UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

DOUGLAS CATULIO DOS SANTOS

NÚMEROS REPUNITS: UMA ABORDAGEM A PARTIR DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

ARRAIAS-TO
2019

DOUGLAS CATULIO DOS SANTOS

NÚMEROS REPUNITS: UMA ABORDAGEM A PARTIR DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa.

ARRAIAS-TO
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S237n Santos, Douglas Catulio.
Números Repunits: Uma abordagem a partir da resolução de problemas. / Douglas Catulio Santos. – Arraias, TO, 2019.
67 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2019.
Orientador: Eudes Antonio da Costa

1. Divisibilidade. 2. Primos. 3. Repunit. 4. Resolução de Problemas. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automatica de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

DOUGLAS CATULIO DOS SANTOS

NÚMEROS REPUNITS: UMA ABORDAGEM A PARTIR DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede (ProfMat) da Universidade Federal do Tocantins (UFT), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Data de Aprovação: 13/12/2019

BANCA EXAMINADORA:

Eudes Atoi

Dr. Eudes Antonio da Costa – UFT/Matemática
Orientador

Dra. Eunice Cândida Pereira Rodrigues – CUR/UFMT
Examinadora

Dr. Thiago Rodrigues Cavalcante – UFT/Matemática
Examinador

Arraias - TO
2019

Dedico esse trabalho à meus pais Vanderleia e Valdivino que são meus maiores incentivadores, à minhas irmãs Alinne, Viviane e Tauane, à minha noiva Larissa e a todos que contribuíram para realização deste sonho.

Agradecimentos

Nessa jornada da vida em que estou de passagem, não me resta outra coisa a não ser agradecer a oportunidade de cada manhã recomeçar ou continuar com os meus projetos de vida. A minha formação acadêmica que termino com a apresentação desse trabalho. Por isso agradeço a Deus por todas as pessoas que passaram em minha vida contribuíram diretamente ou não, para que eu chegasse até aqui;

Agradeço a minha família por entender a minha ausência e , muitas vezes, a falta de paciência. A minha mãe Vanderleia, pelo apoio, preocupação, pelas orações e pelo amor incondicional. À meu pai Valdivino por me mostrar o conceito de honestidade e dedicação. A mimhas irmãs, Alinne, Viviane e Tauane pelo incentivo e ajuda nos momentos mais complicados dessa caminhada;

Ao meu orientador, professor Dr. Eudes Costa, que contribuiu de forma significativa para a realização deste trabalho;

A minha noiva Larissa pelos momentos de desabafo, pelo incentivo, compreensão por mihas faltas e contribuições para a realiação deste trabalho, além dos conselhos dados nos momentos mais difíceis dessa camjnhada

.

Aos meus avôs *In Memoria* Manuel e Henrique e minhas avós Anna e Hornelina;

Aos meus amigos de curso, que tanto ajudaram no decorrer dos últimos dois anos;

Aos meus amigos da UFT, em especial Agnês pelas contribuções para que este trabalho pudesse acontecer;

Aos professores do PROFMAT/UFT/ARRAIAS, Adriano, Keidna, Eudes,Robson, Alcione e Fernando, por acreditarem no projeto e pela dedicação a nossa turma;

À UFT, que ofereceu a oportunidade;

Enfim, a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para realização deste trabalho.

Treine enquanto eles dormem, estude enquanto eles se divertem, persista enquanto eles descansam, e então, viva o que eles sonham.
(Provébio Japonês)

Resumo

O objetivo deste estudo é identificar a influência exercida pela "resolução de problemas" para a aprendizagem de conceitos aritméticos, em destaque aqueles associados aos números repunits (repetição de unidades), com vistas à resolução de problemas como uma ferramenta metodológica de ensino. O trabalho consiste numa proposta de oficina matemática composta por uma coleção de problemas com diferentes técnicas de resolução e tem como público alvo desta oficina estudantes a partir 7º ano do Ensino Fundamental II, essa oficina terá como abordagem a resolução de problemas, defendida por Dante (2003), Polya (2003) e pelos documentos oficiais da educação, além de outros autores , além disso este trabalho apresenta um estudo acerca das propriedades aritméticas dos números *repunits*, explicitando algumas proposições relacionadas a essa classe de números inteiros. Os problemas abordados nessa proposta de atividade foram divididos em dois grupos, os problemas introdutórios e problemas exploratórios. Um propósito desta oficina é incentivar que o estudante investigue, descubra, conjecture, proponha e valide conceitos e propriedades acerca dos *números repunits*.

Palavras-chaves: Resolução de problemas; *Números Repunits*; Oficina temática.

.

Abstract

The aim of this study is to identify the influence exerted by “problem solving” on the learning of arithmetic concepts, especially those associated with repunits (unit repetition), with a view to problem solving as a methodological teaching tool. The work consists of a proposal of a mathematical workshop composed of a collection of problems with different resolution techniques. The target audience of this workshop is students from the 7th grade of Elementary School II, this workshop will have the problem solving approach, defended by Dante. (2003), Polya (2003) and the official education documents, as well as other authors, besides this paper presents a study about the arithmetic properties of the numbers textit repunits, innovating some unpublished propositions related to this class of numbers. integers. The problems addressed in this activity proposal were divided into two groups, introductory problems and exploratory problems. One purpose of this workshop is to encourage the student to investigate, discover, conjecture, propose and validate concepts and properties about repunit numbers.

Key-words:Troubleshooting; *Repunits Numbers*; Thematic Workshop.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Triângulo Mágico 17
Figura 2 – Apresentação dos resultados de pesquisa 66

Lista de tabelas

Tabela 1 – Fatores primos de R_n 35
Tabela 2 – Adição dos quadrados perfeitos 39
Tabela 3 – Fatoração dos termos da Sequência do Problema 3.6 50

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
ANPMat	Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
TFA	Teorema Fundamental da Aritmética
PTF	Pequeno Teorema Fermat

Sumário

INTRODUÇÃO 13

1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 15
1.1 METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 15

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 24
2.1 O CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS 24
2.2 NÚMEROS *REPUNITS* 34

3 APRENDER A RESOLVER PROBLEMAS 42
3.1 PROBLEMAS INTRODUTÓRIOS 43
3.2 PROBLEMAS EXPLORATÓRIOS 50
3.3 PROBLEMAS DESAFIADORES 61

CONSIDERAÇÕES 63

REFERÊNCIAS 64

APÊNDICES 66
3.4 APRESENTAÇÂO DE ALGUNS RESULDADOS DA PESQUISA 66
3.5 DICAS E RESOLUÇÕES PARA OS PROBLEMAS DESAFIADORES 66

INTRODUÇÃO

Neste apresentamos um estudo sobre os *números repunits*, com uma abordagem a partir da resolução de problemas, apontando e discutindo problemas relacionados as propriedades artiméticas associadas a esse subconjunto dos números inteiros, alguns desses problemas foram retirados do banco de questões das Olímpiadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

No tocante aos aspectos metedológico esse estudo é caracterizado como uma pesquisa bibliográfica que de acordo com Gil (2002) é o tipo de pesquisa desenvolvida tendo como base materiais já elaborados, possuindo como principais fontes de consulta livros e artigos científicos. Ademais possui uma abordagem qualitativa, isso pois, destacamos o processo de resolução de cada situação e não o resultado final.

No primeiro Capítulo abordamos a metodologia da resolução de problemas tendo em vista as ideais defendidos por pesquisadores como Dante (2003) e Polya (2003), além dos documentos oficiais da educação brasileira em relação a resolução de problemas. Nesse capítulo também abordamos a definição de problema, apontamos as etapas da resolução de problemas e uma caracterização para os variados tipos de problema.

Já Capítulo 2, explicitamos conceitos relacionados aos números interios a partir de um processo axiomático, levando em consideração as ideias defendidas em Domingues (2017), Hefez (2016) entre outros, o objetivo dessa discussão preliminar dos números inteiros é o embasmento para a exposição dos conceitos asssociados aos *números repunits*, os quais são nosso objeto de estudo. Em primeiro plano apresentamos uma definição para essa classe numérica de acordo com os estudos de Beiler (1966) e Carvalho e Costa (2015), além de mostrarmos resultados que enfatizam as propriedades aritméticas dos *números repunits*.

Para o desenvolvimento dessa proposta consideramos as ideias de Polya (1987) no qual apregoa que a essência de um bom ensino, ganha forma na tríade *"tenha interesse por sua matéria"; "conheça sua matéria"; "procure ler o semblante dos seus alunos, procure enxergar suas expectativas e suas dificuldades, ponha-se no lugar dele"*. Em resumo temos: interesse e conhecimento pela Matemática, e percepção da visão do estudante; características de um bom professor. Sedo assim, um dos focos deste estudo é mostrar aos professores de Matemática uma proposta metodológica pautada na resolução de problemas que visa enfatizar o papel de destaque do estudante no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Assim, o Capítulo 3, possui como destaque a proposta de oficina temática, que visa aplicar a resolução de problemas para apresentar os conceitos relacionados aos *números repunits* a estudantes a partir de 7^{o} ano do Ensino Fundamental II, tal proposta foi subdividida em dois estágios, no estágio de problemas introdutórios apresentamos uma coleção de problemas com a intencionalidade de fazer com que o estudante recorde conceitos prévios relacionados aos números inteiros, além de definirmos os *números repunits* pela exploração de algumas situações-problemas. No segundo estágio, apresentamos um rol de problemas associados aos *números repunits* e aplicamos a metodologia da resolução de problemas como uma ferramenta para que o estudante determine a resolução de cada situação. Através dessa proposta de oficina objetivamos incentivar o processo de *investigação, descoberta, conjectura, proposição e validação pelo estudante de conceitos e propriedades* acerca dos *números repunits*, algumas das proposições apresentadas neste Capítulo são uma contribuição nossa aos estudos dessa classe de números.

Este estudo é justicado pela a utilização da resolução de problemas como estratégia de ensino na discussão dos conceitos referentes aos *números repunits*, essa metodologia de ensino é proposta pelos documentos oficiais da educação, como por exemplo, o PCN Brasil (1998) que a apresenta como o ato de inquirir acerca de qualquer cenário ou aspecto a ser ensinado.

1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo apresentaremos uma caracterização para a metodologia da resolução de problemas, proposta por Polya (2003) e tem como objetivo central fazer do estudante personagem principal do processo de aprendizagem. Esse conceito é amplamente discutido por autores como Dante (2003), Echeverría e Pozo (1998) e Onuchic (1999), além de ser apregoada pelos documentos oficiais da educação como o PCN Brasil (1998) e a BNCC Brasil (2018) que destacam a importância da resolução de problemas para o ensino de Matemática.

1.1 METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino de Matemática, PCN Brasil (1998), para alcançarmos os objetivos de promover as competências gerais para o ensino de Matemática, é necessário o tratamento das situações de ensino de forma contextualizada. A resolução de problemas é a metodologia de ensino apresentada por esse documento e deve ser compreendida como a postura de investigar diante de qualquer situação o fato estudado.

O matemático e educador Polya (2003) defende que para uma aprendizagem mais eficiente, segundo o princípio da aprendizagem ativa, é necessário que o estudante seja incentivado a descobrir a maior parte dos conceitos a serem ensinados a ele, dando ênfase ao seu papel de sujeito do processo aprendizagem. Assim a Matemática não pode ser aprendida sem a interação deste sujeito, de maneira que a aprendizagem ativa nasce como um passo importante para o desenvolvimento da capacidade de pensar do indivíduo. Atualmente em todos os níveis da educação percebemos a necessidade de desenvolver nos estudantes habilidades e estratégias que os permitam a aquisição de novos conhecimentos a partir do seu próprio empenho, ou seja, notamos a necessidade de formar sujeitos ativos cognitivamente, capazes de construir novos conceitos e não apenas reproduzir os conceitos validados por nossa sociedade.

Nesse sentido a resolução de problemas surge com o foco no desenvolvimento de habilidades metagonitivas, ou seja, surgem com a ideia central de tornar o estudante um sujeito ativo do seu processo de aprendizagem, enaltecendo o método de investigação e questionamento, no qual o indivíduo desenvolve o próprio pensamento, levantando hipóteses e experimentando-as, obtendo conclusões e efetuando discussões em sala. Para Polya (2003) o ensino de deve estimular a capacidade de imaginação do estudante.

> No ensino da Matemática, podem fazer-se necessários problemas rotineiros, até mesmo muitos deles, mas deixar que os discentes nada mais

> façam é indesculpável. O ensino que se reduz ao desempenho mecânico de operações matemáticas rotineiras fica bem abaixo do nível do livro de cozinha, pois as receitas culinárias sempre deixam alguma coisa à imaginação e ao discernimento do cozinheiro, mas as receitas matemáticas não deixam nada disso a ninguém (POLYA, 2003, p. 142).

Assim, podemos perceber que a resolução de problemas tem sua consolidação através da oposição ao processo de ensino pautado na memorização, exploração e aplicação de fórmulas e algoritmos em situações que não exigem um raciocínio elaborado do estudante, levando assim o indivíduo a apenas repetir modelos historicamente validados. Em contraponto, a resolução de problemas visa estabelecer o estudante como ser ativo no processo de ensino.

