidade. Em alguns casos, os participantes devem observar que se trata de uma fração em relação a uma quantidade (NUNES et al, 2005); em outras situações, devem efetuar operações com frações; e ainda em outras, devem reconhecer a equivalência, assim como estabelecer relação entre frações, simplificando, estabelecendo comparação e, principalmente, efetuando conversões (DUVAL 2009).

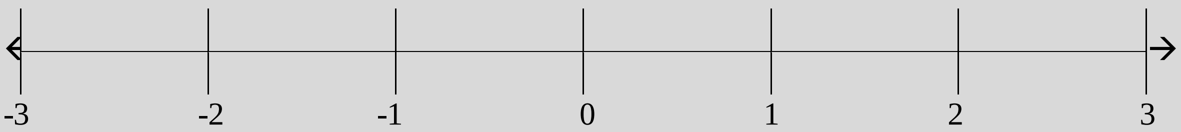
Essa atividade tem como objetivo verificar:

a) o modo como os professores resolvem atividades de fração que envolvem número (MERLINI, 2005; SILVA, 2007), em que se faz uso de diferentes registros da representação semiótica;

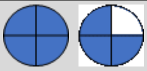
b) se os professores reconhecem fração em diferentes registros da representação semiótica, a equivalência e comparação entre frações;

c) se os professores localizam na reta numérica a posição de números racionais expressos em diferentes registros da representação semiótica.

Tarefa 01: Localize na reta numérica as frações:



	Fração	**Explique como você chegou ao resultado.**
a)		
b)	0,5	
c)	$\frac{1}{4}$	
d)	0,125	
e)	$\frac{5}{2}$	
f)	$1\frac{1}{2}$	
g)	$\frac{3}{3}$	
h)	3: 2	

i)	25%	
j)		
l)	$\frac{3}{4}$	
m)	$\frac{2}{16}$	
n)	0,2	
o)	$\frac{2}{8}$ de 10	
p)	$\frac{2}{10}$ de 1	
q)	Metade da metade	
r)	$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$	
s)	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	
t)	$\frac{1}{2}\Big/\frac{1}{2}$	
u)	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	
v)	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$	
x)	$\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}$	

Caracterização e análise: Essa tarefa foi organizada considerando diferentes registros de representação semiótica (geométrico, decimal, fracionário, percentual, língua natural), cujas frações indicadas apresentam números menores, maiores ou iguais à unidade. Há questões em que é necessário que os participantes percebam que se trata de uma fração em relação a uma dada quantidade e situações que envolvem as operações fundamentais (adição, subtração, divisão e multiplicação) de frações. Registra-se que em todas as questões solicita-se que os participantes indiquem a posição da fração na reta numérica e expliquem como chegaram ao resultado.

As questões “a” e “j” foram apresentadas em registro de representação semiótica geométrico figural (DUVAL, 2009), e uma das possibilidades de os participantes resolverem pode considerar a fração da questão “a”, $\frac{3}{4}$, entendendo-a como uma divisão do numerador (3) pelo denominador (4), o que resultará em 0,75. Isso possibilita localizar com facilidade a posição na reta numérica. No caso da questão “j”, os participantes devem considerar que se trata de uma quantidade maior que a unidade, ou seja, $1 + \frac{3}{4}$, o que resultará em 1 + 0,75 = 1,75. No caso dessas questões, é aconselhável que os participantes efetuem a conversão do registro de representação semiótica geométrico figural perpassando pelo registro de representação semiótica fracionário para chegar ao registro de representação semiótica numérico decimal (DUVAL, 2009).

Registra-se ainda que, no caso da questão “a”, os participantes podem considerar a parte da figura não destacada, nesse caso, $\frac{1}{4} = 0{,}25$, e localizar esse valor na reta.

Na questão “b”, apresenta-se o registro de representação semiótica na forma decimal, o que facilita sobremaneira que o participante o localize na reta numérica. O mesmo raciocínio poderá ser utilizado nas questões “d” e “n”.

Nas questões (“c”, “e”, “f”, “g”, “l” e “m”), apresentadas em registro de representação semiótica fracionário, certamente os participantes lançarão mão da conversão para o registro de representação semiótica decimal (DUVAL, 2009). Registra-se, no entanto, que os participantes devem perceber que algumas delas são menores, iguais ou maiores que a unidade; que a fração da questão “f” foi apresentada na forma mista, entendendo assim que o 1 (um) indica a unidade tomada em seu inteiro que deve ser adicionada a fração indicada $\frac{1}{2} = 0{,}5$, totalizando 1,5.

Os participantes podem dividir o numerador pelo denominador, o que resultará nos respectivos valores decimais, facilitando a localização da posição na reta. No caso da questão “c”, a fração $\frac{1}{4} = 1 \div 4 = 0{,}25$, o participante também poderá dividir o espaço da reta entre 0 e 1, em quatro partes iguais, (0,25) cada um, e localizar a fração na primeira parte $\left(\frac{1}{4} = 0{,}25\right)$.

A questão “d” foi apresentada na forma de registro de representação decimal, o que pode ser visto como medida (0,125), assim, o participante poderá também dividir a reta numérica entre 0 e 1 em oito partes (todo) e localizá-lo na primeira parte.

A questão “h” foi apresentada na forma de divisão, e o participante poderá efetuá-la obtendo o resultado $(3 \div 2 = 1{,}5)$ e em seguida localizá-lo na reta numérica.

Já a questão “i” foi apresentada em registro de representação semiótica na forma de porcentagem e os participantes poderão lançar mão da conversão $(25\% = 0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 1 : 4 = 0{,}25)$, localizando o valor correspondente na reta.

Nas questões “o” e “p”, pergunta-se o valor de uma fração correspondente a um todo. Assim, a fração pode ser utilizada como multiplicador de uma quantidade (NUNES *et al,* 2005), o que possibilita que, na questão “o”, o participante multiplique o numerador (2) por 10 e divida pelo denominador (08), assim $[(2 \cdot 10) \div 8] = (20 \div 8) = 2{,}5$; ou poderá pegar 10 e dividir pelo denominador (8) e multiplicar por 02, obtendo a mesma resposta: $[(10 \div 8) \cdot 2] = (1{,}25 \cdot 2) = 2{,}5$. Para responder à questão “p”, o participante poderá utilizar o mesmo raciocínio.

Para responder à questão “q”, o participante deverá considerar que metade é $\frac{1}{2}$ e metade da metade é $\frac{1}{4}$, e dividir o numerador (1) pelo denominador (4) e que resultará em 0,25. A dificuldade certamente recairá na compreensão de que “metade da metade” consiste na quarta parte ou ¼. Nesse caso, a “metade” fração se constitui no coeficiente multiplicador da “metade” todo, portanto $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

As questões “r”, “s”, “t”, “u” e “v” remetem às operações com frações de denominadores iguais, frações essas que têm incidências de uma sobre as outras. No caso das questões “r” e “s” e “v”, tem-se respectivamente $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$.; $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$; e $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{0}{2}$. É possível que alguns participantes efetuem a soma ou subtração, tanto dos numeradores como dos denominadores.

As questões “t” e “x” indicam divisão de fração, nas quais os participantes devem dividir a primeira fração pela segunda, ou então, conservar a primeira fração $\frac{1}{2}$ e multiplicar pelo inverso da segunda $\frac{2}{1}$ e depois fazer uma multiplicação de fração, que é multiplicar o numerador da primeira fração pelo numerador da segunda e depois os respectivos denominadores, assim, $\frac{1}{2} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{2} = 1$.

Na questão “u”, o participante deverá multiplicar as frações, nesse caso poderá multiplicar o numerador da primeira fração pelo da segunda e depois os respectivos denominadores, assim, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

4.3.1.3 Atividade 02: Número – Grupo 03

Tarefa 01: Associe a segunda coluna de acordo com a primeira.

a) 

b) 0,5

c) $\frac{1}{4}$

d) 0,125

e) $\frac{5}{2}$

f) $1\frac{1}{2}$

g) $\frac{3}{3}$

h) $3 : 2$

i) 25%

j) 

l) $\frac{3}{4}$

m) $\frac{2}{16}$

n) 0,2

o) $\frac{2}{8}$ de 10

p) $\frac{2}{10}$ de 1

q) Metade da metade

r) $\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$

s) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

t) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

u) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

v) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$

( ) 0

( ) $\frac{1}{5}$

( ) $\frac{7}{4}$

( ) 1

( ) $\frac{3}{2}$

( ) $\frac{5}{2}$

( ) $\frac{1}{8}$

( ) $\frac{1}{4}$

( ) $\frac{1}{2}$

( ) $\frac{3}{4}$

Caracterização e análise: Essa tarefa remete ao conceito de equivalência em que se apresentaram frações menores, maiores ou iguais à unidade; fez-se uso de diferentes registros de representação semiótica (geométrico figural, decimal, fracionário, percentual, língua natural); apresentaram-se situações que envolvem as operações fundamentais de fração; e, ainda, há situações em que o participante deve identificar a fração de um todo. As questões dessa tarefa também integram a tarefa 01. Aqui também é importante que os participantes reconheçam as frações em diferentes registros da representação semiótica (DUVAL, 2009), o que muitas vezes requer conversão, simplificação ou ainda relação de uma fração com a totalidade de um universo.

Nessa tarefa, o participante deverá perceber ou não que, ao relacionar itens da primeira coluna com a segunda, mais de uma resposta pode ser associada. Pode parecer que a pergunta está incompleta, mas fizemos assim intencionalmente a fim de verificarmos se os professores conseguem identificar todas as associações possíveis, o que mostrará o reconhecimento em diferentes registros de representação semiótica (DUVAL, 2009).

O registro de representação semiótica das questões “a” e “j” foram apresentados na forma geométrica figural e os participantes deverão reconhecer que o todo é constituído pela quantidade total dos quadrados do retângulo e os quadradinhos pintados representam a parte, logo a fração ao qual o participante deverá associar será $\frac{3}{4}$ = 0,75 = 75%. Eles também poderão indicar como sendo $\frac{1}{4}$, tomando como referência a parte não pintada. Nesse caso, a equivalência se dará a partir de $\frac{1}{4}$ ou ainda das respectivas conversões (0,25 = 25%). Já a questão “j” exige que o participante reconheça que se trata de uma fração maior que a unidade, nesse caso, $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$ e, se for o caso, converter para decimal (1,75).

O 0,5, da questão “b”, indica o registro de representação semiótica na forma decimal e os participantes deverão converter da forma decimal para forma fracionária, assim, $0{,}5 = \frac{5}{10}$ = $\frac{1}{2}$. Na questão “d” os participantes deverão utilizar esse mesmo raciocínio, pois o registro de representação semiótica (DUVAL, 2009) está na forma decimal e o participante deverá converter para fracionária e fazer uso da simplificação de fração, ficando assim: 0,125 = $\frac{125}{1000}$ = $\frac{5}{40}$ = $\frac{1}{8}$. Na questão “n”, o participante deverá transformar 0,2 em fração e fazer uso da simplificação de fração: 0,2 = $\frac{2}{10}$ = $\frac{1}{5}$.

As questões “c”, “e”, “f”, “g”, “l” e “m” foram apresentadas em registro de representação semiótica fracionário, nas quais o participante poderá dividir o numerador pelo denominador e/ou ainda, efetuar a simplificação para encontrar a equivalência.

Na divisão indicada na questão “h”, o participante pode resolver a operação chegando ao quociente (MERLINI, 2005; SILVA, 2007) de 1,5, mas deverá reconhecer que se trata de uma fração maior que a unidade, ou seja, $\frac{3}{2}$.

A questão “i” é indicada por meio do registro de representação semiótica porcentual e requer que o participante o transforme em fração ou decimal, assim, 25% = 0,25= $\frac{25}{100}$ = $\frac{1}{4}$.

Nas questões “o”, “p” e “q”, a fração é utilizada como operador multiplicativo (MERLINI, 2005; SILVA, 2007), o que requer que o participante estabeleça relação entre a fração e a quantidade total informada. Assim, faz-se mister realizar a multiplicação, o que pode acontecer entre o numerador da fração pela quantidade total, cujo produto deverá ser dividido pelo denominador, ou dividir a quantidade total pelo denominador da fração e multiplicar pelo numerador desta e, se for o caso, simplificar e/ou converter a fração encontrada.

Os registros de representação semiótica das questões “r”, “s”, “t”, “u” e “v” foram indicados na forma de fração com denominadores iguais, nas quais os participantes devem efetuar operações (adição, subtração, multiplicação e divisão), obtendo assim os respectivos resultados e, em alguns casos, efetuar a simplificação ou mesmo converter em decimal. Com essas questões, espera-se que os participantes fiquem intrigados com o fato de mesmas frações com operações distintas produzirem um mesmo resultado, como no caso das questões “s” e “v”; que ao multiplicar uma fração tem-se como produto uma fração ainda menor (questão “u”); e que na divisão de fração, o quociente é maior que o dividendo e o divisor, isto é, o quociente aumenta. Essas situações são distintas do comportamento das operações no campo do conjunto dos números naturais.

Tarefa 02: Compare as frações e estabeleça relações preenchendo as lacunas com os símbolos: $>$ (maior), $<$ (menor) e $=$ (igual).

a)  _____ 0,75

b) 0,5 _____ $\frac{1}{4}$

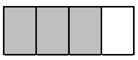
c) 0,125 _____ $\frac{1}{4}$

d) 1,5 _____ $1\frac{1}{2}$

e)	$\frac{1}{8}$	_____	12,5%
f)	$\frac{3}{4}$	_____	$\frac{1}{2}$
g)	$\frac{1}{4}$	_____	$\frac{1}{2}$
h)	$\frac{1}{4}$	_____	$\frac{1}{8}$
i)	$\frac{3}{2}$	_____	$1\frac{1}{2}$
j)	$\frac{3}{4}$	_____	75%
l)	$\frac{1}{4}$	_____	$\frac{2}{4}$
m)	$\frac{5}{2}$	_____	$\frac{2}{10}$
n)	$\frac{7}{4}$	_____	$\frac{3}{2}$

Caracterização e análise: A tarefa 02 trata da comparação entre frações menores, maiores ou iguais à unidade, em que se faz uso dos diferentes registros de representação semiótica (decimal, geométrico, fracionário, percentual). É importante que os participantes reconheçam as frações em diferentes registros da representação semiótica, o que muitas vezes requer conversão e simplificação de frações (DUVAL, 2009). Espera-se ainda que os participantes tenham conhecimento e utilizem de forma correta os símbolos $>$ (maior), $<$ (menor) e $=$ (igual).

Para resolver a questão "a", os participantes poderão interpretar o registro geométrico de duas formas, portanto, sua solução admitirá dois resultados possíveis. Assim, poderão obter como respostas:

a) Considerando a parte destacada, tem-se  $= 0{,}75$;

b) Considerando a parte em branco, tem-se  $< 0{,}75$.

Em ambos os casos, as afirmativas são verdadeiras, isso porque, ao considerar a parte destacada na cor cinza (03) na representação geométrica e relacioná-la com a quantidade total das partes (04), os participantes poderão obter o registro fracionário $\frac{3}{4}$, utilizando-se do significado parte-todo $\left(\frac{3}{4} = 0{,}75 = \frac{75}{100}\right)$; ao mesmo tempo, pode-se considerar a parte destacada em branco (01) em relação à quantidade total das partes (04), o que resultará na fração $\frac{1}{4}$ e ao realizar a comparação entenderão que $\frac{1}{4} < \frac{3}{4} = 0{,}75$ (MERLINI, 2005; SILVA, 2007).

De toda forma, é possível que os participantes encontrem dificuldades na comparação, isso porque a questão trata da comparação de dois registros de representação semiótica (geométrico e numérico-decimal) distintos, o que pode colocar dúvida em relação à situação a comparar (destacada ou não destacada). Provavelmente, os participantes terão dificuldades em compreender que $0{,}75 = 75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.

Nas questões "b" e "c", pede-se que os participantes comparem a fração de um registro de representação semiótica numérico-decimal com a representação fracionária, o que poderá confundi-los, principalmente se optarem pela conversão da quantidade fracionária $\left(\frac{1}{4}\right)$ em número decimal $0{,}25$. Ao comparar $0{,}5$ com $0{,}25$ (questão "b") e $0{,}125$ com $0{,}25$ (questão "c"), os participantes poderão confundir os valores absolutos e indicar que:

a) $0{,}5 < 0{,}25$ (questão "b");

b) $0{,}125 > 0{,}25$ (questão "c").

Matematicamente as soluções estão incorretas, uma vez que: $0{,}5 = 0{,}50 = 50\%$; $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$; $0{,}125 = 12{,}5\%$. O que leva às seguintes soluções:

a) $0{,}5 > \frac{1}{4}$ (questão "b");

b) $0{,}125 < \frac{1}{4}$ (questão "c").

Na resolução da questão "d", dificilmente os participantes transformarão a fração mista $\left(1\frac{1}{2}\right)$ em fração imprópria ou em número decimal, causando dificuldade em saber o valor que a mesma representa. Todavia, é possível que imaginem que a fração mista $\left(1\frac{1}{2}\right)$ é maior que a representação decimal $(1{,}5)$ ou ao contrário, mas dificilmente perceberão que se trata da mesma quantidade representada de maneiras distintas.

Na questão "e", os participantes poderão usar a fração $\left(\frac{1}{8}\right)$ e transformá-la em uma representação decimal dividindo o numerador pelo denominador $(1 \div 8 = 0{,}125)$. De posse do resultado, poderão proceder com a comparação entre as duas representações (DUVAL, 2009). Os participantes poderão considerar $\frac{1}{8}$ menor que $12{,}5\%$ $\left(\frac{1}{8} < 12{,}5\%\right)$, quando na verdade são iguais.

Para resolver a questão "f", possivelmente os participantes lançarão mão da representação em desenho, uma barra de chocolate, por exemplo. Assim, para representar a fração $\frac{3}{4}$ poderão desenhar uma barra de chocolate (quantidade contínua e intensiva), dividi-la em 4 partes e tomar 03 delas (figura 13a); para representar a fração $\frac{1}{2}$ usarão o mesmo raciocínio, mas dividirão a barra de chocolate em dois pedaços apenas e destes tomarão 01 (figura 13b).

Figura 13: Representação de uma barra de chocolate dividida em 4 e 2 partes

a) b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa maneira, perceberão que a primeira representação é maior que a segunda, portanto$\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$,.

Para responder à questão “g”, os participantes poderão relacionar os números que estão no denominador das frações, uma vez que os numeradores das duas têm o mesmo valor. Assim, entenderão que a fração $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{2}$ uma vez que $4 > 2$. Poderão ainda proceder de forma análoga na questão “f”, dessa forma, perceberão que, na verdade, $\frac{1}{4}$ é menor que $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{4} < \frac{1}{2}\right)$. Esse mesmo procedimento poderá ser utilizado na questão “h”.

A dificuldade colocada na questão “d” poderá se repetir na questão “i” no que diz respeito à fração mista $\left(1\,\frac{1}{2}\right)$. Quanto à fração imprópria $\left(\frac{3}{2}\right)$, possivelmente os participantes não terão dificuldades em compreender que se trata de um número decimal $(1{,}5)$, poderão se confundir ao comparar as duas representações.

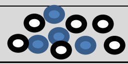
Os sujeitos podem, também, compreender que a fração mista $\left(1\,\frac{1}{2}\right)$ escrita de outra forma corresponde a $1{,}5$ (um e meio, na língua natural) e, ao realizarem a divisão da fração imprópria $\left(\frac{3}{2}\right)$, observarão que se trata da mesma quantidade. Assim farão a comparação $\left(\frac{3}{2} = 1\,\frac{1}{2}\right)$.

Na questão “j”, os participantes poderão lançar mão da representação em desenho (significado parte-todo) na comparação das quantidades. Mais uma vez, poderão considerar uma barra de chocolate, dividi-la em uma quantidade total de 4 partes e destacar 3 delas por meio de pintura. Da mesma forma, poderão considerar uma totalidade de 100% dividida em 4 partes e destas considerar 3 partes para representar 75%. Assim, perceberão que se trata da mesma quantidade $\left(\frac{3}{4} = 75\%\right)$.

Ao compararem as frações de mesmo denominador, relacionarão os valores absolutos dos numeradores (questão "l"), desse modo, responderão que a fração $\frac{2}{4}$ é maior que a fração $\frac{1}{4}$.

Para responder à questão "m", os participantes poderão utilizar-se da divisão entre numerador e denominador ($5 \div 2 = 2{,}5$ e $2 \div 10 = 0{,}2$); assim perceberão que a fração $\frac{5}{2} > \frac{2}{10}$. O mesmo pode ser feito na questão "n" ($7 \div 4 = 1{,}75$ e $3 \div 2 = 1{,}5$), assim resolverão esta situação considerando $\frac{7}{4} > \frac{3}{2}$.

Tarefa 03: Escreva frações equivalentes a:

a)	
b)	.... $\frac{3}{12}$ ....
c)	.... $\frac{1}{3}$ ....
d)	.... 0,5 ....
e)	.... 25% ....
f)	....  ....

Caracterização e análise: Essa tarefa versa sobre o conceito de equivalência entre frações em que se faz uso de diferentes registros de representação semiótica (geométrico, fracionário, decimal, percentual) e de quantidade discreta e extensiva – questão "f" (NUNES *et al*, 2005), de modo que os participantes possam escrever frações na forma irredutível ou não. Ademais, podem lançar mão da conversão (DUVAL, 2009) para efetuar os registros das frações equivalentes.

Para resolver a questão "a", os participantes poderão utilizar o significado parte-todo (MERLINI, 2005; SILVA, 2007) para representar a fração correspondente à representação figural. Desse modo, espera-se que os sujeitos usem, a princípio, a representação $\frac{3}{4}$ considerando a parte em destaque na cor cinza. A partir dessa representação, poderão escrever algumas frações que sejam equivalentes $\left(\frac{6}{8}; \frac{9}{12}; \frac{12}{16}; \frac{24}{32}\right)$. Ainda em relação à questão "a", podem considerar a parte que está em branco como destaque, assim, tomarão esta parte e farão a relação com a quantidade total, obtendo a representação fracionária $\frac{1}{4}$. Nesse sentido, as frações equivalentes serão $\frac{2}{8}$; $\frac{3}{12}$; $\frac{4}{16}$; $\frac{8}{32}$. Possivelmente não darão a devida atenção ao fato de que as representações à direita da quantidade indicada referem-se ao crescimento das representações das frações equivalentes e à esquerda tem-se o decrescimento até chegar em uma fração na forma irredutível.

Os participantes poderão também se confundir com as representações ao relacionar a quantidade de partes que estão na cor cinza com a quantidade de partes que estão na branca. Assim, poderão obter dois resultados possíveis $\left(\frac{1}{3} \text{ ou} \frac{3}{1}\right)$. Em relação à primeira representação, os participantes considerarão a quantidade de partes em branco (01) com a quantidade em cinza (03); na segunda farão o movimento contrário. Outra possibilidade consiste na representação geométrica, podendo replicar outros desenhos dobrando (triplicando, quadruplicando, e assim sucessivamente) as quantidades na cor branca e cinza.

Possivelmente, na questão “b”, os participantes escreverão as frações equivalentes ao lado direito da fração dada $\frac{3}{12}$. Dificilmente conseguirão estabelecer relação com as representações da questão “a”, mas realizarão as representações equivalentes sem relacioná-las com o sinal de igualdade entre elas. Assim, poderão usar as frações equivalentes $\frac{6}{24}$; $\frac{12}{48}$, mas dificilmente indicarão a fração irredutível $\left(\frac{1}{4}\right)$.

Em relação à questão “c”, os participantes lançarão mão dos mesmos procedimentos da questão “b”. Somente representarão as frações equivalentes do lado direito da fração dada sem relacioná-las entre si. Assim, encontrarão as frações $\left(\frac{2}{6}; \frac{3}{9}; \frac{4}{12}\right)$.

Na questão “d”, possivelmente os participantes perceberão que se trata de metade e indicarão frações correspondentes, diferentemente da questão “e”, na qual podem não perceber que se trata de ¼. Certamente não perceberão que 25% corresponde à metade da metade. Caso consigam estabelecer as relações, os participantes entenderão que $0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ (metade), dessa forma, escreverão as frações $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{4}{8}$ e assim por diante; e que $25\% = \frac{25}{100}$ usando as frações equivalentes $\frac{5}{20}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{50}{200}$; $\frac{100}{400}$ e assim por diante.

Na questão “f”, temos a representação fracionária de quantidades discretas e extensivas (NUNES *et al*, 2005), na qual os participantes poderão estabelecer relações com as quantidades das partes (04 azuis e 06 brancas) e não das partes com a quantidade total das partes (10), estando, portanto, confusos. Assim, poderão obter as frações:

a) Relacionando partes azuis com partes brancas $\left(\frac{\text{bolinhas azuis}}{\text{bolinhas brancas}}\right)$

$\frac{4}{6}$; $\frac{8}{12}$; $\frac{16}{24}$, e não conseguirão avançar mais que essas frações.

b) Relacionando partes brancas com partes azuis $\left(\frac{\text{bolinhas brancas}}{\text{bolinhas azuis}}\right)$

$\frac{6}{4}$; $\frac{12}{8}$; $\frac{18}{12}$, não avançando para além dessas.

Caso compreendam que a quantidade total das partes é a união do conjunto de bolinhas azuis com o conjunto de bolinhas brancas, entenderão que a quantidade de bolas azuis é uma parte da quantidade total, assim como as brancas. Nesse sentido, os participantes perceberão duas possibilidades para resolver a questão. A primeira consiste em considerar as bolinhas azuis e relacionar sua quantidade (04) com a quantidade total das partes (10), assim, obterão a fração $\frac{4}{10}$ e, por conseguinte, conseguirão obter as frações equivalentes $\left(\frac{8}{20}; \frac{12}{30}; \frac{16}{40}; \frac{20}{50}\right)$ a ela, apenas crescentes, ou seja, não conseguirão encontrar a fração irredutível $\left(\frac{2}{5}\right)$. A segunda maneira é considerar a quantidade das partes (06) de bolinhas brancas em relação à quantidade total das partes (10), assim terão a fração $\frac{6}{10}$ e as suas equivalentes $\frac{12}{20}, \frac{18}{30}, \frac{24}{40}$, não mais que essas. Dificilmente indicarão frações que sejam menores (irredutível $\frac{3}{5}$).

4.3.1.4 Atividade 03: Medidas – Grupo 04

Objetivo: Verificar o modo como os professores resolvem atividades de fração com significado de medidas (MERLINI, 2005; SILVA, 2007), fazendo uso de diferentes registros da representação semiótica (DUVAL, 2009).

A atividade é composta por três tarefas, as quais foram apresentadas em linguagem alfabética, em que se solicita que os participantes expliquem como pensaram ou procederam para responder o que foi demandado. As respostas remetem a fração ou a quantidades (NUNES *et al*, 2005) que representam partes ou o todo.

Tarefa 01: Ao lançar um dado, qual a probabilidade de se obter:
a) Um número par.
b) Um número ímpar.
c) O número 3.
d) O número 2.
e) Os números 1 ou 6.
f) Os números 1 e 6.
g) Explique como você pensou/procedeu para chegar às repostas.

Caracterização e análise: A tarefa 1 apresenta situações que envolvem compreensão de probabilidade, ao se lançar um dado. Trata-se, portanto, de situações cujas quantidades discretas indicam números naturais e cujas respostas remetem a números racionais.

Para responder à tarefa, o participante deverá considerar que o dado tem seis faces, as quais indicam a quantidade de pontos de cada uma (1, 2, 3, 4, 5 e 6), sendo três faces com pontos ímpares (1, 3, e 5) e três com pontos pares (2, 4 e 6); logo, a probabilidade de sair um número par ou um número ímpar será $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$, ao que responde às questões “a” e “b”.

Para responder às questões “c” e “d”, o participante deve perceber que há uma possibilidade em cada seis, tanto para sair um número par como um número ímpar, portanto, a probabilidade será de $\frac{1}{6}$.

Em relação a questões “e” e “f”, o participante deverá considerar duas faces (1 e 6) das seis faces contidas no dado, logo a probabilidade de sair (1 e 6) será $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (questão “e”). Em relação à questão “f”, o participante deve tomar cuidado com a conjunção alternativa “ou”, uma vez que ela expressa ideia de alternância, portanto, a probabilidade de sair os números 01 será $\frac{1}{6}$ e de sair o número 06 também será $\frac{1}{6}$.

Tarefa 02: No preparo de um litro de suco foram utilizadas 3 medidas de água e 2 medidas de polpa de fruta.
a) Qual a fração que representa a quantidade de água no suco?
b) Qual a fração que representa a quantidade de polpa de fruta no suco?
c) Qual a quantidade de água no suco?
d) Qual a quantidade de polpa de fruta no suco?
e) Explique como você pensou/procedeu para chegar às repostas.

Caracterização e análise: O enunciado da tarefa 2 versa sobre a preparação de um suco, utilizando-se uma quantidade de água e outra de polpa de frutas, o que nos remete a quantidades contínuas e extensivas (NUNES *et al*, 2005), cujas respostas remetem à representação fracionária (DUVAL, 2009).

Na questão "a", solicita-se a fração que representa a quantidade de água no suco. A quantidade total corresponde a 05 partes. Os participantes poderão confundir as quantidades de medidas de cada componente (água e polpa) com a quantidade total, assim, poderão estabelecer relação entre as quantidades dos componentes e responder que a quantidade de água no suco é representada por $\frac{3}{2}$ e não $\frac{3}{5}$.