Diante desse processo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) Brasil (2018) aponta como uma competência geral para a educação básica o ato de exercitar a curiosidade racional e investir em processos científicos, tais como a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaboração e testes de hipóteses, formular e resolver problemas e criar resoluções com base nos conhecimentos das diferentes áreas. Para que essa competência geral defendida pelos documentos oficiais seja implementada em sala, é necessário de acordo com Mendes (2008):

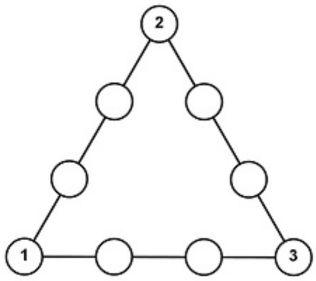
> Mudar o processo de ensino estático e unilateral, no qual o professor é o único informante e cuja as ações conduzem os alunos a um processo contínuo de passividade. Por outro lado, as aulas dinâmicas centradas na problematização, investigação e análise da realidade matemática envolvida nos contexto socioculturais, conduzem os alunos a um processo ativo provocado pela sua participação e favorecem o seu crescimento no próprio processo de apreensão do conhecimento (MENDES, 2008, P. 80).

Sendo assim, cabe ao professor explorar problemas ou situações que incentive a participação do estudante, a realizar pesquisas e buscar conceitos úteis para a resolução da situação abordada, enfatizando o papel de destaque do sujeito no processo de ensino e aprendizagem, desenvolvendo a análise crítica da situação, a busca pela investigação, o desenvolvimento de estratégias e capacidade de raciocínio, incentivando o indivíduo a conjecturar, a pesquisar e buscar conceitos que sejam úteis para aquela situação.

Segundo Polya (2003) devemos nos ater a situações que surgem de maneira mais aparente, ou seja, algumas questões são mais fáceis e naturais que outras, por exemplo, adivinhar é mais fácil que demonstrar, resolver problemas concretos é mais natural que desenvolver conceitos estruturais.

Geralmente o concreto vem antes do abstrato, a ação e a ideia antes das palavras e dos organizadores, os organizadores antes dos símbolos e assim por diante. Por exemplo, considere a seguinte situação. *Na Figura 1, a seguir os números 1, 2 e 3 foram colocados nos vértices do triângulo. Devemos preencher os círculos abaixo com os números naturais de 4 a 9, sem repeti-los, de modo que a soma dos números de cada lado resulte 17.*

Figura 1 – Triângulo Mágico



(Fonte: OBMEP (2017))

Para o estudante é mais natural efetuar tentativas e adivinhações para encontrar a resposta da situação, do que desenvolver um algoritmo matemático, a partir de conceitos prévios, que determine a resolução do problema pedido.

Ao iniciar o processo de aprendizagem, o professor deve partir de algo que seja de conhecimento do aluno, algo que seja familiar para ele, sendo assim os problemas concretos devem marcar o início do processo e gradativamente ir mudando o foco para algo mais abstrato, ao partir de situações mais aparentes para o estudante consegue uma aprendizagem com mais significado, visto que o estudante tem a oportunidade de aplicar o conhecimento a ser aprendido em situações rotineiras. A resolução de problemas, que Segundo Mendes (2008) é vista como uma proposta metodológica, em que o professor aborda situações ou problemas que possuem como características principais a investigação e a análise de novos conhecimentos. Assim, é papel do professor propiciar situações que incentive o estudante a aprender de forma ativa, o processo de ensino deve conter como pontapé inicial o que for mais natural e acessível no ponto de vista do aluno, dessa forma o sujeito deve incorporar em primeiro plano situações concretas e em segundo plano uma generalização dos conceitos. Ainda segundo Polya (2003)

> A resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem a cabeça fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos que observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus, e por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os. (POLYA, 2003, p. 4)

O professor que deseja desenvolver com seus estudantes a habilidade em resolver problemas, deve explorar situações que os possibilitem o interesse por problemas e proporcione aos dicentes a oportunidade de imitar e praticar, ou seja, observar como outros estudantes ou o professor, resolvem seus problemas e partir dos passos adotados pelos resolvedores de problemas tentarem resolver as situações propostas. Assim aprendemos a resolver problemas justamente resolvendo-os. Um estudante está diante de um problema, De acordo com Polya (2003), quando existe uma situação na qual o indivíduo não pode resolvê-la com os conhecimentos que possui em sua estrutura cognitiva. Enquanto Dante (2003) defende que um problema matemático é qualquer situação que necessita de uma maneira matemática de pensar, além de conhecimento prévios para sua resolução. O PCN (BRASIL, 1998, p. 44), apregoa que "um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a resolução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la". É importante salientar que no processo de ensino de Matemática através da resolução de problemas surgem duas implicações, primeiro só existe problema quando há algum indivíduo disposto a resolvê-lo, segundo não existe um modelo eficaz para resolver um problema, ou seja, a definição de um problema não depende da situação, mas sim na relação que cada indivíduo desenvolve com ela. Diante desses aspectos podemos considerar que um estudante está diante de um problema, quando lhe é proposto qualquer situação que exija habilidades que o sujeito não possui acesso corriqueiramente, necessitando da formulação de um plano de ação para que sua resolução seja determinada.

Segundo Echeverría e Pozo (1998), uma situação é vista como um exercício quando o sujeito já possui em mente os procedimentos que permitem solucioná-la, de maneira mais ou menos imediata, dependem meramente de uma reprodução de modelos preestabelecidos, sem demandar nenhuma forma de reflexão ou tomada de decisão. Embora o exercício seja necessário para consolidar habilidades instrumentais básicas, não pode ser encarado com problema, que tem sua definição em meio a um processo de intepretação, definição de estratégia e tomada de decisão. Um exercício segundo Dante (2003) serve para treinar e praticar um determinado algoritmo. O estudante lê o enunciado e dele extrai os dados necessários para aplicar um ou mais algoritmos com a intenção de determinar sua resolução. Entretanto, um problema exige que o estudante percorra algumas fases, é uma descrição de uma proposta que tem por objetivo encontrar algo desconhecido mediante a estruturação de um plano, ou seja, não existe um algoritmo que dê a resposta de maneira rápida e direta.

De acordo com Dante (2003) um problema na sua essência deve conter elementos que incentive o estudante a resolvê-lo, tem que desafiá-lo, ser real, interessante, novo, sua resolução não pode ser obtida de forma mecânica, deve conter um nível adequado ao público e tem que propiciar condições para o desenvolvimento da capacidade de raciocínio do estudante. Ainda em Polya (2003) aponta quatro fases para a resolução de um problema que são *compreender o problema, estratégia, execução da estratégia e a reflexão* , apresentaremos a seguir uma descrição de cada momento a ser desenvolvido na processo de resolução de um problema.

Compreender o problema reside em perceber com clareza o que está envolto no problema, para isso o estudante deve extrair do enunciado informações nas quais identifique elementos que poderão guiá-lo na resolução do problema, como por exemplo, a incógnita, o que se pretende determinar; os dados, informações que servirão como ferramentas para a resolução do problema e a condicionante, a relação entre os dados e a incógnita.

> O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isso nem sempre será culpa sua. O problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante, e um certo deve ser dedicado a sua apresentação natural e interessante (POLYA, 2003, P. 5).

O professor deve selecionar no contexto de sala de aula, problemas que favoreçam o processo de investigação dos seus discentes, sendo atividades não muito complexas, mas com potencial para envolvê-los e instigá-los a resolver, caso contrário poderá causar o desinteresse. Ao compreender o problema procure analisar o problema sob diversos pontos de vista e estabelecendo ligações com conhecimentos já estudados anteriormente, com o objetivo de encontrar conceitos que servirão de ponto de partida para a resolução do problema proposto. Neste momento algumas indagações podem ser feitas com a intenção de auxiliar o entendimento da situação, tais como: Qual é a incógnita? Quais os dados fornecidos? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante?

Estabelecemos um plano quando é possível enxergar, mesmo que de forma geral, quais os procedimentos devemos utilizar para determinarmos a incógnita de uma situação específica, ou seja, quando conseguimos estabelecer uma relação entre os dados, a condicionante e a incógnita de um problema. Polya (2003, P. 7) afirma que "[...] o principal feito, na resolução de um problema é a concepção da ideia de plano". Diante disso, um plano deve esclarecer todo o caminho (ou ao menos parte dele) a ser trilhado na resolução de um problema, deve mostra com a maior clareza os passos à serem efetuados, quais cálculos devem ser feitos, quais teoremas devem ser utilizados, ou seja, deve conter todas as técnicas que serão usadas no processo de resolução. Para o desenvolvimento dessa etapa é necessário a utilização de conceitos, propriedades, teoremas e técnicas previamente aprendidas, buscando recursos que sustentem a relação existente entre os dados extraídos do problema e sua incógnita. Algumas questões podem auxiliar nesta fase, tais como, Você já viu esse problema anteriormente? ou de forma diferente? Conhece um problema correlato? Conhece algum problema que pode ser utilizado? Outras ações importantes nessa fase surgem após o conhecimento das indagações anteriores, como por exemplo, Considere a incógnita e a partir dela procure pensar em um problema previamente resolvido que possua a mesma incógnita ou uma outra semelhante, conhece algum problema correlato e já solucionado, é possível usá-lo? Podemos fazer uso do seu resultado? Podemos utilizar seus procedimentos?

Agora vamos "Executar o plano", neste momento é necessário a execução do plano arquitetado, verificando cada estágio desenvolvido, aferindo cada cálculo realizado, elaborando esquemas e construindo figuras (quando possível), organizando os dados em tabelas ou gráficos, enfatizando a relação entre os dados do problema e sua incógnita. Alguns requisitos que ajudam nessa fase são: examinar os fatos preestabelecidos, fazer o uso de estratégias diversificadas, realizando detalhadamente as operações algébricas e geométricas, dispor de um tempo considerável, recomeçar sempre que necessário e aferir todos os passos do processo. Ao executar o plano, verificamos se houve aprendizagem, corrigindo possíveis erros cometidos e se as etapas anteriores foram bem desenvolvidas.

Na etapa de Reflexão, verificamos se o resultado apresentado é realmente uma resolução do problema, considerando refazer todas as operações já executadas, com o objetivo de validar os passos adotados e o resultado obtido. Conforme indica Dante (2003).

> Nesta etapa, analisamos a solução obtida e fazemos a verificação do resultado. O retrospecto, repassando todo o problema, faz com que o aluno reveja como pensou inicialmente, como encaminhou uma estratégia de solução, como efetuou os cálculos, enfim, todo o caminho trilhado para obter a solução. Esse processo cuidadoso é um excelente exercício de aprendizagem e serve também para detectar e corrigir possíveis enganos. (DANTE, 2003, p. 28)

No desenrolar desta fase é o momento propício para o apontamento de outras estratégias de resolução, além de enfatizar a possibilidade da aplicação do resultado ou metódo desenvolvido nesse problema na resolução de outros problemas correlatos, ou seja, um momento propício para o apontamento de outra forma ou modelo que pode servir para a resolução de outros problemas semelhantes.

Ao analisar as fases descritas em Polya (2003), percebemos que todas possuem um papel fundamental no processo de resolução de um problema, entretanto isso não significa que o todo plano precisa necessariamente estar condicionado a essas etapas, um estudante pode desenvolver uma estratégia interessante que contemple a resolução do problema desejado sem a necessidade de passar por todas elas. No processo de resolução de problemas, no princípio os estudantes devem identificar conceitos e técnicas matemáticas que podem ser aplicados na tradução do problema da linguagem natural para a linguagem matemática. Após esse momento, eles precisam aplicar os conceitos identificados, na execução dos métodos de resolução e, por fim, efetuar a comparação dos resultados obtidos e o problema proposto, socializando seu plano de ação com os colegas em sala. Diante desse fato o documento BNCC Brasil (2018) destaca que:

> no entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação (BRASIL, 2018, P. 535).

De acordo com as ideias defendidas por Dante (2003), os problemas matemáticos podem ser classificados em 6 tipos; *exercícios de reconhecimento*, *exercícios de algoritmos*, *proplemas-padrão*, *problemas-processos ou herísticos*, *problemas de aplicação* e *problemas de quebra-cabeça*.

Os *exercícios de reconhecimento* são aqueles que possuem como intencionalidade fazer com que o estudante perceba, identifique ou relembre um conceito, uma definição, uma propriedade ou fato específico. Enquanto que os *Exercícios de algoritmo* são atividades que envolvem a aplicação dos algoritmos das operações básicas com números naturais. Seu objetivo é aperfeiçoar as habilidades de execução de um algoritmo, além de fortalecer conceitos previamente apreendidos. Já os *Problemas-padrão* são aqueles que a resolução depende da aplicação exclusiva de um ou mais algoritmos, previamente estabelecidos e não exigem algum plano de resolução. A resolução da situação está inserida no enunciado, o trabalho principal do estudante é matematizar a linguagem natural, elencando os algoritmos necessários para a resolução. Tais problemas possuem como finalidade recordar e fixar informações elementares por intermédio de algoritmos das operações básicas, além de salientar a ligação existente entre essas operações e algumas situações cotidianas.

Já os *Problemas de quebra-cabeça* são aqueles nos quais a resolução está diretamente ligada a sorte ou a habilidade de perceber um padrão que é o segredo para se obter a resolução. Constituem a chamada Matemática Recreativa, são situações desafiadoras para os estudantes, fato esse que despertam o interesse para sua resolução. Por fim *Problemas de aplicação* são aqueles que envolvem situações rotineiras e utilizam a Matemática para se obter a resolução. São chamados também de situações-problemas. Através de conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos procura matematizar uma situação real, relacionando dados em tabelas e gráficos, efetuando operações associadas a situação. Comumente, são problemas que demandam levantamento de dados, podem ser apresentados em forma de projetos à serem desenvolvidos de modos interdisciplinar, ou seja, fazendo uso de conceitos referentes a outras disciplinas.