Caso os participantes percebam que há 5 medidas no total do suco e que cada medida corresponde a $200\ ml$, e que a quantidade de medidas de água (03) corresponde a $600\ ml$ e, ainda, que a quantidade de polpa de suco é $400\ ml$, poderão resolver a questão "a" e "b", considerando as partes em relação à quantidade total das partes ($1000\ ml = 01$ litro). Assim, obterão:

a) $\frac{600}{1000} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ (questão "a")

b) $\frac{400}{1000} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ (questão "b")

Ainda, compreenderão que as quantidades de água e de polpa de frutas são $600\ ml$ e $400\ ml$, respectivamente, respondendo às questões "c" e "d".

Tarefa 03: Numa fruteira, encontram-se 4 maçãs e 6 laranjas.

a) Qual a fração que representa a quantidade de maçãs da fruteira?
Que quantidade de frutas representa o numerador da fração?
Que quantidade de frutas representa o denominador da fração?

b) Qual a fração que representa a quantidade de laranjas da fruteira?
Que quantidade de frutas representa o numerador da fração?
Que quantidade de frutas representa o denominador da fração?

c) Represente na forma percentual a quantidade de maçãs da fruteira.

d) Represente na forma decimal a quantidade de laranjas da fruteira.

e) Explique como você pensou/procedeu para chegar às repostas.

Caracterização e análise: A terceira tarefa trata de uma fruteira que contém maças e laranjas, cujas respostas remetem à identificação da fração em diferentes registros de representação semiótica (DUVAL, 2009) ou ainda, que as quantidades sejam indicadas de forma relativa ou absoluta. Requer também que os participantes identifiquem o numerador e o denominador de uma fração. Trata-se da indicação de quantidades de natureza distintas (maçãs e laranjas) e que compõem o todo (frutas). Isso nos remete também a quantidades intensivas (NUNES *et al*, 2005).

Para resolver a questão "a", os participantes deverão compreender que a quantidade total das partes (10) é a união entre a quantidade de maçãs (04) e a quantidade de laranjas (06). Dessa forma, eles deverão relacionar a quantidade de maçãs com a quantidade total de frutas obtendo a fração $\frac{4}{10}$, que representa a quantidade de maçãs na fruteira. Quanto às demais perguntas que complementam a questão, os participantes deverão ter o conhecimento do que é numerador e denominador de uma fração, levando-os a responder que a quantidade de frutas que estão no numerador refere-se às maçãs (04) e que o número 10 corresponde ao denominador da fração, composto pela quantidade total de frutas (maçãs e laranjas).

Esse mesmo raciocínio deverá ser usado para responder à questão "b". Nesse caso, a fração que representará a quantidade de laranjas na fruteira será $\frac{6}{10}$, em que o numerador (06) representa a quantidade de laranjas e o denominador (10) refere-se à quantidade total de frutas da fruteira (maçãs e laranjas). Todavia, os participantes terão dificuldades em resolver tanto a questão "a" quanto a "b", e, provavelmente, estabelecerão confusão entre as quantidades (04 e 06). Nesse sentido poderão representar a fração na questão "a" como $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{4}$ na questão "b", acarretando equívocos quanto à quantidade de frutas na fruteira. Ainda, poderão não compreender ou não ter conhecimento do que é numerador e denominador.

Para responder à questão "c", os participantes poderão utilizar-se da fração obtida na questão "a" $\left(\frac{4}{10}\right)$ e encontrar o número percentual que representa essa quantidade. Para tanto, os sujeitos provavelmente farão uso da equivalência entre frações $\frac{4}{10} = \frac{40}{100} =$ 40%, encontrando a resposta requerida. Podem também dividir numerador (04) pelo denominador (10) $(4 \div 10 = 0{,}4 = 40\%)$, mas terão dificuldades em dividir um número menor por um maior, e em transformar um número decimal em número percentual.

Em relação à questão "d", os participantes poderão realizar a divisão entre o numerador (06) e o denominador (10) para encontrar a representação decimal requerida $(6 \div 10 = 0{,}6)$, obtendo 0,6 como resultado da questão.

Tanto na questão "c" quanto na "d", os participantes poderão encontrar outros valores caso estabeleçam confusão nas representações fracionárias nas questões "a" e "b", como abordado anteriormente. Assim poderão obter os resultados seguintes:

a) $\frac{4}{6} = 4 \div 6 = 0{,}66 = 66\%$ (questão "c")

b) $\frac{6}{4} = 6 \div 4 = 1{,}5$ (questão "d").

4.3.1.5 Atividade 04: Quociente – Grupo 05

Objetivo: Verificar o modo como os participantes resolvem atividades de fração com os significados quociente e medidas (MERLINI, 2005; SILVA, 2007), fazendo uso de registros da representação semiótica fracionário e linguagem natural (DUVAL, 2009), lançando mão de transformação de medidas.

Essa atividade é composta por três tarefas em que se solicita aos participantes a resolução dos problemas e explicação do modo como pensaram ou procederam para resolvê-las, utilizando-se do significado quociente (MERLINI, 2005; SILVA, 2007).

Tarefa 01: Considere cada uma das situações a seguir e responda:
a) Ao dividir uma pizza entre 4 (quatro) amigos, com que fração da pizza cada um ficará?
b) Ao dividir duas pizzas entre 4 (quatro) amigos, com que fração da pizza cada um ficará?
c) Ao dividir três pizzas entre 4 (quatro) amigos, com que fração da pizza cada um ficará?
d) Ao dividir quatro pizzas entre 4 (quatro) amigos, com que fração da pizza cada um ficará?
e) Ao dividir cinco pizzas entre 4 (quatro) amigos, com que fração da pizza cada um ficará?
f) Em qual das situações elencadas anteriormente a pessoa comeu maior quantidade de pizza?
g) Explique como você pensou/procedeu para chegar às respostas das questões "a" a "f".
h) Ao dividir uma pizza entre 10 (dez) amigos, com que fração da pizza cada um ficará?
i) Ao dividir uma pizza entre 100 (cem) amigos, com que fração da pizza cada um ficará?
j) No caso dos itens "h" e "i", em que situação o sujeito comeu menor quantidade de pizza?
k) Explique como você pensou/procedeu para chegar às respostas das questões "h", "i" e "j".

Caracterização e análise: Essa tarefa refere-se a diferentes quantidades de pizzas para serem divididas entre uma mesma quantidade de amigos (quantidade discreta e extensiva), com o intento de saber com que fração da pizza cada um ficará (questões "a" a "e"). Questiona-se também em que situação o sujeito comeu maior quantidade de pizza. Já nas questões "h" e "i", divide-se uma pizza para quantidades de amigos diferentes e, também, busca-se saber com que fração cada um ficará. Procura-se saber também quem comeu menor quantidade de pizza.

Na questão "a", os participantes poderão dividir a pizza em quatro pedaços e, ao distribuírem para os amigos, cada um receberá um pedaço, tendo como resposta a fração $\frac{1}{4}$. Podem também dividir a pizza em 8 pedaços (cotidianamente é mais comum a divisão de pizzas com essa quantidade de pedaços) e, nesse caso, cada amigo ficará com 2 pedaços, que poderá ser representado por $\frac{2}{8}$, que também resulta em $\frac{1}{4}$. Podem ainda utilizar o registro língua natural (DUVAL, 2009) para indicar a fração de pizza que cada amigo ficará: "um pedaço de quatro".

Na questão "b", espera-se que os participantes utilizem do registro de representação semiótica (figura) para desenhar as duas pizzas. Assim como ocorreu na questão "a", eles poderão dividir as pizzas em 8 pedaços cada uma para posteriormente realizar a divisão para os amigos. Dessa maneira, tomarão dois pedaços de cada pizza para cada amigo e usarão da representação fracionária $\frac{2}{8}$ para indicar a quantidade de cada pizza que cada um deles ganhará. Com isso, poderão realizar a soma $\frac{2}{8} + \frac{2}{8}$ e, provavelmente chegarão a um dos dois resultados a seguir:

a) $\frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ (resultado incorreto) ou

b) $\frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (resultado correto).

Os participantes ainda podem dividir cada pizza em 4 partes iguais e distribuir um pedaço, de cada pizza, para cada um dos amigos, depois poderão realizar a soma $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ obtendo possivelmente dois resultados:

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ou

b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Ou ainda, dividir cada pizza em dois pedaços, obtendo-se 4 partes ao todo, sendo que cada uma representa metade de pizza $\left(\frac{1}{2}\right)$ e distribuir entre os amigos. Dessa forma, cada um dos amigos ficará com a fração $\left(\frac{1}{2}\right)$ de pizza.

Nas questões "c", "d" e "e", os participantes poderão lançar mão dos mesmos raciocínios das questões "a" e "b" para chegar aos resultados. Assim, para a questão "c", possivelmente obterão um dos resultados a seguir:

a) $\frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ ou

b) $\frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Na questão "d",

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4}$ = 1 = uma pizza para cada amigo ou

b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ = um pedaço de pizza para cada amigo.

Já na questão “e”, os participantes poderão encontrar maior dificuldade na solução porque a quantidade de pizzas a ser dividida é maior que a quantidade de amigos, o que leva a um tipo de fração diferente das anteriores (fração imprópria). Nesse sentido, eles poderão dividir cada uma das cinco pizzas em quatro partes, somar a quantidade total de pedaços de todas $(4+4+4+4+4=20)$ e dividir esse todo (20) pela quantidade de amigos $\left(\frac{20}{4}=5\right)$. Portanto, cada amigo comeria $\frac{5}{20}$ pedaços de pizzas. Poderão ainda não realizar a divisão das pizzas em pedaços menores e simplesmente realizar o quociente da quantidade de pizzas (5) pela quantidade de amigos $\left(\frac{5}{4}\right)$ obtendo como resultado desta divisão ($5 \div 4 = 1{,}25 =$ uma pizza inteira e $\frac{1}{4}$ da quinta pizza).

Nas questões “h” e “i”, a situação é contrária ao que ocorre nas questões “a” a “e”. Nos primeiros casos, a quantidade de amigos permanece a mesma e a quantidade de pizza varia, enquanto que nas outras duas situações a quantidade de amigos aumenta e a quantidade de pizzas permanece a mesma. Nesse caso, os participantes poderão encontrar dificuldade para encontrar a fração que representa o quanto cada amigo ficará.

Na questão “h”, poderão usar da representação figural e desenhar a pizza dividida em 10 pedaços e, posteriormente, distribuir um (01) pedaço para cada amigo, obtendo a fração $\left(\frac{1}{10}\right)$ que representa a quantidade que cada amigo ficará. Na questão “i”, provavelmente não usarão da representação figural por se tratar da divisão de uma pizza em vários pedaços (100), mas poderão usar da representação quociente para indicar o quanto cada amigo ficará $\left(\frac{1}{100}\right)$.

Tarefa 02: No preparo de um litro e meio de suco, foram utilizadas 3 partes de água e 2 partes de polpa de fruta.

a) Qual a fração que representa a quantidade de água no suco?
b) Qual a fração que representa a quantidade de polpa de fruta no suco?
c) Qual a quantidade de água no suco?
d) Qual a quantidade de polpa de fruta no suco?
e) Explique como você pensou/procedeu para chegar às repostas.

Caracterização e análise: Essa tarefa se constitui de um problema cujo enunciado apresenta duas quantidades distintas (água e polpa de fruta) e contínuas (NUNES *et al*, 2005) que, após a junção, se transformam em um terceiro produto (o suco). No preparo de um litro e meio de suco são necessários 3 partes de água e 2 partes de polpa de fruta. Pergunta-se qual a fração que representa a quantidade de água e de polpa de fruta no suco; a quantidade de água e polpa de fruta no suco; e solicita-se que os participantes expliquem como pensaram/procederam para chegar às respostas.

Os participantes poderão encontrar dificuldades na resolução das questões "a" a "d", no sentido de relacionar partes de água com partes de polpa de fruta, sem levar em consideração a quantidade total de suco (um litro e meio = $1000\text{ml} + 500\text{ml} = 1500\text{ml}$). Na questão "a" os participantes poderão obter a fração $\left(\frac{3}{2}\right)$ e na questão "b" $\left(\frac{2}{3}\right)$ não considerando o total de suco preparado $[1{,}5\text{l} = 1500\text{ml}]$. Os participantes poderão ter dificuldades ao relacionar as quantidades das partes (3 e 2) com a quantidade total das partes (5). Dessa forma, poderão representar a quantidade de água no suco por meio da fração $\left(\frac{3}{2}\right)$ e de polpa $\left(\frac{2}{3}\right)$.

Poderão também somar as quantidades das partes $(3 + 2)$ obtendo a quantidade total das partes (5) e, posteriormente, relacioná-las da seguinte maneira:

a) $\frac{3}{5}$ na questão "a".

b) $\frac{2}{5}$ na questão "b".

Já nas questões "c" e "d", os participantes poderão transformar (DUVAL, 2009) a quantidade de suco dada (1,5 litros) em mililitros (1500 ml) e utilizar o significado quociente (MERLINI, 2005; SILVA, 2007) para encontrar as quantidades solicitadas. Mas, para isso, deverão compreender que no preparo do suco são necessárias 5 partes no total, e que, destas, 3 são de água e 2 de polpa de fruta. Dessa forma, poderão realizar o quociente $\left(\frac{1500}{5} = 300\right)$ e encontrar o operador multiplicativo (300) e resolver o que se pede

a) multiplicando pelas partes de água ($300 \times 3 = 900$ ml) e

b) multiplicando pelas partes de polpa de fruta ($300 \times 2 = 600$ ml).

Ou, ainda,

a) $\frac{3}{5} \times 1500 = \frac{3 \times 1500}{5} = \frac{4500}{5} = 900\text{ml}$ ou $\frac{3}{5} \times 1500 = 3 \times \frac{1500}{5} = 3 \times 300 = 600\text{ml}$

b) $\frac{2}{5} \times 1500 = \frac{2 \times 1500}{5} = \frac{3000}{5} = 600\text{ml}$ ou $\frac{2}{5} \times 1500 = 2 \times \frac{1500}{5} = 2 \times 300 = 600\text{ml}$

Tarefa 03: Em 1 litro de molho para tempero tem-se três partes de vinagre e uma parte de azeite de oliva.

a) Qual a fração que representa a quantidade de vinagre no molho?
b) Qual a fração que representa a quantidade de azeite de oliva no molho?
c) Qual a quantidade de vinagre no molho?
d) Qual a quantidade de azeite de oliva no molho?
e) Explique como você pensou/procedeu para chegar às respostas.

Caracterização e análise: Essa tarefa trata de dois ingredientes (vinagre e azeite de oliva), que compõem um litro de molho para tempero, o que nos remete a quantidades consideradas (vinagre e azeite de oliva) intensivas e contínuas (NUNES *et al*, 2005). Os itens tratam de registro de representação semiótica fracionário (DUVAL, 2009) e pretende-se saber a fração que representa as quantidades (vinagre e azeite de oliva) no molho e a quantidade de cada ingrediente no molho para tempero.

Os participantes poderão transformar 01 litro de molho em mililitros (1litro $=$ 1000 ml) e dividir pela quantidade total das partes (04) obtendo o operador multiplicativo (250). Dessa forma, eles poderão resolver as questões "a" e "b" da seguinte maneira:

a) $\left(\frac{250\times 3}{1000}\right)=\frac{750}{1000}=\frac{3}{4}$ (no item "a"), e

b) $\left(\frac{250\times 1}{1000}\right)=\frac{250}{1000}=\frac{1}{4}$ (no item "b").

De posse do resultado da divisão $(1000 \div 4 = 250)$ poderão resolver as questões "c" e "d". Para a questão "c", poderão multiplicar a quantidade de partes de vinagre (03) pelo operador multiplicativo (250), portanto, obterão como resposta 750 mililitros. Na questão "d", utilizarão o mesmo raciocínio da questão "c", em que se multiplica $250 \times 1 = 250$ ml.

Possivelmente os participantes apresentarão dificuldades na resolução dessa atividade ao estabelecerem relações inadequadas entre as quantidades consideradas para fazer o molho de tempero. Isso significa que eles podem fazer confusão entre a quantidade das partes (03 e 01) e a quantidade total (04). Nesse sentido, na questão "a" os participantes poderão transformar litro em mililitros (1000 ml) e dividir pela quantidade de partes (3) $\left(\frac{1000}{3}\right)$ apresentando dificuldades em encontrar o resultado da divisão (na questão "c"). Assim, de posse do resultado, poderão chegar a respostas distorcidas na questão "d", porque, ao usarem o significado quociente e dividir pela quantidade das partes (01), terão como resultado $\left(\frac{1000}{1}=1000\ ml\right)$ que, ao ser somado com o resultado encontrado na questão "c" (333,33 ml), encontrarão resultado maior que a quantidade total considerada (1000 ml).

4.3.1.6 Atividade 05: Operador Multiplicativo – Grupo 06

Objetivo: Verificar o modo como os participantes resolvem situações que envolvem frações com significados de operador multiplicativo (MERLINI, 2005; SILVA, 2007), cujos enunciados são expressos por meio de registros de representação semiótica (DUVAL, 2009) mistos (linguagem natural e números).

A atividade é composta por cinco tarefas, em que se solicitou que os participantes explicassem como pensaram ou procederam para chegar aos resultados.

Para resolver as tarefas da atividade, possivelmente, os participantes apresentarão dificuldades em estabelecer relações adequadas entre as quantidades da própria fração e destas com o todo absoluto. Isso significa também que eles podem, dependendo dos dados fornecidos no enunciado, fazer confusão ao comparar o todo da fração com a quantidade total indicada, assim como da parte da fração com a quantidade indicada, seja ela total ou parcial.

Tarefa 01: Calcule:

a) $\frac{3}{5}$ de 355, explique como você pensou/procedeu para chegar às respostas.
b) 40% de 2500 pessoas. Explique como você pensou/procedeu para chegar às respostas.
c) $\frac{2}{5}$ de 3750 metros. Explique como você pensou/procedeu para chegar às respostas.

Caracterização e análise: Solicita-se que os participantes calculem a fração correspondente a um todo. Na questão "a", apresenta-se a informação em registro de representação semiótica na forma de fração $\left(\frac{3}{5}\right)$, em que se solicita que o participante calcule a quantidade relativa à fração dada, considerando-se um todo numérico (355). Na questão "b", apresentou-se o registro de representação semiótica (DUVAL, 2009) numérico percentual (40%), cujo todo (2500) refere-se a pessoas, portanto, trata-se de quantidade discreta (NUNES *et al*, 2005), em que se solicita que os participantes encontrem a quantidade de pessoas referentes à fração dada. A questão "c" apresenta as mesmas características da questão "a", no entanto, o todo se refere a medidas de comprimento (metros), o que caracteriza uma quantidade contínua.

Para resolver a questão "a", os participantes devem compreender que se trata de partes em relação ao todo (MERLINI, 2005; SILVA, 2007). Uma possível solução pode ser obtida dividindo-se o todo por 5, obtendo-se o valor de uma parte a qual deve ser multiplicada por 3: $[(355 \div 5) \times 3] = [71 \times 3] = 213$. Outra possibilidade consiste em multiplicar a quantidade de partes pelo todo e na sequência dividir por 5: $[(3 \times 355) \div 5] = [1065 \div 5] = 213$.

De todo modo, os participantes devem estabelecer relação entre a parte $\left(\frac{3}{5}\right)$ e o todo (355), assim podem comparar a parte tomada do todo com a quantidade total de partes. Podem ainda estabelecer relação entre o todo e a quantidade total de partes para, na continuidade, estabelecer relação com a quantidade de partes tomadas: $[(3 \times 355) \div 5] = [1065 \div 5] = 213$.

Nessa tarefa, é importante identificar o operador multiplicativo (MERLINI, 2005; SILVA, 2007), o que requer o estabelecimento da relação entre o todo e a quantidade total das partes $(355 \div 5 = 71)$. Pode acontecer que alguns dos participantes não reconheçam, por exemplo, que o todo deve ser organizado em 5 partes (que resulta no operador multiplicativo 71) das quais serão tomadas 3. A identificação do operador multiplicativo é condição fundante na atividade 5 como um todo.

Para resolver a questão "b", o participante pode operar com registro de representação semiótica percentual (DUVAL, 2009), ou converter para fração e/ou decimal ($40\% = \frac{40}{100} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4$), o número decimal (0,4) é resultante da porcentagem ou frações equivalentes indicadas e se constitui num operador escalar, o qual, ao ser comparado com a quantidade total, indicará a quantidade das partes tomadas. Dessa forma, os participantes poderão operar com diferentes registros de representação semiótica estabelecendo para cada registro um modo de solucionar a questão.

Utilizando a porcentagem, o participante pode operar, dentre outras maneiras, do seguinte modo:

a) $[(2500 \times 40) \div 100] = 100000 \div 100 = 1000$

b) ou $[(40 \div 100) \times 2500] = 0{,}4 \times 2500 = 1000$

c) ou, ainda, encontrar 10% do total (2500) e em seguida multiplicar por 4 $(250 \times 4 = 100)$.

Ao ancorar seus raciocínios no sistema fracionário, certamente os participantes lançarão mão do raciocínio utilizado para resolver o item "a". Dificilmente os participantes converterão a porcentagem em número decimal e na continuidade estabelecerão relação com a quantidade total (40% = 0,4) e $0{,}4 \times 2500 = 1000$.

Nessa questão, é importante reconhecer o todo da fração e o todo da quantidade total de referência, que resultará no operador multiplicativo (MERLINI, 2005; SILVA, 2007).

Assim, $40\% = \frac{40}{100}$, cujo denominador é o todo da fração, em que estabelece a relação entre o todo, tem-se $2500 \div 100 = 25$, que se constitui no operador multiplicativo.

É possível que os participantes busquem referência em quantidades percentuais que lhes são familiares, como em 10% de 2500 (VIZOLLI, 2006). Provavelmente, os participantes apresentarão dificuldades na conversão (DUVAL, 2009) do valor percentual em fração e/ou em número decimal, o que implicará no processo de solução da tarefa 01.

A questão "c" apresenta características similares à questão "a", portanto, é provável que os participantes utilizarão os mesmos modos de solução e, consequentemente, apresentarão as mesmas dificuldades.

Tarefa 02: Marcos tinha uma coleção de 30 figurinhas e deu a seu amigo Adílio $\frac{2}{3}$ dessa coleção. Com quantas figurinhas Marcos ficou? Explique como você pensou/procedeu para chegar às respostas.

Caracterização e análise: A tarefa 02 se constitui de um enunciado de problema em que se apresentou a quantidade total de uma coleção (30 figurinhas) e solicitou-se que os participantes indicassem a quantidade de figurinhas que restou após o empréstimo de uma fração $\frac{2}{3}$ da coleção. Trata-se de um enunciado cuja coleção é constituída de quantidades discretas (NUNES *et al*, 2005).

Nessa tarefa, está presente o conceito de partes em relação ao todo. O participante apresentará como uma possível solução, a divisão do todo da coleção (30) pelo todo da fração (3), obtendo o operador multiplicativo 10, que ao estabelecer relação com a parte da fração tomada (2) indica a quantidade de figurinhas doadas (20). Ocorre que essa quantidade deve ser subtraída do total de figurinhas da coleção, o que resultará na quantidade restante com que Marcos ficou (10). É possível ainda que os participantes reconheçam a fração que restou, neste caso $\frac{1}{3}$, e ao comparar o todo da coleção com o todo da fração também se chega ao operador multiplicativo (10). Observa-se, no entanto, que esse modo de solução ocorre com menor frequência. Possivelmente alguns participantes poderão apresentar como possível solução a divisão do todo da coleção pela parte tomada das figurinhas (2) e na sequência a multiplicação do resultado (15) pelo valor do denominador (3), que representa o todo das partes, encontrando, desse modo, erroneamente um valor superior ao quantitativo de figurinhas da coleção (45), que não condiz com a solução esperada para o problema.

Tarefa 03: Letícia tem uma coleção de 12 bonecas e emprestou a sua amiga $\frac{2}{6}$ dessa coleção. Quantas bonecas Letícia emprestou? Explique como você pensou/procedeu para chegar às respostas.

Caracterização e análise: Apresenta-se um todo discreto (12 bonecas) de uma coleção da qual se empresta uma fração $\frac{2}{6}$ e solicita-se que o participante responda que quantidade da coleção foi emprestada.

Espera-se dos participantes que apresentem como solução a divisão do todo da coleção (12) pelo todo da fração (6), encontrando, dessa forma, o valor do operador multiplicativo (2), que ao estabelecer relação com a parte da fração tomada (2) obtém-se o valor correspondente às bonecas emprestadas (4). Os participantes também podem lançar mão da fração equivalente $\left(\frac{1}{3}\right)$ e estabelecer relação do todo da coleção de bonecas (12) com o todo da fração (3), chegando assim, ao resultado da quantidade de bonecas emprestadas (4). Provavelmente os participantes não efetuarão a simplificação da fração $\frac{2}{6}$.

Tarefa 04: $\frac{3}{5}$ de uma estrada corresponde a 75 km. Qual a distância da estrada? Explique como você pensou/procedeu para chegar às respostas.

Caracterização e análise: Trata-se de uma quantidade contínua, cuja parte (75 km) representa uma fração $\left(\frac{3}{5}\right)$ e solicita-se que os participantes encontrem o todo. Isso significa que se disponibilizou o valor absoluto da fração apresentada e se quer o valor absoluto de toda a quantidade da fração.

Para resolver essa situação, os participantes devem compreender que foram apresentadas a parte correspondente a fração e que a pergunta reside em encontrar a quantidade total. Possivelmente, os participantes estabelecerão relação do todo da fração com a parte da quantidade apresentada $(75 \div 5)$. Quando na verdade devem estabelecer relação da parte dada com a parte da fração $(75 \div 3)$ para obter o operador multiplicativo $(75 \div 3 = 25)$ que ao se comparar com o todo da fração tem-se a distância total da estrada $(25 \times 5 = 125)$.

Tarefa 05: Vovó comprou um quilograma de açúcar para fazer bolo. Foram utilizados: 25% para fazer a massa; 0,2 kg para o preparo do recheio; $\frac{2}{20}$ do açúcar para a produção da cobertura.

a) Qual a quantidade de açúcar utilizado para fazer a massa?
b) Qual a quantidade de açúcar utilizado para fazer o recheio?
c) Qual a quantidade de açúcar utilizado para fazer a cobertura?
d) Qual a quantidade de açúcar utilizada para fazer o bolo?
e) Qual a quantidade de açúcar que restou?
f) Que fração do quilograma de açúcar restou?
g) Explique como você pensou/procedeu para chegar às respostas.

Caracterização e análise: Essa tarefa refere-se a quantidades apresentadas em números relativos (25%; 0,2 e $25\%; 0{,}2 \text{ e } \frac{2}{20}$) referente a uma receita de bolo, em que a quantidade de partes dos componentes indicam quantidades contínuas, foi apresentada em registro de representação semiótica numérico (percentual, decimal e fracionário). Ao adicionar leite, açúcar, e farinha, por exemplo, para produzir a massa do bolo, tem-se uma mistura homogênea, o que denota que se trata de uma quantidade contínua e intensiva. O enunciado apresenta a quantidade total (1kg de açúcar), da qual foram utilizadas frações para preparar, respectivamente, a massa, o recheio e a cobertura, em que a pergunta recai sobre a quantidade e a fração restante.

Uma vez que o problema disponibilizou a quantidade total $(\text{todo} = 1\text{kg} = 1000\text{g})$, assim como a utilização de diferentes frações desse todo $(25\%, 0{,}2\text{Kg e } \frac{2}{20})$ e solicita que os participantes indiquem as respectivas quantidades relativas às frações e ao que restou, possivelmente eles transformarão 1 kg em gramas (1000g) e converterão (DUVAL, 2009) as indicações em porcentagem (25%) e decimal (0,2Kg), em frações.

Assim:

a) $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$;

b) $0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$; e simplificando a fração $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

Com isso perceberão que se trata de:

- $\frac{1}{4}\text{kg} = 1000 \div 4 = 250\text{g}$;
- $\frac{1}{5}$ de $\text{kg} = 1000 \div 5 = 200\text{g}$;
- e que $\frac{1}{10}\text{kg} = 1000 \div 10 = 100\text{g}$.

A partir desses dados, responderão às questões “a”, “b” e “c” da tarefa. Para encontrar a resposta do que se pede na questão “d”, possivelmente adicionarão os dados já obtidos (250 + 200 + 100 = 550g). Para responder à questão “e”, subtrairão do peso total do açúcar (1000 g), o que foi utilizado. Assim, 1000 – 550 = 450g.

A questão “f” pergunta a fração restante, o que possivelmente levará os participantes a concluir que 450g é menor que meio kg, mas terão dificuldades em perceber que se trata da fração $\frac{450}{1000}$, o que é possível transformar na fração irredutível ($\frac{45}{100} = 45\%$) ou ainda $\frac{45}{100} = \frac{5}{9}$.

Apresentamos nesta seção o deslindar metodológico do trabalho. Inicialmente, caracterizamos o estudo quanto a abordagem, natureza, objetivos, procedimentos, considerando as contribuições de vários autores (ARAUJO, 2009; SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009; PRODANOV; FREITAS, 2013; MARCONI; LAKATOS, 2010; GIL, 2002; FIORENTINI; LORENZATO, 2006). Ademais, caracterizamos as atividades e tarefas que foram elaboradas para o desenvolvimento da pesquisa, considerando os significas de fração, registros de representação semiótica e características das quantidades. Bem como, a Engenharia Didática de 1ª Geração e de 2ª Geração, ancorados em Artigue (1996), com contribuições de Pais (2015), Oliveira (2013), Machado (1999), Almouloud e Silva (2012) e Chevallard (2009).

Na seção seguinte, analisamos os dados obtidos por ocasião do desenvolvimento das atividades com os professores e professoras participantes da pesquisa durante a realização de um Curso de Formação Continuada.

5 A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE FRAÇÃO

Trataremos nesta seção de analisar os dados e as informações produzidos durante a pesquisa. Para tanto, organizamos os instrumentos 01 e 02 em blocos. O instrumento 01 foi organizado em quatro blocos: A – Dados Pessoais; B – Dados Profissionais; C – Relação do participante com a Matemática; e D – Relação do participante no processo de ensino e aprendizagem de fração. Por meio do instrumento 02, analisamos o modo como os professores/participantes resolveram as atividades envolvendo o conceito de fração.

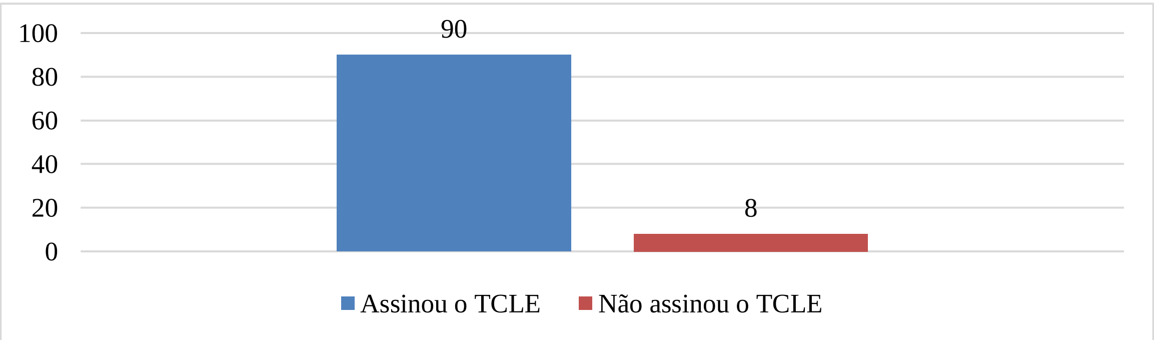
As análises do instrumento 02 de produção de dados estão organizadas em cinco blocos: B01, que trata de tarefas com o significado parte-todo; B02, que aborda o significado número; B03, que contempla o significado medida; B04, que considera o significado quociente e B05 que se relaciona ao significado operador multiplicativo.

5.1 Os participantes

No primeiro encontro estiveram presentes 98 professores que ensinam Matemática nos anos iniciais. Cada um recebeu um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) em duas vias, que foi lido em som audível pelos formadores e acompanhado pelos participantes, a fim de esclarecer pontos que porventura não estivessem claros. Tínhamos a intenção de que todos os que decidissem participar das pesquisas se identificassem nesse termo por seus nomes, mas, caso não se sentissem à vontade, poderiam optar pela identificação por meio de pseudônimos.

O Gráfico 2 mostra a quantidade de professores que optaram em participar das pesquisas e os que se recusaram.

Gráfico 2: Número de professores no 1º Encontro



Fonte: Elaborado pelo autor.

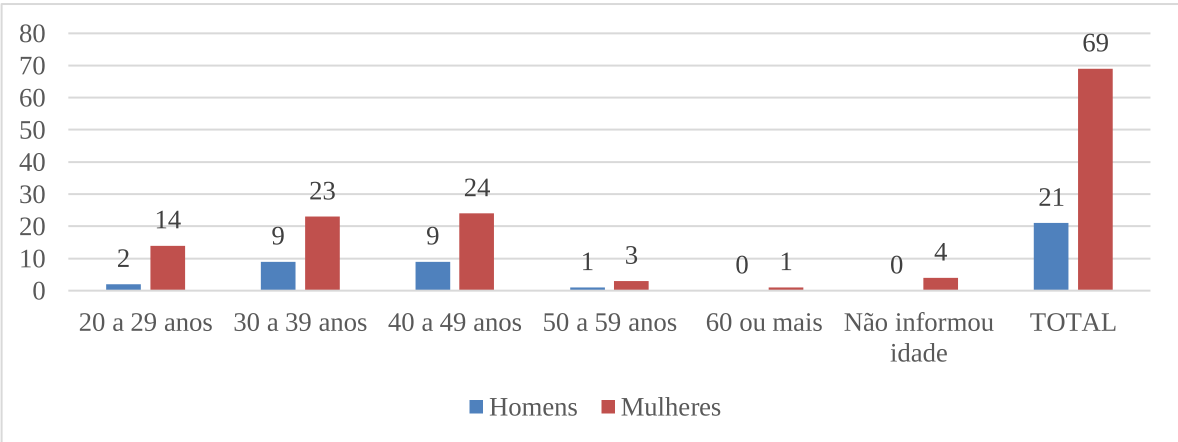
O Gráfico mostra que, dos 98 participantes, apenas 8 se recusaram a participar das pesquisas. Registra-se, no entanto que 2 professores entregaram o TCLE assinado, mas não devolveram os instrumentos 01 e 02. Isso significa que 98 professores participam da formação continuada e 88 efetivamente participaram da pesquisa.

Foi-lhes explicado que todas as informações prestadas ficariam em sigilo, em conformidade com o Comitê de Ética em Pesquisa da UFT (CEP-UFT). Assim, 88 professores concordaram que suas produções integrassem as pesquisas. Destes, 54 autorizaram a indicação de seus respectivos nomes, 31 optaram por pseudônimos e 3 não se posicionaram. Os que não se posicionaram fizemos a opção de identificá-los por pseudônimos. Assim, 61,36% dos participantes foram identificados pelos seus respectivos nomes e 38,64% por pseudônimos.

5.1.1 Caracterização dos participantes da pesquisa

As informações obtidas com os questionários revelam que os participantes da pesquisa têm de 21 a 60 anos de idade, conforme pode ser visto no gráfico 03, a seguir.

Gráfico 3: Quantidade de professores por faixa idade



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao analisar o gráfico 4, observamos que a maioria dos participantes são do sexo feminino, o que corresponde a $76{,}67\%$, e que o número de educadores do sexo masculino corresponde a menos de $\frac{1}{3}$ dos envolvidos $\left(23{,}33\% = \frac{23{,}33}{100} = \frac{2333}{1000}\right)$. Nota-se, também que, em todos os intervalos de idade considerados, a quantidade de professoras é significativamente superior à de professores.

Os dados sobre a formação dos professores foram sistematizados no quadro 13, a seguir.

Quadro 15: Formação inicial dos participantes da pesquisa

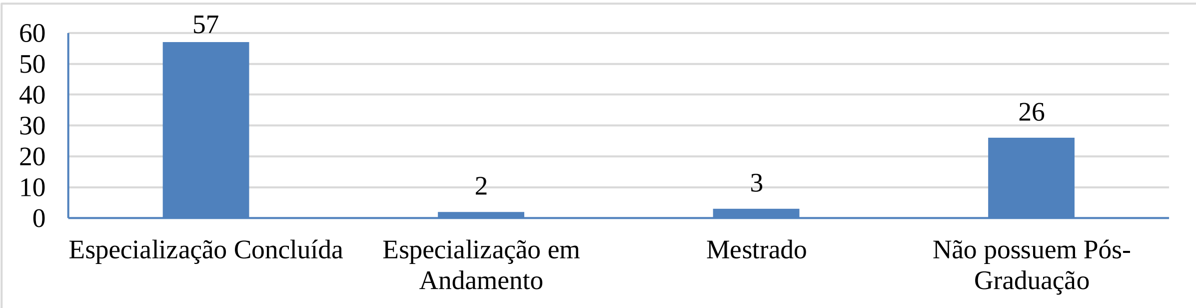
Formação	Quantidade	Frequência
Superior Completo	76	86,36%
Normal Superior	10	11,36%
Magistério (Ensino Médio)	01	1,13%
Não informaram	01	1,13%

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os dados mostram que 86 dos participantes possuem graduação completa, o que corresponde a 97,72%; 01 (um) possui formação em Magistério (Ensino Médio), mas está cursando graduação em Letras e conta com 18 anos de tempo de serviço no magistério, atuando nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Um professor não indicou sua formação em nível médio ou superior, mas respondeu que possui curso de especialização.

O número de participantes que possuem pelo menos um curso de pós-graduação é expressivo, como pode ser verificado no gráfico 4, a seguir.

Gráfico 4: Formação dos professores em nível de pós-graduação



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os dados mostram que 60 professores possuem algum curso de pós-graduação, o que corresponde a 68,18% dos participantes, destes, 03 (três) são mestres. 2,27% dos participantes da pesquisa estão cursando especialização. Essas informações revelam que os professores têm buscado aperfeiçoamento profissional. Esses dados mostram que os docentes estão empenhados e preocupados com a qualidade do ensino e da aprendizagem dos estudantes.

Dentre os pesquisados, 29,5% não se manifestaram em relação ao curso de pós-graduação. Destes, 16 possuem menos de cinco anos de magistério e de atuação nos anos iniciais.

Os dados mostraram que 43 professores possuem até cinco anos de atuação nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o que equivale a 48,8% dos participantes; 22,7% têm entre seis e dez anos e 28,4% lecionam nas séries iniciais há mais de dez anos.

5.2 Relação dos participantes com a Matemática

As seis perguntas remetem à relação dos professores e professoras com a própria matemática durante a realização de seu curso superior. Questionamos aos participantes: (a) que disciplinas de Matemática tiveram durante a graduação; (b) quais dessas disciplinas davam atenção ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática; (c) que conteúdos de Matemática haviam sido estudados; (d) qual seria a relação do professor(a) com a Matemática; (e) qual seria a relação do professor(a) com o conteúdo de fração; e (f) como aprendeu fração.

Em relação às disciplinas que os participantes cursaram durante o Ensino Superior, a grande maioria estudou pelo menos uma disciplina ligada a Matemática durante suas respectivas graduações. Dentre essas disciplinas, a que mais se destaca é a “Matemática Básica”, que representa 26,9% de todas as disciplinas mencionadas pelos participantes. Em contrapartida, 21,6% dos participantes afirmaram não ter estudado nenhuma disciplina ligada a Matemática durante seus cursos de graduação.

Schastai, Farias e Silva (2017) comentam que a formação matemática do professor que ensina Matemática nas séries iniciais concentra-se muito no “como fazer”, em detrimento de um olhar sobre os conteúdos matemáticos que devem ser ensinados. Essa situação não é diferente para o professor graduado em Matemática, uma vez que sua formação se concentra em praticar matemática, ficando em segundo plano o processo necessário à prática do professor de Matemática.

> (...) se por um lado é inaceitável a formação de um professor para atuar nos anos iniciais que não amplie nem aprofunde os conhecimentos previstos, também não é possível aceitar um curso de licenciatura que, em sua formação, não considere ou não tenha “vocação” para o ensino de alunos mais novos (SCHASTAI; FARIAS; SILVA, 2017, p. 19).

É importante destacar que outras disciplinas foram citadas pelos participantes: Estatística (14,7%), Fundamentos teóricos e metodológicos do Ensino da Matemática (9,1%), Fundamentos metodológicos da Matemática (7,9%), Matemática básica para as séries iniciais (7,9%) e Matemática financeira (7,9%).

Outro dado importante a ser considerando é o relato que a professora Sandra Celestino dos Santos escreveu em seu questionário. Ela comenta que cursou Pedagogia e Matemática, e destaca que “no curso de Pedagogia [havia] somente a matemática básica, voltada para o Ensino Fundamental. No curso de Matemática, estudei todas as disciplinas voltadas ao ensino da matemática" (SANTOS, 2018).[27] De acordo com esse relato, nota-se que na formação em Pedagogia dessa professora houve pouco contato com os conteúdos e disciplinas ligados à Matemática.

Os dados mostram que, a cada 100 professores, 22 não estudaram Matemática durante a graduação. Essa situação é preocupante no que se refere à qualidade do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental, uma vez que só se ensina aquilo que se aprendeu (SACRISTÁN, 2002).

Dos 88 participantes, Santos (2018) cursou o maior número de disciplinas ligadas à Matemática, seguida por Feitosa (2018), que cursou 5 (cinco) disciplinas (também graduado em Matemática). Um total de 50% dos participantes estudou somente 1 (uma) disciplina da área da Matemática.

Entendemos que essa quantidade de disciplinas estudadas durante a formação dos professores é insuficiente para levá-los à aprendizagem dos conteúdos matemáticos das séries iniciais, principalmente do conceito de fração. O quadro 14 mostra a quantidade de disciplinas ligadas à Matemática que os participantes cursaram durante o Ensino Superior.

Quadro 16: Quantidade de disciplinas de Matemática que os participantes cursaram

Número de disciplinas	Número de participantes	Percentual
01	44	50,00%
02	14	15,91%
03	7	7,95%
04	2	2,27%
05	1	1,14%
06 ou mais	1	1,14%
Nenhuma	19	21,59%
TOTAL	88	100%

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os dados do quadro acima indicam que as dificuldades dos professores em ensinar conteúdos de Matemática nas séries iniciais podem estar ligadas à quantidade de disciplinas ligadas à Matemática que tiveram durante a graduação. Quase $\frac{1}{4}$ (um quarto) deles não estudou nenhuma disciplina ligada a Matemática e metade cursou apenas uma disciplina dessa área.

---

[27] As respostas dos participantes foram transcritas neste texto exatamente como eles redigiram nos formulários aplicados durante a pesquisa.

Os dados e informações nos mostram algo preocupante em relação ao ensino de Matemática nas séries iniciais, uma vez que mais de 70% dos professores cursaram apenas uma ou nenhuma disciplina ligada a Matemática. “A opinião generalizada é a de que houve, por muito tempo, nas ciências da educação, negligência em relação aos saberes necessários para que o desenvolvimento da capacidade e competências fosse suficiente para o ensino formal que hoje se pretende” (SCHASTAI; FARIAS; SILVA, 2017, p. 18-19).

Os relatos de alguns participantes da pesquisa confirmam o tipo de negligência que Schastai, Farias e Silva (2017) mencionam. Por exemplo, Moura (2018) afirma: “Matemática durante a graduação deu-se de forma metódica, tipo: a abordagem, o aluno, o lúdico como forma de despertar o interesse pela matemática”. Barros (2018) escreve: “No meu curso, Letras, não tive nenhuma disciplina de matemática. Em Pedagogia, noções básicas, teóricas e pedagógicas”.

Esses relatos nos fazem lembrar do que D’Ambrosio (1991; 2005) afirma. Para ele, a maneira de ensinar essa ciência não está despertando nos estudantes o interesse por ela. O ensino por meio de métodos, regras e macetes não faz com que o estudante tenha interesse em aprender Matemática, uma vez que as aulas são cansativas e sem sentido para eles.

Usar o lúdico para despertar o interesse dos estudantes parece-nos uma iniciativa interessante, mas o professor não pode ficar preso a apenas essa metodologia. Quando se trata do conceito de fração, é importante que os professores e professoras, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, façam uso do lúdico e de materiais concretos, mas que mostrem, também, diferentes registros de representação (DUVAL, 2009). Além disso, é necessário que eles trabalhem com os estudantes as características das quantidades (NUNES *et al*, 2005; SILVA, 2007) e os significados de fração (MERLINI, 2005).

Durante a análise dos dados da pesquisa, percebeu-se que alguns participantes confundiram “disciplina” com conteúdos matemáticos (Números Naturais, por exemplo), com eixos temáticos da Matemática (como “Tratamento da Informação”) ou com as quatro operações. A professora Lebesgue (2018), por exemplo, respondeu que estudou “matemática básica do Ensino Fundamental: 4 operações, números inteiros e fracionados”. Essa fala evidencia confusão entre disciplina e conteúdos matemáticos, todavia aponta que a professora estudou fração durante sua formação.

Outro exemplo é o da professora Achure (2018), graduada em Letras, que escreve: “Fiz complementação pedagógica e tive o mínimo de contato com a matemática. Apenas as quatro operações (superficialmente)”. Nota-se que ela não teve contato com o conteúdo de fração durante sua graduação, tampouco cursou alguma disciplina ligada a Matemática. Ela afirma ter feito apenas um estudo superficial sobre as quatro operações matemáticas (soma, subtração, divisão e multiplicação). Para Schastai, Farias e Silva (2017), a formação inicial é indispensável, mas a participação em cursos de formação continuada é extremamente importante pelo fato de que, durante a formação inicial, existe um distanciamento com a prática em sala de aula.

De acordo com os dados da pesquisa, os professores mencionaram 37 disciplinas ligadas a Matemática estudadas durante a graduação. Dessas 37 disciplinas, 26 estão ligadas ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, conforme os relatos dos participantes. Além disso, 47 professores responderam que nenhuma disciplina dava atenção ao processo de ensino e aprendizagem, ou seja, 53,4% dos professores que ensinam Matemática nas séries iniciais não aprenderam na graduação fundamentos teóricos e metodológicos ligados a Matemática.

Também chama a atenção o fato de que 07 professores apontaram a disciplina de Estatística e outros 09 a de Matemática Básica como disciplinas que dão atenção ao processo de ensino e aprendizagem.

Assim, as dificuldades que muitos professores têm na compreensão de alguns conceitos e no ensino de alguns conteúdos podem ter relação com o pouco aprofundamento nas disciplinas de Matemática durante a formação inicial e com a falta de conhecimento sobre como ensinar determinado conceito. Isso fica evidente na fala da professora Tales de Mileto (2018): “Na verdade, eu tenho muito dificuldade em matemática por quê as vezes não consigo assimilar bem, sempre que vou aplicar algum conteúdo relacionado ao tema eu estudo. Mas a faculdade em si não me ensinou muita coisa relacionado ao tema”. Essa professora não cursou nenhuma disciplina de Matemática durante sua formação inicial e, devido a isso, apresenta muita dificuldade nessa área. Ela argumenta que a faculdade não ensinou muita coisa sobre a Matemática e que não consegue assimilar bem os conteúdos, o que demanda esforços em estudar tais conteúdos antes de ensiná-los.

A professora Silva (2018) compartilha dessa mesma situação. Segundo ela, as disciplinas na faculdade são, em sua maioria, teóricas, e o professor não é preparado para os conteúdos de sala de aula: “A maioria foi teórica, na faculdade o professor não é preparado para os conteúdos de sala” (SILVA, 2018).

Ao analisar os dados, observamos que os participantes afirmaram ter cursado, durante a graduação, poucas disciplinas que dão atenção ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Dentre as disciplinas citadas, destacam-se a Didática da Matemática, Ensino e Metodologia da Matemática, Fundamentos Teóricos e Metodológicos do Ensino da Matemática e Fundamentos Metodológicos do Ensino e Aprendizagem. Apenas 22 professores e professoras tiveram contato com disciplinas como essas, ligadas aos processos de ensinar e aprender Matemática, o que representa 25% de todos os participantes.

No quadro a seguir, destacamos os conteúdos estudados pelos participantes em seus cursos de graduação, considerando as disciplinas de conteúdos específicos da Matemática e aquelas ligadas ao processo de ensino e aprendizagem.

Quadro 17: Conteúdos de Matemática estudados pelos participantes da pesquisa

Conteúdos	Número de professores	%
Quatro operações matemáticas	40	45,45
Noções básicas de fração	29	32,95
Não estudaram conteúdo de Matemática	24	27,27
Porcentagem	9	10,22

Fonte: Elaborado pelo autor.

As respostas indicam que grande parte dos professores estudou algum conteúdo de Matemática durante suas respectivas formações iniciais. Dentre esses conteúdos, destacam-se: as quatro operações matemáticas, estudadas por 45,45% dos participantes; noções básicas de fração, estudadas por 32,95% dos professores; e porcentagem, estudada por 10,22%. Os dados revelam, ainda, que 27,27% professores $\left(\text{mais de } \frac{1}{4}\right)$ não tiveram conteúdo dessa ciência durante suas formações iniciais.

Nota-se, portanto, que a maioria dos professores e professoras estudou e/ou conhece pelo menos um conteúdo ligado a Matemática. Um dado aparentemente incoerente é que 24 professores disseram não ter estudado nenhum **conteúdo** de Matemática. Mas o número de professores que disseram não ter estudado nenhuma **disciplina** de Matemática é menor, totalizando 19 professores. Ou seja, alguns dos que cursaram alguma disciplina de Matemática disseram que não estudaram nenhum conteúdo dessa área. Uma justificativa para isso pode ser o fato de os participantes não recordarem o nome do conteúdo, ou terem confundido, em alguns casos, conteúdo com disciplina.

Os professores demonstram uma boa relação com a Matemática, embora muitos tenham respondido que possuem muita dificuldade com ela. Tal dificuldade pode estar relacionada às poucas disciplinas estudadas durante a graduação.

O que se observa na formação inicial é que a formação matemática está muito distante dos currículos escolares e que os professores, quando estão em processo formativo, apresentam sentimentos negativos em relação à Matemática. Isso pode implicar em bloqueios relacionados à aprendizagem e ao ensino dessa disciplina (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2009).

Quando questionamos sobre a relação que os professores têm com a Matemática, obtivemos respostas como: “Faz parte do meu dia-a-dia, do meu trabalho, tenho mais afinidades que outras disciplinas. Se fosse para distribuir a carga horária, preferia ficar só com as aulas de matemática” (FEITOSA, 2018); “uma relação formidável” (ALENCAR, 2018); “gosto da matemática, porem tenho inúmeras duvidas de como utiliza-la de forma correta e objetiva em sala de aula” (SOUSA, 2018); “a minha disciplina favorita desde a educação infantil, tenho afinidade com a disciplina” (RUSSELL, 2018).

Trinta e oito (38) participantes disseram que sua relação com a Matemática é boa, agradável, que gostam muito, gostam ou amam trabalhar com ela, e poucos chegaram a afirmar que essa é sua disciplina preferida. Outros definem sua relação com a Matemática como básica, estável ou razoável. Ainda outros afirmam que só se relacionam com a Matemática devido à obrigatoriedade de trabalhá-la em sala de aula.

Um número considerável de professores afirmou não gostar da Matemática, considerando-a muito difícil, e isso os leva a apresentar muitas dúvidas em relação ao conteúdo. Outro efeito dessa falta de afinidade com a Matemática é que as aulas acabam se tornando praticamente uma transmissão das informações contidas nos livros. Alguns professores afirmaram não se identificar com a disciplina, que ela é pouco amigável e que nunca tiveram interesse por ela.

Gödel (2018) escreve: “Eu tenho dificuldades na matemática porque tenho trauma desde a infância com relação ao aprendizado transmitida pela a professora”. Nesse caso, as dificuldades em relação à Matemática estão ligadas a um “trauma” sofrido durante a infância. Segundo o participante, o trauma está ligado ao ensino proporcionado por sua professora na Educação Básica. Cabe-nos aqui reiterar a necessidade de os professores potencializarem os saberes e conhecimentos prévios que os estudantes têm quando estão na escola, em vez de tratarem os alunos como ignorantes em relação ao conteúdo que está sendo ministrado. É importante que os educadores considerem a capacidade dos meninos e meninas de resolver determinados problemas exteriores ao ambiente escolar. Assim, os estudantes poderão potencializar seus conhecimentos na sala de aula e serão participantes ativos na construção ou aprendizagem de novos saberes e conhecimentos.

A fala de Gödel (2018) vai ao encontro do que Zabala (1998, p. 29) destaca:

> É preciso insistir que tudo quanto fazemos em aula, por menor que seja, incide em maior ou menor grau na formação de nossos alunos. A maneira de organizar a aula, o tipo de incentivos, as expectativas que depositamos, os materiais que utilizamos, cada uma destas decisões veicula determinadas experiências educativas, e é possível que nem sempre estejam em consonância com o pensamento que temos a respeito do sentido e do papel que hoje em dia tem a educação.

Quando ainda era estudante, Gödel sofreu uma influência negativa por parte da prática de seu(a) professor(a). E essa situação – não sabemos ao certo qual – levou o então estudante a ter determinado receio quanto à Matemática. As experiências educativas não despertaram no participante o interesse pela Matemática e seu ensino, deixando-o em situação complicada diante da necessidade de ensiná-la na Educação Básica.

Alguns professores disseram ter pouca relação com a Matemática, justificando que isso ocorre por não terem estudado, com certo grau de aprofundamento, essa ciência durante a graduação. Isso fica evidente nas falas de D'Alembert (2018), quando argumenta que "a minha relação é pouca, pois na faculdade tivemos poucas aula sobre o ensino da matemática", e de Lebesgue (2018), que diz ter "uma relação pouco distante devido o curso não ter uma grande grade de conteúdos para o desenvolver melhor da matéria, estudamos na graduação matemática base".

Sabemos que os cursos de licenciatura desempenham importante papel na formação de professores da Educação Básica, refletindo diretamente na atuação do educador em sala de aula. Todavia, ao analisar as respostas dos participantes, observa-se que ainda existem lacunas que devem ser superadas. Os dados nos revelaram que as instituições de ensino superior não preparam os estudantes para ensinar os conceitos e conteúdos próprios da Educação Básica. Isso fica claro quando os participantes respondem que na graduação há muita teoria e que, muitas vezes, essas teorias não apresentam relação com os conteúdos básicos do Ensino Fundamental e Médio.

Nacarato, Mengali e Passos argumentam que a formação em curso superior dos professores que atuam na Educação Básica está distante do que as tendências curriculares propõem. "Como consequência desse distanciamento entre os princípios dos documentos curriculares e as práticas ainda vigentes na maioria das escolas, essas futuras professoras trazem crenças arraigadas sobre o que seja matemática, seu ensino e sua aprendizagem" (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2009, p. 23). Essas crenças acabam se refletindo na prática educacional dos professores.

A respeito da relação dos participantes com o conteúdo de fração, constatamos que os professores, em sua maioria (47,7%), demonstraram ter dificuldades para compreendê-lo e para ensiná-lo em sala de aula. Muitos deles responderam que têm uma relação básica com o conceito de fração, pois conseguem dominar apenas "frações simples" e encontram obstáculos para entender frações equivalentes.

Muitos professores recorrem a materiais concretos, ao lúdico e a situações do dia a dia para ensinar o conteúdo de fração. Apesar disso, eles reconhecem que não se sentem confortáveis com esse conteúdo e que seu conhecimento sobre esse assunto é raso. Em alguns casos, eles justificam que as dificuldades são oriundas de uma graduação que não abordou o conteúdo. Outros participantes afirmaram que só começaram a ter contato com a fração quando precisaram planejar suas aulas de acordo com um referencial curricular que exigia o ensino desse conteúdo.

Em contrapartida, vários professores (22,72%) responderam ter uma boa relação com a fração e argumentam ser um conteúdo interessante, que pode ser aplicado no cotidiano. Todavia, reconhecem que encontram alguns desafios em sala de aula e que poderiam melhorar.

Outros começaram a estabelecer alguma relação com a fração quando tiveram que ministrar aulas sobre esse conteúdo. Alguns disseram que estudaram esse assunto apenas durante o Ensino Médio e que estão sempre prontos para aprender mais. Quando encontram determinadas dificuldades, procuram videoaulas e pesquisas diversas a fim de sanar as limitações antes de ensinar em sala de aula.

Quando perguntamos como os participantes haviam aprendido fração, obtivemos as respostas constantes no Quadro 16.

Quadro 18: Como os participantes aprenderam fração

Formas de aprendizagem de fração	Quantidade de participantes	%
Só no Ensino Médio (voltou a estudar agora para passar aos alunos) ou na escola ou na faculdade.	26	29,54
Somar e dividir com brinquedos, bolos e pizzas ou com o lúdico.	20	22,73
Pesquisando aula na internet, estudando antes de ensinar, estudando sozinho.	15	17
Tradicional, definição e exercícios de fixação.	11	12,5
Não respondeu.	4	4,54
Não aprendeu.	3	3,41
Quando era estudante, por causa do interesse e participação nas aulas.	3	3,41
Com ajuda dos professores.	3	3,41
De maneira rápida, sem aprofundar.	1	1,14
Com atividades dos filhos.	1	1,14
Com a prática.	1	1,14
TOTAL	**88**	**99,96**

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se que apenas 3,41% dos professores não aprenderam o conteúdo de fração, enquanto que a grande maioria dos participantes conseguiu aprender o conteúdo de maneiras diversas. Destacamos que, dentre os 29,54% que aprenderam no Ensino Médio, na escola ou na faculdade, apenas 4 dos 26 professores aprenderam o conteúdo de fração na graduação.

Outro dado importante é que 22,73% dos professores participantes da pesquisa aprenderam o conceito de fração fazendo uso de materiais concretos, figuras ou desenhos e divisão de bolos e pizzas. É bem provável que eles usem esses métodos durante suas aulas nas séries iniciais. Também é possível que esses participantes façam uso apenas do significado parte-todo (MERLINI, 2005) e que mobilizem formas geométricas para representar as frações (DUVAL, 2009).

Com base nesses dados, aventamos que os cursos de formação de professores devem implementar em seus currículos disciplinas que contemplem os conteúdos próprios dos Anos Iniciais. Dessa maneira, os futuros professores terão, pelos menos, contato com diferentes conteúdos matemáticos que são ensinados na sala de aula da Educação Básica.