Ainda nos dias atuais, a metodologia de ensino mais presente em nossas salas de aula é aquela na qual o professor é o transmissor do conhecimento e os estudantes são meros receptores do conhecimento produzido no contexto da aula. Nesta concepção, o ensino de Matemática tem um padrão bem definido: primeiro, o professor expõe a definição, posteriormente, mostra um exemplo e, por fim, aplica uma coleção de exercícios de "fixação". O objetivo dos exemplos abordados é servir de modelo para a resolução da lista de exercícios, que em sua maioria são repetitivos não exigindo do estudante a elaboração de uma estratégia de resolução, como pode ser visto nas orientações curriculares para o ensino:

> Sobre o processo de ensino e aprendizagem, uma primeira corrente, historicamente a mais presente nas nossas salas de aula de Matemática, identifica ensino com transmissão de conhecimento, e aprendizagem com mera recepção de conteúdo. Nessa concepção, a aprendizagem é vista como um acúmulo de conhecimentos, e o ensino baseia-se essencialmente na "verbalização" do conhecimento por parte do professor. Se por um lado essa concepção teórica apresenta a vantagem de se atingir um grande número

> de estudantes ao mesmo tempo, visto que a atividade estaria a cargo do professor, por outro lado demanda alunos bastante motivados e atentos à palavra do professor, o que não parece ser o caso para grande parte de nossos alunos, que estão imersos em uma sociedade que oferece uma gama de outras motivações (BRASIL, 2006, p. 80).

A metodologia da resolução de problemas aponta um caminho distinto. Nela, a consolidação dos conceitos advém do processo de exploração de cada situação discutida em sala, ou seja, o estudante consolida a aprendizagem de um novo conceito matemático a partir do processo de resolução de problemas, efetuando a validação desse conceito por meios práticos. Além disso, a introdução de conceitos através da resolução de problemas, favorece que o aluno desenvolva a capacidade de pesquisar, investigar, perceber, conjeturar e validar conceitos e padrões acerca dos conceitos a serem estudados.

O ensino por intermédio da resolução de problemas, de acordo com, Onuchic (1999) pode ser encarado segundo duas vertentes, a primeira Matemática para aprender a resolver problemas e a segunda, a resolução de problemas como passo inicial para o processo de ensino e apredizagem de Matemática, percebemos que "o ensino e aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis" segundo Onuchic (1999). Desse modo a resolução de problema passa a ser entendida como uma forma de introduzir conceitos matemáticos, enfatizando o papel central do estudante no processo de aprendizagem, isso pois, os conceitos serão adquiridos não pelo verbalização do professor, mas sim, com a exploração realizada pelo estudante no processo de resolução de um problema.

A introdução de conceitos através da resolução de problemas, favorece que o estudante desenvolva a capacidade de pesquisar, investigar, perceber, conjeturar e validar conceitos e padrões acerca dos conceitos a serem estudados. Portanto, ao utilizarmos a resolução de problemas como atividade motivadora para a validação de um novo conhecimento a ser estudado em sala estamos desenvolvendo uma postura pedagógica, como:

> Colocando o foco em Resolução de Problemas, defendemos que: o ponto de partida das atividades matemática não é a definição, mas o problema; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica , de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória; que aproximações sucessivas ao conceito criado são construídas para resolver um certo tipo de problemas e que, num outro momento, o aluno utiliza o que já aprendeu para resolver outros problemas; que o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas; que a Resolução de Problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem. (ONUCHIC, 1999, p.215)

Ao utilizar a resolução de problemas como elemento motivador para a consolidação dos conceitos matemáticos, Onuchic (1999) sugere o seguinte roteiro. Primeiro, desenvolver as atividades em grupo, visto que, no mundo real costumeiramente aprender é um processo compartilhado, ou seja, o objetivo final é alcançado a partir de esforços combinados. É necessário desenvolver a noção de cooperação nos estudantes, mostrando que um pode aprender com o outro. O papel do professor nesse processo é observar, organizar, consultar e incentivar a aprendizagem. O professor aborda situações desafiadoras e ajuda os estudantes a cooperarem entre sim com o objetivo de superarem as dificuldades de cada situação explorada. O professor é o intermediador do processo, leva os estudantes a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários.

Ainda de acordo com Onuchic (1999) após os aluno efetuarem toda a exploração da situação-problema o professor anotaria no quadro os resultados obtidos pelos diferentes discentes ou grupos, registrando os resultados certos e errados do problema. Posteriormente, o professor inicia a socialização dos resultados, o seja, o momento em que todos os dicentes ou grupos expõem suas estratégias de resolução para o problema. Ao fim do processo de socialização, iniciamos o processo de análise dos resultados obtidos, nessa fase as dificuldades apresentadas pelos estudantes são trabalhadas novamente, a exploração é muito importante nessa fase. A análise dos resultados acarreta no consenso, que é justamente a validação do processo de resolução pretendido. Finalizando, num esforço conjunto entre professor e os estudantes, com o professor coordenando o processo, é realizado uma síntese daquilo que deve ser compreendido a partir da exploração do problema abordado.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste Capítulo apresentamos alguns conceitos relevantes acerca dos números inteiros, essa contextualização tem a intenção de abordar conceitos prévios que servirão como requisistos básicos para a compreensão da proposta de atividade. Neste Capítulo também discutimos conceitos acerca dos *números repunits*. Para o embasamento deste consideramos os trabalhos desenvolvidos por Beiler (1966), Carvalho e Costa (2015), Domingues (2017), Hefez (2016) e Oliveira e Corcho (2010) entre outros.

2.1 O CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

De acordo com Domingues (2017) os números negativos surgiram na China, a mais de dois mil anos. Já nesse momento, os chineses dominavam as regras de sinais para adição e subtração, entretanto, não há registro na matemática chinesa da regra de sinais para a multiplicação em qualquer período anterior ao século XIII. Com o passar do tempo, por intermédio das relações culturais com a China ou de modo independente os números negativos foram introduzidos a matemática hindu. Com o objetivo inicial de resolver problemas associados a situações financeiras. Os registros dos números inteiros pelos hindus, aparecem principalmente em obras como de Brahmagupta (598-?)[1] e já no século XII nas obras de Bhaskara que assinalou que um número positivo possui duas raízes uma positiva e outra negativa, além de ressaltar a impossibilidade da extração da raiz quadrada de um número negativo. Ao introduzirem os números negativos em sua matemática os hindus não possuíam nenhuma preocupação com a teoria, pelo contrário, os avanços matemáticos registrados nessa etapa da história, eram aplicados na resolução de problemas práticos, sem preocupação com o rigor teórico.

Segundo Hefez (2016) os números negativos são citados de forma pontual desde a antiguidade, entretanto sob muita desconfiança da comunidade matemática. Tal desconfiança perdurou até as atividades mercantis que ocorreram na Idade Média, neste momento surgiu a necessidade de considerar os inteiros para resolver problemas relacionados à situações comerciais. Devido as desconfianças dos matemáticos a evolução dos conceitos relacionados aos números inteiros ocorreu lentamente. No decorrer do século XIX com os estudos de Cantor, quando as bases matemáticas foram fundamentadas e novamente sistematizadas, que a noção de número inteiro passou a ser vinculada a conceitos da teoria dos conjuntos.

Neste contexto, podemos definir o conjunto dos números inteiros, como o conjunto

[1] Não há registros históricos acerca do falecimento de Brahmagupta.

formado pela união dos números naturais, o zero e os números negativos. Este conjunto será denotado por $\mathbb{Z}$. Em outras palavras, temos que

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -(n+1), -n, \cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots, n, n+1, \cdots\}$$

onde n é um número natural.

A apresentação inicial nesse trabalho é puramente axiomática, ou seja, definiremos a partir das operações de adição e multiplicação uma série de axiomas que formarão a base para as discuções relativas ao conjuntos dos inteiros $\mathbb{Z}$ que são apresentadas no transcorrer deste estudo. De acordo com Hefez (2016) as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Z}$ são definidas pelos seguintes Axiomas;

Axioma 1. A adição e a multiplicação são *bem definidas* nos inteiros. Para todos a, b, c e d inteiros, se $a = c$ e $b = d$, então $a + b = c + d$ e $a \times b = c \times d$.

Axioma 2. A adição e multiplicação são *comutativas*. Para a e b inteiros, $a + b = b + a$ e $a \times b = b \times a$.

Axioma 3. A adição e a multiplicação são *associativas*. Para todos a, b, c inteiros, $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

Axioma 4. A adição e multiplicação possuem *elementos neutros*. Para todo a inteiro, $a + 0 = a$ e $a \times 1 = a$.

Axioma 5. A adição possuiu um elemento *simétrico*. Para todo a inteiro, existe $b = (-a)$ de tal forma que que $a + b = 0$. Para todo a inteiro.

Axioma 6. A multiplicação é *distributiva* em relação à adição. Para todo a, b, c inteiros, temos $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Axioma 7. *Tricotomia*: Dados a, b inteiros, temos que:

$$\text{(i) } a = b, \quad a > b \quad \text{ou } a < b.$$

Consinderando $\mathbb{N}$, o conjunto dos números naturais (inteiros positivos), como um subconjunto dos números inteiros, temos a seguinte consequência:

Axioma 8. Fechamento em $\mathbb{N}$: O conjunto dos naturais é fechado em relação a adição e a multiplicação, isto é, para todos a, b naturais, temos que $a + b$ e $a \times b$ pertencem ao naturais.

As proriedades apresentadas na seuência são derivadas dos Axiomas dos números inteiros definidos anteriormente. Para além disso, suas demonstrações dependem diretamente da aplicação de tais axiomas, ademais podem ser encontadas em Hefez (2016) e Domingues (2017).

Proposição 2.1. Para todo a inteiros, temos que $a \times 0 = 0$.

Proposição 2.2. *Lei do cancelamento* da adição: Para quaisquer a, b e c inteiros, se $a+c=b+c$, então $a=b$.

Proposição 2.3. *Relação de transitividade*: Para quaisquer a, b e c inteiros, se $a<b$ e $b<c$, então $a<c$.

Proposição 2.4. *Lei do cancelamento* da adição associada a transitividade: Para todo a, b e c inteiros, se $a+c<b+c$, então $a<b$.

Proposição 2.5. *Lei do cancelamento* da multiplicação: Para quaisquer a, b, c inteiros e $c \neq 0$, se $a \times c = b \times c$, então $a=b$.

Proposição 2.6. *Lei do cancelamento* da multiplicação associada a transitividade: Para todo a, b, c inteiros e $c \neq 0$, se $a \times c < b \times c$, então $a<b$.

Proposição 2.7. *Princípio da Boa Ordenação*
Se $\mathbb{T}$ é um subconjunto não vazio e limitado superiormente dos inteiros $\mathbb{Z}$, então $\mathbb{T}$ possui um maior elemento.

Uma consequência derivada do Princípio da Boa Ordenação é o Princípio da Indução Matemática, o qual enunciaremos a seguir.

Proposição 2.8. *Princípio da Indução Matemática*
Seja um número inteiro a e seja $p(n)$ uma sentença aberta em n. Suponha que;

(i) $p(a)$ é verdadeiro, e que

(ii) para todo $n \geqslant a$, $p(n)$ implica em $p(n+1)$ verdadeiro. Então $p(n)$ é verdadeiro para todo $n \geqslant a$.

Discutiremos a seguir conceitos e proposições relacionados a divisbilidade dos inteiros. Como a divisão de um número inteiro por outro nem sempre é praticável, então essa possibilidade pode ser expresssa por intermédio de uma relação de divisibilidade, ainda que essa relação não seja verificada, mostraremos que mesmo assim podemos efetuar uma divisão com uma pequena sobra, a qual denotaremos de resto. Este processo recebe o nome de divisão euclidiana. A possibilidade de sempre efetuarmos a divisão entre dois números inteiros gera muitas propriedades, algumas são discutidas ao longo deste trabalho.

Exemplo 1. Consindere o conjunto de elementos interios formado pelos mútiplos de 3, ou seja, $M = \{\cdots, -3k, \cdots, -9, -3, 0, 3, 9, \cdots, 3k, \cdots\} = \{3k$, para todo k inteiro$\}$, note que em M, 3 divide 21, pois $21 = 3 \times 7$, ou seja, 21 pertence ao conjunto M. Entretanto 3 não divide 8, isso pois não existe um inteiro que ao ser mutiplicado por 3 resulta em 8, isto é, 8 não pertence ao conjunto M.

Dado dois números inteiros a e b, dizemos que a divide b, quando existe um q inteiro, de tal forma que $b = a \times q$. Nessa situação, também dizemos que b é um múltiplo de a ou a é um divisor de b, ainda mais, b é divisível por a. Usaremos a notação $a \mid b$ para representar todas as frases com o mesmo sentido da anterior. Se a não divide b, quer dizer, quando não existir um inteiro que multiplicado a resulte em b, então escrevemos $a \nmid b$. Diante desse fato surgem algumas propriedades para divisibilidade, cujo as demonstrações podem ser consultados em Domingues (2017), Hefez (2016) ou Oliveira e Corcho (2010).

Proposição 2.9. Sejam a, b, c inteiros. Tem-se que:

(i) $1 \mid a$, $a \mid a$ e $a \mid 0$.

(ii) $0 \mid a$ se e somente se $a = 0$.

(iii) $a \mid b$ se, e somente se, $|a| \mid |b|$.

(iv) Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$.

(v) Se a, b, c, d inteiros, então $a \mid b$ e $c \mid d$ implica que $a \times c \mid b \times d$.

(vi) Sejam a, b inteiros , tais que $a \mid (b \pm c)$. Então $a \mid b$ se e somente se $a \mid c$.