5.3 Relação dos participantes no processo de ensino e aprendizagem de fração

Aqui objetivamos compreender a relação que os professores e professoras desempenham nos processos de ensino e de aprendizagem de fração. Para tanto, realizamos os seguintes questionamentos: (a) Você tem dificuldades para ensinar fração? Explique/justifique; (b) Como você trabalha o conteúdo de fração com as crianças? (Metodologia, material, tipo de atividades, avaliação, ...); (c) Defina fração; (d) Represente de todas as maneiras que você consegue as frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{2}$; (e) Quanto tempo semanal é dedicado ao ensino de Matemática na classe em que você atua? (f) Quais as dificuldades das crianças para compreender fração? (g) Qual o papel do professor no processo de ensino de fração nos anos iniciais? (h) E na aprendizagem? (i) Qual o papel dos estudantes no processo de aprendizagem de fração nos anos iniciais? (j) O que você entender por sequência didática?

As respostas relativas às dificuldades para ensinar fração foram organizadas em oito categorias, conforme disposto no quadro 19, a seguir.

Quadro 19: Dificuldades dos professores para ensinar fração

Categorias	Número de participantes
Tem dificuldade para ensinar fração.	42
Não tem dificuldade para ensinar fração.	18

Pouca dificuldade para ensinar fração.	10
Nas frações simples não tem dificuldades, mas nas complexas (equivalência) sim.	9
Não respondeu.	5
Nunca ensinou ou será o primeiro ano.	4
TOTAL	**88**

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os dados mostram que 47,7% dos participantes apresentam dificuldades para ensinar o conteúdo de fração. Para justificar a falta de domínio da Matemática, alguns afirmam que é o fato de não terem se formado/graduado no curso de Matemática ou de não gostarem do conteúdo. Um dos participantes assevera: "Eu não tenho dificuldade em transmitir, mas confesso que não tenho domínio necessário para ensinar. Porém, eu sempre busco me informar através de aulas, vídeos e outras fontes para repassar" (TALES DE MILETO, 2018).

A dificuldade não reside no ato de ensinar, mas sim no domínio do conteúdo. Para superar essa dificuldade, percebe-se o participante recorre a videoaulas e pesquisas. Outros professores, como Barros (2018) e Cunha (2018), justificam suas dificuldades transferindo a "culpa" para os estudantes. Esse fato é confirmado pelos seguintes relatos: "Sim. Pois em alguns casos a falta de interesse da criança deixa a gente desmotivada" (BARROS, 2018).

> Sim, tenho um pouco de dificuldade para ensinar fração, acredito que seja pelo fato de dar aulas para crianças que tem entre 9 e 11 anos, e devido a falta de maturidade dos mesmos, acabo encontrando barreiras para ensinar. Devido essa dificuldade sempre utilizo material concreto para poder ensinar, e acredito que usando materiais pedagógicos concretos o ensino se torna mais significativo para o público alvo (CUNHA, 2018).

As falas dos participantes nos preocupam, uma vez que o público atendido por eles necessariamente não tem a maturidade que alguns professores exigem. São crianças que estão em fase de desenvolvimento, cabendo aos educadores proporcionar o ensino com vistas à aprendizagem dos estudantes, construindo, aos poucos a motivação, o interesse e a maturidade quanto ao conteúdo de fração. Para isso, é importante que se mobilizem os mais diversos recursos educacionais.

Em contrapartida, 20,5% dos participantes responderam não apresentar dificuldades para ensinar fração. Laplace (2018) acredita que não possui limitações porque se trata de "um dos conteúdos matemáticos do fundamental I mais prazerosos para se trabalhar com os alunos, pois tem muita aproximidade com o cotidiano da criança, o que facilita o ensino e aprendizagem de forma lúdica, prática e significativa". Para Nascimento (2018), quando aparece alguma situação mais "complicada", ela busca sua compreensão antes de ir à sala de aula.

> Não. Somente quando elas são muito complexas é que preciso pesquisar e estudar bem as regras para não confundi-las. Como os conteúdos de fração do 4º ano (turma/série no qual trabalhei no ano passado) não eram complexas, me senti à vontade e não tive dificuldade em repassar o conhecimento. Já com a minha filha, que estudo no 6º ano no ano passado, tive que pesquisar para ajudá-la. Mas nada que não tenha dado para entender (NASCIMENTO, 2018).

Nota-se, portanto, que alguns participantes (cerca de $\frac{1}{5}$ dos professores) não apresentam dificuldades para ensinar o conteúdo de fração e, quando encontram alguma situação que é aparentemente "complexa", buscam meios de compreensão do problema antes de ensinar aos estudantes. Isso mostra que esses educadores não estão acomodados quanto às suas próprias aprendizagens. Sempre que se deparam com algum conteúdo de fração que é mais complexo e exige pesquisa adicional, esses professores buscam reforçar seu próprio aprendizado. Uma pequena parcela respondeu ter pouca dificuldade, cerca de 11,7%.

Quando questionados a respeito do modo como trabalham o conteúdo de fração, considerando metodologia, materiais utilizados, tipos de atividades e maneira de avaliação, os participantes deram diferentes respostas, as quais convergem para as categorias apresentadas no quadro 20.

Quadro 20: Modo como os participantes trabalham fração com os estudantes

Categorias	**Números de participantes**
Aula expositiva e explicativa com auxílio de material concreto.	70
Ainda não trabalhou com fração.	12
Trabalha somente com o livro.	3
Não respondeu.	2
Avaliações. Atividades diferenciadas.	1
TOTAL	**88**

Fonte: Elaborado pelo autor.

A grande maioria dos participantes respondeu que trabalha o conteúdo de fração por meio de aulas expositivas e explicativas, nas quais fazem uso de materiais concretos que podem ser manipulados pelos estudantes. Dentre esses materiais, os professores citaram dominós, fichas, papéis sulfite e outros materiais visuais como pizzas, figuras geométricas e vídeos.

Percebe-se que os professores buscam fazer com que o ensino seja prazeroso e que os estudantes percebam a aplicabilidade desse conteúdo nas situações cotidianas. Vejamos o que escrevem alguns participantes ao responder o questionamento sobre a maneira como trabalham fração.

> Utilizo quadro branco e procuro ilustrar com desenhos, também objetos, uso material como uma folha de caderno, ou mesmo objetos dentro da própria sala de aula do qual

> eles compreendam melhor para melhor processo de ensino e aprendizagem. Também gosto de usar vídeos aulas que possam ajuda-los compreender melhor o assunto, também livros que explicam o conteúdo por meio de uma história (CAUCHY, 2018).

Nascimento (2018) afirma:

> Primeiramente exponho o conteúdo, pesquisado por mim mesmo para que fique bem claro para o aluno. Depois da explicação, sempre convido o aluno a ir ao quadro para resolver a fração. Depois imprimo atividades com frações, faço atividades com material lúdico; na maioria das vezes criado por mim, e já cheguei até a levar pizza para chamar a atenção e o interesse pelo aprendizado e finalizo sempre com disputas entre eles, em forma de gincana e dinâmicas.

Lagrange (2018) declara:

> O assunto é apresentado, e no mesmo momento é buscado o conhecimento que os alunos já possuem em relação ao mesmo. Os materiais, exemplificar de forma concreta, claro que na medida do possível. As atividades propostas buscam uma ligação com o cotidiano. Situações que são vividas pelos mesmos. As avaliações, busca-se o entendimento dos discentes nas análises coletivas e, em exercícios individuais.

Percebe-se que as abordagens dos conteúdos são realizadas por meio de aulas expositivas, com explicações e/ou apresentações dos conceitos em quadro branco (CAUCHY, 2018). No entanto, os professores também buscam outras maneiras e métodos para que o estudante consiga compreender aquilo que está sendo ensinado, tais como o uso de materiais didáticos, a divisão de frutas, gincanas e dinâmicas.

Variar a maneira de ensinar de fração em sala de aula pode ser algo interessante do ponto de vista da aprendizagem, uma vez que os estudantes e professores não ficam limitados a um único método. Vale considerar que a aprendizagem de determinado conceito não ocorre da mesma maneira com todos os estudantes. Alguns podem aprender facilmente por meio da exposição do conteúdo em uma aula expositiva; outros podem necessitar de comparações com situações do dia a dia ou da manipulação de materiais concretos durante o ensino.

De acordo com os dados, 79,5% dos professores usam vários métodos para ensinar o conteúdo de fração, desde aulas expositivas à utilização de materiais concretos com vistas à aprendizagem dos estudantes. Cerca de 13,6% ainda não trabalharam com fração porque esse seria o primeiro ano de atuação na Educação Básica ou porque ministravam aulas em outras séries/anos escolares. Apenas 3,4% utilizam somente o livro didático no processo de ensino; 2,3% não responderam e 1,1% não deu uma resposta específica, dizendo apenas que trabalha com avaliações e atividades diferenciadas.

As respostas relativas à definição de fração foram agrupadas em 10 categorias, conforme quadro a seguir.

Quadro 21: Definições de fração pelos participantes

Categorias	Nº de respostas
Dividir algo em parte iguais.	31
Representação fracionária, divisão. Dividir inteiro em várias partes. Tudo que pode ser dividido. Tudo que pode fragmentar, separar.	20
Parte de um todo.	11
Não sabe definir.	10
Não respondeu.	07
Remetem a números compostos por numerador e denominador.	03
É o meio pelo qual se divide algo real ou imaginário, concreto ou não.	02
Forma de representar a divisão de um objeto em números racionais.	02
Um número fracionário da numérica.	01
Número racional que pode ser representado a partir de desenho ou números fracionários. O inteiro e as partes do inteiro.	01
TOTAL	**88**

Fonte: Elaborado pelo autor.

Segundo Merlini (2005) e Silva (2005), ao se trabalhar com frações, é importante considerar significados que compreendem o conceito. Segundo os autores, é necessário abordar diferentes significados de fração: parte-todo, medida, número, operador multiplicativo e quociente. O questionamento feito aos participantes tem o objetivo de compreender as percepções que os professores e professoras têm sobre esse conceito.

Nesse sentido, não há como definir objetivamente o conceito de fração, uma vez que se remente à “parte de um todo”, bem como a ideia de “quebrar”, “dividir”, “dividir em partes”. Carvalho (2017, p. 29) afirma que as palavras “fracionário”, “infração”, “infrator” e “fracionamento” estão todas relacionadas ao vocábulo “fração” e explica: “A ideia de infrator está ligada a alguém que quebrou regras previamente estabelecidas”.

Quando se ensina o conceito de fração, há uma tendência em abordar apenas um de seus possíveis significados. Em geral, promove-se o ensino apenas do significado parte-todo em registros de figuras geométricas, pizzas ou barras de chocolate.

Ao serem questionados, os participantes responderam que fração se relaciona com a ideia de dividir algo ou alguma coisa em partes iguais. Ou seja, a fração seria o resultado dessa divisão. Silva (2018) define fração como “ato pelo que se divide algo em partes iguais”. Nessa mesma linha de pensamento, Brito (2018) entende que se trata de “uma forma de se representar uma quantidade a partir de um valor, que é dividido por um determinado número de partes iguais”.

Pouco mais de um terço (35,2%) dos participantes associam a definição de fração à divisão. Já 22,7% dos professores entendem fração como representação fracionária, divisão, ou dividir inteiro em várias partes, ou tudo que pode ser dividido, fragmentado, separado.

As respostas referentes às duas primeiras categorias listadas no quadro 19 parecem remeter à mesma coisa: o ato de dividir. No entanto, a primeira se diferencia da segunda porque se trata da divisão em partes iguais, enquanto que a segunda menciona apenas o ato de dividir algo ou alguma coisa. Esse fato pode ser observado quando Castro (2018) escreve “divisão de um todo”.

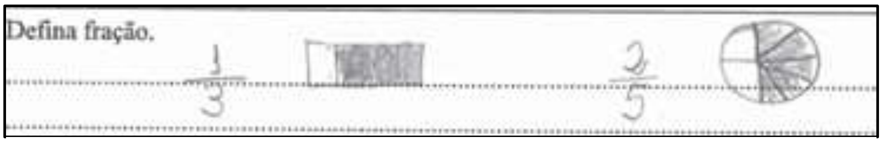
Para Nascimento (2018), fração é o “modo de dividir determinado inteiro, seja ele qual for”. 45Silva (2018) diz: “Fração é dividir, repartir. É o ato que se parte um todo.” Se considerarmos que a definição de fração remete somente ao fato de dividir, seja em partes iguais ou não, veremos que a grande maioria dos participantes (57,9%) definem fração dessa maneira. No entanto, trata-se de definição particular, se aproximando do significado parte-todo de acordo com os pressupostos de Merlini (2005) e Silva (2005).

Os dados mostram ainda que 12,5% dos professores e professoras entendem fração como parte de um todo e 11,36% não sabem definir ou responderam de maneira errada. O que se observa no relato de Pitágoras (2018), que define fração como “fração o básico eu gosto de trabalhar o básico, e um conjunto de regras que cada etapa da fração exige uma regra diferente uma para diminuir outras para somar, dividir e pintar”.

Alguns professores definem fração como uma matéria. Para Peano (2018) – professora com formação em Normal Superior e que não estudou nenhuma disciplina de Matemática –, “é uma matéria complexa que exige um estudo, um conhecimento mínimo para ser ministrado em sala”. Outros participantes definiram fração como algo que está presente no dia a dia: “algo presente no dia-a-dia impossível viver sem o conhecimento básico” (AL-KHWARIZMI, 2018).

Santos (2018) apresentou uma resposta que nos chamou a atenção, escrevendo duas frações $\left(\frac{1}{3} \text{ e } \frac{2}{5}\right)$ e suas possíveis representações geométricas, conforme a figura seguinte.

Figura 14: Definição de fração para Santos (2018)



Fonte: Dados da pesquisa.

No desenho relativo a $\frac{1}{3}$, o todo foi dividido em 4 partes aparentemente iguais, das quais 3 foram destacadas (pintadas). No círculo, que está representando $\frac{2}{5}$, o todo foi dividido em 7 partes, das quais 5 foram destacadas, sendo que duas partes parecem indicar metade do círculo, e a outra metade foi dividida em 5 partes. Nota-se que, tanto no retângulo como no círculo, o todo corresponde à soma dos componentes de cada fração, isto é, o todo correspondente a $\frac{1}{3}$ é composto de 4 partes $(1 + 3)$, enquanto que $\frac{2}{5}$ é equivalente $2 + 5 = 7$. Esse é um indício de que a quantidade (numerador e denominador) são consideradas de modo independente, mas inclusas, compondo um único todo. Trata-se de ver cada componente da fração como um número absoluto, portanto não havendo relação de implicação entre numerador e denominador, mas sim de inclusão.

Dos participantes, apenas $7{,}9\%$ não responderam e $3{,}4\%$ definiram fração como números compostos por numerador e denominador, como apontam Cunha (2018): “é a forma de dividir algo através da razão de dois números, ou seja, é uma divisão onde o dividendo é o numerador e o divisor é o denominador”; e Barros (2018): “é usada para mostrar quantidades através de dois números inteiros. O numerador é o dividendo, e o denominador é o divisor”. Poucos professores definiram como o meio de dividir algo real ou imaginário, concreto ou não $(2{,}27\%)$ e como uma maneira de representar a divisão de um objeto em números racionais $(2{,}27\%)$.

Nota-se que a grande maioria dos participantes define fração como a divisão de alguma coisa ou número, em partes iguais ou não. Em pouquíssimos casos, os professores remetem à divisão de números, explicitamente. Desse modo, as definições se aproximam do significado parte-todo (NUNES, 2005), cujos registros mais comuns são a sobreposição entre dois números e representações geométricas (DUVAL, 2009).

No item “d”, solicitamos aos professores e professoras que representassem de todas as maneiras possíveis as frações $\frac{2}{4}$ (própria) e $\frac{3}{2}$ (imprópria), com o objetivo de saber quais registros de representação semiótica (DUVAL, 2009) os participantes mobilizam na resolução de exercícios envolvendo fração e no ensino desse conteúdo.

Ao analisar as respostas, observamos que foram mobilizados os registros: fração equivalente, decimal, porcentagem, formas geométricas (retângulos e círculos), língua natural e potenciação. Em relação às possíveis representações das frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{2}$, organizamos um quadro para cada uma delas, a fim de compreender quais registros aparecem com mais frequência nas respostas dadas pelos participantes

Primeiramente, abordaremos as frequências das respostas para a fração $\frac{2}{4}$ sem considerar se as respostas estão certas ou erradas, uma vez que a intenção primordial é saber quais registros são mobilizados.

Quadro 22: Representações de $\frac{2}{4}$

Tipos de representações	**Acertos**	**Erros**	**Total de participantes**
Formas geométricas	69	04	73
Fração equivalente	17	02	19
Língua natural	18	01	19
Decimal	12	02	14
Porcentagem	03	00	03
Potenciação	01	00	01
Não respondeu			05
TOTAL	**120**	**09**	**129**

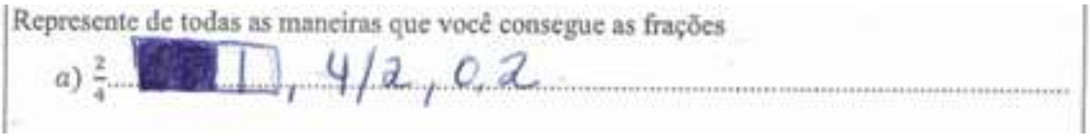
Fonte: Elaborado pelo autor.

O quadro acima indica que a grande maioria dos professores faz uso do registro de representação por meio de formas geométricas (retângulos ou círculos), visto que 82,9% dos participantes utilizaram esses registros para representar a fração $\frac{2}{4}$. Isso nos permite conjecturar que esses professores têm a tendência de utilizar essas representações durante a realização de suas aulas.

Um número considerável de professores representou a fração $\frac{2}{4}$ por meio de frações equivalentes (21,59%) ou língua natural (21,59%) – que é quando o participante escreve “dois quartos”. Muitos também utilizaram a representação por meio de número decimal (15,90%). Uma pequena parcela utiliza a porcentagem (3,4%) e a potenciação (1,13%). Ainda em relação à fração $\frac{2}{4}$, observamos que apenas 5 participantes não conseguiram responder essa questão.

Considerando o número de acertos em cada registro feito pelos participantes, obtivemos as seguintes informações: a maioria dos professores acertou as representações que fizeram da fração $\frac{2}{4}$. No entanto, chamamos a atenção para alguns erros. Cruz (2018) obteve êxito na representação em forma geométrica, mas não acertou outras duas representações: fração equivalente e número decimal.

Figura 15: Representações da fração $\frac{2}{4}$

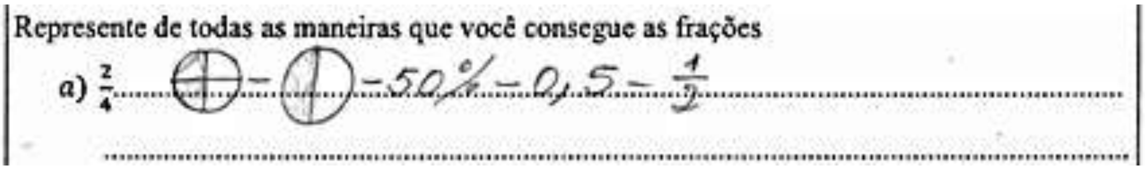


Fonte: 12CRUZ (2018).Dados da pesquisa.

Percebemos que a professora consegue representar a fração de maneira correta quando usa uma forma geométrica. Todavia, não consegue obter êxito nas outras representações. Em relação ao registro da fração equivalente, a participante inverteu os termos da fração inicial. Enquanto a primeira representação $\left(\frac{2}{4}\right)$ equivale à, por exemplo, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \cdots = 50\% = \frac{50}{100} = \cdots$, Cruz (2018) escreve que $\frac{2}{4}$ é equivalente a $\frac{4}{2}$, o que é uma afirmativa falsa uma vez que $\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \cdots = \frac{100}{50} = 2 = 200\%$. Ela também se confunde ao utilizar a representação decimal; para ela, $\frac{2}{4} = 0{,}2$, no entanto, matematicamente, sabe-se que a fração é equivalente a 0,5.

Já Santos (2018), fez uso de quatro diferentes registros de representação para a mesma fração: fração equivalente, número decimal, porcentagem e formas geométricas.

Figura 16: Representação da fração $\frac{2}{4}$



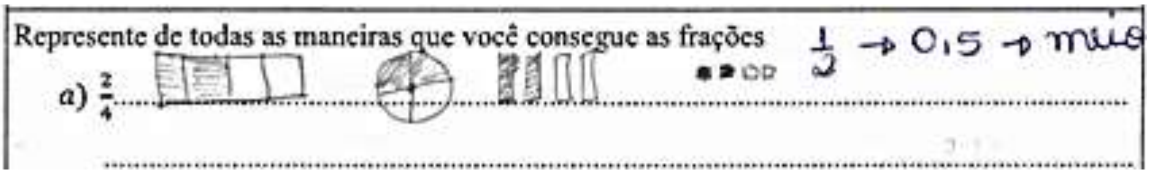
Fonte: SANTOS (2018)

Nota-se, nesse caso, que a professora consegue representar a fração $\frac{2}{4}$ de diferentes maneiras. Santos (2018) utiliza, mesmo que intuitivamente, a transformação de um registro por meio de tratamento e, também, conversão de registros (DUVAL, 2009). Na perspectiva de

Duval (2009), se a pessoa consegue passar de um registro a outro efetuando a conversão entre dois ou mais registros, isso significa que ela compreendeu o objeto matemático.

A participante Neumann (2018) consegue fazer esse movimento utilizando os registros fração equivalente, número decimal, forma geométrica e língua natural, conforme pode ser verificado na figura 20.

Figura 20: Representação da fração $\frac{2}{4}$



Fonte: NEUMANN (2018).

Ao analisar os dados, percebe-se que Santos (2018) e Neumann (2018) transitam entre os registros por tratamento e conversão (DUVAL, 2009), mas perceberemos que o segundo utiliza dois tipos de quantidades, contínua e discreta (NUNES *et al*, 2005), em suas maneiras de representar.

Quanto à variedade de registros, o quadro a seguir mostra a quantidade de registros de representação. Conforme podemos observar, foram poucos os participantes que conseguiram fazer mais de um tipo de representação. A grande maioria ficou restrita a apenas um tipo de registro.

Quadro 23: Quantidade de registros mobilizados pelos participantes

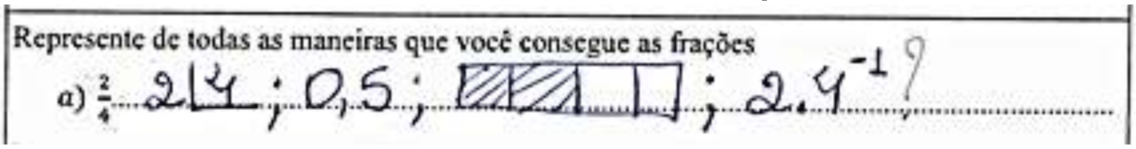
Quantidade de registros	Nº de participantes
Nenhum registro	05
Um registro	54
Dois registros	16
Três registros	08
Quatro registros	05

Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com os dados, a maioria dos professores mobilizou apenas um registro de representação para a fração dada, o que corresponde a 61,36% dos participantes. Dentre eles, 94,4% fizeram uso de registros em formas geométricas (51 professores). Desses 51 participantes que utilizaram a representação geométrica, 92,15% acertaram a questão.

Percebe-se, portanto, que os professores e professoras apresentam facilidade nas representações semióticas por meio de desenhos (formas geométricas retangulares ou mesmo circulares). No entanto, há dificuldade em utilizar as representações por meio de outros registros como, por exemplo, porcentagens e potenciação. Dentre os participantes, somente um conseguiu utilizar a potenciação como representação para a fração $\frac{2}{4}$.

Figura 17: Representação da fração $\frac{2}{4}$


Represente de todas as maneiras que você consegue as frações

a) $\frac{2}{4}$ 2|4 ; 0,5 ; ; 2.4^{-1} ?

Fonte: 52LAPLACE (2018).

Laplace (2018) consegue utilizar quatro possíveis representações para a fração dada, indicando uma divisão de 2 por 4, um número decimal (0,5), uma forma geométrica retangular em que se destacam duas das quatro partes da figura, e a potenciação ($2 \cdot 4^{-1}$).

De acordo com as informações do quadro 21, nota-se que um pequeno número de participantes conseguiu representar a fração dada de duas ou mais maneiras.

Pontes (2018), por exemplo, utilizou dois tipos de representações. Embora acertasse na representação por meio de formas geométricas, o participante errou quando usou a representação por meio de língua natural. Ele escreveu “dois terços” quando deveria ter escrito “dois quartos”. A mesma situação ocorre com Barros (2018), que obteve êxito na representação geométrica, mas não na representação decimal. Ele escreveu 0,2 quando deveria ter escrito 0,5.

Assim, em relação à fração $\frac{2}{4}$, os participantes conseguiram representar de maneira correta a grande maioria dos registros. No entanto, nota-se que 61,3% deles fazem uso de apenas um registro de representação, acentuadamente por meio de formas geométricas. Cerca de 18,18% utilizam dois registros diferentes, 9% mobilizam até três e, apenas, 5,68% conseguiram fazer quatro diferentes registros.

É importante destacar que, de um total de 129 registros, somente 09 foram feitos de maneira incoerente, o que representa 6,97% dos casos. No total, 93,07% das representações da fração própria $\frac{2}{4}$ foram escritas corretamente.

Ainda em relação ao bloco D, o item “b” solicita que os participantes escrevam de todas as maneiras que conseguem a fração imprópria $\frac{3}{2}$. Nesse caso, o número de professores que não fizeram nenhum tipo de registro é consideravelmente maior do que aqueles que responderam ao item “a”. No item “a”, apenas cinco (5) não responderam, enquanto que no item “b” o número de participantes que não responderam sobe para quinze (15).

Mais uma vez, há uma tendência dos professores em utilizar as formas geométricas como registros de representação para a fração $\frac{3}{2}$; no entanto, quase sempre isso é feito de maneira equivocada. Os registros que foram frequentes bem como o número de acertos e erros são apresentados na tabela abaixo.

Tabela 2: Número de acertos e erros das representações da fração $\frac{3}{2}$

Tipos de representações	Acertos	Erros	TOTAL
Formas geométricas	20	35	55
Fração equivalente	08	03	11
Língua natural	12	01	13
Decimal	06	00	06
Potenciação	01	00	01
TOTAL	**47**	**39**	**86**

Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com os dados da tabela acima, percebe-se que os professores preferem utilizar as formas geométricas para representar a fração imprópria $\frac{3}{2}$. A grande maioria (55 participantes) usa esse tipo de registro e, destes, mais da metade comete erros ao desenhar uma forma geométrica plana (triângulos, retângulos ou círculos) dividindo-a em três partes e destacando duas delas, conforme pode ser visto nas figuras 19 e 20, a seguir.

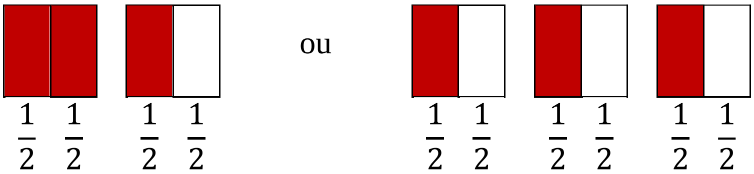
Figura 19: Representação de $\frac{3}{2}$ por Martins (2018)

Figura 19: Representação de $\frac{3}{2}$ por Pitágoras (2018)

Fonte: MARTINS (2018) e PITÁGORAS (2018)

Notadamente, os professores estabeleceram confusão quanto à representação da fração imprópria. As respostas obtidas (MARTINS, 2018; PITÁGORAS, 2018) estão relacionadas à fração $\frac{2}{3}$ e não a $\frac{3}{2}$, como foi solicitado que fizessem. Duas maneiras possíveis de representar (geometricamente) o que é solicitado na atividade são:

Figura 20: Representações geométricas de $\frac{3}{2}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Aproximadamente 36,36% dos participantes que representaram a fração dada por meio de formas geométricas fizeram de maneira correta. Martins (2018), por exemplo, utilizou duas figuras divididas ao meio, pintou as duas partes da primeira e metade da segunda, como mostra a figura 21. Jacobi (2018) fez três desenhos retangulares divididos ao meio cada um, e pintou a metade de cada.

Sobre as frações equivalentes, apenas 3 das 11 representações contidas nos dados e informações estiveram incorretas. Na primeira, o participante fez uma sequência de frações com mesmo numerador alterando os respectivos denominadores; na segunda, outro participante escreveu a fração inversa $\left(\frac{2}{3}\right)$; e o terceiro, apenas repetiu a fração dada.

Em relação às representações em língua natural, somente uma resposta estava incorreta. O participante Gödel (2018) escreveu "três dois" e não "três meios". Isso indica que ele não estabeleceu relação entre os termos. Certamente tomou-os como números absolutos e independentes.

Quantos às representações decimais, houve 06 registros feitos pelos professores, e todos estiveram corretas. Não foram utilizadas representações percentuais. Laplace (2018), além de utilizar os registros decimais e formas geométricas, também fez uso da representação por meio de potência $(3 \cdot 2^{-1})$.

Os dados revelam que os professores apresentam maior facilidade para representar frações próprias $\left(\frac{2}{4}\right)$ do que impróprias $\left(\frac{3}{2}\right)$. Em ambas as situações, os participantes recorrem com maior frequência aos registros geométricos.

No item "e", perguntamos aos participantes quanto tempo semanal é dedicado ao ensino de Matemática na classe em que atuam. Ao analisar os dados, percebemos três tipos de respostas: horas, dias e números de vezes. Cinquenta e três (53) professores forneceram as informações por meio de horas; nove (9) responderam usando o número de dias; vinte (20) falaram da quantidade de vezes (todo dia, número de vezes e de aulas); e seis (6) não responderam. Essas informações estão organizadas no quadro 24.