(vii) Sejam a, b e c inteiros, tais que $a \mid b$ e $a \mid c$, então para todo m, n inteiros $a \mid (bm + cn)$.

Exemplo 2. Veja que $a - b$ divide $a^2 - b^2$, uma vez que, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Além de que $a - b$ divide $a^3 - b^3$, isso pois, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab - b^2)$ este exemplo é generalizado por meio da proposição a seguir:

Proposição 2.10. Sejam a, b inteiros e n natural. Temos que $a - b$ divide $a^n - b^n$, ou seja, $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

Quando dois números a, b inteiros e $a \neq 0$, são divididos e tem como resultado em uma quatidade não inteira, Euclides em seu livro Os Elementos diz que é possível realizá-la, desde que consideremos o seu resto. Dando origem assim, ao algoritmo da divisão euclidiana.

Exemplo 3. Dado quatro números inteiros positivos 1992, 1993, 1994 e 1995 observe que:

(i) $1992 = 4 \times 498 + 0$

(ii) $1993 = 4 \times 498 + 1$

(iii) $1994 = 4 \times 498 + 2$

(iv) $1995 = 4 \times 498 + 3$

tal fato, pode ser representado por:

Proposição 2.11. (*Divisão Euclidiana*)

Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < |b|$.

Explicitamos em seguida duas implicações derivadas divisão euclidiana, primeiro abordamos o conceito de congruência, logo após mostramos uma propriedade interessante que pode ser verificada com a aplicação da Proposição 2.11.

Considere um número natural m. Dizemos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m quando seus respectivos restos na divisaõ euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congrus em relação a m, escrevemos

$$a \equiv b \mod m.$$

Exemplo 4. Observe que $72 \equiv 9 \mod 21$, então 21 divide $72 - 9$ e $2019 \equiv 4 \mod 5$,de um modo geral temos que:

Proposição 2.12. Suponha que a, b, $m \in \mathbb{Z}$, como $m > 1$. Tem-se $a \equiv b \mod m$ se, somente se, $m \mid a - b$.

Proposição 2.13. Nenhum quadrado perfeito ou soma de dois quadrados perfeitos é da forma $4q + 3$, para todo q inteiro.

Demonstração: Um número natural (inteiro positivo) m é dito um quadrado perfeito, se existe um inteiro a, tal que $m = a^2$. Observe que todo inteiro a pode ser escrito na forma $4 \times k + r$, com $r = 0, 1, 2$ ou 3.

Diante disso, temos que para:

$r = 0$, então $m = a^2 = (4q_1)^2 = 4(4q_1^2) = 4q$, com $q = 4q_1^2$;
$r = 1$, então $m = a^2 = (4q_1 + 1)^2 = 4(4q_1^2 + 2q_1) + 1 = 4q + 1$, com $q = (4q_1^2 + 2q_1)$;
$r = 2$, então $m = a^2 = (4q_1 + 2)^2 = 4(4q_1^2 + 4q_1 + 1) = 4q$, com $q = (4q_1^2 + 4q_1 + 1)$;
$r = 3$, então $m = a^2 = (4k + 3)^2 = 4(4q_1^2 + 6q_1 + 2) + 1 = 4q$, com $q = (4q_1^2 + 6q_1 + 2)$.

Logo m é da forma $4q$ ou $4q + 1$. Assim, como todo quadro perfeito só pode ser forma $4q$ ou $4q + 1$. Considere os quadrados perfeitos $m = a^2$ e $n = b^2$, decorre que:

Para $m = 4q_1$ e $n = 4q_2$, então $m + n = 4(q_1 + q_2) = 4q$, com $q = (q_1 + q_2)$.

Caso $m = 4q_1$ e $n = 4q_2 + 1$, assim sendo $m + n = 4(q_1 + q_2) + 1 = 4q + 1$, com $q = (q_1 + q_2)$.

Já quando $m = 4q_1 + 1$ e $n = 4q_2$, segue que $m + n = 4(q_1 + q_2) + 1 = 4q + 1$, com $q = (q_1 + q_2)$.

Porfim, se $m = 4q_1 + 1$ e $n = 4q_2 + 1$, nesse caso $m + n = 4(q_1 + q_2) + 2 = 4q + 2$, com $q = (q_1 + q_2)$.

Portanto a soma de dois quadrados perfeitos e da forma $4q$, $4q+1$ ou $4q+2$.

Para a escrita dos números foi necessário ao homem a invenção dos sistemas de númeração, vários povos antigos desenvolveram uma representação sistemática para os números, como por exemplo, os babilônios, os egípcios e os romanos foram povos que inventaram um sistema de representação numérica. O sistema mais usado pelas pessoas para representação dos números inteiros é o sistema decimal posicional. Segundo Hefez (2016) o sistema decimal representa uma variação do sistema sexagesimal inventado pelos babilônicos antes de Cristo, o sistema decimal foi inventado na China e na Índia e com o passar do tempo foi difundido no Oriente Médio através das caravanas e assim foi bem quisto pela comunidade árabe. Sua introdução na Europa foi marcada por grande rejeição e sua difusão apenas ocorreu após os estudos de Fibonacci.

Nesse trabalho concebemos a representação dos números inteiros positivos, isso porque o zero tem um símbolo próprio e todo inteiro negativo tem sua representação fundamentada no sinal de menos (-) seguido por um inteiro positivo.

De acordo com Hefez (2016) no sistema decimal, todo número inteiro é representado por uma sequência formada pelos algarismos

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

incluindo o 0 (zero), que simboliza a falta de algarismo. O sistema é chamado decimal, justamente, por ser composto por dez algarismos distintos.

O sistema também é chamado de posicional, isso pois, cada algarismo além do seu valor natural, possui também um valor que lhe é conferido de acordo com a posição que ocupa no número. Sempre varia da seguinte maneira, seguindo da direita para esquerda o primeiro algarismo tem peso um, o segundo peso dez, terceiro tem peso cem e assim por diante sempre varia em uma potência de 10.

Existem outros sistemas de numeração em uso, como exemplo o sistema de numeração binário ou de base 2, que possuiu grande utilidade para as ciências da computação, no sistema binário, todo número inteiro é escrico com uma sucessão formada pelos algarismos 1 e 0. A característica comum entre o sistema decimal e o sistema binário é que ambos são sistemas posicionais.

Exemplo 5. O número 2019, no sistema decimal posicional (base 10), é a representação de $2\times 10^3+0\times 10^2+1\times 10+9 = 2\times 10^3+1\times 10+9$. No sistema binário, escrevemos $(2019)_{10} = (11111100011)_2 = 1\times 2^{10}+1\times 2^9+1\times 2^8+1\times 2^7+1\times 2^6+1\times 2^5+0\times 2^4+0\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0$. De forma geral temos que :

Proposição 2.14. Sejam dados os números inteiros a e b, com $a>0$ e $b>1$. Existem números inteiros $n\geqslant 0$ e $0\leqslant r_0, r_1, \cdots, r_n < b$, com $r_n \neq 0$, univocamente determinados, tais que

$$a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \cdots + r_n b^n.$$

Uma consequência imediata da definição de divisbilidade é os critérios de divisibilidade para alguns números especifícos, que servem para julgarmos quando um número é ou não divisível por outro. A seguir, apresentaremos os critérios de divisbilidade por 2, 3, 4, 5, 7, 9 e 11. As demonstrações para tais critérios podem ser encontradas em Hefez (2016) ou Oliveira e Corcho (2010).

Exemplo 6. Perceba que 2018 é divisível por 2, isso pois $2018 = 1009 \times 2$ e veja também que 2020 é divisível por 2, isso porque $2020 = 1010 \times 2$, de maneira geral temos que:

Proposição 2.15. Seja $a = r_n \cdots r_1 r_0$ um número representado no sistema decimal. Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível 2 é que r_0 seja divisível por 2.

Em outras palavras, um número escrito no sistema decimal é divisível (múltiplo) de 2, todas as vezes que este número for par, ou seja, terminar em 0 (zero), 2, 4, 6 ou 8.

Exemplo 7. Note que 2019 é divisível por 3, isso pois $2019 = 673 \times 3$ e veja também que 2022 é divisível por 3, uma vez que $2022 = 674 \times 3$, este exemplo pode ser justificado pela seguinte proposição:

Proposição 2.16. Seja $a = r_n \cdots r_1 r_0$ um número representado no sistema decimal. Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 3 é que $r_n + \cdots + r_1 + r_0$ seja divisível por 3.

De outra maneira, um número escrito no sistema decimal é divisível por 3, todas as vezes que a soma dos algarismos deste número for um múltiplo de 3.

Exemplo 8. Enxergue que que 2020 é divisível por 4, isso porque $2020 = 505 \times 4$ e veja também que 2024 é divisível por 4, isso devido que $2024 = 506 \times 4$, éssa situação pode ser justificar por intemédio da seguinte proposição:

Proposição 2.17. Seja $a = r_n \cdots r_1 r_0$ um número representado no sistema decimal. Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 4 é que $r_1 r_0$ seja divisível por 4.

De outro modo, um úmero escrito no sistema decimal é divisível por 4, sempre que os número formado pelo dois últimos algarismos desse números for divisível por 4.

Exemplo 9. Veja que 2015 é múltiplo de r, pois $2015 = 403 \times 5$ e 2030 também múltiplo de 5, isso porque $2030 = 406 \times 5$, essa situação pode ser verificada pela proposição:

Proposição 2.18. Seja $a = r_n \cdots r_1 r_0$ um número representado no sistema decimal. Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível 5 é que r_0 seja divisível por 5.

Em outras palavras um número inteiro escrito no sistema decimal é divisível por 5, todas as vezes que seu último algarismo for 0 (zero) ou 5.

Exemplo 10. Veja que 2016 é múltiplo de 9, isso porque $2016 = 224 \times 9$ e 2025 também é múltiplo de 9, uma vez que $2025 = 225 \times 9$, essa ideia pode ser generalizado por meio da seguinte proposição:

Proposição 2.19. Seja $a = r_n \cdots r_1 r_0$ um número representado no sistema decimal. Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível 9 é que $r_n + \cdots + r_1 + r_0$ seja divisível por 9.

O critério de divisibilidade por 9 é semelhante o critério de dividibilidade por 3, isto é, um número escrito no sistema decimal é divisível por 9, todas as vezes que a soma dos algarismos deste número for um múltiplo de 9.

Exemplo 11. Observe que 2016 é divisível por 7, uma vez que $2016 = 288 \times 7$, do mesmo modo que 2716 é divisível por 7, visto que $2716 = 388 \times 7$, sendo assim, de forma geral temos que:

Proposição 2.20. Seja $a = r_n \cdots r_1 r_0$ um número representado no sistema decimal. Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 7 é $(r_n \cdots r_2 r_1) - 2r_0$ seja divisível por 7.

Em outras palavras, um número é divisível por 7, quando ao subtrairmos o dobro do último algarismo do número formado pelos demais algarismos obtemos um número divisível por 7.

Exemplo 12. Observe que 2013 é divisível por 11, uma vez que $2013 = 183 \times 11$, do mesmo modo que 2761 é divisível por 11, visto que $2716 = 2761 = 251 \times 11$, esse exemplo pode ser verificada pela proposição:

Proposição 2.21. Seja $a = r_n \cdots r_1 r_0$ um número representado no sistema decimal. Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível 11 é que $(r_0 - r_1) + (r_2 - r_3) + \cdots$ seja divisível por 11.

Nesse momento discutiremos alguns conceitos que aparecem de forma recorrente em problemas de divisibilidade, assim como a relação existente entre es novos conceitos e as noções de divisibilidade previamente estabelecidas.

Exemplo 13. Seja $D(n)$ o conjunto dos divisores de um inteiro n, Observe que 93 possui como divisores o seguinte conjunto de números inteiros $D(93) = \{1,\ 3,\ 31,\ 93\}$, já o 115 possui como divisores o conjunto $D(155) = \{1,\ 5,\ 31,\ 155\}$, sendo assim podemos perceber que 1 e 31 são divisores comuns entre 93 e 155, para além disso, percebemos que 31 é o maior divisor comum entre eles.

Sejam dois inteiros a e b, um número inteiro d será um divisor comum de a e b quando d divide a e d divide b. Dessa forma, diremos que um número $d \geq 0$ é o *máximo divisor comum (mdc)* de a e b, quando as seguintes propriedades são verificadas:

(i) d é um divisor comum de a e b.

(ii) d é divisível por todo divisor comum de a e b, ou seja, se c é um divisor comum de a e b, então c divide d.

Portanto, dizemos que d é o máximo divisor comum, ou simplimenste *mdc* de a e b, quando d é o maior número inteiro que divide simultaneamente a e b. Denotado por $d = (a, b)$

Exemplo 14. Vamos determinar o máximo divisor comum dos números 471 e 1176, para isso, observe que de acodo com o Algoritmo da divisão euclidiana temos:

$1176 = 471 \times 2 + 234$ observamos dessa igualdade que 3 é um divisor comum de 1176 e 471, isso pois 3 divide 471 e 3 divide 234, fato implica em 3 divide 471.

$471 = 234 \times 2 + 3$ notamos nessa igualdade que 3 é um divisor comum de 471 e 234, visto que, 3 divide 234 e 3 divide ele mesmo, sendo assim 3 divide 471.

$234 = 78 \times 3$, percebemos que 3 divide 234.

Então, como 3 divide 471 e 3 divide 1176 concluimos que $d = 3$ é um divisor comum de 471 e 273, a proposição a seguir, não somente garante que $(471, 1776) = 3$, como define um algoritmo para a determinação do máximo divisor comum entre dois números . A demnostração para tal proposição pode ser consultada em Hefez (2016).

Proposição 2.22. (*Algoritmo de Euclides*)

Dados dois inteiros positivos , a e b aplicamos sucessivamente a divisão euclidiana para obter a seguintes sequências de igualdades

$$\begin{cases} b = & aq_1 + r_1, & 0 \leq r_1 < a \\ a = & r_1q_2 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 = & r_2q_3 + r_3, & 0 \leq r_3 < r_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{n-2} = & r_{n-1}q_n + r_n, & 0 \leq r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = & r_nq_{n+1}, & r_n = (a, b) \end{cases}$$

até que algum r_n dividir r_{n-1}. Dessa forma, o $(a,b) = r_n$, ou seja, o último resto não-nulo no processo de divisão anterior. Este algoritmo foi descrito por Euclides no seu livro *Os Elementos* e mesmo com o passar dos milenios poucas atualizações forar registradas nesse metódo matemático.

Exemplo 15. Consindere dois conjuntos numéricos M e N de elementos inteiros detal maneira que, $M = \{\cdots, -2k, \cdots -4, 0, 2, 4, \cdots, 2k, \cdots\} = \{2k, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\}$ e $N = \{\cdots, -3k, \cdots -3, 0, 3, 6, \cdots, 3k, \cdots\} = \{3k, \text{ para todo } k \text{ inteiro}\}$, observe que os números $0, \pm 6$ pertecem simultaneamente aos dois conjuntos, nessa situação dizemos que $0, \pm 3$ e ± 6 são mútiplos comuns de 2 e 3.

Dizemos que um número é mútiplo comum de dois outros números inteiros dados, se ele for um múltiplo simultâneo desses números. De maneira mais específica, consideramos que um número inteiro $m \geqslant 0$ é o *menor múltiplo comum (mmc)* de dois números inteiros a e b, quando as seguintes propriedades são verificadas:

(i) m é um mútiplo comum de a e b.

(ii) se c é um mútiplo comum de a e b então m divide c, ou seja, m divide qualquer mútiplo comum de a e b.

De acordo com essa propriedades, dizemos que m é o menor mútiplo comum, ou simplemente o *mmc* de a e b, quando m for o menor inteiro diferente de zero, presente simultaneamente na lista de mútiplos a e b, o qual denotaremos por $m = [a, b]$.

Ainda relacionado aos números inteiros, temos que um número natural (inteiro positivo) p é dito primo quando p for diferente de 1 e seus únicos divisores naturais forem 1 e o próprio p. Já um número natural a é chamado composto quando não for primo. Assim, um número composto pode ser escrito de maneira única como um produto de primos.

Dados dois primos p e q e um número inteiro a qualquer, podemos concluir a partir da definição de primalidade os seguintes fatos.

(i) Se p divide q então $p = q$.

(ii) Se p não divide a então $mdc(a,p) = 1$, neste caso dizemos que a e p são primos entre si.

Exemplo 16. Observe que $2019 = 3 \times 673$, enquanto $2020 = 2^2 \times 5 \times 101$, de maneira geral temos que:

Proposição 2.23. (*Teorema Fundamental da Aritmética*)

Todo número natural maior que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (independente da ordem dos fatores) como um produdo de números primos. Portanto, ado um natural $n \neq 0,\ 1,\ -1$, existem primos $p_1 < \cdots < p_i$ e os naturais $\alpha_1, \cdots, \alpha_i$ univocamente determinados, tais que

$$n = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i}.$$

Exemplo 17. Veja que a quantidade de divisores de

$$2^2 \times 5 \times 101$$

é igual $(2+1)(1+1)(1+1) = 12$ divisores, isso nos faz pensar que:

Proposição 2.24. Denotando a quantidade de divisores de um natural n por $Q(n)$, quando $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i}$, no qual $p_1, p_2, \cdots, p_i$ são números primos e $\alpha_1, \cdots, \alpha_i$ naturais, então

$$Q(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_i + 1).$$

Exemplo 18. Note que 2 divide $3^2 - 3$, uma vez que $3^2 - 3 = 9 - 3 = 6 = 3 \times 2$, já 5 divide $2^5 - 2$, isso pois, $2^5 - 2 = 32 - 2 = 30 = 6 \times 5$ fato que nos conduz a crer que:

Proposição 2.25. (*Pequeno Teorema de Fermat*)

Dado um número primo p, tem-se que p divide o número $a^p - a$, para todo a inteiro, ou em outras palavras, pela Proposição 2.12 podemos representar $a^p - a \equiv 0 \mod p$.

Outro conceito que utilizaremos em nossa proposta de oficina é o Princípio da Casa dos Pombos, que é referente ao questões de distribuição de quantidades inteiras. Enuciaremos a seguir tal príncipio, sua demosntração pode ser observada em Carvalho e Morgado (2015) e Oliveira e Corcho (2010).

Proposição 2.26. (*Princípio das Casas dos Pombos*) Se distribuírmos $N+1$ pombos em N casas, então alguma das casas contém dois ou mais pombos.

2.2 NÚMEROS REPUNITS

Os *números repunits* formam um subconjunto dos naturais (inteiros positivos) que possuem propriedades e padrões bem definidos e por isso vem despertando o interesse dos matemáticos no decorrer da História, principalmente a partir do desenvolvimento dos computadores que possibilitou ferramentas para estudos mais avançados dessa classe numérica.

Segundo Carvalho e Costa (2015) O termo *repunit* foi usado pela primeira vez por Beiler (1966), referindo-se a todos os números naturais R_n escritos em forma decimal com a justaposição do algarismo 1, dessa forma $R_n = \{1, 11, 111, 1111, 11111, \cdots\}$ para todo $n \geq 1$, é o conjunto que contém todos os *repunits*.

O pesquisador Beiler (1966) também foi responsável por apresentar uma fatoração de R_n, mostrando a existência de primos do formato R_n, que ficaram conhecidos como *primos repunits*, ou seja, números naturais que são primos e *repunits* concomitantemente. A seguir mostraremos uma tabela com a fatoração de R_n para $2 \leqslant n \leqslant 19$ e $n = 53$.

Tabela 1 – Fatores primos de R_n

n	R_n	Fatoração
2	11	primo
3	111	3×37
4	1111	11×101
5	11111	41×271
6	111111	$3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$
7	1111111	239×4649
8	11111111	$11 \times 73 \times 101 \times 137$
9	111111111	$3^2 \times 37 \times 3336677$
10	1111111111	$11 \times 41 \times 271 \times 9091$
11	11111111111	21649×513239
12	111111111111	$3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 101 \times 9901$
13	1111111111111	$53 \times 79 \times 265371653$
14	11111111111111	$11 \times 239 \times 4649 \times 909091$
15	111111111111111	$3 \times 31 \times 37 \times 41 \times 271 \times 2906161$
16	1111111111111111	$11 \times 17 \times 73 \times 101 \times 137 \times 5882353$
17	11111111111111111	$2071723 \times 5363222357$
18	111111111111111111	$3^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 19 \times 37 \times 52579 \times 333667$
19	1111111111111111111	primo
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
53	$111 \cdots 11$	$107 \times 1659431 \times 1325815267337711173 \times$ 47198858799491425660200071
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Fonte: (Carvalho e Costa (2015))

Em conformidade com Tabela 1 podemos perceber alguns padrões que serão justicados pelas proposições apresentadas em seguida. As demonstrações das proposições compreendidas entre a Proposição 2.27 até a Proposição 2.30 podem ser encontradas em Carvalho e Costa (2015).

Exemplo 19. Veja que: $R_3 = 111 = 3 \times 37$, $R_6 = 111111 = 3 \times 37037$ e $R_9 = 111111111 = 3 \times 37037037$. Isto nos leva, pelo critério de divisibilidade por 3, a concluir que:

Proposição 2.27. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, se R_n é um número múltiplo de 3 se e somente se n também for.

Exemplo 20. Veja também que: $R_2 = 11 = 11 \times 1$, $R_4 = 1111 = 11 \times 101$, $R_6 = 111111 = 11 \times 10101$ e $R_8 = 11111111 = 11 \times 1010101$. Este fato pode ser validado pela proposição:

Proposição 2.28. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, se n for da forma $2k$ (par), então R_n é múltiplo de 11.

Exemplo 21. Notemos que $R_6 = 111111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$ e $R_{12} = 111111111111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 101 \times 9901$, assim a proposição a seguir mostra uma generalização para este fato:

Proposição 2.29. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, se n é múltiplo de 6, então R_n é múltiplo de 3, 7, 11 e 13.

Exemplo 22. Considere $R_4 = 1111 = 11 \times 101 = 101R_2$, $R_6 = 111111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 = (3 \times 7 \times 13 \times 37)R_2$ e $R_8 = 11111111 = 3^2 \times 37 \times 333667 = (3 \times 333667)(3 \times 37) = (3 \times 333667)R_4$, tal exemplo pode ser justificado pela proposição:

Proposição 2.30. Para quaisquer $k, n \in \mathbb{N}^*$, se n é múltiplo de k, então R_n é múltiplo de R_k.

Veja que não existe *repunit*, par nem múltplo de 5, isso pois, nenhum *repunit* termina em um número par ou em 5, é fácil verificar que

Proposição 2.31. Para todo n natural temos que $R_n \equiv 1 \mod 2$ e $R_n \equiv 1 \mod 5$.

A Proposição 2.32, pode ser interpretada como uma consequência direta da Proposição 2.30 apontada em Carvalho e Costa (2015).

Proposição 2.32. Se R_n é primo então n é primo.

A recíproca da Proposição 2.32 não é válida, visto que se $n = 3$ ou $n = 5$ são primos, enquanto que, $R_3 = 111$ e $R_5 = 11111$ não são primos, basta ver que $R_3 = 111 = 3 \times 37$ e $R_5 = 11111 = 41 \times 271$. De acordo Carvalho e Costa (2015) mesmo com o avanço da tecnologia atualmente ainda existe uma dificuldade computacional para a verificação da primalidade de R_n, (basta considerar R_n com milhares de algarismos). Até os dias atuais os valores conhecidos de n para os quais R_n é primo são $n = 2, 19, 23, 317$ e 1031. Após os estudos de vários matemáticos como Dubner (2001), foi possível determinar que podem gerar possíveis primos *repunits* que são $n = 4091, 86453, 109297$ ou 270343. Devido a esse obstáculo computacional foram efetuados testes considerando todos os valores $n \leq 2.500.000$ e nenhum novo primo foi encontrado, deixando ainda em aberto a questão relacionda a infinitude dos números primos do formato R_n.

Algumas das proposições propostas a seguir merecem um destaque especial, pois em alguns casos este estudo apresentamos uma demosntração inovadora para essa propriedades. Enquanto, outras nasceram de forma conjunta a esse estudo, ou seja, foram proposta pelo autor no desenvolvimento dos estudos que culminaram neste trabalho.

Exemplo 23. Observe que $R_2 = 11 = 10 \times R_1 + 1$, $R_3 = 111 = 10 \times R_2 + 1$, assim continuando até o $n+1$-ésimo *repunit*, temos $R_{n+1} = 10R_n + 1$. Dessa maneira, podemos definir recursivamente os números da forma R_n da seguinte maneira;

Proposição 2.33. Para todo n natural temos que R_{n+1} é dado por

$$\begin{cases} R_1 = 1 \\ R_{n+1} = 10R_n + 1, n \geqslant 1. \end{cases}$$

É fácil perceber com base na Proposição 2.33 e a Proposição 2.22que:

Proposição 2.34. Dois *repunits* consecutivos são coprimos.

Partindo da forma recursiva dos números *repunits*, Proposição 2.33, podemos estabelecer uma fórmula fechada que gere todos os R_n no sistema decimal, que dependa exclusivamente do valor de n e não mais dos *repunits* anteriormente conhecidos.

Exemplo 24. Veja que $R_1 = 1 = \dfrac{10^1 - 1}{9}$, $R_2 = 11 = \dfrac{10^2 - 1}{9}$ e $R_3 = 111 = \dfrac{10^3 - 1}{9}$, este fato pode ser justificado pela proposição:

Proposição 2.35. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos $R_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$.

Demonstração. Para a verificarmos essa proposição faremos a indução sobre n. Para $n = 1$ e $n = 2$, é facil perceber que $R_1 = 1 = \dfrac{10^1 - 1}{9}$. Logo para $n = 2$, temos que:

$$\begin{aligned} R_2 \quad &= 10R_1 + 1 \quad = 10 \times \frac{10^1 - 1}{9} + 1 \\ &= \frac{10^2 - 10 + 9}{9} \quad = \frac{10^2 - 1}{9} \end{aligned}$$

o que mostra a validade da sentença para $n = 1$ e $n = 2$.

Suponha que para todo $n \geq 1$ a sentença $R_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$ seja válida. Devemos mostrar a validade para $n + 1$. Note que:

$$\begin{aligned} R_{n+1} \quad &:= 10R_n + 1 \quad = 10 \times \frac{10^n - 1}{9} + \frac{9}{9} \\ &= \frac{10^{n+1} - 10 + 9}{9} \quad = \frac{10^{n+1} - 1}{9} \end{aligned}$$

fato este que demonstra a validade da sentença para todo $n + 1$. □

Após a menção de Beiler, muitos resultados sobre os *repunits* foram determinados, Snyder (1982) após vários estudos na área propôs uma generalização das propriedades aritméticas dos números R_n para qualquer base numérica inteira, $b \geqslant 2$, em que $R_n(b) = \dfrac{b^n-1}{b-1}$, que ficaram conhecidos como *repunits* generalizados ou *repunits* para uma base b, dessa forma os conceitos artiméticos associados *aos números repunits* no sistema decimal foram ampliados para qualquer base numérica inteira.