Quadro 24: Tempo semanal dedicado para ensinar Matemática

Categorias (horas, dias e nº de vezes)	**Nº de participantes**
3 horas	01
4 horas	14
5 horas	05
6 horas	15
7 horas	06
8 horas	08
10 horas	04
3 dias	01
4 dias	07
5 dias	01
Todo dia	13
4 vezes	06
5 aulas	01
Não respondeu	06
TOTAL	**88**

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se, ao analisar os dados do quadro 24, que o tempo mínimo dedicado pelos professores ao ensino de Matemática nas séries iniciais é de 03 horas por semana. Nota-se também que a maioria dos participantes reservam, pelo menos, 06 horas semanais para o ensino dessa disciplina e que pelo menos 13 professores buscam proporcionar esse ensino todos os dias. Nesse sentido, compreendemos que a quantidade de tempo destinada para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática é suficiente para que ocorra o entendimento dos conteúdos relacionados a essa ciência.

A quantidade de horas que se dedica ao ensino de Matemática nos anos iniciais é fundamental para que os estudantes consigam alcançar a compreensão de determinado objeto matemático, especialmente do conceito de fração, com os vários registros de representação e significados. De acordo com os dados do quadro anterior, nota-se que os professores e professoras dedicam em média 06 horas semanais para o ensino de Matemática nas séries em que atuam (considerando aqueles que responderam em quantidade de horas), ou de quatro a cinco vezes no decorrer da semana.

Questionamos aos participantes qual seria a dificuldade das crianças para resolver e compreender situações que envolvem fração (item “f”). As respostas nos conduziram à elaboração de 15 categorias, as quais estão organizadas no quadro 25.

Quadro 25: Dificuldades das crianças para aprender fração de acordo com os participantes

Categorias	Nº de participantes
Ainda não atuou com ensino de fração. Ou não sabe responder.	21
As dificuldades estão na base, os estudantes não conseguem resolver continhas de adição e subtração, quem dirá fração. Dificuldade em ler e compreender as frações, leitura de textos.	20
Dificuldade ao dividir e multiplicar as frações.	09
Assimilar a figura que representa a fração.	08
Está ligado à maneira de o professor ensinar.	06
Falta de interesse. Alunos não gostam de Matemática.	06
Visualizar ou decorar qual o denominador e numerador.	05
Dividir um número inteiro.	04
Associar fração com o cotidiano, com a prática.	02
Não tem dificuldades, pois trabalha com o lúdico. Ou não há dificuldades.	02
Depende da vivência social e familiar do estudante.	01
Quando numerador é maior.	01
Ligada ao valor da fração.	01
Fração é complexo.	01
Transformar fração em número misto e vice-versa.	01
TOTAL	**88**

Fonte: Elaborado pelo autor.

Surpreendeu-nos o fato de que praticamente um quarto $\left(\frac{1}{4}\right)$ dos professores e professoras ainda não atuou no ensino de fração, não soube responder ao questionamento ou não quis se expor. Outros 22,7% argumentam que as dificuldades dos estudantes em compreender fração estão relacionadas à aprendizagem de conceitos nas séries/anos anteriores. Segundo os professores, percebem-se limitações na resolução de problemas que envolvem "continhas" de adição e subtração, em ler e compreender as frações, conforme excertos a seguir.

Nesse sentido Rodrigues (2018) escreve, "as dificuldades vêm da base, as vezes eles não conseguem resolver continhas simples como adição e subtração imagina resolver a frações que considero muito mais difícil". Ainda, neste mesmo ponto de vida, Fibonacci (2018), responde que a “dificuldade maior é na hora de resolver as questões, e vários alunos tem dificuldade para lê e compreender”. Portanto, do ponto de vista dos participantes, a principal barreira que impede os estudantes de compreender fração é “a base”.

Araujo (2018) aponta que os estudantes têm dificuldades na leitura das frações como, por exemplo, “dois terços”, “um quinto”, mas “quando mostra a figura se torna mais fácil” (20ARAUJO, 2018). 30Fernandes (2018) entende que “a dificuldade se acentua quando os alunos têm consigo a deficiência de aprendizagem da tabuada. Dessa forma se torna difícil compreender e aprender não só fração mais todos os conteúdos dentro da matemática”.

Para 10,22% dos participantes, as dificuldades dos estudantes em aprender fração estão relacionadas à realização das operações de multiplicação e divisão. Para Araujo (2018), o problema é mais acentuado no processo de dividir, sendo necessário trabalhar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão antes de iniciar as atividades que tratam do conceito de fração. Já 9,09% dos professores entendem que as dificuldades estão em relacionar as representações em desenhos com a representação numérica da fração do tipo $\frac{a}{b}$.

Alguns professores entendem que as dificuldades estão diretamente relacionadas à maneira de o professor ensinar (6,8%) ou à falta de interesse dos estudantes pela Matemática (6,8%). Para poucos participantes, o problema reside na dificuldade de visualizar e diferenciar os termos da fração (numerador e denominador); de dividir um número inteiro; ou de associar algumas frações com situações presentes no cotidiano. Apenas 2,27% entendem que as crianças não têm dificuldades em aprender o conceito de fração porque, ao se trabalhar de maneira lúdica, facilita-se a aprendizagem do conteúdo. Isso pode ser visto nas transcrições a seguir.

Nunes (2018) aponta: “Não vejo muita dificuldade na compreensão da fração, até porque trabalha muito o lúdico envolvendo material concreto como repartir frutas, chocolates etc.” Menezes (2018) considera que há “muito pouca” dificuldade e Martins (2018) diz: “Vai depender de sua vivência social e familiar, alunos que acompanham seus pais nas compras de supermercados são mais ativas e conseguem resolver com mais facilidade as questões de fração”.

Poucos professores argumentam que há dificuldades quando o numerador da fração é maior que o denominador (fração imprópria). Como vimos, essa situação acontece com os próprios professores, que apresentaram limitações para representar a fração $\frac{3}{2}$. Alguns responderam, simplesmente, que depende do valor da fração, que fração é complexo ou que os obstáculos aparecem quando da transformação de uma fração em número misto ou vice-versa.

Além de compreender as dificuldades dos estudantes em aprender fração, perguntamos aos professores qual seria seu papel no processo de ensino de fração nos anos iniciais (item “g”). As respostas incluíram ideias tais como: ensinar e ajudar os estudantes; saber o conteúdo a fim de poder proporcionar maneiras diferenciadas de aprendizagens; ser mediador e facilitador do conhecimento. Para facilitar a visualização e análise dos dados, organizamos as informações no quadro 26.

Quadro 26: Papel do professor no processo de ensino de fração nos anos iniciais

Categorias	Nº de participantes
Fundamental o conhecimento do professor e a forma de multiplicar será de suma importância. Ensinar e ajudar o aluno. É importante para o aluno compreender fração e como usar.	33
Papel de mediador, levar os estudantes a conhecer e formular definições de fração com atividades. Facilitador.	23
Primeiro compreender o conteúdo. Depois apresentá-lo de maneira clara com uso de material concreto e o cotidiano. Trabalhar de maneira diferenciada utilizando o lúdico e materiais concretos.	12
Não respondeu ou não sabe.	09
Transmitir o conhecimento. Tentar passar para o aluno a forma mais simples e fácil. Passar de maneira clara e objetiva.	09
“Desafiador, principalmente para quem não é formado na área”. Importante e preocupante.	2
TOTAL	**88**

Fonte: Elaborado pelo autor.

A maioria dos professores e professoras (33) entende que, no processo de ensino de fração nos anos iniciais, é fundamental ter conhecimento e/ou domínio de conteúdo e das maneiras de abordá-lo. De acordo com os participantes, é papel do professor “ensinar e ajudar” os estudantes a compreender o conceito de fração bem como fazer uso do mesmo.

Segundo Khayyãm (2018), o papel do professor “é muito importante uma vez que as séries iniciais é a base, ou seja, o aluno precisa aprender frações ainda no início para que o mesmo possa desenvolver suas habilidades com a continuação dos estudos em situações mais complexas”. Seguindo a mesma linha de raciocínio, Cunha (2018) escreve:

> O professor tem uma grande importância no ensino de fração nas séries iniciais pois é a partir dos anos iniciais que o aluno vai ter acesso aos primeiros conteúdos de fração. Dessa forma, se ele compreender o conteúdo ele terá um rendimento maior nos anos seguintes no que diz respeito à fração.

Para 26,13% dos participantes, o papel do professor é o de mediador e facilitador do conhecimento, e seu maior objetivo deve ser levar os estudantes a conhecer e formular definições de frações com atividades. Nas palavras de Araujo (2018), o professor deve “ser um mediador, facilitador e ao mesmo tempo desenvolver metodologias que possa viabilizar uma aprendizagem de qualidade”.

Para Barros (2018), o papel do professor se restringe à busca de métodos que facilitem a aprendizagem dos estudantes. De modo similar, Peano (2018) salienta:

> Enquanto educadora atual em sala, procuro estudar, pesquisar a melhor forma de aprendizagem dos alunos, sabendo que cada individuo tem uma forma de aprender diferente, uns aprendem mais rápido, outros são mais lentos. No entanto, é preciso diversificar as aulas em sala para facilitar a aprendizagem dos alunos.

Achure (2018) entende que o papel do professor é “levar o aluno a pensar e construir a lógica para a construção e resolução da fração. O aluno aprende de forma significativa e não apenas ver aquele modelo a ser resolvido, decorar o processo e pronto”. Para que isso ocorra, é de suma importância que os educadores tenham domínio do conteúdo matemático a ser ensinado em sala de aula, a fim de levar os estudantes à aprendizagem de tal modo que o interesse seja despertado durante o desenvolvimento da aula.

De acordo com os dados, 13,6% dos participantes entendem ser necessário que o professor compreenda e/ou aprenda o conteúdo antes de apresentá-lo em sala de aula e que essa explanação seja feita de maneira clara, fazendo uso de materiais concretos e comparações com situações do cotidiano dos estudantes. Um total de 10,22% não respondeu qual seria o papel do professor no processo de ensino de fração nas séries iniciais.

Nove participantes entendem que, no contexto do ensino, o papel do professor é o de transmitir o conhecimento da maneira mais simples e fácil possível (10,22%). Martins (2018) e Nascimento (2018) demonstram preocupação quanto ao desafio de ensinar, “principalmente para quem não é formado na área” (MARTINS, 2018).

> Muito importante e preocupante, pois nem todos tem a preocupação de ensiná-lo de maneira clara e correta, ou muitas vezes deixa de aplicar este conteúdo. É um fato determinante também, porque dependendo da maneira como for ensinado, o aluno terá sucesso ou prejuízo. Em parte, a culpa é do professor, pois alguns exercem a função em lugares/séries apenas para completar carga horária (NASCIMENTO, 2018).

É importante considerar que as preocupações dos professores são salutares quando se pretende desenvolver uma educação de qualidade tanto nas séries iniciais quanto nas demais. Entendemos que tudo aquilo que está relacionado ao processo de ensino e de aprendizagem deve ser prioridade daqueles que atuam diretamente com os estudantes. Além disso, o ensino não pode ser visto apenas como uma oportunidade de extensão de carga horária.

Nota-se que existe um equilíbrio quanto aos entendimentos dos participantes sobre o papel do professor no processo de ensino de fração. A maioria entende que o professor deve dominar o conteúdo e as maneiras de abordagens em sala de aula. Muitos compreendem que a função do professor deve ser de mediador e facilitador do conhecimento, de tal modo que os estudantes sejam levados a conhecer e formular definições. Poucos responderam que sua atribuição é a de transmitir os conteúdos de maneira simples e fácil.

Questionamos aos participantes qual seria o papel do professor no processo de aprendizagem de fração nos anos iniciais (item "h"). Obtivemos diferentes tipos de respostas, conforme as informações contidas quadro 27.

Quadro 27: O papel do professor no processo de ensino de fração nos anos iniciais

Tipos de respostas	**Nº de participantes**
Mediador do Ensino. Auxiliar de forma clara. Facilitador. Levar o estudante a questionar. Motivador.	26
Importante. É a fase fundamental do ensino e aprendizado de qualquer educando. Peça fundamental, tem que ser dinâmico. Ministrar aulas dinâmicas, práticas e diferenciadas. Mostrar como pode ser utilizado no dia a dia.	25
Não respondeu.	13
O professor tem que estar sempre se atualizando, socializando e pesquisando novos conhecimentos. Compreender o que é fração.	08
Ensinar, mas o estudante tem que ter interesse. Fazer com que o aluno aprenda. Despertar o interesse do estudante.	07
Observar, avaliar e propor novas maneiras de ensino.	06
Para os professores os processos de ensino e aprendizagem tratam da mesma coisa, não havendo diferença entre um processo e o outro.	02
Trata-se de um grande desafio para os professores.	01
TOTAL	**88**

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os dados mostram que 29,5% dos participantes definem o papel do professor, na aprendizagem do estudante, como mediador, facilitador e motivador de tal modo que possa despertar o espírito questionador dos estudantes. Segundo Almeida (2018), "o professor tem que ser o mediador desse conhecimento e procurar de forma mais clara possível repassar esse conteúdo para turma, e utilizar sempre materiais que venha facilitar a aprendizagem dos educandos".

Peano (2018) salienta que o papel do professor é

> Fundamental, o professor é o mediador, entre esse processo e o aluno, porém nem sempre o que você ensina é aprendizado. Precisamos inovar na sala de aula buscando melhorar essa rotina diária, com essa mesmice de sempre diversificando sempre suas aulas para que tenha uma aprendizagem satisfatória (PEANO, 2018).

Muitos participantes (28,4%) entendem que o papel do professor na aprendizagem de fração é importante, sendo a fase fundamental do ensino e aprendizado do educando. De acordo com as informações, o educador é peça fundamental nesse processo e por isso deve ser dinâmico, ministrando aulas práticas e diferenciadas e mostrando como utilizar a fração no dia a dia. Quase 15% dos participantes não responderam ou não sabem definir seus respectivos papéis. Para 7,9%, é função do professor ensinar, fazer com que o estudante aprenda e despertar seu interesse, sendo fundamental o interesse do estudante pela aprendizagem.

Poucos (cerca de 6,8%) consideram que é atribuição do professor apenas observar, avaliar e propor novas maneiras de ensino. Para 2,27%, os processos de ensino e aprendizagem remetem a único processo. Esses participantes deram a mesma resposta nos itens "g" e "h". Somente 1,13% (um participante) considera como um grande desafio para os educadores.

Em relação ao papel dos estudantes nesse mesmo processo, 45,45% dos participantes disseram que os estudantes devem receber a explicação do professor, se esforçar em desenvolver as atividades propostas, dispor-se a aprender, ter atenção, boa vontade e questionar o professor quando não compreender o que foi explicado. Um total de 19,31% não respondeu a atribuição ou função dos estudantes. Destes que não conseguiram explicar a função dos estudantes, alguns responderam simplesmente que o papel do educando 'é ser motivado', 'é importante' ou que 'fração é a base para outros estudos'.

Segundo Nascimento (2018),

> O papel do aluno deveria ser de chegar nas séries seguintes com bagagem adquirida nas séries anteriores, de forma adequada, ou seja, com o conhecimento garantido. O problema é que isso não está acontecendo, e a culpa talvez seja desse sistema que se preocupa em aprovar alunos sem se preocupar se ele adquiriu o conhecimento.

Alguns professores reduziram o papel do educando a 'estudar', 'aprender', ou simplesmente a seguir as regras e participar das atividades. Entretanto, o estudante deve se sentir participante do processo de aprendizagem do conceito de fração; caso contrário, corre-se o risco de fazer com que ele seja somente um cumpridor de regras.

A maioria dos professores entende que o papel dos estudantes no processo de aprendizagem do conteúdo de fração é o de "receber" as explicações do educador e desenvolver as atividades que lhes são propostas. Eles afirmam também que os estudantes devem estar dispostos a aprender e precisam questionar sobre o conteúdo quando não houver compreensão. Poucos participantes respondem que o estudante deve saber e perceber que fração é algo útil e que está presente em seu cotidiano.

Em relação à compreensão de sequência didática (item "j"), percebemos que as respostas convergiram para a existência de cinco "categorias", descritas no quadro 28.

Quadro 28: Respostas sobre o entendimento de sequência didática

Categorias	Nº de participantes
01 Não definiu, não respondeu ou não sabe	26
02 Interdisciplinaridade	22
03 Sequência Didática	21
04 Sequência de Conteúdos	18
05 Sequência de Aulas	01
TOTAL	**88**

Fonte: Elaborado pelo autor.

A maioria dos professores (29,54%) não soube ou não conseguiu definir o que seria sequência didática. Os dados mostram que apenas duas pessoas afirmaram não saber (SILVA, 2018; SOUSA, 2018), e quatro não estabeleceram nenhuma definição para SD (BOOLE, 2018; ARQUIMEDES, 2018; LARROQUE, 2018; KHAYYÃM, 2018). Um total de 76,9% dos participantes respondeu ao item "j", mas não definiu SD.

Almeida (2018) entende que sequência didática "é o processo pelo qual o professor procura organizar seu trabalho, propondo suas metas e objetivos que almeja alcançar, é onde o professor vai procurar elaborar todo o processo de desenvolvimento de conteúdos e atividades".

A afirmação de Almeida (2018) se aproxima da definição de Zabala (1998), no entanto, o participante da pesquisa não menciona se tratar de atividades que são elaboradas de maneira ordenada, estruturada e articulada, nem tampouco que os objetivos dessas atividades são conhecidos pelos estudantes e pelos professores.

Para Barros (2018), SD é a "forma pela qual o professor, enquanto educador, deverá trabalhar da melhor forma, para ajudar no ensino de aprendizagem do aluno. E assim seguindo uma sequência de conteúdos para um bom desempenho no processo de aprendizagem do educando". Similarmente, Pitágoras (2018) considera que "a sequência deve começar fraco lá do início e ir elevando o nível de ensino" e Feitosa (2018) entende que SD "são conhecimentos em que dê bases para entender outras definições a serem compreendidas". Assim, compreendemos que alguns participantes conseguiram estabelecer uma definição coerente com o que é apontado por Zabala (1998), mesmo respondendo que se deve iniciar o processo de ensino e de aprendizagem com situações elementares.

Muitos professores acreditam que a sequência didática está diretamente relacionada com a interdisciplinaridade. Para Rodrigues (2018), “é uma sequência de conteúdos sem perder o foco trabalhando em conjunto com outras disciplinas”, enquanto que para Cauchy (2018),

> É um desempenho de uma atividade usando um livro ou texto que possa contemplar outras disciplinas como: Língua Portuguesa, Matemática, Geografia e Matemática, exemplo o livro: Pirulito do Pato podemos trabalhar Português, matemática e Ciências ao mesmo tempo usando o livro como referência.

Para esses participantes, a sequência didática se assemelha ao desenvolvimento de determinada atividade fazendo uso de uma temática (livro ou texto) em que se deve contemplar mais de uma disciplina no processo de ensino e de aprendizagem. Tais compreensões se aproximam do que D’Ávila (2011, p. 60) entende por interdisciplinaridade, que é “a tentativa de estabelecer relações entre as disciplinas”.

Para outros professores, cerca de 23,8%, sequência didática é um “conjunto de atividades encadeado de passos e etapas ligadas entre si para torna mais eficiente o processo de aprendizado” (BRITO, 2018). Para Andrade (2018), trata-se daquilo que é ensinado passo a passo considerando o mesmo conteúdo, a fim de que o estudante consiga compreender o conceito por etapas. No entendimento de Nunes (2018), “é um conjunto de atividades organizadas e planejadas para um determinado conteúdo”.

Considerando o que Zabala (1998) preconiza, entendemos que as compreensões de 23,8% dos participantes coadunam com aquilo que compreendemos por sequência didática, uma vez que fica evidente que os professores trazem definições que consideram um ensino pautado em atividades organizadas e planejadas a respeito de determinado conteúdo específico. Ademais, observa-se que, dentre os que conseguiram dar uma definição mais próxima de SD, existe o conceito de que a mesma deve ser desenvolvida passo a passo, com etapas encadeadas.

Silva (2018) declara sobre SD: “É um procedimento encadeados de etapas ligadas entre si, ou seja, elaborar diversas atividades de um só conteúdo ou texto”. Cantor (2018) diz: “Sequência didática é um processo de ensino ao qual durante as elaborações de atividades e conteúdos todos tem que andar ligados um ao outro”. Em outros termos, percebe-se que esses professores têm a clareza de que se trata de sequência de atividades encadeadas entre si e não de sequência de conteúdos – conforme apontado por alguns professores.

Aproximadamente 20,45%, quase $\frac{1}{4}$ dos participantes, compreendem SD como uma sequência de conteúdos. Podemos observar esse fato nas observações de Nascimento (2018): “Sequência didática é a continuação dos conteúdos, para que melhor seja entendido determinado assunto, de forma interdisciplinar ou intertextual. Em outras palavras, é a forma de não quebrar a sequência de entendimento entre os conteúdos de mesma relação”.

Na compreensão de Barros (2018), é a “forma pela qual o professor, enquanto educador, deverá trabalhar da melhor forma, para ajudar no ensino de aprendizagem do aluno. E assim seguindo uma sequência de conteúdos para um bom desempenho no processo de aprendizagem do educando”. Percebe-se, portanto, que 20,45% dos professores não têm uma compreensão clara de sequência didática, uma vez que entendem se tratar de uma sequência de conteúdos de tal modo que estejam encadeados logicamente.

Constatamos, assim, que a maioria dos professores e professoras tem dificuldades para ensinar o conteúdo de fração nas séries em que atuam e que uma pequena parcela não informou se atuou ensinando esse conceito.

Em relação à maneira de trabalhar fração com os estudantes, constatamos que 79,5% dos professores preferem desenvolver aulas expositivas e explicativas com auxílio de material didático. Ao se solicitar que definissem fração, observamos que muitos a compreendem como dividir algo em partes iguais, enquanto outros a relacionam com tudo aquilo que pode ser dividido, fragmentado ou separado.

Os dados indicaram que os professores tendem a representar frações próprias por meio de formas geométricas (maioria), frações equivalentes e língua natural (muitos), com alto índice de acertos nas representações. No entanto, quando se trata de frações impróprias, os participantes apresentam maiores dificuldades, especialmente nas representações geométricas, em que o número de erros é superior ao de acertos.

A maioria dos participantes entende que as dificuldades das crianças em aprender o conteúdo de fração estão ligadas à não aprendizagem das propriedades básicas da Matemática nas séries/anos anteriores e, por esse motivo, os estudantes não conseguem resolver situações simples que envolvem operações de adição, subtração, divisão e multiplicação. Nesse sentido, o papel do professor é fundamental, bem como a maneira que ele escolhe para abordar/expor o conceito.

Para os participantes, o professor deve desenvolver a função de mediador, de tal modo que leve os estudantes a (re)conhecer e formular definições de fração na resolução de atividades e em situações cotidianas.

5.4 Análise das atividades desenvolvidas pelos professores

Nesta subseção analisaremos as respostas dadas pelos participantes por ocasião do desenvolvimento das atividades propostas no instrumento 02. Neste sentido, as respostas dos participantes, em relação às atividades, foram organizadas em cinco blocos considerando cinco significados de fração. Apresentamos no quadro a seguir a quantidade de respostas obtidas em cada um dos blocos. Destacamos que alguns participantes que responderam o primeiro instrumento de produção de dados e informações não responderam o segundo. Assim, a quantidade de professores que entregaram o instrumento 02 é menor em relação aos que entregaram o instrumento 01.

Quadro 29: Quantitativo de respostas produzidas por bloco

Blocos de Análises	Número de participantes
B01 – significado parte-todo.	14
B02 – significado número.	29
B03 – significado medidas.	14
B04 – significado quociente.	10
B05 – significado operador multiplicativo.	15
TOTAL	**82**

Fonte: Elaborado pelo autor.

Cada bloco de atividades está organizado em tarefas e se refere aos cinco significados de fração. É importante ressaltar que no bloco B02 foram agrupadas duas atividades distintas a respeito do significado número. Em virtude disso, a quantidade de participantes é maior do que nos demais blocos de atividades.

5.4.1 Análises Bloco 01 – Significado Parte-Todo

Na tarefa 01, os 14 participantes responderam à questão “a”, sendo que a maioria (92,85%) representou corretamente a jarra cheia por meio de desenho. Somente Lopes (2018) utilizou a representação fracionária $\left(\frac{1}{1000}\right)$, quando deveria ter feito desenho, conforme estava proposto. Em relação à questão “b”, os dados revelam que 85,71% dos participantes fizeram uso correto de desenho para representar a fração $\frac{1}{4}$. Fibonacci (2018) desenhou a jarra de suco de laranja dividindo-a em quatro partes, aparentemente iguais; no entanto, não apontou se alguma parte corresponderia a $\frac{1}{4}$. Somente um professor não conseguiu responder essa questão.

Na questão “c”, solicitamos aos participantes que representassem na forma de fração metade da jarra de suco. A maioria dos professores (08), que responderam às tarefas do bloco B01, utilizou corretamente a fração $\frac{1}{2}$; outros dois representaram com frações equivalentes $\left(\frac{2}{4} \text{ e } \frac{500}{1000}\right)$. Quatro não conseguiram representar corretamente: três usaram $\frac{1}{5}$ e um usou $\frac{1}{4}$.

Os dados do quadro a seguir mostram as respostas fornecidas pelos professores à questão “d”.

Quadro 30: Representações fracionárias de 750 ml de uma jarra que contém 1litro de suco

Gottfried Leibniz	Carl Gauss	Achurê	Feitosa	Sousa	Moura	Leonhard Euler	Fibonacci	Lopes	Tales de Mileto	Nunes	Cauchy	Cunha	Moraes
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{0{,}75}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	-	$\frac{1}{3}$	-	-	$\frac{1}{7}$	-	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{4}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para responder à questão “d”, os participantes encontraram algumas dificuldades, uma vez que os dados revelam que apenas 04 (quatro) professores conseguiram responder de maneira correta ao usarem a fração $\frac{3}{4}$. Cauchy (2018), por exemplo, dividiu $1\ l$ em quatro partes iguais a $250\ ml$ e percebeu que $750\ ml$ corresponde a $\frac{3}{4}$.

No entanto, 06 (seis) professores não conseguiram responder de maneira correta, representando o que estava sendo questionado, aparentemente, por meio das razões $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{0{,}75}$ e $\frac{3}{1}$, uma vez que realizaram a divisão $1000 \div 4 = 250$. Somente Karl Gauss escreveu a fração $\frac{1}{0{,}75}$, não compreendendo que $750\ ml$ corresponde a $\frac{3}{4}$ da quantidade de suco na jarra. Outros 04 (quatro) não conseguiram encontrar a resposta ou preferiram não responder.

Na questão “e”, nove (09) participantes utilizaram a transformação de unidades $(1 \text{ litro} = 1000\ ml)$ e realizaram a operação de divisão $(1000 \div 4 = 250)$. Assim, perceberam que $\frac{1}{4}$ corresponde a $250\ ml$ (questão “a”) e que 25% corresponde a essa fração. Alguns (04) professores não responderam a questão. Entre os que conseguiram mobilizar alguma resposta, notamos que 42,85% fizeram uso da fração $\frac{1}{4}$. Um total de 14,28% acertou a quantidade que representa 25% da jarra de suco de laranja $(250\ ml)$, mas errou a representação fracionária; e 14,28% utilizaram, erroneamente, os registros $\frac{1}{3}$ (sem mostrar como obteve esse resultado) e $\frac{1}{2}$ (usou desenho para mostrar o resultado, aparentemente correto).

Em relação à questão “f”, apenas 03 (três) participantes perceberam que na fração $\frac{1}{8}$ o denominador (08) corresponde ao todo e procederam com a divisão $(1000 \div 8)$. Encontraram como resultado $125\ ml$ e entenderam que essa quantidade equivale a “um oitavo” do litro de suco de laranja. Outros participantes (03) provavelmente se confundiram em relação ao todo da fração (08), visto que responderam que $\frac{1}{8}$ da quantidade de suco é igual a $800\ ml$.

É possível que os professores tenham compreendido que o todo correspondia a 10 partes; assim, o que foi perguntado seria o equivalente a 8 partes, o que os levou a concluir erroneamente que o resultado seria $800\ ml$. Chama-nos a atenção que o participante Leonhard Euler percebeu que a fração $\frac{1}{4}$ corresponde à $250\ ml$, mas não conseguiu compreender que $\frac{1}{8}$ representa a metade de $\frac{1}{4}$ e, portanto, $125\ ml$.

Outro participante encontrou como resultado $100\ ml$ e percebeu que $\frac{1}{8}$ representa a metade de $\frac{1}{4}$ $\left(\frac{1}{4} \text{ de } 1000\ ml = 250\ ml\right)$. Ele fez um desenho que representa a quantidade solicitada na questão, no entanto, cometeu um equívoco ao escrever a resposta. Apenas um participante respondeu que $\frac{1}{8}$ da quantidade de suco de laranja corresponde ao “todo”. Um total de 42,85% dos professores não respondeu essa questão.

Em relação à questão “g”, os dados mostram que 10 participantes responderam e que 04 optaram por não escrever nenhum tipo de registro. Outros quatro professores cometeram equívocos ao usar $\frac{1}{8}$, “meio”, 20% e uma representação por meio de desenho como frações correspondentes ao decimal 0,2. Ressaltamos que Tales de Mileto (2018) realizou a conversão de registro decimal em percentual $(0{,}2 = 20\%)$, mas não se atentou ao que foi questionado.