Exemplo 25. Veja que $R_3(2) = 111 = 2^2+2^1+2^0$, enquanto que $R_3(5) = 111 = 5^2+5^1+5^0$,de modo geral temos que:

Proposição 2.36. Seja uma base numérica $b \geq 2$, então $R_n(b) = \dfrac{b^n-1}{b-1} = b^{n-1}+b^{n-2}+\cdots+b+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vamos provar por indução em n. É fácil pecerber que a proposição é válida para $n=1$, pois $R_1(b) = \dfrac{b-1}{b-1} = b^0 = 1$.

Suponhamos, agora, que $R_n(b) = \dfrac{b^n-1}{b-1} = b^{n-1}+b^{n-2}+\cdots+b+1$ seja válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar a validade da sentença para $R_{n+1}(b)$.

Pela hipótese de indução $R_{n+1}(b) = b^n + \dfrac{b^n-1}{b-1}$, sendo assim, veja que:

$$\begin{aligned} R_{n+1}(b) = &\quad b^n+b^{n-1}+b^{n-2}+\cdots+b+1 &&= b^n+\frac{b^n-1}{b-1} \\ = &\quad \frac{b^{n+1}-b^n+b^n-1}{b-1} &&= \frac{b^{n+1}-1}{b-1} \end{aligned}$$

fato este que mostra a validade da proposição. □

Proposição 2.37. (HEFEZ, 2016, exercício 3.32) Exceto $R_1 = 1$, nenhum outro R_n é um quadrado ou soma de dois quadrados perfeitos.

Demonstração. Repare que;

$$\begin{aligned} R_2 &= 11 = 4\times 2+3 \\ R_3 &= 111 = 108+3 = 4\times 27+3 \\ R_4 &= 1111 = 1108+3 = 4\times 277+3 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$R_n = 1111...11 = 10^2 \times (\underbrace{1111...1}_{n-2 \text{ algarismos}}) + 11$$

Sendo assim, pela Proposição 2.17 temos que 10^2 é divisível por 4, e pela Equação (2.1) que $11 = 4\times 2+3$, cocluimos então que:

$$R_n = (\underbrace{1111...1}_{n \text{ algarismos}}) = 4q+3$$

para todo $q \in \mathbb{N}^*$.

De acodo com a Proposição 2.13, nenhum quadrado perfeito pode ser da forma $4q+3$, com $q \in \mathbb{N}$, então podemos concluir que para todo $n \geqslant 2$ não existe nenhum quadrado perfeito da forma R_n.

Tabela 2 – Adição dos quadrados perfeitos

$+$	$4q$	$4q+1$
$4q$	$4(2q)$	$4(2q)+1$
$4q+1$	$4(2q)+1$	$4(2q)+2$

Para a verificação da segunda parte da proposição, conforme a Proposição 2.13 todo quadrado perfeito é da forma $4q$ ou $4q+1$, segundo a Tabela 2 as possibilidades de soma de dois quadrados são da forma $4q$, $4q+1$ e $4q+2$. Logo como R_n é da forma $4q+3$, assim concluímos novamente da Proposição 2.13 que exceto o 1, nenhum outro *repunit* pode ser escrito como soma de dois quadrados perfeitos. $\square$

A Proposição 2.37 pode ser descrita de modo mais geral, da seguinte maneira, nenhum número da forma $4q+3$ é resultado de um potência, cujo expoente é da forma $2k$ para todo $k \geqslant 1$.

Corolário 1. Exceto $R_1 = 1$ nenhum outro R_n é resultado de uma potência, cujo expoente é da forma $2k$ para todo k natural e $k \geq 1$.

Demonstração. Para verificarmos esta proposição, basta ver que $a^{2k} = (a^2)^k$, pela Proposição 2.13, garante que a^2 é da forma $4q$ ou $4q+1$, logo temos dois casos a analisar:

Para $a^2 = 4q$, temos que $(a^2)^k = (4q)^k = \underbrace{(4q)(4q)\cdots(4q)}_{k \text{ fatores}} = 4(4^{k-1}q^k) = 4t$ para $t = 4^{k-1}q^k$.

Caso tenhamos $a = 4q+1$, devemos mostrar que para todo q e t inteiros a seguinte igualdade é verificada

$$(4q_1+1)(4q_2+1)\cdots(4q_i+1) = 4t+1, i \geqslant 1 \ .$$

Para a demonstração faremos indução sobre i. Verificando para $i=1$ e $i=2$.

Para $i=1$ é fácil perceber que $4q_1+1 = 4t+1$, para $t = q_1$. Já com relação a $i=2$, temos

$$(4q_1+1)(4q_2+1) = 4 \times 4q_1q_2 + 2 \times 4q_1q_2 + 1 = 4(4q_1q_2 + 2q_1q_2) + 1 = 4t+1 \ ,$$

para $t = 4q_1q_2 + 2q_1q_2$, o que mostra a validade da sentença para $i=1$ e $i=2$.

Suponha que para todo $i \geqslant 1$ a sentença $(4q_1+1)(4q_2+1)\cdots(4q_i+1) = 4t+1$ seja válida. Devemos mostrar que $(4q_1+1)(4q_2+1)\cdots(4q_i+1)(4q_{i+1}+1) = 4t+1$.

Pela hipótese de indução temos que $(4q_1+1)(4q_2+1)\cdots(4q_i+1)(4q_{i+1}+1) = (4t+1)$, então:

$$\begin{array}{rcl} & (4q_1+1)(4q_2+1)\cdots(4q_i+1)(4q_{i+1}+1) & = (4t+1)(4q_{i+1}+1) \\ = & 4\times 4tq_{i+1}+4t+4q_{i+1}+1 & = 4(4tq_{i+1}+t+q_{i+1})+1 \\ = & 4t+1 & \end{array}$$

para todo $t = 4tq_{i+1}+2tq_{i+1}$. Portanto a sentença é válida para qualquer $i \geqslant 1$. Fato que implica a validade, do caso particular $\underbrace{(4q+1)(4q+1)\cdots(4q+1)}_{k \text{ fatores}} = 4t+1$.

Desse modo, concluimos que toda potência com expoente da forma $2k$, tem como resultado um número inteiro da forma $4q$ ou $4q+1$, como pela Equação 2.1, todo R_n é da forma $4q+3$, então nenhuma R_n é resultado de uma potência com o expotente da forma $2k$. □

Exemplo 26. Note que $R_3 = 111 = 3\times 37$, $R_9 = 1111111111 = 3^2\times 37\times 3336677$, este fato pode ser generalizado pela proposição a seguir:

Proposição 2.38. Para todo $k \in \mathbb{N}$, temos 3^k divide R_{3^k}.

Demonstração. Vamos mostrar essa proposição por indução em k. É fácil constatar que a afirmação é verdadeira para $k = 1$, pois, $R_3 = 111 = 3\times 27$, ou seja, $3 \mid R_3$.

Suponha que $k \geq 1$ a senteça que $3^k \mid R_{3^k}$ seja válida. Devemos mostrar a validade para $k+1$.

Como 3^k divide R_{3^k}, então existe um $q \in \mathbb{N}$ tal que, pela Proposição 2.35 obtemos $R_{3^k} = \dfrac{10^{3^k}-1}{9} = 3^k q$, que acarreta em $10^{3^k} = 3^{k+2}q+1$. Note que:

$$\begin{array}{rcl} R_{3^{k+1}} = & \dfrac{10^{3^{k+1}}-1}{9} & = \dfrac{\left(10^{3^k}\right)^3-1}{9} \\ = & \dfrac{(3^{k+2}q+1)^3}{9} & = \dfrac{3^{3k+6}q^3+3^{2k+5}q^2+3^{k+3}q}{9} \\ = & \dfrac{3^{k+1}(3^{2k+5}q^3+3^{k+4}q^2+3^2q)}{9} & = 3^{k+1}(3^{2k+3}q^3+3^{k+2}q^2+q)\ . \end{array}$$

Portanto múltiplo de 3^{k+1}, o que mostra a validade para todo inteiro k. □

Exemplo 27. Note que $3 \mid R_3$, isso pois $R_3 = 111 = 3\times 37$, note também que $7 \mid R_6$, visto que $R_6 = 111111 = 3\times 7\times 11\times 13\times 37$, este fato nos faz pensar em:

Proposição 2.39. Seja p um número primo, com $p \neq 2$ e $p \neq 5$. Então p divide R_n para algum n.

Demonstração. Para verificarmos a validade dessa proposição, temos dois casos a considerar. Primeiro se $p = 3$, então pela Proposição e ao observarmos a Tabela 1 que $R_3 = 111$ é múltiplo de 3.

Caso tenhamos $p > 5$, considere um número $a = \underbrace{111...11}_{p-1 \text{algarismos}}$ pela Proposição 2.35 temos que a é igual $R_{p-1} = \dfrac{10^{p-1}-1}{9}$, assim como $(p, 10) = 1$, pelo pequeno teorema de Fermat, Proposição 2.25, temos $10^{p-1} \equiv 1 \mod p$, que acarreta em $10^{p-1} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \mod p$, daí segue que $\dfrac{10^{p-1}-1}{9} \equiv 0 \mod p$, portanto, divisível por p. $\square$

3 APRENDER A RESOLVER PROBLEMAS

Como ferramenta de obtenção de dados para a fundamentação deste trabalho propomos uma oficina de estudos matemáticos, cuja a intenção é propor uma coleção de problemas relacionados aos *números repunits* e utilizar a metodologia da resolução de problemas, para o processo de resolução de tais questões. Nosso propósito é oferecer uma lista de problemas com diversas técnicas de resolução, com o objetivo que ao fim da exploração de cada situação o estudante consiga investigar, descobrir, conjecturar e validar propriedades e conceitos sobre os números *repunits*. As questões aplicadas serão classificadas de acordo com as ideias do educador e matemático Dante (2003), em relação as etapas para a resolução de cada situação foram consideradas as fases para a resolução de um problema estabelecidas por Polya (2003). Para tanto, essa proposta de oficina foi dividida em dois grupos de problemas, a saber, *Problemas introdutórios*: que tem por objetivo introduzir e recordar alguns conceitos aritméticos associados aos números inteiros, além de definirmos alguns conceitos acerca dos *números repunits* e *Problemas exploratórios*, cujo o objetivo é aplicar os conceitos e as propriedades aritméticas dos números *repunits* na resolução de problemas. Portanto, a intenção com esta ofina é utilizar a resolução de problemas citadas por Dante (2003), Echeverría e Pozo (1998), Onuchic (1999) e Polya (2003) entre outros autores, como metodologia para o processo de ensino dos conceitos associados aos *números repunits*, para isso pensamos a resolução de problemas em duas vertentes, a primeira Matemática para aprender a resolver problemas e a segunda Resolução de problemas para aprender Matemática.

O público alvo desta oficina são estudantes a partir do 7^{o} ano, visto que de acordo com Brasil (2018) nessa fase da vida escolar os conceitos relativos a divisibilidade de números inteiros já estão sistematizados pelos estudantes, além de serem apresentados aos conceitos e propriedades referentes aos números inteiros. O desenvolvimento da oficina consiste na aplicação de questões, cuja a resolução envolvem conceitos correlacionados aos números *repunits*, assim o objetivo com esta oficina é desenvolver as habilidades acerca de propriedades aritméticas e aplicá-las a resolução de novos problemas, ou seja, desenvolver conceitos que possam servir de ferramenta para a resolução de outras situações que exigem um pensar matemático. Também visamos com essa oficina mostrar aos professores de matemática uma estratégia de ensino pautada na resolução de problemas, que visa desenvolver nos estudantes a capacidade de apreenderem de forma ativa contemplando as competências citadas pelos documentos oficiais da educação brasileira.

3.1 PROBLEMAS INTRODUTÓRIOS

Neste rol de problemas exploraremos as aplicações de distintos conceitos e propriedades matemáticas. A resolução de tais questões não exige um conhecimento matemático superior ao programa escolar e sua intecionalidade é fazer com que os estudantes recordem alguns conceitos previamente validados. Assim sendo, iniciaremos com o seguinte problema.

Problema 3.1. Quantos números são mútiplos comuns de 3 e 7 compreendidos entre 2000 e 3000?

De acordo com a classificação sobre os tipos de problemas, o Problema 3.1 é tido como problema padrão, porque sua resolução depende exclusivamente da aplicação de algoritmo previamente estabelecido o algoritmo de Euclides para a divisão de números inteiros.

Uma Proposta de Resolução:

De acordo com as fases para a resolução de um problema, alguns questionamentos surgem com a intenção de fazer com que o estudante conceba alguns elementos essenciais de um problema:

Qual a incógnita do problema?, ou seja, o que devemos encontrar? Essa questão tem por finalidade fazer com que o sujeito identifique a incógnita presente no problema, ou seja, identifique o que o problema exige que ele faça. Assim precisamos determinar qual a quantidade de múltiplos comuns de 3 e 7 que estão compreendidos entre os números 2000 e 3000.

Qual é a condicionante? Essa indagação visa que o estudante tenha a percepção dos fatos que podem exercer influência sobre a incógnita do problema. A condicionante nesse caso específico é, 3 e 7 são números primos então seus múltiplos comuns são todos os múltiplos de 21.