Na tarefa 02, considerou-se uma pizza dividida em oito partes iguais e foram feitas cinco perguntas aos participantes. Na questão “a”, apenas 01 (um) participante não respondeu, enquanto que os outros 13 escreveram alguma resposta. Todos os professores perceberam que o todo corresponde a oito (08) pedaços; no entanto, 42,85% cometeram equívocos nos registros fracionários.

Gottfried Leibniz (2018) dividiu a pizza em oito partes iguais e pintou uma delas, todavia, cometeu erro ao escrever a fração $\frac{1}{7}$, que não representa 25%. Do mesmo modo, Carl Gauss (2018) compreendeu que $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ e que $\frac{1}{4}$ da pizza corresponde à 2 pedaços, mas se equivocou ao utilizar a ideia de proporção e registrar $\frac{1}{3}$. Semelhantemente, Nunes (2018) e Tales de Mileto (2018) se confundiram ao anotar suas soluções: $\frac{4}{8}$ e $\frac{1}{2}$, respectivamente. Outros dois professores conseguiram responder à questão, mas de maneira equivocada $\left(\frac{2}{0{,}2} \text{ e } 0{,}25\right)$.

50% dos 14 participantes não cometeram equívoco em relação à solução da questão "a", reconhecendo que o todo é igual a 8 pedaços e conseguiram converter o número percentual (25%) em fracionário $\left(25\% = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}\right)$. Assim, a quantidade de pizza que a pessoa comeu foi representada por duas frações equivalentes: $\left(\frac{1}{4} \text{ e } \frac{2}{8}\right)$.

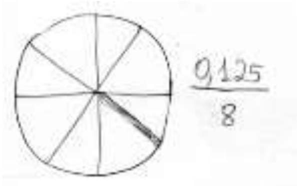
Em relação à questão "b", dez (10) participantes não encontraram dificuldades para representar a fração solicitada: $\frac{3}{8}$. É possível que, para chegar ao resultado, esses professores tenham utilizado o desenho feito para resolver a questão "a", em que a pizza foi dividida em 8 pedaços. Possivelmente, quatro (04) educadores se equivocaram ao representar a fração correspondente a 3 pedaços da pizza. Isso porque perceberam que o total das partes é 8 e destacaram três partes desse todo, no entanto utilizaram o registro fracionário $\frac{1}{3}$.

Na questão "c", seis participantes não responderam ao que foi solicitado, possivelmente porque não conseguiram perceber que 0,125 corresponde à metade daquilo que se pediu na questão "a". No entanto, 8 dos 14 professores conseguiram mobilizar uma resposta, sendo que três acertaram e cinco erraram. Entre os que acertaram, Feitosa (2018) e Sousa (2018) utilizaram-se da conversão de decimal em fracionário $\left(0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{25}{200} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}\right)$ e da simplificação de fração para encontrar o resultado $\left(\frac{1}{8}\right)$.

Dos professores que cometeram equívocos, chamou-nos a atenção o que o participante Gottfried Leibniz (2018) registrou. Ele fez o desenho da pizza dividida em 08 partes, aparentemente iguais, destacou a metade de uma parte e não percebeu que $\frac{1}{8}$ corresponde a um pedaço de pizza. Achure (2018) escreveu a fração $\frac{125}{10}$, não percebendo que o decimal 0,125 está relacionado ao fracionário $\frac{125}{1000}$.

Cauchy (2018) compreendeu que 0,125 corresponderia a uma pequena fatia de $\frac{1}{8}$ da pizza e, por isso, registrou a fração $\frac{0{,}125}{8}$, como se pode observar na figura 21.

Figura 21: Representação da fração correspondente à 0,125



Fonte: CAUCHY, 2018

Nesse caso, o participante não percebeu que o decimal $0{,}125$ corresponde à fração $\frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$ e, provavelmente, imaginou que a representação decimal se referia a um pedaço de $\frac{1}{4}$ da pizza. Os outros professores (02) registraram as frações $\frac{2}{8}$ e $\frac{1}{\ }$?, respectivamente.

Em relação à questão "d", os 14 participantes responderam ao que foi solicitado e desenharam a pizza dividida em 08 partes aparentemente iguais. No entanto, três deles destacaram todas as partes (08), e dois não destacaram nenhuma das partes, quando deveriam ter destacado um pedaço da pizza: $\frac{1}{8}$. Nove (09) professores (09) responderam adequadamente à questão ao destacar no registro figura uma parte do todo que corresponde a $\frac{1}{8}$.

Na questão "e", um participante entendeu que não sobrou pizza, e quatro participantes não responderam. Nove (09) perceberam que sobrou pizza, sendo que três deles não responderam qual foi o percentual ou a fração correspondente. Feitosa (2018) escreveu que sobrou $12{,}5\%$ e $\frac{1}{8}$ da pizza, e Nunes (2018) registrou 90% e $\frac{1}{8}$; no entanto, não perceberam que a soma das respostas obtidas nas questões anteriores (a, b e c) foi $\frac{6}{8}$ e que restariam 25% ou $\frac{2}{8}$ da pizza. Outro participante usou, equivocadamente, a fração $\frac{6{,}125}{8}$ como registro fracionário do que havia sobrado.

Cunha (2018) respondeu corretamente ao que foi solicitado na questão. Ele percebeu que sobrou pizza e que o resultado corresponde a 25% (percentual) ou $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ (fracionário). Sousa (2018) compreendeu que restou 25% da pizza, mas não representou a fração relacionada a essa quantidade. Leonhard Euler (2018) fez a representação $\frac{2}{8}$ e não utilizou a representação percentual dessa quantidade.

A tarefa 03 solicitou aos participantes que associassem a segunda coluna de acordo com a primeira. As informações constantes em cada questão consideram registros de representação semiótica (desenho, percentual, fracionária, decimal, língua natural) que deveriam ser associadas às representações na coluna dois. Vejamos no quadro 31 as respostas efetuadas pelos participantes que responderam tal tarefa.

Quadro 31: Respostas dos participantes na tarefa 03.

Participante	75%	$\frac{1}{8}$	0,25	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{4}$	0,2	25%	$\frac{3}{4}$	12,5%	$\frac{3}{15}$	0,125
Gottfried Leibniz	( )	(a)	( )	( )	(e)	( )	( )	( )	( )	( )	(d)
Carl Gauss	(d)	(a)	( )	( )	(d)	(F)	( )	( )	( )	( )	( )
Achurê	(d)	(a)	( )	(c)	(g)	(f)	( )	( )	( )	( )	( )
Feitosa	(d)	(a)	e (●)	(f)	(e)	(b)	(e)	(d)	(a)	(f)	(a)
Sousa	( )	(a)	( )	(c)	(b)	(f)	(c)	(d)	( )	(b)	( )
Moura	(d)	(a)	( )	(f)	(c)	(b)	( )	( )	( )	( )	( )
Leonhard Euler	( )	(a)	( )	( )	(c)	(F)	( )	( )	( )	( )	( )
Fibonacci	(b)	(a)	(d)	(f)	(c)	( )	( )	( )	( )	( )	( )
Lopes	(D)	(A)	( )	(C)	(B)	(G)	( )	( )	( )	( )	( )
Tales de Mileto	(d)	(a)	( )	(f)	(e)	(b)	( )	( )	(c)	( )	( )
Nunes	(f)	(a)	(e)	(a)	( )	( )	( )	( )	( )	( )	( )
Cauchy	(D)	(A)	(D)	(F)	(D)	(F)	(D)	(E)	( )	( )	( )
Cunha	(d)	(a)	(f)	(b)	(a)	(a)	(a)	( )	( )	( )	(a)
Moraes	(e)	(a)	(c)	(f)	(e)	(c)	(f)	(c)	(b)	(d)	(b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na questão "a", quatorze (14) participantes conseguiram associar/converter a representação geométrica com a representação fracionária $\frac{1}{8}$. Feitosa (2018) percebeu que a parte destacada na figura também estava associada aos registros percentual $(12{,}5\%)$ e decimal $(0{,}125)$. Do mesmo modo, Cunha (2018) compreendeu que o registro geométrico estava relacionado aos registros 0,2; 25% e 0,125, mas não percebeu que $0{,}2 \neq 25\% \neq 0{,}125 = \frac{1}{8}$. Nota-se, portanto, que ele teve dificuldade para converter fração em número decimal e percentual.

Em relação à questão "b", 57,14% dos 14 participantes não conseguiram estabelecer relação entre os registros da primeira e da segunda coluna. Os demais responderam à questão parcialmente: 35,71% relacionaram a fração $\frac{4}{20}$ com apenas um dos possíveis registros $\left(0{,}2 \text{ ou } \frac{2}{10} \text{ ou } \frac{3}{15}\right)$ e não perceberam que $20\% = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = \frac{3}{15} = 0{,}2$; enquanto que 7,14% se equivocaram ao escrever que $20\% = 12{,}5\%$, quando deveriam relacionar a fração da questão com $\frac{2}{10}$ e 0,2, respectivamente.

Na questão "c", 71,43% dos 14 (quatorze) participantes não responderam e somente 04 (quatro) relacionaram a fração $\frac{4}{20}$ com as representações da segunda coluna. Dos que responderam, três compreenderam que $\frac{4}{20} = \frac{2}{10}$ e um associou que $\frac{4}{20} = 0{,}2$, mas não verificamos como eles chegaram a esses resultados. Para responder à questão, Sousa (2018) lançou mão da divisão $4 \div 20$, enquanto que Lopes (2018) encontrou as frações equivalentes $\frac{4}{20} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0{,}2$, mas não relacionou a fração $\frac{4}{20}$ com o decimal 0,2.

Na questão "d", nove (09) participantes $(64{,}28\%)$ conseguiram relacionar o registro decimal $(0{,}75)$ com pelo menos uma representação na segunda coluna. No entanto, não foi possível verificar o modo como responderam à questão. Somente Feitosa (2018) contemplou, integralmente, a associação entre as colunas, percebendo que $0{,}75 = 75\% = \frac{3}{4}$. Moura (2018), Lopes e Tales de Mileto (2018) associaram, parcialmente, que $0{,}75 = 75\%$, mas não apontaram a maneira como procederam para chegar a esse resultado.

Sousa (2018) entendeu que o número decimal $0{,}75$ está relacionado à representação fracionária $\frac{3}{4}$, mas não conseguiu associar ao número percentual 75%. Quatro participantes se equivocaram na associação entre os registros, apontando que

a) $0{,}75 = 0{,}25$;

b) $0{,}75 = \frac{2}{10}$;

c) $0{,}75 = \frac{3}{15} = 0{,}125$ ou

d) $0{,}75 = 75\% = 0{,}25 = \frac{1}{4} = 25\%$.

Em relação à questão "e", doze (12) participantes $(85{,}71\%)$ associaram corretamente a expressão "um quarto" à sua representação fracionária $\frac{1}{4}$, enquanto que 7,14% não perceberam essa relação. Apenas 01 (um) professor entendeu que "um quarto" $= 0{,}25 = 25\% = \frac{1}{4}$, respondendo de maneira correta a questão. Do mesmo modo, 01 (um) participante considerou que o registro em língua natural é equivalente a $0{,}25$, mas não conseguiu visualizar outras duas equivalências. Cunha (2018) percebeu a associação com dois registros de representação $\left(\frac{1}{4} \text{ e } 0{,}25\right)$.

Cauchy (2018) cometeu equívoco na questão "d" ao relacioná-la com o registro fracionário $\frac{3}{4}$ da segunda coluna. Já Moraes (2018) associou corretamente "um quarto" à representação $\frac{1}{4}$, mas não obteve sucesso com a representação percentual (25%), deduzindo que a resposta certa seria 75%.

Na questão “f”, três participantes não deram nenhuma resposta, mesmo sendo apresentada a fração $\frac{2}{10}$ na primeira e na segunda coluna. Notamos que apenas seis (06) dos 14 professores conseguiram perceber e relacionar os registros congruentes $\left(\frac{2}{10}\right)$ nas duas colunas. Outros seis (06) perceberam que $\frac{2}{10} = 0{,}2$. Feitosa (2018) entendeu que as representações fracionárias $\left(\frac{2}{10} \text{ e } \frac{3}{15}\right)$ remetem à mesma quantidade e são congruentes a $\frac{2}{10}$.

Dois participantes responderam que $\frac{2}{10}$ estaria associado às representações percentuais 75% e 25%, respectivamente. No entanto, um deles percebeu a congruência nas duas colunas. Outro estabeleceu a conversão do registro fracionário em decimal, percebendo que $\frac{2}{10} = 0{,}2$.

5.4.2 Análises Bloco 02 – Significado Número

Este bloco é composto por duas atividades, as quais foram respondidas por 29 (vinte e nove) participantes. Na primeira atividade, foi organizada uma tarefa em que se solicita que os participantes localizem na reta numérica algumas frações que estão representadas por meio de diferentes registros de representação semiótica (geométrico, decimal, fracionário, percentual, língua natural). A segunda atividade compreende três tarefas que envolvem associação, comparação e equivalência entre frações.

Nessa tarefa 01 da primeira atividade, percebemos que a quantidade de acertos nas marcações na reta numérica foi muito baixa. Destacamos que 50% dos quatorze (14) participantes não localizaram na reta numérica nenhuma das frações, em suas diversas representações. Destes, 50% preferiram não responder ao que foi solicitado.

Dois participantes, Andrade (2018) e Gödel (2018), provavelmente não compreenderam que deveriam fazer marcações no desenho da reta. Eles descreveram as frações da maneira como são lidas, identificaram os termos numerador e denominador e, em alguns casos, mostraram a maneira de se resolver cada uma das questões, mas não fizeram o que foi proposto na tarefa.

Alencar (2018) também não localizou registros na reta numérica, mas, em alguns casos, fez anotações de como chegaria ao resultado. Na questão “a”, o participante tentou encontrar uma fração equivalente a $\frac{3}{4}$ ou $\frac{1}{4}$, mas não obteve sucesso ao escrever $\frac{6}{7}$; na questão “c”, fez um desenho retangular e destacou de maneira correta a representação de $\frac{1}{4}$; nas questões “g” e “m” encontrou as frações equivalentes a $\frac{3}{3} = \frac{6}{6}$ e $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$, respectivamente; e na “i”, escreveu que 25% corresponde à $\frac{1,5}{6}$. No entanto, em nenhum dos casos o professor localizou as frações na reta numérica. Al-Khwarizmi (2018) também não realizou localizações na reta numérica, apenas utilizou-se de representações semióticas geométricas (pizzas e retângulos) para representar as representações numéricas.

Os participantes que fizeram a localização das frações na reta numérica correspondem a 50% de um total de quatorze (14). Na questão “a”, $14{,}28\%$ fizeram a conversão do registro geométrico em fracionário $\left(\frac{3}{4}\right)$, depois realizaram a operação de divisão $(3 \div 4)$ e localizaram, corretamente, na reta. Já $28{,}57\%$ não conseguiram fazer a mesma localização, mas perceberam que a representação geométrica correspondia à fração $\frac{3}{4}$. Somente $7{,}14\%$ não fizeram nenhuma tentativa de resolver a questão.

Na questão “b”, apenas (três) 3 fizeram a localização $0{,}5$ na reta numérica de maneira correta. Um total de $14{,}28\%$ não responderam e $7{,}14\%$ fizeram referência de que a representação decimal 0,5 estaria localizada entre 0 e 1 na reta numérica, mas não realizaram nenhuma marcação.

Em relação à questão “c”, os dados mostraram que $14{,}28\%$ dos participantes se equivocaram ao localizar as frações na reta numérica; $14{,}28\%$ não responderam e $14{,}28\%$ acertaram a representação $\frac{1}{4} = 0{,}25$ sobre a reta. É notório o fato de que os professores que erraram a localização perceberam que $\frac{1}{4}$ corresponde a uma parte de quatro, mas o associaram aos decimais 0,5 e $-0{,}75$.

Na questão “d”, dos sete (07) que responderam a tarefa, cinco apresentara dificuldades. Nota-se que 03 (três) participantes não responderam à questão e 02 (dois) enganaram-se na localização do número quando consideraram que $0{,}125 = 2{,}5$. Outros 02 (dois) apenas localizaram a fração na reta numérica corretamente, mas não mostraram como chegaram ao resultado.

Em relação à questão “e”, 28,57% dos 14 participantes compreenderam que $\frac{5}{2} = 2{,}5$ e pontuaram corretamente na reta. Em outros termos, isso significa que eles conseguiram converter uma fração em número decimal. Dedeking (2018) utilizou a representação geométrica para responder ao que foi solicitado, mas, aparentemente, se confundiu ao marcar $1{,}75$ na reta.

Cruz (2018) e Pinto (2018) compreenderam que o número misto $1\frac{1}{2}$ é equivalente a 1,5 e os localizaram corretamente na reta numérica (questão “f”). Outros dois participantes tiveram a mesma percepção e marcaram corretamente. Dedeking (2018) provavelmente realizou a operação $1\frac{1}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2}$ para responder à questão; no entanto, ao fazer a localização, se equivocou e destacou $-1{,}75$.

A questão "g" foi respondida por 07 (sete) professores: 04 erraram (dois pontuam a fração $\frac{3}{3}$ no número 3, um pontua em $2{,}33$ e outro marca entre 0 e 1) e 03 acertaram, considerando que $\frac{3}{3} = 1$ obtido por meio da divisão $(3 \div 3 = 1)$.

Na questão "h", dois participantes perceberam que $3 \div 2 = 1{,}5$ e fizeram a localização na reta numérica, enquanto que os demais não responderam ao que foi solicitado.

Em relação à questão "i", $14{,}28\%$ não tiveram dificuldades para encontrar a localização do número percentual 25% na reta numérica. No entanto, não apontaram a maneira como procederam para alcançar o resultado. Os demais professores não responderam.

Cruz (2018) transformou a representação geométrica da questão "j" no número misto $1\frac{3}{4}$ e não encontrou dificuldades para marcar na reta numérica. Jacobi (2018) também conseguiu fazer essa conversão, mas teve dificuldade para localizar na reta, marcando $1{,}25$. Um participante não obteve sucesso ao converter o registro de representação geométrica em fração. Isso porque ele considerou que o total das partes seria 08 $(4 + 4 = 8)$, não se atentando que havia duas "pizzas" divididas em quatro pedaços cada uma, sendo que na primeira quatro fatias foram destacadas e na segunda, três. Assim, teríamos $\frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ e não $\frac{7}{8}$ ou $1{,}5$, como apontado pelo participante.

Na questão "l", $21{,}43\%$ dos participantes conseguiram a localizar a fração $\frac{3}{4}$ na reta numérica. Barros (2018) realizou a operação de divisão para chegar ao resultado $(3 \div 4 = 0{,}75)$, enquanto que Jacobi (2018) entendeu que $\frac{3}{4}$ correspondem a $2 + \frac{3}{4}$ e marcou na reta o número correspondente a $2{,}75$.

Em relação à questão "m", apenas 01 (um) participante localizou, na reta numérica, a fração $\frac{2}{16}$, porque percebeu que essa representação fracionária corresponde a $0{,}125$. Os demais não responderam.

Na questão "n", cinco professores a responderam, sendo que três acertaram e dois erraram. Jacobi (2018) e Barros (2018) perceberam que $0{,}2 = \frac{2}{10}$ e conseguiram localizá-lo na reta numérica. Outros confundiram a representação decimal $(0{,}2)$ com $0{,}5$ e -2, respectivamente.

As questões “o” e “p” foram respondidas por dois participantes: um marcou as representações $\left(\frac{2}{8}\text{ de }10; \frac{2}{10}\text{ de }1\right)$ corretamente na reta numérica, enquanto o outro não obteve o mesmo sucesso. Jacobi (2018) realizou a operação $[(10 \div 8) \times 2] = 1{,}25 \times 2 = 2{,}5$ (questão “o”) e $[(1 \div 10) \times 2] = 0{,}1 \times 2 = 0{,}2$ (questão “p”) e marcou corretamente na reta. Cruz (2018) fez um retângulo dividindo-o em 11 partes, dividiu uma dessas partes em outras 8 e destacou duas (questão “o”). O participante realizou o mesmo procedimento na questão “p”, dividindo um retângulo em 10 partes e destacando 2. Em ambos os casos, o participante marcou o mesmo ponto da reta: $(0{,}125)$.

As questões “q” e “r” não foram respondidas pelos participantes porque não as disponibilizamos na atividade. Isso ocorreu devido a erros durante a impressão do material.

Na questão “s”, os professores cometeram equívocos para responder uma vez que ao somar as frações $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ obtiveram como resultados $\frac{2}{4}$, $2{,}5$ e $\frac{2}{2} = 2$, localizando de maneira equivocada na reta numérica. Os demais participantes $(35{,}71\%)$ não responderam.

Na questão “t”, apenas um participante respondeu ao que foi solicitado, mas não percebeu que $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$. O professor Cruz (2018) localizou na reta o ponto $0{,}25$ quando deveria ser 1.

Do mesmo modo, a questão “u” foi resolvida por um participante de maneira equivocada. Barros (2018) provavelmente confundiu o produto $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = 0{,}125$ com a representação decimal de $\frac{1}{4}$, $0{,}25 = 25\%$. Na questão “v”, Jacobi (2018) realizou a operação de subtração e não cometeu erros ao localizar na reta. O mesmo não aconteceu com Barros (2018), que entendeu que $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2$.

A questão “x” foi respondida por apenas um participante e ainda de maneira equivocada. Jacobi (2018) realizou a operação $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{2} = 2$, quando deveria ter obtido resultado igual a 1.

Na tarefa 01 da segunda atividade do bloco 02, solicitamos à quinze (15) participantes que realizassem a associação da segunda coluna de acordo com a primeira. A primeira coluna é composta por vinte um (21) registros de representação semiótica (geométrico, decimal, fracionário, misto, percentual, língua natural) que devem ser relacionados com os registros numéricos (inteiro e fracionário) da segunda coluna.

Destacamos que é possível estabelecer relação de dois ou mais registros da primeira coluna com os registros da segunda, com exceção das questões “b”, “j” e “v”.

A representação geométrica da questão “a” poderia ser associada a duas frações, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$, isso porque os participantes podem ter como referência a parte destacada em branco ou em cinza. Nesse sentido, constatamos que 11 professores (73,3%) fizeram as associações de maneira correta, 20% não estabeleceram as associações e 6,7% se enganaram ao responder que $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$ correspondem a $\frac{3}{2}$.

Na questão “b”, o número 0,5 pode ser associado somente ao número fracionário $\frac{1}{2}$ da segunda coluna. No entanto, os dados mostraram que 20% dos participantes se equivocaram ao associá-lo com outras representações $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{4} \text{e } 0\right)$. Quatro (04) professores conseguiram estabelecer a relação $0{,}5 = \frac{1}{2}$ que corresponde a 26,67%, enquanto que 53,33% não identificaram nenhuma relação com a segunda coluna.

Oito professores associaram, corretamente, as frações $\frac{1}{4}$ (questão “c”) e $\frac{1}{4}$ da segunda coluna, e um participante relacionou de maneira incorreta a fração da questão a $\frac{1}{2}$. Seis participantes não fizeram associação. Cinco participantes perceberam que $\frac{1}{4} = 25\%$ (questão “i”), enquanto que dois relacionaram de maneira equivocada 25% com $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{2}$. Provavelmente, não conseguiram realizar a conversão entre os registros percentual e fracionário.

A questão “d”, cujo registro é dado em representação decimal (0,125), está associado à fração $\frac{1}{8}$. No entanto, os dados revelaram que somente um participante identificou essa associação. Para Sobral (2018), o número 0,125 corresponde a $\frac{5}{2}$ e $\frac{1}{2}$; para outros, equivale a $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$, respectivamente. A maioria dos professores (11), dos professores que responderam esta tarefa (15), (73,33%) não percebeu as relações existentes nas duas colunas.

Em relação à fração $\frac{5}{2}$ (questão “e”), 60%, de um total de 15 participantes, fizeram a associação correta. Destes, somente 02 (dois) professores perceberam que $\frac{5}{2} = \frac{2}{8}$ de 10, ao mesmo tempo (questão “e” e questão “o”). No total, cinco (05) participantes compreenderam que $\frac{2}{8}$ de $10 = \frac{5}{2}$, e alguns o relacionaram com outros registros não equivalentes a ele $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$, tendo, portanto, dificuldades em entender as relações existentes entre os registros.

Somente dois participantes perceberam que $1\frac{1}{2}$ (questão “f”) e $3 \div 2$ (questão “h”) estão relacionados à mesma quantidade e associados à representação fracionária $\frac{3}{2}$. Quatro entenderam que $\frac{3}{2}$ e $1\frac{1}{2}$ equivalem ao mesmo valor numérico, mas não perceberam que $3 \div 2$ também equivale a esses valores.

Dois participantes perceberam que $3 \div 2$ e $\frac{3}{2}$ correspondem à mesma quantidade, mas não entenderam que $1\frac{1}{2}$ representa o mesmo valor. Outros dois participantes não distinguiram que $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ e relacionaram com outros registros, como $\left(\frac{1}{2}\text{ e } 1\right)$ da questão “f”. Outros (03) entenderam que $3 \div 2$ é equivalente à $\left(\frac{1}{5}\text{ e } 1\right)$.

Nove (09) participantes perceberam que $\frac{3}{3} = 1$ e associaram corretamente. Somente um (01) respondeu que $\frac{3}{3} = 0$ e os demais não responderam (questão “g”). Destacamos que as representações $\frac{3}{3}$ (questão “g”), $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ (questão “s”) e $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$ (questão “v”) correspondem ao mesmo valor numérico 1 $\left(\frac{3}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \div \frac{1}{2}\right)$. No entanto, somente um participante compreendeu que as questões “g” e “s” são equivalentes, e outro percebeu a relação entre “g” e “v”, mas não associou as três ao mesmo tempo. Oito (08) associaram as frações $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$ às outras representações não equivalentes $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Dez (10) participantes $(66{,}67\%)$ conseguiu converter o registro geométrico da questão “j”, associando-o à fração $\frac{7}{4}$. Destaca-se que $33{,}33\%$ não responderam à questão.

Nas questões “l” e “r”, os participantes deveriam perceber que as duas correspondem à representação fracionária $\frac{3}{4}$. No entanto, verificamos que somente três (03) professores, dos quinze (15) que responderam a tarefa, estabeleceram essa relação $\left(\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}\right)$ e cinco (05) não responderam. Três participantes relacionaram a representação $\frac{3}{4}$ (questão “l”) da primeira coluna com $\frac{3}{4}$ da segunda, e não perceberam que $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}$ (questão “r”). Do mesmo modo, outros três relacionaram $\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$ (questão “r”) com $\frac{3}{4}$, mas não fizeram a relação com a questão “l”.

Para associar a questão “m”, $53{,}33\%$ perceberam que $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ e $46{,}67\%$ não responderam. Em relação à questão “n”, dez (10) professores não responderam, o que equivale a $66{,}67\%$. Dos que associaram o registro decimal 0,2 com as representações da segunda coluna, verificamos que três (03) responderam que $0{,}2 = \frac{1}{5}$ e outros dois que $0{,}2 = 0$.

Verificamos que todos os participantes não conseguiram relacionar 0,2 e $\frac{2}{10}$ de 1 (questão "p") com o registro de representação semiótica fracionário $\frac{1}{5}$, ao mesmo tempo. Os dados revelaram que apenas seis (06), dos quinze (15) professores, associaram $\frac{2}{10}$ de 1 a $\frac{1}{5}$, de maneira correta. Seis (06) participantes não responderam à questão e três (03) resolveram de modo errado, relacionando-a com as frações $\frac{7}{4}$, $\frac{5}{2}$ e $\frac{1}{2}$, respectivamente.

Na questão "q", um (01), dos quinze (15) participantes, percebeu que "metade da metade" está associado à fração $"\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}" = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Dois professores a relacionaram ao número 0 (zero) e outros dois, à fração $\frac{1}{2}$. Dez (10) não responderam à questão. Além disso, verificamos que todos os participantes não entenderam que as questões "q" e "u" são semelhantes e estão associadas à fração $\frac{1}{4}$. Nesse sentido, apenas dois participantes perceberam que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ e outros três (03) que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ está relacionado a $\frac{1}{2}$ e 1.

Em relação à representação $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ (questão "t"), os dados mostraram que quatro (04), dos quinze (15) participantes, associaram, de maneira correta, ao número 0 (zero) e dois responderam, erroneamente, que $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ e $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$. Os demais professores não estabeleceram associações com os registros da segunda coluna.

Na tarefa 02, solicitamos que os participantes comparassem as frações e utilizassem os símbolos: $>$ (maior), $<$ (menor) e $=$ (igual).

Na questão "a", verificamos que três (03) participantes, de um total de quinze (15), compararam o registro geométrico $\left(\text{que corresponde a } \frac{3}{4}\right)$ com o decimal 0,75 ao fazerem uso do símbolo "=" de maneira satisfatória, quando se toma como referência a parte destacada em cor cinza. Dois (02) professores não responderam ao que foi solicitado, e dez (10) erraram as comparações ao utilizar os símbolos $>$ e $<$.

Ainda em relação à questão "a", tomando como referência a parte destacada em branco $\left(\text{que representa } \frac{1}{4}\right)$, notaremos que o símbolo que define a resolução da questão será o $<$ (menor que) e o número de participantes que acertou a comparação corresponde à $33{,}33\%$.

Na questão “b”, $45{,}67\%$ dos participantes (07 professores) atenderam ao que foi solicitado, compreendendo que $0{,}5 > \frac{1}{4}$; 40% escreveram que $0{,}5 < \frac{1}{4}$ e dois professores $(13{,}33\%)$ não responderam.

Em relação à questão “c”, dez (10) professores perceberam que $0{,}125 < \frac{1}{4}$ e, somente três (03) se equivocaram na comparação ao afirmar que $0{,}125 > \frac{1}{4}$. Um terço $\left(\frac{1}{3}\right)$ dos participantes entendeu que a representação decimal $1{,}5$ é igual ao número misto $1\frac{1}{2}$ na questão “d”. Já $\frac{2}{5}$ dos professores entenderam que o número decimal é maior que o misto, $\frac{1}{15}$ registrou ser menor e $\frac{1}{5}$ não respondeu.

Na resolução da questão “e”, cinco (05) de quinze (15) participantes relacionaram que $\frac{1}{8} = 12{,}5\%$, lançando mão da conversão $\frac{1}{8} = 1 \div 8 = 0{,}125 = 12{,}5\%$ e não tiveram dificuldades ao comparar as duas quantidades. No entanto, sete professores (07) responderam que $\frac{1}{8} < 12{,}5\%$ (quatro participantes) e $\frac{1}{8} > 12{,}5\%$ (três participantes).

Todos os participantes não utilizaram representações geométricas, tampouco procederam à resolução de alguma operação matemática para resolver a questão “f”. Mesmo assim, dez (10) professores perceberam que $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ e apenas três (03) responderam que $\frac{3}{4} < \frac{1}{2}$.

No entanto, na questão “g”, ao compararem as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$, verificamos que cinco (05) participantes responderam que $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$; outros sete (07) que $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{2}$ (provavelmente, compararam os denominadores $4 > 2$) e um professor escreveu que essas frações são iguais.

Algo semelhante ocorreu nas resoluções da questão “h”, em que cinco (05) professores, dos quinze (15) que responderam esta tarefa, responderam que $\frac{1}{4}$ é maior que a fração $\frac{1}{8}$, e oito (08) participantes escreveram, de maneira errada, que $\frac{1}{4} < \frac{1}{8}$ – possivelmente, perceberam que os numeradores nas duas frações são iguais e compararam os denominadores $4 < 8$, errando a resolução.

Na resolução da questão “i”, constatamos que $\frac{1}{3}$ dos quinze (15) participantes comparou corretamente a fração $\left(\frac{3}{2}\right)$ com o número misto $\left(1\frac{1}{2}\right)$, considerando que tratam da mesma quantidade. Cinco professores escrevem que a fração é maior que o número misto e outros dois compreenderam que o número misto, na verdade, é maior que a fração.

Em relação à questão "j", sete (07) responderam que o registro de representação semiótica fracionário $\left(\frac{3}{4}\right)$ corresponde à representação percentual (75%), ou melhor, que $\frac{3}{4} = 75\%$. $53{,}33\%$ não responderam da mesma maneira, de modo que 13,33% não realizaram nenhuma comparação, 26,67% admitiram que $\frac{3}{4} < 75\%$ e 13,33% escreveram que $\frac{3}{4} > 75\%$.

60% dos participantes entenderam que a fração $\frac{1}{4}$ é menor que $\frac{2}{4}$ na questão "l". Os demais $(26{,}67\%)$ consideraram que $\frac{1}{4} > \frac{2}{4}$, o que não é verdade.

Na questão "m", treze (13) participantes mobilizaram os três símbolos na comparação entre as frações $\frac{5}{2}$ e $\frac{2}{10}$. Nesse caso, verificamos que um terço (05 professores) dos professores percebeu que $\frac{5}{2} > \frac{10}{2}$, sete (07) relacionaram que $\frac{5}{2} < \frac{2}{10}$ (o que está incorreto) e um participante considerou que são iguais, o que também não é verdade.

Em relação à questão "n", os participantes (13) comparam duas frações impróprias $\left(\frac{7}{4}\text{ e }\frac{3}{2}\right)$. Constatamos que a maioria $(66{,}67\%)$ respondeu que $\frac{7}{4} > \frac{3}{2}$, enquanto que $13{,}33\%$ consideraram que a primeira é menor que a segunda.

Na tarefa 03, solicitamos aos 15 participantes que escrevessem frações equivalentes às representações:

a) 
b) $\frac{3}{12}$;
c) $\frac{1}{3}$;
d) $0{,}5$;
e) 25%;
f) 

Os dados mostraram que, em relação à questão "a", 60% não responderam à questão. Verificamos ainda que, daqueles que escreveram frações equivalentes, um (01) escreveu dois números nos lados da representação geométrica: 01 (do lado esquerdo) e 03 (do lado direito), possivelmente representando a parte destacada na cor branca (01) e na cor cinza (03). Um total de $26{,}67\%$ encontrou frações equivalentes $\left(\frac{3}{4};\frac{9}{12};\frac{1}{4}\right)$ e $6{,}67\%$ responderam parcialmente correto, porque apontaram que o número $0{,}75\%$ equivale à quantidade representada na figura, o que não é verdade.

Dos participantes, apenas dois (02) escreveram números à direita e à esquerda dos registros indicados nas questões, enquanto do demais não deram a devida atenção ao fato de que as representações à direita da quantidade indicada referem-se ao crescimento das representações das frações equivalentes e as representações à esquerda equivalem ao decrescimento, até chegar a uma fração irredutível.

Na questão "b", três (03) participantes entenderam que $\frac{3}{12} = \frac{6}{24} = \frac{9}{36}$ e, portanto, são equivalentes. Um (01) professor escreveu dois números (3 12) separadamente, estando ambos relacionados ao numerador (03) e denominador (12), mas não encontrou a fração equivalente a $\frac{3}{12}$.

Outro professor encontrou duas frações supostamente equivalentes a $\frac{3}{12}$, no entanto, percebemos que o participante apenas modificou os numeradores, considerando que $\frac{2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{4}{12}$. Contudo, sabe-se que isso não é verdade, uma vez que $\frac{2}{12} \neq \frac{3}{12} \neq \frac{4}{12}$. Verificamos, ainda, que outro professor fez uso de representação geométrica para a quantidade $\frac{3}{12}$ de maneira satisfatória.

Na questão "c", três (03) participantes mobilizaram frações equivalentes a $\frac{1}{3}$ $\left(\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}\right)$, mas não se atentaram a sua localização (se do lado esquerdo ou direito da representação apresentada na questão). Mais uma vez, um participante escreveu os números 01 e 03, relacionados à fração $\frac{1}{3}$, do mesmo modo que aconteceu nas questões "a" e "b". Dois professores utilizaram o registro de representação geométrico entendendo que são equivalentes à fração dada.

Em relação à questão "d", cinco participantes encontraram frações $\left(\frac{1}{2} \text{ e } \frac{5}{10}\right)$, representações percentuais (50%) e geométricas (dividida em duas partes com uma destacada) equivalentes ao registro de representação semiótica numérico-decimal 0,5. No entanto, os registros foram escritos do lado direito da quantidade indicada, sem dar atenção a se cresciam ou decresciam.

Ainda em relação à questão "d", dois participantes estabeleceram relação incorretas com a quantidade indicada ao escrever que os números 0 e 5 (semelhante ao procedimento realizado nas questões "a", "b" e "c") e 0,25 são equivalentes a 0,5.

Cinco participantes procederam corretamente ao escrever as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{25}{100}$ como representações fracionárias equivalentes à quantidade indicada 25%, na questão "e". Três participantes não conseguiram encontrar, de maneira correta, representações equivalentes para 25%: dois deles desenharam uma figura, mas em ambos os casos destacaram a metade (50%); o outro escreveu os números 7,5 e 2,5 (um à direita e outro à esquerda, respectivamente) entendendo ser equivalentes a 25%, o que está incorreto.

Na questão "f", os participantes (04) entenderam que as frações $\frac{4}{10}$ e $\frac{6}{10}$ são equivalentes à quantidade indicada em registro de representação geométrica, por meio de quantidades discretas. Dois (02) escreveram frações $\left(\frac{24}{36} \text{e} \frac{6}{4}\right)$ que representam a razão de bolinhas azuis para bolinhas brancas, e vice-versa. No entanto, não representaram frações equivalentes à quantidade apresentada.

5.4.3 Análises Bloco 03 – Significado Medidas

Essa atividade foi distribuída para 14 participantes e organizada em três tarefas. Na tarefa 01, considera-se uma situação hipotética do lançamento de um dado e pergunta-se a probabilidade de se obter um número par (na questão "a"), um número ímpar (questão "b"), o número 3 (questão "c"), o 2 (questão "d"), 1 ou 6 (questão "e"), 1 e 6 (questão "f"). Pede-se que os participantes expliquem como procederam para chegar ao resultado. 07 professores não responderam essa tarefa, outros responderam parcialmente (03) e apenas quatro (04) responderam completamente.

Nas questões "a" e "b", quatro (04) participantes perceberam que o dado é formado por seis faces enumeradas de 1 a 6, de tal modo que há três números pares $(2, 4, 6)$ e três números ímpares $(1, 3, 5)$. Assim, escreveram que a probabilidade de se obter um número par é de 50% ou $\frac{3}{6}$, e o mesmo para se obter um número ímpar.

Dois professores escreveram que a probabilidade de se obter um número par é 3, igualmente para se ter um número ímpar. Possivelmente, esses participantes fizeram confusão entre a probabilidade de um evento acontecer e o número de elementos possíveis (três números pares e três números ímpares). Boole (2018) respondeu que "ao lançar um dado, temos $\frac{1}{6}$ de probabilidade de se obter um número par".

As questões "c" e "d" foram resolvidas por $35{,}71\%$ dos 14 participantes, sendo que dois deles usaram registros percentuais $(50\%, 30\%, 20\%)$ para indicar a solução de cada questão, mas não obtiveram êxito, uma vez que as possíveis soluções seriam $16{,}66\%$ nas duas questões. Neumann (2018) escreveu que a probabilidade de se obter os números 3 e 2, questões "c" e "d", respectivamente, seria 1. No entanto, a participante não explicou como procedeu para chegar a esse resultado, de tal modo que não foi possível perceber se o número 1 está relacionado a uma (01) possibilidade em um total de 6.

Silva (2018) e Castro (2018) compreenderam que o dado possui 6 lados numerados de 1 a 6, e cada número corresponde a $\frac{1}{6}$. Assim, não tiveram dificuldades para resolver as questões "c" e "d", nas quais compreenderam que as probabilidades seriam $\frac{1}{6}$ em cada caso.

Na questão "e", cinco participantes resolveram ao que foi solicitado, sendo que apenas um conseguiu responder corretamente. Dois professores escreveram os números 1 e 2 como possíveis soluções, no entanto, não explicaram o que os levou a essa resposta. Outros participantes consideraram que a probabilidade seria "10 ou 60%" (KHAYYÃM, 2018) ou $\frac{1}{6}$, não se atentando para o fato de que o conectivo "ou" está relacionado à soma $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ (probabilidade de se obter o número 1 mais a probabilidade de se obter o número 6).

Castro (2018) considerou as duas faces (1 e 6) e percebeu que a probabilidade seria $\frac{2}{6}$. Para ele, "cada número corresponde a $\frac{1}{6}$ do dado. Sendo que o todo é $\frac{6}{6}$". Logo, ele entendeu que, para se obter 1 ou 6 no lançamento do dado, deveria considerar duas possibilidades (1 e 6).

Em relação à questão "f", dois participantes perceberam que não seria possível obter os números 1 e 6 no lançamento do dado. Sousa (2018) escreveu "agora 1 e 6 pensei ser impossível pois não há dois dados", assim, a probabilidade seria 0. Dois professores, provavelmente consideraram o conectivo "e" associado à ideia de soma e responderam que a probabilidade seria $\frac{2}{6}$. Um participante respondeu que a probabilidade de se obter os números 1 e 6 seria "10 ou 60%" (KHAYYÃM, 2018), replicando a mesma resposta obtida na questão "e".

Na tarefa 02, consideramos o preparo de um litro de suco com três medidas de água e duas medidas de polpa de fruta. Nas questões "a" e "b", solicitou-se aos participantes que representassem a quantidade de água e de polpa de fruta no suco por meio de fração.

Verificamos que dois participantes estabeleceram relação entre as quantidades dos dois componentes (água e polpa) e escreveram as frações $\frac{3}{2}$ (questão "a") e $\frac{2}{3}$ (questão "b"), em que o número 3 está relacionado às medidas de águas e o 2 às de polpa de fruta. Cruz (2018) escreveu que "foram 3 medidas de água, com 2 medidas de polpa, portanto a fração representa $\frac{3}{2}$", explicando como procedeu para resolver à questão: "a representação fracionária é $\frac{2}{3}$, pois a polpa representa 2 medidas, e a água 3 medidas". Assim, nota-se que a participante não percebeu que o todo é composto por 05 partes $(3 + 2 = 5)$ e, portanto, as representações fracionárias deveriam ser $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{5}$.

Ainda em relação às questões "a" e "b", quatro participantes perceberam que a quantidade total de medidas é 5 e conseguiram resolver as questões de maneira correta. Para isso, escreveram as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{5}$ como representações fracionárias relacionadas à quantidade de água e de polpa de fruta no suco. Outros professores (04) se equivocaram nas representações fracionárias ao dividir um litro (representado pelo número 1) pelas respectivas medidas (3 e 2) e obter as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, em que o numerador está relacionado a 1 litro de suco.

Três participantes entenderam que a quantidade de água no suco é $600\ ml$ e a de polpa de fruta é $400\ ml$, nas questões "c" e "d", respectivamente. Isso porque perceberam que $1\ l = 1000\ ml$, e $\frac{3}{5}$ corresponde à $600\ ml$ $[(1000 \div 5) \times 3]$ e $\frac{2}{5}$ à $400\ ml$ $[(1000 \div 5) \times 2]$. Khayyãm (2018) escreveu as frações correspondentes às quantidades de cada componente, não percebendo que foi solicitada a quantidade de cada um dos componentes no suco.

Os demais participantes não compreenderam que deveriam escrever as quantidades de cada componente e registraram de maneira equivocada as informações $\left(\frac{3}{1}, 3, 4, \frac{3}{3}, 1 \text{ litro}\right)$ na questão "c" e $\left(\frac{2}{1}, 2, 6, \frac{2}{2}, 2 \text{ medidas}\right)$ na questão "f". Menezes (2018) não percebeu que a quantidade total de partes é 5 $(3 + 2)$ e escreveu as quantidades $750\ ml$ e $500\ ml$, nas questões "c" e "d", respectivamente. A participante partiu do fato de que "se 1 litro tem $1.000\ ml$ equivale a 4 medidas de água de $250\ ml$" (MENEZES, 2018).

Verificamos que sete (07) professores tiveram dificuldades para resolver as questões, uma vez que não perceberam que o litro de suco era composto de 05 medidas (3 medidas de água e 2 de polpa de fruta) e, outros quatro (04) não responderam. Por isso, não entenderam que as representações fracionárias de cada componente estavam relacionadas à quantidade total de medidas (05) e não conseguiram escrever as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{5}$, que corresponderiam às quantidades de água $(600\ ml)$ e de polpa de fruta $(400\ ml)$, respectivamente.

Na tarefa 03, foi apresentada uma situação em que se considera uma fruteira com 4 maçãs e 6 laranjas. Na questão "a", um participante não respondeu. Quatro professores escreveram que a fração que representa a quantidade de maçãs na fruteira é $\frac{4}{10}$, entendendo que a quantidade de frutas que representam numerador e denominador são 4 e 10, respectivamente.

A esse respeito, Castro (2018) escreveu “a junção de $4 + 6 = 10$, portanto o inteiro é $10 = 100\%$. Sendo que 4 frutas de 10 são $= 40\%, 0{,}4$ e $\frac{4}{10}$”.

Oito professores não perceberam que a fração que representa a quantidade de frutas na fruteira é $\frac{4}{10}$ e escreveu outros registros fracionários $\left(\frac{4}{1}, \frac{10}{4}, \frac{1}{4}, 10, \frac{4}{4}\right)$. Portanto, não compreenderam que o denominador seria 10 (quantidade total de frutas) e o numerador 4 (quantidade de maçãs na fruteira).

Em relação à questão “b”, ocorreu uma situação semelhante. Quatro (04) participantes perceberam que a fração que representa a quantidade de laranjas da fruteira é $\frac{6}{10}$ e que os termos 6 e 10 correspondem ao numerador e ao denominador, respectivamente. A maioria (08) mobilizaram outras representações $\left(\frac{6}{1}, \frac{10}{6}, \frac{1}{6}, 4, 6, \frac{6}{6}\right)$ de maneira equivocada e, assim, não identificaram as quantidades que representam o numerador (06) e denominador (10) da fração. Isso porque as frações $\left(\frac{6}{1}, \frac{10}{6}, \frac{1}{6}, 4, 6, \frac{6}{6}\right)$ não representam a quantidade de laranjas na fruteira.

Ao solicitar que representassem na forma percentual a quantidade de maçãs na fruteira (questão “c”), somente três participantes escreveram que seria 40% e, provavelmente, perceberam a relação $\frac{4}{10} = 40\%$. Seis professores responderam que a representação percentual seria $10\%, 4\%, 100\%, \frac{4}{4}, 60\%$ e 4%, enquanto que outros cinco (05) não responderam à questão.

Em relação à questão “d”, cinco participantes escrevem que o número percentual que representa a quantidade de laranjas na fruteira seria 0,6. Castro (2018) escreveu “[...] sendo que 6 frutas de 10 são $= 60\%, 0{,}6$ e $\frac{6}{10}$”, em outros termos, significa que o professor entendeu que $\frac{6}{10} = 0{,}6 = 60\%$. Cruz (2018) relacionou a representação decimal com a fração $\frac{6}{10}$ (seis décimos), mas não conseguiu encontrar 0,6.

5.4.4 Análises Bloco 04 – Significado Quociente

Nesse bloco, analisamos as respostas da atividade 04, em que as questões remetem ao significado quociente (MERLINI, 2005; SILVA, 2007). A atividade foi organizada em três tarefas que foram distribuídas para dez (10) professores: na primeira, foi solicitado aos participantes que encontrassem frações que correspondessem a diferentes situações e explicassem o modo como fizeram; na segunda, considera-se uma situação de preparo de suco e pede-se a fração que corresponde a cada componente (água e polpa de fruta); e na terceira, é apresentado um litro e meio de tempero e se pergunta a fração relacionada aos componentes vinagre e azeite de oliva.

Na questão “a”, da tarefa 01, a maioria dos participantes (80%) entenderam que, ao dividir uma pizza entre quatro amigos, cada um ficaria com $\frac{1}{4}$ da pizza. Silva (2018) utilizou-se do registro de representação semiótica geométrico (desenho circular dividido em 8 partes, aparentemente iguais) destacando duas partes e percebeu que $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, ou seja, fez uso da conversão entre registros (geométrico para fracionário) e, posteriormente, de tratamento (DUVAL, 2009). Dois participantes (20%) fizeram as frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{10}$, mas não explicaram o modo como procederam para encontrar os resultados.

Em relação à questão “b”, esperávamos que os participantes utilizariam de representações semióticas geométricas para representar a situação proposta e, posteriormente, encontrariam a fração $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$, ou ainda, $\frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. De posse dos dados, constatamos que sete (07) participantes não responderam como almejávamos, um (01) resolveu e verificamos que somente 20% chegaram ao resultado correto $\left(\frac{2}{4}\right)$.

70% não contemplou o que foi solicitado e escreveu registros numéricos $\left(\frac{4}{2}, \frac{8}{2}, \frac{2}{8}, 2\right)$ e em língua natural (“cada um com (2) partes”, “cada um ficará com 2 pedaços”). Possivelmente, o participante que encontrou a fração $\frac{2}{8}$ tenha utilizado do resultado encontrado na questão “a” $\frac{1}{4}$ e realizado o cálculo $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, no entanto, isso não ficou claro em sua resposta.

Nas questões “c”, “d” e “e”, esperávamos que os participantes fizessem uso dos mesmos procedimentos pretendidos para resolver as questões “a” e “b”. Acreditávamos que os participantes encontrariam como possíveis resultados $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$ (questão “c”), 1 ou $\frac{1}{4}$ (questão “d”) e que teriam dificuldades para encontrar a fração $\frac{5}{4}$ (imprópria) na questão “e”.

Na questão “c”, provavelmente 30% dos participantes utilizaram o resultado obtido na questão “a” $\left(\frac{1}{4}\right)$ e realizaram a soma de frações $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$, percebendo que ao dividir três (03) pizzas para quatro (04) amigos tem-se como resultado a fração $\frac{3}{4}$.

50% dos participantes responderam à questão “c” de maneira errada quando escreveram as frações $\frac{12}{4}, \frac{8}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{12}$ e o número 0 (zero). No entanto, percebemos que um desses participantes, Évariste Galois (2018), fez uso do resultado obtido na questão “a” e, possivelmente, utilizou-se da operação de soma $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$, encontrando o resultado $\frac{3}{12}$ $\left(\frac{1+1+1}{4+4+4}\right)$, o que está incorreto. Constatamos, ainda, que 20% dos professores não responderam à questão.

Em relação à questão "d", 40% dos 10 participantes compreenderam que, ao dividir quatro (04) pizzas entre 4 amigos, cada um ficaria com uma pizza inteira, o que pode ser representado pela fração $\frac{4}{4}$. Aparentemente, nenhum professor fez uso dos resultados anteriores para chegar ao resultado, mas perceberam que ao realizar a divisão $[(4 \text{ pizzas}) \div (4 \text{ amigos})]$ obteriam o resultado 1.

Ainda em relação à questão "d", 20% dos participantes não responderam e 40% resolveram, mas de maneiras equivocadas. Algumas dessas resoluções erradas nos chamaram a atenção. Por exemplo, D'Alembert (2018) escreveu: "cada um ficará com 8 pedaços". No entanto, não possível compreender se a quantidade de pedaços apontadas pela participante corresponde a uma pizza inteira. Já Évariste Galois (2018) utilizou-se de seus resultados anteriores (questão "a") para encontrar a fração $\frac{4}{16}$, possivelmente realizando a soma $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1+1+1+1}{4+4+4+4}=\frac{4}{16}$. Em ambos os casos, os participantes não obtiveram êxito da resolução da questão.

Évariste Galois (2018) realizou o mesmo procedimento na questão "e" e encontrou a fração $\frac{5}{20}$. Notadamente, sete (07) participantes encontraram dificuldades para resolver essa questão, uma vez que 30% conseguiram resolver de maneira correta e 70% responderam de maneira equivocada ou não responderam.

Dentre os que resolveram a questão "e" corretamente, destaca-se a solução de Araújo (2018), que dividiu as pizzas em partes iguais e escreveu que, ao dividir cinco pizzas entre quatro amigos, tem-se "1 inteiro e $\frac{1}{4}$". Em outros termos, significa que a participante percebeu que cada amigo ficaria com uma pizza inteira mais $\frac{1}{4}$ da quinta $\left(1+\frac{1}{4}\right)$. Dois professores utilizaram a fração $\frac{4}{5}$ em suas respectivas soluções, provavelmente por não terem compreendido o enunciado da questão.

Na questão "f", (50%) dos participantes não resolveram a situação apresentada e 40% não acertaram. Dos que não acertaram, provavelmente, 50% foram levados ao erro por causa de resultados de questões anteriores, visto que entenderam das situações elencadas nas questões de "a" a "e" que a pessoa havia comido a maior quantidade de pizza na situação apresentada na questão "e". Araújo (2018), por ter resolvido de maneira correta a questão "e", respondeu que quem comeu "1 inteiro e $\frac{1}{4}$" foi a pessoa que comeu a maior quantidade de pizza.

Em relação às questões "h" e "i", todos os participantes não fizeram uso de representações figurais para solucionar o problema. No entanto, daqueles que responderam às questões, 90% entenderam que as soluções seriam $\frac{1}{10}$ (questão "h") e $\frac{1}{100}$ (questão "i"), e 10% não conseguiram resolver de maneira correta. Destaca-se, ainda, que 30% dos professores não responderam as duas questões.

Ao serem questionados sobre em qual das situações ("h" e "i") o sujeito comeria a menor quantidade de pizzas, percebemos que 50% dos participantes que resolveram as duas situações escreveram, acertadamente, $\frac{1}{100}$ (questão "i"). Enquanto que $16{,}67\%$ compreenderam que foi na questão "i", e $33{,}33\%$ apresentaram as soluções: "É complicado frações, pois temos outra realidade em sala de aula" (MARTINS, 2018) e "Quando não divide em partes iguais" (ARAÚJO, 2018).

Na tarefa 02, considerou-se uma situação de preparo de um litro e meio de suco, utilizando 3 partes de água e 2 partes de polpa de fruta. Conforme antecipado nas análises preliminares, 90% dos participantes não conseguiram solucionar as questões de "a" a "d". Isso se deu pelo fato de que, nas questões "a" e "b", esses participantes não perceberam que a quantidade total das partes é 5 e que as frações que representam as quantidades de água e polpa de fruta no suco são, respectivamente, $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{5}$. Somente um participante conseguiu solucionar as duas questões, enquanto que os demais estabeleceram relações $\frac{3}{2}$ (para representar a quantidade de água) e $\frac{2}{3}$ (para representar a quantidade de polpa no suco).

Além disso, nas questões "c" e "d", 90% dos participantes, com exceção de Évariste Galois (2018), não perceberam que "um litro e meio de suco" $= 1{,}5l = 1500\ ml$, bem como que as quantidades de água e de polpa de fruta poderiam ser expressas por meio de mililitros ou litros. Sobre sua compreensão da questão, Évariste Galois (2018) escreveu: "$1{,}5l = 1500\ ml$ cada parte dos ingredientes representa $\frac{1}{5}$ já que ao todo dão 5 partes sendo 3 de água e 2 de polpa".

Na tarefa 03, Évariste Galois (2018) compreendeu que "$1l = 1000$ cada parte dos ingredientes representa $\frac{1}{4}$, temos então $\frac{1}{4}$ de azeite e $\frac{3}{4}$ de vinagre. $1000 \div 4 = 250$ que corresponde a cada parte em ml". No entanto, constatou-se que a maioria dos participantes não percebeu essas relações e apresentou dificuldades para responder as questões.

Em relação à questão “a” e “b”, 80% dos participantes que responderam esse bloco se confundiram ao relacionar os componentes do molho de tempero entre si, na maioria dos casos. Assim, os participantes encontraram as frações $\frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}$ e $\frac{3}{10}$ como possíveis representações da quantidade de vinagre no molho e $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{1}$ para representar a quantidade de azeite de oliva.

Apenas Évariste Galois (2018) conseguiu resolver as questões da maneira que foi solicitado, escrevendo as frações $\frac{3}{4}$ (questão “a”) e $\frac{1}{4}$ (questão “b”) como soluções dos problemas. Outro participante respondeu as questões fazendo uso de registro de representação semiótica decimal, escrevendo $0{,}75$ (questão “a”) e $0{,}25$ (questão “b”). Tratam-se de valores equivalentes às frações solicitadas $\left(\frac{3}{4}\text{ e }\frac{1}{4}\right)$, mas não resolve às questões.

Do mesmo modo que aconteceu nas questões “c” e “d” da tarefa 02, 80% dos participantes que responderam esse bloco não conseguiu resolver as questões “c” e “d” (tarefa 03) da maneira como foi solicitado. Verificamos que 30% dos professores entenderam que as soluções que representam as quantidades de vinagre e de azeite de oliva no molho são, respectivamente, $750\ ml$ e $250\ ml$.

5.4.5 Análises Bloco 05 – Significado Operador Multiplicativo

Nesse bloco, analisamos uma atividade organizada em cinco tarefas, em que solicitamos à 15 participantes que explicassem como pensaram ou procederam para solucionar cada uma das questões.

Na questão “a” da primeira tarefa, solicitamos aos participantes que calculassem $\frac{3}{5}$ de 355. Percebemos que alguns professores $(33{,}33\%)$ estabeleceram relação entre as partes $\left(\frac{3}{5}\right)$ e o todo (355), e responderam que o resultado da operação seria 213. Para isso, lançaram mão da divisão do todo pela quantidade total (05) das partes $[(355 \div 5) \times 3] = [71 \times 3] = 213)$.

Almeida (2018) escreveu: “multipliquei o numerador com o valor e em seguida dividir pelo denominador”. Assim, ele obteve o resultado 213. Em termos matemáticos, o participante realizou a seguinte operação: $(3 \times 355) \div 5 = 1065 \div 5 = 213$. Laplace (2018) também alcançou o resultado e explicou: “implica em tirar três quintos de 355, o que na prática podemos multiplicar o numerador 3 por 355 e dividir o produto por 5. Outra forma seria, dividir 355 pelo denominador 5 e na sequência multiplicar o quociente por 3 (numerador)”.

Ainda em relação à questão “a”, 20% dos participantes encontraram resultados diferentes $\left(71, 1900, \frac{3}{4}\right)$, mas não explicaram como procederam para encontrá-los. Verificamos que $6{,}67\%$ não conseguiram relacionar o todo (355) com as partes, e procederam com os cálculos $5 \times 355 \times 3$, encontrando o resultado 5.315. Evidenciamos que 40% dos professores não solucionaram a questão.

Em relação à questão “b”, $46{,}67\%$ dos participantes entenderam que $(40\%$ de 2500 pessoas $= 1000$ pessoas$)$. Para tanto, lançaram mão das operações:

a) $(2500 \times 40) \div 100 = 100000 \div 100 = 1000$.

b) $(2500 \div 100) \times 40 = 25 \times 40 = 1000$.

c) Encontrar 10% de 2500 (250) e multiplicar por 4.