Quais informações possuímos sobre os múltiplos de 21 que estão entre 2000 e 3000? Essa questão tem por propósito que os estudantes estabeleçam um elo entre a condicionante e a incógnita envolvida no problema. Sabemos pelo algoritmo de Euclides que $2000 = 95 \times 21 + 5$ que acarreta que o primeiro múltiplo de 21 no intervalo considerado é $2016 = 96 \times 21$, também sabemos pelo algoritmo de Euclides que $3000 = 142 \times 21 + 18$ fato que acarreta em $2982 = 142 \times 21$ ser o último números múltiplo de 21 no intervalo dado. Listemos os múltiplos de 21 no intervalo dado:

$$2016 = (95+1) \times 21, 2037 = (95+2) \times 21, 2058 = (95+3) \times 21, \cdots, 2982 = (95+47) \times 21.$$

Portanto podemos concluir que existirão 47 múltiplos comuns de 3 e 7 no intervalo entre 2000 e 3000. ■

Problema 3.2.

(a) Quantos divisores positivos possui o número 5400?

(b) Quantos deles são ímpares?

De acordo com a classificação de problemas, o Problema 3.2 se enquadra como *problema-padrão*, pois sua resolução depende exclusivamente da aplicação de um algoritmo previamente estudado, o algoritmo da decomposição em fatores primos.

Uma Proposta de Resolução:

De acordo com as fases de resolução de problemas, surgem alguns questionamentos, os quais tem por objetivo fazer com que o estudante perceba os elementos básicos do problema. Para o item **(a)** surgem as seguites questões:

Qual a nossa incógnita?, ou seja, *O que devemos determinar?* Esse questionamento visa que o estudante perceba qual o objetivo do problema, isto é, qual a exigência da situação. Referente ao Problema 3.2, precisamos encontrar a quantidade de divisores do número natural 5400.

Qual a condicionante? Essa pergunta tem por objetivo aguçar no estudante fatos que podem interferir na incógnita. Na situação abordada, os condicionantes são os divisores de 5400.

Quais informações possuímos sobre o número natural 5400? O objetivo dessa questão é fazer com que o estudante inter-relacione os dados da condicionante e a incógnita. Sabemos pelos critérios de divisibilidade que 5400 é múltiplo de 2, pois é par; múltiplo de 3, pois a soma de seus algarismos é um número múltiplo de 3; múltiplo de 5, pois termina em zero, além de que pelo TFA, Proposição 2.23, Temos $5400 = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$.

Quais informações possuímos sobre a quantidade de divisores de um número natural? Sabemos que a quantidade de divisores de um número n é dada por $\mathbf{Q(n)} = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_i+1)$, sendo $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_i^{\alpha_i}$ a decomposição de n em fatores primos e α_1, α_2, $\cdots$, α_i são os expoentes dos fatores primos de n. Sendo assim o a quantidade de divisores de 5400 será $Q(5400) = (3+1)(3+1)(2+1) = 48$ divisores.

Para o item **(b)** brotam as seguintes inquietações:

Qual nossa incógnita? ou seja, O que precisamos encontrar? esse questionamento tem por intenção que o estudante perceba todas as exigências envoltas no problema, ou seja, que ele interprete o que o problema exige. Precisamos identificar quantos divisores de 5400 são ímpares.

Qual a condicionante? Tal questionamente tem como objetivo fazer com que o estudante tenha a percepção sobre quais fatos podem influenciar a incógnita. Portanto, a condicionane nesse caso é eliminar os múltiplos de 2 da quantidade de divisores de 5400.

Quais informações possuímos sobre o número natural 5400? A ideia dessa questão é fazer com que os estudantes determine uma relação entre a incógnita do problema e sua condicionante . Pelo item **(a)** e pelo TFA, Proposição 2.23, sabemos que $540 = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$, como estamos interessandos na quantidade de divisores ímpares devemos ignorar o fator 2 da decomposição de 5400.

Quais informações possuímos sobre a quantidade de divisores de um número natural? Sabemos pelo item **(a)** que a quantidade de divisores de um número n é dada por $\mathbf{Q(n)} = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_i+1)$, sendo $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_i^{\alpha_i}$ a decomposição de n em fatores primos e α_1, α_2, $\cdots$, α_i são os expoentes dos fatores primos de n. Assim como não devemos considerar o fator 2, temos que a quantidade de divisores ímpares de 5400 é $Q_I(5400) = (3+1)(2+1) = 12$ divisores. ■

Problema 3.3. Encontre os valores de a e b para que o número $50a2b$ seja divisível por 15.

Segundo as definições apresentadas sobre a classificação dos problemas, o Problema 3.3 é um *problema Heurístico*, uma vez que os elementos necessários para sua resolução não estão inclusos em seu enunciado , exigindo que o estudante elabore uma estratégia que pode levá-lo ao resultado pedido.

Uma Proposta de Resolução:

De acordo com as definições das fases para resolução de problemas, emergem algumas questões, cuja intuito é provocar que o estudante note os elementos substanciais do problema, tais como:

Qual a nossa incógnita? ou seja, O que precisamos determinar? Tal indagação, tem como intuito fazer com que o estudante identifique a incógnita do problema, que nesta situação é determinar quais os valores dos algarismos a e b para que o número $50a2b$ seja divisível por 15.

Qual a condicionante? Essa questão, tem por propósito fazer com que o estudante constate quais fatores podem exercer influência sobre a incógnita. Que no Problema 3.3 a condicionante é que como a e b são algarismo do sistema posicional decimal então pertencem ao conjunto $A = \{0,1,2,3,\cdots,9\}$, ou seja $0 \leqslant a, b < 10$.

Quais informações que possuímos sobre os números divisíveis por 15? Essa questão tem com intenção fazer com que o aluno seja capaz de estabelecer uma ligação entre a incógnita e a condicionante do problema. Sabemos que os números divisíveis por 15, são múltiplos de 3 e também de 5, visto que $15 = 5 \times 3$.

Quais as informações possuímos sobre os números múltiplos de 3 e 5? O critério de divisibilidade por 5, Proposição 2.18 garante que um número natural é múltiplo de 5, todas às vezes que esse número terminar em 0 (zero) ou 5, já o critério de divisibilidade por 3, Proposição 2.16 garante que um número natural é múltiplo de 3, quando a soma dos algarismos que compõe esse número é um múltiplo de 3. Assim, pelo critério de divisibilidade por 5, podemos concluir que $b = 0$ ou $b = 5$, fato que contempla o caso que o número $50a2b$ seja divisível por 5. Para encontrarmos a resolução final precisamos considerar dois casos:

1^{o} caso: Quando $b = 0$	2^{o} caso: Quando $b = 5$
$5+0+a+2+0 = 9$, então $a = 2$	$5+0+a+2+5 = 12$, então $a = 0$
$5+0+a+2+0 = 12$, então $a = 5$	$5+0+a+2+5 = 15$, então $a = 3$
$5+0+a+2+0 = 15$, então $a = 8$	$5+0+a+2+5 = 18$, então $a = 6$
	$5+0+a+2+5 = 21$, então $a = 9$

Portanto os possíveis valores assumidos por a quando $b = 0$ são $a = 2, 5$, e 8, já para $b = 5$ temos $a = 0, 3, 6$ ou 9. ■

Problema 3.4. Patrícia possui 48 flores amarelas, 60 flores rosas e 72 flores vermelhas e precisa fazer arranjos de maneira que todos os arranjos tenham a mesma quantidade de flores amarelas, a mesma quantidade de flores vermelhas e a mesma quantidade de flores rosas. Quantas flores cada arranjo, possuirá se a quantidade de arranjos deve ser a maior possível e todas as flores sejam utilizadas?

De acordo com a classificação de problemas apresentada, o Problema 3.4 é denominado como *problema de aplicação*, isso pois faz uso dos conceitos matemáticos para a descrição de uma situação rotineira.

Uma Proposta de Resolução:

Tendo como referência as etapas para resolução de um problema, emergem algumas indagações, as quais o objetivo é fazer com que o estudante perceba conceitos fundamentais no problema.

Qual a nossa incógnita? ou seja, O que devemos encontrar? Esse questionamento tem por finalidade aguçar no estudante a percepção da incógnita do problema, ou seja, fazer com que identifique o que deve ser efetuado no problema, que referente ao Problema 3.4 devemos encontrar o total de flores em cada arranjo.

Qual a condicionante? Tal pergunta tem por objetivo fazer com que o estudante perceba quais fatores podem interferir na incógnita, neste caso específico posuímos duas condicionantes, a primeira é que a quantidade de arranjos deve ser a maior possível, já a segunda é que todas as flores devem ser utilizadas.

Quais informações possuímos sobre os números naturais 48, 60 e 72? Essa questão visa que o estudante estabeleça um vínculo entre a condicionante e a incógnita. Sabemos pelo processo de divisão sucessivas, algoritmo de Euclides que o máximo divisor comum de 48, 60 e 72 será:

$$\begin{array}{c|c|c} & 1 & 5 \\ \hline 72 & 60 & 12 \\ \hline & 12 & 0 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c|c} & 4 \\ \hline 48 & 12 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Logo o $(48, 60, 72) = 12$ e desse modo podemos concluir que o número máximo de arranjos será 12, e teremos 4 flores amarelas, 5 flores rosas e 6 flores vermelhas em cada arranjo. ∎

Problema 3.5. Dados 8 números inteiros mostre que pelo menos dois deixam o mesmo resto na divisão 7.

De acordo com a classificação de um problema citada, o problema 3.5 é um problema *Heurístico*, isso pois, as informações necessárias para sua resolução não estão dispostas no seu enunciado, exigindo assim que o estudante formule uma estratégia que possa levá-lo a resolução.

Uma Proposta de Resolução:

A partir das fases definidas para a resolução de um problema, surgem algumas questões cuja a iniciativa é fazer com que o estudante tenha a percepção dos elementos fundamentais na resolução de um problema, como:

Qual é a incógnita do problema? Ou seja, o que devemos mostrar? Esta pergunta possui o objetivo de fazer o estudante reconheça a incógnita do problema, ou seja, perceber o que é preciso efetuar na situação proposta. Neste caso precisamos mostrar que dado um conjunto de 8 números existe ao menos dois deles que deixam o mesmo resto ao serem divididos 7.

Qual a condicionante? A ideia dessa pergunta é fazer com que o estudante perceba quais os fatos que podem influenciar a incógnita. No referido problema a condicionante são os possíveis restos na divisão por 7.

Quais informações possuímos sobre o restos na divisão por 7? O intuito dessa questão é que o estudante estabeleça um elo entre a incógnita do problema e a condicionante. Assim, o algoritmo de Euclides para a divisão de números inteiros garante que na divisão por 7 existem apenas sete possibilidades de resto, sendo essa possibilidades o conjunto $r_7 = \{0, 1, 2, \cdots, 6\}$, ou seja, $0 \leq r < 7$.

Portanto, ao considerarmos os 8 números como Pombos e os restos na divisão por 7 como casas, esse problema possui uma configuração de distribuição, então o Princípio das Casas dos Pombos, Proposição 2.26 que ao menos dois números possuirão o mesmo resto quando dividios por 7. ∎

Problema 3.6.

(a) Pedro a escreveu seguinte sequência numérica no quadro $1, 11, 111, 1111, 11111, ...$ é possível que o número 333333 pertença a essa sequência? Qual o 7^{o} termo nessa sequência de números?

(b) Dertermine uma expressão que forneça todos os termos da sequência escrita por Pedro.

(c) Construa uma tabela com os 12 primeiros termos da sequência esrita por Pedro e fatore estes números.

De acordo com a classificação dos tipos de problema, o problema 3.6 é tido no seu item **(a)** como *problema de quebra-cabeça*, isso porque sua resolução depende da percepção do padrão de formação da sequência pelo estudante, já no seu item **(b)** é classificado como *problema Heurístico*, uma vez que os dados fundamentais para sua resolução não estão inseridos em seu enunciado, exigindo do estudante uma estrtégia de resolução. Enquanto que no item **(c)** é um *exercício de algoritmo*, isso pois, a resolução desta situação depende da aplicação de algoritmo relacionado aos conceitos básicos dos números naturais.

Uma Proposta de Resolução:

Tomando como referência as fases para resolução de um problema, emergem alguns questionamentos, cuja finalidade é fazer com que o estudante identifique aspectos elementares do problema, para o item **(a)** surgem os seguintes questionamentos:

Quais as incógnitas do problema? Ou seja, O que devemos mostrar ou encontrar? Essa questão objetiva que o estudante perceba qual finalidade do problema, ou seja, o que a situação solicita que seja efetuado. Relativo ao item **(a)** devemos analisar se o número 333333 pertence a sequência numérica escrita por Pedro, além de determinarmos o 7^{o} termo dessa sequência.

Qual a condicionante do problema? Essa indagação tem por intuito fazer o estudante inferir sobre os fatos que influenciam a incógnita, no caso do problema a condicionante é se o número pertence ou não a sequência considerada.

Quais informações sabemos sobre a sequência numérica? Esse questionamento tem por objetivo induzir que o estudante relacione incógnita e condicionante. Portanto, ao observarmos os termos da sequência notamos que $R_1 = 1,\ R_2 = 11,\ R_3 = 111$, ou seja, percebemos que a sequência é formada apenas pela justaposição do algarismo 1, essa configuração recebe o nome de *repunit* sendo representado por R_n, além de que a quantidade de algarismo de cada termo depende da ordem. De acordo com as informações levantadas podemos concluir que o número 333333 não pertence a sequência escrita por Pedro e também fica fácil ver que o $R_7 = 1111111$.

Para o item **(b)**, surgem as seguintes questões:

Qual a incógnita? Ou seja, O que devemos determinar? O questionamento visa que o estudante reconheça qual a incógnita envolvida no problema. Neste caso, devemos encontrar uma expressão que determine todos os termos da sequência descrita por Pedro. Neste caso temos $R_n = \underbrace{1\cdots1}_{n}$, com n justaposições de unidades.