Verificamos que sete (07) participantes solucionaram a questão de modo semelhante ao que pressupomos nas análises preliminares. Nesse sentido, destacamos o procedimento adotado por um dos professores: “Uma das maneiras: implica em tirar quarenta por cento de dois mil e quinhentos, na prática significa multiplicar o numerador pelo os 2500 e na sequência dividi-lo por 100” (LAPLACE, 2018). Já Barros (2018), considerou que “para chegar a resposta 1º calculamos $\frac{2500}{100}$ e depois multiplicamos o produto pela porcentagem”. Com essas operações, é possível chegar ao resultado pretendido. Ainda na questão “b”, $33{,}33\%$ não responderam e $13{,}33\%$ mobilizaram registros numéricos $\left(\frac{3}{5} \text{ e } 700\right)$ que não representam o resultado do problema.

A questão “c” é semelhante à questão “a”, e cinco (05) participantes lançaram mão dos mesmos modos de solução, incluindo erros e acertos análogos.

Na tarefa 02, esperava-se que os participantes encontrassem o operador multiplicativo (10) por meio da operação $30 \div 3$, em que o primeiro representa o total de figurinhas que Marcos tinha e o segundo está relacionado ao todo da fração $\frac{2}{3}$. Com efeito, $46{,}67\%$ dos professores perceberam essa relação; no entanto, a maioria desses não se atentou para o fato de que Marcos havia doado a seu amigo Adílio $\frac{2}{3}$ das figurinhas e a questão pergunta com que quantidade Marcos ficou.

Assim, $26{,}67\%$ dos participantes que responderam esse bloco realizaram solução semelhante a $(30 \div 3) \times 2 = 10 \times 2 = 20$ ou $(2 \times 30) \div 3 = 60 \div 3 = 20$, afirmando, erroneamente, que Marcos havia ficado com 20 figurinhas. Barros (2018) destacou: “para chegarmos a conclusão usei a operação matemática da subtração calculando a diferença. Ficou com 10 figurinhas”, após ter entendido que cada parte corresponde a 10 figurinhas e que Adílio havia ganhado 20 figurinhas de Marcos. Assim, verificamos que somente 20% dos participantes procederam corretamente com a resolução da tarefa, enquanto que $33{,}33\%$ consideraram que a solução seria $(11, 5, 24$ ou $28)$, o que está incorreto. Um total de 20% não respondeu a questão.

Na tarefa 03, considera-se uma coleção de 12 bonecas em que se empresta uma fração de $\frac{2}{6}$ da mesma e pergunta-se a quantidade que foi emprestada. Nota-se que, essa tarefa é semelhante à tarefa 02, no entanto, nesse caso quer se saber a quantidade de bonecas que foram emprestadas, e não a quantidade que restou.

Sete participantes $(46{,}67\%)$ não responderam essa tarefa. Alguns (20%) que responderam erroneamente $(3, 2, 3)$ não explicaram como procederam para encontrar esses resultados. Os demais participantes $(33{,}33\%)$ apresentaram como solução a divisão do todo da coleção de bonecas (12) pela quantidade total das partes (06) da fração $\frac{2}{6}$ e encontraram o operador multiplicativo 2, que corresponde a $\frac{1}{6}$ da coleção. Posteriormente, realizaram a multiplicação do número obtido (2) com a parte da fração tomada (2) e obtiveram o resultado 4, que corresponde à quantidade de bonecas emprestadas.

Na tarefa 04, apresentamos uma situação em que não se conhece o todo. Sabe-se, no entanto, que a quantidade indicada $(75\ km)$ equivale a $\frac{3}{5}$ de uma estrada e questiona-se qual a distância da estrada. Deduzimos, nas análises preliminares, que os participantes poderiam estabelecer relação da distância descrita $(75\ km)$ com a quantidade total das partes da fração (05) ou com a quantidade das partes (03), o que estaria errado.

Na prática, esse erro aconteceu com $6{,}67\%$ dos participantes, os quais utilizaram a relação $(75 \div 5) \times 3 = 15 \times 3 = 45$. Dois participantes encontraram resultados diferentes $(25\ km$ e $75.000\ m)$, e não identificamos o modo como procederam para chegar a esses valores. Verificamos ainda que sete $(46{,}67\%)$ professores não responderam à tarefa, o que pode ser um indício da dificuldade que tiveram. No entanto, os dados revelaram que $33{,}33\%$ dos participantes que responderam esse bloco compreenderam que "uma das maneiras é: divide-se o todo $75\ km$ pelo numerador da fração 3. Na Sequência multiplica-se o quociente pelo denominador 5 e têem-se a distância total da estrada" (LAPLACE, 2018), que corresponde à $125\ km$.

Na tarefa 05, considera-se a compra de um quilograma de açúcar para o preparo de um bolo. Desse açúcar, 25% foram usados na massa, $0{,}2\ kg$ no recheio e $\frac{2}{20}$ na cobertura. Presumimos que os participantes converteriam as representações semióticas percentual e decimal em frações $\left(25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \text{ e } 0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}\right)$. Assim, conseguiriam resolver as questões com maior facilidade, uma vez que se sabe a quantidade de açúcar que foi comprada $(1kg = 1000g)$.

No entanto, não foi possível verificar o modo como os participantes obtiveram os resultados porque eles não escreveram como procederam para solucionar as questões. Em relação à questão “a”, constatamos que a maioria dos professores $(53{,}33\%)$ entenderam que a quantidade de açúcar utilizado para fazer a massa do bolo é $250g$, isso porque compreenderam que 25% de $1kg = 1000g$ corresponde a 250g.

Nascimento (2018) escreveu como procedeu para resolver a questão: “procurei entender as informações que o enunciado me deu. Fiz cálculos mentais lógicos de porcentagem 25% de $1000\text{g} = 250$. Adição dos números encontrados”. Todavia, nenhum outro participante explicou como pensou para chegar às respostas.

Ainda sobre a questão “a”, $26{,}67\%$ dos participantes não a resolveram e 20% encontraram valores que não condizem com a solução $\left(5,25\% \text{ e } \frac{2}{2}\right)$. Em relação à questão “b”, os professores, aparentemente, tiveram mais dificuldades para encontrar a solução (200g). Possivelmente, não perceberam que $0{,}2$kg de açúcar para o recheio corresponde à fração $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ do quilograma. Somente 20% dos participantes que responderam esse bloco entenderam que a quantidade de açúcar para o recheio seria 200g. Constatamos, ainda, que 40% dos participantes não responderam à questão “b” e outros 40% resolveram erroneamente ao que foi solicitado, indicando as quantidades $10, 125\text{g}, 20\text{g}, 20\%$ e $\frac{1}{3}$.

Na questão “c”, apenas 40% dos participantes responderam à questão. Desses, $66{,}67\%$ encontraram o resultado (100g), que corresponde à quantidade de açúcar utilizada para fazer a cobertura do bolo, e $33{,}33\%$ não acertaram a solução e entenderam que, possivelmente, os resultados seriam $(4$ e $200\text{g})$.

Em relação à questão “d”, esperava-se que os participantes que responderam esse bloco realizassem a soma das quantidades encontradas nas questões e chegassem à solução. No entanto, isso foi realizado apenas por três (03) professores, os quais chegaram à conclusão de que a quantidade de açúcar utilizada para fazer o bolo foi 550g. Nove (09) não responderam e três (03) não conseguiram estabelecer a relação com as questões anteriores.

As questões “e” e “f” estão estreitamente relacionadas. A primeira pergunta a quantidade de açúcar que restou e a segunda pede a fração que representa essa mesma quantidade. Apenas dois professores conseguiram perceber que, se na questão “d” verificou-se que foram usados 550g para fazer o bolo, restariam 450g. Os demais participantes não tiveram o mesmo raciocínio e encontraram respostas divergentes $\left(2,75\%,\frac{9}{20}\right)$ ou não responderam. Na questão "f", somente um professor encontrou a solução e escreveu a fração $\frac{450}{1000}$ corretamente, enquanto que os demais participantes não obtiveram sucesso ao considerar as frações $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{550}{1000}\text{ e }\frac{45}{10}\right)$ como a fração do quilograma de açúcar que restou.

6 CONSIDERAÇÕES

Nos propusemos, nesta investigação, verificar o modo como os professores que ensinam Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental – especialmente nos 4º e 5º anos – resolvem situações envolvendo o conceito de fração. As atividades e tarefas desenvolvidas com os educadores consideraram registros de representação semiótica (DUVAL, 2009), diferentes significados de fração (parte-todo, número, medidas, quociente e operador multiplicativo) de acordo com os pressupostos de Merlini (2005) e Silva (2005), bem como as características das quantidades – continuas e discretas, intensivas e extensivas (NUNES et al, 2005).

Realizamos um levantamento de pesquisas que abordam o processo de ensino e aprendizagem do conceito de fração, a fim de compreendermos o que as investigações estão apontando sobre este tema. Nesse sentido, verificamos que tanto professores quanto estudantes apresentam dificuldades no ensino e na aprendizagem deste conteúdo, sendo apontado como um dos mais difíceis em Matemática.

Há uma tendência de professores em fazerem uso, no processo de ensino, do significado parte-todo e de quantidades contínuas nas aulas sobre fração, o pode levar os estudantes a uma aprendizagem limitada. Isto porque existem outros significados (MERLINI, 2005; SILVA, 2005) e características de quantidades que são necessárias nestes processos.

Ademais, verificamos que os professores utilizam sobretudo representações geométricas (pizzas e retângulos, especialmente) na realização das aulas sobre fração. Duval (2009), defende que seja necessário a utilização de vários registros de representação semiótica no processo de ensino de determinado conteúdo matemático. No caso de fração, por exemplo, a representação $0{,}5$ é possível a partir de outros registros que remetem a esta quantidade: língua natural (zero vírgula cinco, cinco décimos), fração $\left(\frac{5}{10} = \frac{1}{2}\right)$, porcentagem (50%), representações gráficas e geométricas envolvendo quantidades contínuas e discretas.

Nesse sentido, desenvolvemos com os participantes questionários e atividades que trataram da mobilização de registros de representação semiótica, características das quantidades e significados de fração. Na atividade 01 (significado parte-todo), constatamos que, para resolver as situações apresentadas, $92{,}85\%$ dos participantes mobilizaram representações **geométricas com facilidade para representar uma fração** nas tarefas 01a e 01b, $64{,}28\%$ na tarefa 02d e 100% na tarefa 03a. Do mesmo modo, $57{,}14\%$ relacionaram a representação em língua natural com o registro fracionário (tarefas 01 e 02) e $85{,}71\%$ na tarefa 03e.

Na relação de um **registro geométrico com uma representação percentual** (tarefa 03a) somente $7{,}14\%$ dos professores conseguiram perceber e realizar a conversão entre os registros e, na **associação com um número decimal**, apenas $14{,}28\%$. Quando se associa **língua natural** com representação **decimal,** $21{,}43\%$ conseguem responder, corretamente, a questão (tarefa 03e). No entanto, não percebemos a mesma facilidade na comparação entre um registro de **representação numérico** $(750\,ml)$ **e uma representação fracionária** $\left(\frac{3}{4}\right)$, confundindo em alguns casos, aparentemente, com a razão entre as quantidades. Isto porque perceberam que a situação apresentada poderia ser "dividida" em partes iguais, das quais deveriam ser destacadas algumas, mas não conseguiram converter as representações geométricas e divisões realizadas com o registro fracionário.

Averiguamos que os participantes, recorrem em muitos casos aos registros geométricos e a divisões entre os numeradores e denominadores, cujo objetivo é encontrar a solução do problema. Quando as situações apresentam registro **fracionário** e pede que façam um **desenho q**ue a represente, muitos professores não apresentam dificuldades. Do mesmo modo, conseguem encontrar a fração de uma representação geométrica apresentada.

Ainda na atividade sobre o significado parte-todo, somente $42{,}85\%$ (nas tarefas 01 e 02) e $14{,}28\%$ (tarefa 3b) conseguem transformar/converter uma **representação percentual em fracionária**. O mesmo ocorre na conversão de uma **representação fracionária em numérica**, em que $78{,}57\%$ não obtiveram resultado correto da questão $(125\,ml)$.

Já na conversão de um registro **decimal em fracionário** $42{,}85\%$ os professores mostraram resultados corretos (tarefa 01), $21{,}43\%$ (tarefa 02) e $14{,}28\%$ (tarefa 03d). Na conversão **decimal em porcentagem**, $57{,}14\%$ dos participantes responderam corretamente as questões (tarefa 3d).

Quando se trata de comparar um número **percentual com o registro de representação decimal** (tarefa 03b), verificamos que $21{,}43\%$ dos professores conseguiram responder corretamente. Já na conversão de **fração em representação decimal** (tarefa 03c), os participantes encontraram dificuldades, uma vez que $92{,}85\%$ não conseguiram associar as quantidades equivalentes mostradas de maneiras distintas. Mesmo na comparação entre **registros fracionários**, apenas $21{,}43\%$ (tarefa 03c) e $42{,}86\%$ (tarefa 03f) chegaram ao resultado correto.

Em relação a primeira atividade do bloco 02 que trata do significado número (MERLINI, 2005; SILVA, 2005), os dados apontaram que 50% dos 14 participantes que responderam a primeira atividade não conseguiram localizar as frações de cada questão na reta numérica. Entre os demais, constatamos que 12,5% das localizações feitas sobre a reta estavam escritas de maneira correta e 12,5% não contemplaram o que estava sendo solicitado nas questões. Essa situação pode ser um indício de que os professores, que não conseguiram responder às questões ou responderam erroneamente, tenham dificuldades ao estabelecer relação de conversão entre registros de representação semiótica e, de maneira especial, nas operações de soma, subtração, multiplicação e divisão de frações, mesmo sendo com denominadores iguais.

Percebemos que, na tarefa 02, oito (08) participantes cometeram mais erros que acertos e cinco (05) acertaram mais do que erraram nas comparações entre as frações. Somente um professor contemplou todas as questões sem cometer nenhum equívoco. Isso pode ser indício de que os educadores que responderam esta atividade apresentam dificuldades em relacionar frações em que se consideram diferentes registros de representação semiótica. Notamos também que na associação de frações com numeradores iguais e denominadores diferentes, os participantes tendem a comparar os respectivos denominadores e consideram que a fração com o maior denominador também é maior. No entanto, isso não é verdade porque quanto maior o denominador menor a fração. Outra situação em que tiveram mais dificuldades foi na comparação de número decimal com número misto e de número fracionário com percentual.

Em relação ao significado medidas, constatamos que nove (09), dos quinze participantes que receberam esta atividade, tiveram dificuldades em reconhecer os termos de uma fração (numerador e denominador) e em representar as quantidades de frutas (maçãs e laranjas) em relação à quantidade de frutas da fruteira, por meio do registro de representação fracionária. Poucos procederam corretamente com a resolução das questões ou explicaram como pensaram para chegar às respostas.

Na atividade com significado quociente, verificamos que os participantes têm maior facilidade para resolver situações em que o numerador é menor que o denominador (frações próprias). No entanto, quando se trata de frações que são impróprias, os professores apresentam dificuldades nas soluções.

Percebemos, ainda, que pelo menos 80% participantes, não conseguiram solucionar as questões, tanto na segunda quanto na terceira tarefa. Verificamos que a maioria dos professores que responderam esse bloco não conseguiu relacionar as partes de determinada quantidade com as quantidades totais das partes, realizando, de maneira inadequada relações entre as partes. Do mesmo modo, não realizaram as conversões necessárias (litros em mililitros) para se chegar aos resultados.

Em relação à atividade que trata do significado operador multiplicativo, verificamos na tarefa 01 que a maioria dos participantes (incluindo os que erraram e àqueles que não resolveram) desse bloco tiveram dificuldades para resolver as questões “a” e “c”, já que $66,67\%$ professores não conseguiram perceber que as frações $\left(\frac{3}{5} \text{ e } \frac{2}{5}\right)$ representavam partes de um todo, 355 e 3750 metros, respectivamente. Na questão “b”, os participantes não mostraram dificuldades para solucionar a questão. Eles lançaram mão da conversão de um registro percentual (40%) em fracionário $\left(\frac{40}{100}\right)$ e mobilizaram as operações de multiplicação e divisão para encontrar o resultado (1000).

Na tarefa 02, 20% dos participantes responderam a atividade corretamente, e perceberam a relação entre o todo (30 figurinhas) e a quantidade todas das partes (03) na fração $\frac{2}{3}$. Nesse sentido, realizaram a operação de divisão $(30 \div 3)$, encontraram o operador multiplicativo e perceberam que Marcos havia doado duas partes para Adílio, e, portanto, ficaria com 10 figurinhas.

$33,33\%$ dos participantes utilizaram o mesmo raciocínio para resolver a tarefa 03, encontrado o resultado 04 que representa a quantidade de bonecas emprestou. Os mesmos professores, perceberam que, na tarefa 04, a quantidade total das partes é 5 e que a fração $\frac{3}{5}$ está relacionada à $75\,km$, realizaram a divisão $75 \div 3$ que resultaria e encontraram o operador multiplicativo 25. Assim, obteram o resultado $125\,km$. Muitos participantes (12) tiveram dificuldades para resolver toda a tarefa 05. Somente um (01) professor conseguiu acertar todas as questões.

Os resultados indicaram que os professores apresentam dificuldades em compreender e solucionar situações que envolvem fração, quando se trata da conversão entre registros de representação semiótica e, principalmente dos significados número, medidas, quociente e operador multiplicativo. Ressaltamos que esta situação se deve à fragilidade do processo de formação de professores, seja na Educação Básica ou mesmo no Ensino Superior que não dão a devida atenção ao ensino do conceito de fração em seus significados e diferentes maneiras de representá-lo.

Os dados apontam para a necessidade de mais pesquisas relacionadas a este tema, a fim de que se possa elaborar alternativas para superar fragilidades nos processos de ensino e aprendizagem deste conteúdo.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Daddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da. Engenharia Didática: evolução e diversidade. In: **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática.** v. 07, n. 2, p. 22-52. Florianópolis, 2012.

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática.** Tradução de Orlando Figueiredo. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010 (Tendências em Educação Matemática).

ARAÚJO, M. I. L. de. **Objeto de Aprendizagem: um estudo sobre o desempenho dos alunos na interpretação da Função Quadrática.** Salvador, BA: 2009. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial) Sistema FIEB, SENAI-CIMATEC.

Artigue, Michele. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didática das Matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

BESSA, Márcio Leite de. **Concepções e práticas de professores sobre o Ensino e a Aprendizagem e uma Intervenção intencionalmente planejada no Ensino de Frações, por meio da Resolução de Problemas em um 5º Ano do Ensino Fundamental**. Brasília, 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Católica de Brasília. 163f.

BOLOGNANI, Ana Carla de Almeida. **Ensino e aprendizagem de frações mediados pela tecnologia:** uma análise à luz da teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Itajubá-MG. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências) Universidade Federal de Itajubá, 2015. 110f.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática.** 5. ed. 1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

BORGES NETO, Hermínio [et al]. **Sequência Fedathi: uma proposta para o ensino de matemática e ciências.** Fortaleza: Edições UFC, 2013.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

CARDOSO, Paula; MAMEDE, Ema. O conceito de fração – o conhecimento de professores do 1º ciclo. *In:* **Revista de Estudios e Investigación en Piscología y Educación**. Vol. Extra, nº 6, 2015

CARVALHO, Euvaldo de Souza. **Sequência Didática: uma proposta para o ensino do conceito de fração.** Arraias, 2017. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins. 103 f.

CAVALCANTI, Érica Michelle Silva; GUIMARÃES, Gilda Lisboa. **Diferentes significados de frações: análise de livros didáticos das séries iniciais, 2008**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Pedagogia) - Universidade Federal de Pernambuco. 25f.

CERVANTES, Patrícia de Barros Monteiro. **Uma formação continuada sobre frações**. São Paulo, 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Bandeirante de São Paulo. 86f.

CHEQUETTO, Jonas José. **Uma experiência didática para a aprendizagem de frações**: matemática para residentes de uma casa de passagem. São Mateus, 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) Universidade Federal do Espírito Santo, 2016. 159f.

CHEVALLARD, Y. La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponses à partir de la TAD, 2009b. Disponível em : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Cours_de_YC_a_l_EE_2009.pdf > Acesso em: 08 ago 2018.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática:** da teoria à prática. 12. ed. Campinas, SP: Papirus, 2005. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

______. Matemática, ensino e educação: uma proposta global. In: **Sbem temas & debates. Matemática, Ensino e educação:** concepções fundamentais. Ano IV, n°3. Rio Claro – SP – 1991. (p.1 – 15).

D'AMORE, Bruno. Elementos de didática da matemática. Tradução Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. Tradução de: Elementi di didatica dela matematica.

D'ÁVILA, Cristina. Interdisciplinaridade e mediação: desafios no planejamento e na prática pedagógica da educação superior. **Revista Conhecimento e Diversidade**. Niterói: jul./dez. 2011.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais** (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels) Fascículo I. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002

LARROSA, J. Notas sobre experiência e o saber da experiência. Trad. João Wanderley Geraldi. **Revista brasileira de Educação – ANPED**, n. 19, Jan./Fev./Mar./Abr., 2002.

LIMA, Rafael Pontes. **O ensino e a aprendizagem significativa das operações com frações: Sequência didática e o uso de tecnologias digitais para alunos do Ensino Fundamental II**. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática (REAMEC), Pólo Universidade Federal do Pará / Belém: [s,n], 2014. 232f..

LOPES, Antonio José. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. In: **BOLEMA,** Ano 21, nº 31, p. 1-22, 2008.

LORENZATO, Sérgio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio (Org.). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006.

MACHADO, Cacilda Tenório Oliveira; MENEZES, Josinalva Estacio. Concepções de professores que ensinam matemática sobre números fracionários, suas experiências e as implicações em suas práticas na 5ª série do ensino fundamental. In: **EMR - Educação Matemática em Revista.** Ano 13. nº 25, p. 05-21, dez., 2008

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia Didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara, *et al*. **Educação Matemática: uma introdução.** São Paulo: EDUC, 1999.

MAGINA, Sandra; CAMPOS, Tânia. **A fração na perspectiva do professor e do aluno das séries iniciais da escolarização brasileira**. 2010. Disponível em: < http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/artigo_magina_e_campos_fracao.pdf > Acesso em: 10 ago. 2018.

MARANHÃO, M. Cristina Souza Albuquerque; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. Registros de representação e Números Racionais. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica.** Papirus Editora: 2017.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica 1.** 7. ed. São Paulo: Atlas 2010.

MARINHO, Alexandre; MANDARINO, Mônica Cerbella Freire. As Frações nos Livros Didáticos do Sexto Ano do Ensino Fundamental. **EMR-RS**, Ano 14, 2013, nº 14. v.1, pp. 52 a 64.

MAROQUIO, Vanusa Stefanon; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela; FONSECA, Camila de Oliveira. Sequências Didáticas como recurso pedagógico na formação continuada de professores. In: **Anais X Encontro Capixaba de Educação Matemática:** metodologias para o ensino de Matemática na Educação Básica: debates para compreender e intervir. Vitória, ES: IFES e UFES, 2015.

MERLINI, Vera Lucia. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

NACARATO, Adair Mendes; MENGALI, Brenda Leme da Silva; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. **A Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental:** tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009 (Tendências em Educação Matemática)

NUNES, Terezinha *et al*. **Educação Matemática 1: números e operações numéricas.** São Paulo: Cortez, 2005.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Sequência Didática Interativa no processo de formação de professores**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. As Diferentes "Personalidades" do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. *In:* **Bolema, Rio Claro (SP)**, Ano 21, nº 31, 2008, p. 79 a 102.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 3. ed. 1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

PAULA, Marilia Rios de. Reflexões sobre possíveis Significados para Frações. *In:* **VIII SIMPED – Simpósio Pedagógico e Pesquisas em Educação**, 2013.

PEREIRA, Onésimo Rodrigues. **Uma sequência didática para o ensino de adição de frações**. 2017. 98f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Tocantins

PINHEIRO, Maria Gracilene de Carvalho. **Formação de Professores dos Anos Iniciais:** conhecimento profissional docente ao explorar a introdução do conceito de fração. 204f. São Paulo, 2014. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Anhanguera de São Paulo, 2014

PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa. Representações e Processos de Raciocínio na Comparação e Ordenação de Números Racionais numa Abordagem Exploratória. *In:* **Bolema, Rio Claro (SP)**, v. 28, n. 50, p. 1464-1484, dez. 2014

POST, T.; CRAMER, K.; BEHR, M.; LESH, R.,; HAREL, G.Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In: CARPENTER T.; FENNEMA L.; ROMBERG T. (Ed.). **Learning, Teaching, and assessing rational number concepts:** multiple research perspectives. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1993. p. 327-362.

PRODANOV, Cleber; FREITAS, Ernani. **Metodologia do trabalho científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

PROENÇA, Marcelo Carlos de. O ensino de frações via resolução de problemas na formação de futuras professoras de pedagogia. In: **BOLEMA, Rio Claro**, v. 29, n. 52, p. 729-755, ago. 2015

RICHIT, Adriana; MALTEMPI, Marcus Vinicius. Pesquisa em formação inicial e continuada de professores: percursos e concepções emergentes. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; CHIARI, Aparecida. (Org.) **Tecnologias Digitais e educação matemática.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

ROSA, Augusto Pereira da; ZINGANO, Ester Miriane. Pré-História: educação para sobrevivência. **Maiêutica.** Ano 1. Nº 1, p. 1-5. jan., 2013.

SACRISTÁN, José Gimeno. Tendências investigativas na formação de professores. In: PIMENTA, Sema Garrido; GHEDIN, Evandro (Org.). **Professor reflexivo no Brasil – gênese e crítica de um conceito**. São Paulo: Cortez, 2002.

SANTANA, Larissa Elfisia de Lima. *et al.* Frações e seus diferentes registros de representação semiótica: uma análise da percepção de futuros pedagogos. In: **Anais do XI ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática**: Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas. SBEM: Curitiba, 2013.

SANTANA, Larissa Elfisia de Lima. **Os saberes conceituais de pedagogos em formação inicial, acerca de Fração**. 2012. Dissertação (Mestrado) Universidade Estadual do Ceará, 182f.

SANT'ANNA, Diogo C.; BITTENCOURT, Jane; OLSSON, Sandra. Transposição e mediação didática no ensino de frações. In: **BOLEMA – Boletim de Educação Matemática.** v. 20, nº 27, p. 71-91, 2007

SANTOS, Antonio Carlos Godinho [et al]. Efeito do Treino de Composição (Cópia) na Aprendizagem do Conceito de Proporção. *In:* **Psicologia: Teoria e Pesquisa**, Brasília, Out-Dez 2014, Vol. 30 n. 4, pp. 459-469

SCHASTAI, Marta Buda; FARIAS, Elizabeth Regina Streisky de; SILVA, Sani de Carvalho Rutz da. **Formação de Professores e o Ensino de Frações nos Anos Iniciais.** 1. ed. Curitiba: Appris, 2017. v. 1. 193p

Sidman, M., & Tailby, W. Conditional discrimination vs. matching to sample: an expansion of the testing paradigm. **Journal of the Experimental Analysis of Behavior**, 37, 1982, p. 5-22.

SILVA, Maria José Ferreira da. **Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SILVA, Angélica da Fontoura Garcia. **O desafio do desenvolvimento profissional docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações.** 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SILVA, Maria do Socorro Lucinio da Cruz. **Concepções e práticas de professores do Ensino Fundamental sobre o ensino de frações:** um estudo em escolas de Cuiabá. 2013. 164f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2013.

SILVA, Fernanda Andréa F.; SANTIAGO, Mônica Maria Lins; SANTOS, Marcelo Câmara dos. Significados e Representações dos Números Racionais Abordados no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. *In:* **Bolema, Rio Claro (SP)**, v. 28, n. 50, p. 1485-1504, dez. 2014

SILVEIRA, Denise Tolfo; CÓRDOVA, Fernanda Peixoto. A pesquisa científica. *In:* GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. **Métodos de pesquisa.** UAB/UFRGS e SEAD/UFRGS. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

SOUZA, Maria José Araújo. Sequência Fedathi: Apresentação e Caracterização. *In:* BORGES NETO, Hermínio [et al]. **Sequência Fedathi: uma proposta para o ensino de matemática e ciências**. Fortaleza: Edições UFC, 2013.

SOUZA, Ângela Tereza Silva de. **Abordagem do Conceito de Fração:** uma análise de livros didáticos. Rio Tinto, 2013. 59f. Monografia (Graduação em Matemática) Universidade Federal da Paraíba.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional.** 17.ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014

VAZ, Rafael Filipe Novoa. Divisão de frações: explorando algoritmos não usuais. **EMR - Educação Matemática em Revista.** Ano 21. nº 52, p. 59-66, jul., 2016

VIZOLLI, Idemar; BARROS, Marcos José Pereira; PINHO, Maria José de. Formação de professores para ensinar matemática na educação básica: um estudo nos projetos pedagógicos dos cursos ofertados pela Universidade Federal do Tocantins. In: **SODEBRAS** – **Soluções para o desenvolvimento do país**, vol. 12, nº 139, p. 77-84, jul., 2017.

VIZOLLI, Idemar. **Registros de alunos e professores de educação de jovens e adultos na solução de problemas de proporção-porcentagem.** Curitiba, 2006. 245f. + 188 anexos (CD). Tese (Doutorado em Educação) Universidade Federal do Paraná.

______. Registros de representação semiótica no estudo de porcentagem. Florianópolis, 2001. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal de Santa Catarina. 245f.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Trad. Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998. Reimp. 2010.