Qual a condicionante? Essa indagação tem por objetivo fazer com que o estudante constate quais os fatos podem influenciar a incógnita. Neste caso, a condicionante é que os números encontrados obedeçam o padrão de formação da sequência descrito no item **(a)**.

O que podemos perceber a partir da observação da sequência? Essa questão tem como propósito fazer com que o aluno conceba uma conexão entre incógnita e a condicionante. Podemos perceber, que:

$$
\begin{aligned}
R_1 = 1 &= \frac{9}{9} &&= \frac{10-1}{9} \\
R_2 = 11 &= \frac{99}{9} &&= \frac{100-1}{9} = \frac{10^2-1}{9} \\
R_3 = 111 &= \frac{999}{9} &&= \frac{1000-1}{9} = \frac{10^3-1}{9} \\
R_4 = 1111 &= \frac{9999}{9} &&= \frac{10000-1}{9} = \frac{10^4-1}{9} \\
R_5 = 11111 &= \frac{99999}{9} &&= \frac{100000-1}{9} = \frac{10^5-1}{9} \\
&\cdots &&\cdots
\end{aligned}
$$

Assim observando o padrão podemos concluir, que a posição de cada termo determina o expoente da potência de base 10, portanto

$$R_n = \frac{10^n - 1}{9}.$$

Para o item **(c)**, brotam a seguintes questões

Qual a incógnita? Ou seja, O que devemos efetuar? Essa questão visa que o estudante perceba a intencionalidade do problema, ou seja, o que ele deve fazer na situação. No referido item, devemos penas construir uma tabela para os 12 primeiros termos da sequência descrita por Pedro, para a exploração dessa situação utilizamos o site Números (2019).

Qual a condicionante? Essa questão tem por intenção fazer o estudante notar quais são os fatos que exercem influência sobre a incógnita. Neste caso, a condicionante está relacionada com o fato de que cada termo seja um número primo ou composto.

Dessa forma, com o auxílio da Fatoring Calculator, construímos a Tabela 3, de acordo com os 12 primeiros termos da sequência escrita por Pedro.

Tabela 3 – Fatoração dos termos da Sequência do Problema 3.6

n	R_n	Fatoração
2	11	Primo
3	111	3×37
4	1111	11×101
5	11111	41×271
6	111111	$3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$
7	1111111	239×4649
8	111111111	$11 \times 73 \times 101 \times 137$
9	1111111111	$3^2 \times 37 \times 3336677$
10	11111111111	$11 \times 41 \times 271 \times 9091$
11	111111111111	21649×513239
12	1111111111111	$3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 101 \times 9901$

Fonte: (Próprio autor)

■

3.2 PROBLEMAS EXPLORATÓRIOS

No problema 3.6 apresentamos ao aluno a definição e uma expressão ou recorrência para os números *repunits*. Nesta seção vamos explorar algumas propriedades adicionais associadas a essa classe numérica.

Problema 3.7 (OBMEP (2010))**.** Existe um número inteiro N tal que $2008 \times N = 222...2$?

Pela classificação de problemas apresentada, o problema 3.7 é dito um *Os exercícios de reconhecimento*, isso porque sua intencionalidade é que o estudante perceba, identifique ou relembre um conceito, uma definição, uma propriedade ou fato específico.

Uma Proposta de Resolução:

Segundo as fases para a resolução de problemas, surgem alguns questionamentos com o objetivo de que os estudantes identifiquem aspectos básicos de um problema, como:

Qual a incógnita do problema? O que devemos encontrar? Tal pergunta tem como intenção fazer com que o estudante determine a incógnita do problema, em outras palavras, perceba o que o problema pede que seja efetuado. Assim, no Problema 3.7 devemos encontrar um número natural N que ao ser multiplicado por 2008 tem como resultado $22\cdots22$.

Qual a condicionante? O propósito dessa questão é que os estudantes percebam quais os fatos ou informações podem influenciar na incógnita do problema. Assim, percebemos que a condicionante nessa situação é a existência de N.

Quais informações podemos extrair do problema? A ideia dessa interrogação é que o estudante possa retirar do problema relações que possam o auxiliar na sua resolução. Percebemos a relação inversa entre a multiplicação e divisão e que se N existi, tem a forma de:

$$\begin{aligned} N &= \frac{22\cdots22}{2008} \\ &= \frac{2(11\cdots11)}{2\times1004} \\ &= \frac{11\cdots11}{1004} \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que N não pode ser inteiro, por ser determinado pelo quociente de um número impar por um número par. ∎

Problema 3.8 (OBMEP (2008))**.** Roberto quer escrever o número $R_6 = 111111$ como um produto de dois números, nenhum deles terminado em 1.

(a) Isso é possível ? Por quê?

(b) Quais são os pares de números que Roberto pode escrever R_6? Quantas possibilidades de escrita possuímos?

De acordo com as características apresentadas o Problema 3.8, é classificado com *problema de aplicação*, pois as técnicas, procedimentos e propriedades matemáticas foram utilizados para descrever uma situação cotidiana.

Uma Proposta de Resolução:

De acordo com as fases para a resolução de problemas, aparecem alguns questionamentos cuja intenção é fazer com que o estudante identifique os elementos básicos de um problema, como:

Para o item **(a)**, surgem a seguintes inquietações:

Qual a nossa incógnita? Ou seja o que devemos mostrar? Esse questionamento tem por propósito fazer com que o estudante determine a incógnita do problema, quer dizer, determinar aquilo que o problema pede para ser feito. No referido item devemos mostrar se $R_6 = 111111$ pode ser escrito como um produto entre dois números não terminados em 1.

Essa é a nossa única incógnita ? Caso não seja, qual seria a outra? Essa questão visa ampliar a percepção do estudante para a existência de outras incógnitas, além de mostrar que R_6 pode ser escrito com o produto de dois números, posteriormente devemos justificar essa ocorrência.

Qual a condicionante? Essa questão tem como objetivo fazer com que o estudante indique os fatos que exercem influência sobre a incógnita. Assim, no caso do item **(c)**, devemos encontrar dois números naturais não terminados 1, cujo o produto entre eles seja igual a R_6.

Quais informações possuímos sobre $R_6 = 111111$*?* Essa questão tem por objetivo fazer com que o estudante estabeleça relações sobre a incógnita. Sabemos de acordo com o critério de divisibilidade por 3, Proposição 2.16 e pela Proposição 2.30 que R_6 é múltiplo de 3. Então podemos concluir que R_6 pode ser escrito como um produto de dois números não terminados em 1, visto que o critério de divisibilidade por 3 e a Proposição 2.30 respaldam que R_6 é múltiplo de 3, logo, $R_6 = 3 \times 37037$.

Para o item **(b)**, Emergem os seguites questionamentos:

Qual a incógnita do problema? Ou seja, O que devemos determinar? Essa questão possui o objetivo de fazer com que o estudante reconheça a incógnita do problema, ou seja, identifique o que o problema pede para fazer. No referido item devemos encontrar todos os pares de números em que o produto entre eles seja igual a R_6, além de encontramos quantas possibilidades de escrita possuímos.

Podemos representar a nossa incógnita através de um símbolo A intenção dessa pergunta é que o estudante consiga representar as informações da incógnita através de um ou mais símbolos. Assim, chamaremos esse par de números naturais de a e b.

Qual a condicionante? Essa pergunta tem por propósito que o estudante tenha a percepção de quais informações podem influenciar a incógnita. A condicionante nessa situação é o fato de que a ou b não podem terminar em 1, assim pelo item b), temos que evitar os fatores 11, 21, 11, 21, 91, 111 e o 481. *Quais as informações possuímos sobre* $R_6 = 111111$*?* O propósito por trás dessa questão é que o estudante faça o levantamento de informações sobre a incógnita. Dessa forma, a Tabela 3 e a Proposição 2.23 o TFA garantem que $R_6 = 111111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$, como a e b devem ser diferentes de 11, 21, 11, 21, 91, 111 e o 481, possuímos os seguintes pares de números:

$$\begin{array}{ll} a \times b = 3 \times 37037 & a \times b = 39 \times 2849 \\ a \times b = 7 \times 15873 & a \times b = 77 \times 1443 \\ a \times b = 13 \times 8547 & a \times b = 143 \times 777 \\ a \times b = 33 \times 3367 & a \times b = 259 \times 429 \\ a \times b = 37 \times 3003 & a \times b = 407 \times 273 \end{array}$$

portanto possuímos 5 possibilidades de escrita de R_6 como o produto de dois números não terminados em 1. ∎

Problema 3.9 (OBMEP (2013))**.** Considere a lista de números a_1, a_2,..., onde $a_n = \underbrace{1111...1}_{3^n \text{ algarismos}}$, ou seja, $a_1 = \underbrace{111}_{3 \text{ vezes}}$, $a_2 = \underbrace{111...11}_{9 \text{ vezes}}$, $a_3 = \underbrace{111...11}_{27 \text{ vezes}}$, assim por diante.

(a) Mostre que a_1 é múltiplo de 3 mas não de 9.

(b) Mostre que a_2 é múltiplo de 9 mas não de 27.

(c) Mostre que a_3 é múltiplo de 27 mas não 81.

Em consonância com as definições de problema apresentada, o problema 3.9 é um *Problema-processo ou heurístico*, isso pois, os dados necessário para sua resolução não são expressos no seu enunciado , exigindo que o estudante construa a sua resolução a partir de uma estratégia.

Uma Proposta de Resolução:

A partir das fases estabelecidas para a resolução de um problema, nascem algumas interrogações com o objetivo de auxiliar os estudantes na percepção de elementos fundamentais na resolução, assim temos:

Para o item **(a)**:

Qual a incógnita do problema? Ou seja, O que devemos mostrar? Essa indagação traz consigo o objetivo de que o aluno perceba qual a incógnita do problema, ou seja, perceba o que deve ser realizado no problema, que no caso refrente ao problema 3.9 devemos mostrar que $a_1 = 111$ é múltiplo de 3 mas não de 9.

Qual a condicionante? Essa pergunta tem a finalidade que o estudante enxergue quais fatos podem influenciar na incógnita, que nesse caso é que a_1 tem que ser múltiplo de 3, ou seja, existe um natural q de tal forma que $a_1 = 3 \times q$.

Quais informações possuímos sobre a_1? Essa indagação tem como plano de fundo que o estudante estabeleça uma conexão entre a incógnita e a condicionante do problema. Sendo assim, sabemos pelo critério de divisibilidade por 3 e pela Proposição 2.30 que a_1 é múltiplo de 3, a Tabela 3 mostra que $a_1 = 111 = 3 \times 37$. Já o critério de divisibilidade por 9 garante que a_1 não é múltiplo de 9, isso porque a soma de seus algarismo não é um número múltiplo de 9. Portanto concluímos que $a_1 = 111$ é múltiplo 3 mas não de 9.

Para o **(b)**, surgem as seguintes questões:

Qual a incógnita do problema? O que devemos mostrar ? Tal questão tem como ponto fundamental fazer que o estudante perceba qual a incógnita relacionada ao problema, ou seja, percebe o que deve ser mostrado ou encontrado. Que nesse caso é mostra que a_2 é múltiplo de 9 mas não de 27.

Qual a condicionante? Essa pergunta tem a finalidade que o estudante enxergue quais fatos podem influenciar na incógnita, que nesse caso é que a_2 tem que ser múltiplo de 9, ou seja, existe um natural q de tal forma que $a_2 = 9 \times q$.

Quais informações possuímos sobre a_2? Essa questão surge com o intuito de fazer com que o estudante estabeleça um laço entre incógnita e condicionante. Sabemos pelo critério de divisibilidade por 9 que a_2 é múltiplo de 9 e a Tabela 3 mostra que $a_2 = 111111111 = 3^2 \times 37 \times 3336677$.

Sendo assim podemos concluir pelo critério de divisibilidade por 9 que a_2 é múltiplo de 9, podemos perceber também que a_2 não é múltiplo de 27, pois, o fator 27 não aparece em sua decomposição.

Para o item **(c)**, surgem a seguintes questões:

Qual a incógnita do problema? Ou seja, O que devemos mostrar? Essa indagação traz consigo o objetivo de que o aluno perceba qual a incógnita do problema, ou seja, perceba o que deve ser realizado no problema, que no caso refrente ao problema 3.9 devemos mostrar que $a_3 = \underbrace{111\cdots11}_{27\,\text{algarismos}}$ é múltiplo de 27 mas não de 9.

Qual a condicionante? Essa pergunta tem a finalidade que o estudante enxergue quais fatos podem influenciar na incógnita, que nesse caso é que a_3 tem que ser múltiplo de 27, ou seja, existe um natural q de tal forma que $a_3 = 27 \times q$.

Quais informações possuímos sobre a_13? Essa indagação tem como plano de fundo que o estudante estabeleça uma conexão entre a incógnita e a condicionante do problema. Sendo uilizando Números (2019) e o TFA Proposição 2.23 temos que $a_3 = \underbrace{111\cdots11}_{27\,\text{algarismos}} = 3^3 \times 37 \times 757 \times 333667 \times 440334654777631$.

Desse modo podemos concluir uqe $a_3 = 27(37 \times 757 \times 333667 \times 440334654777631) = 27 \times q$, ou seja, a_3 é múltiplo de 27, mas não é múltiplo de 81 uma vez que 81 não faz parte da fatoração de a_3. ■

Problema 3.10 (Carvalho e Costa (2015))**.** Seja R_n um número natural formado (na base 10) por n algarismos todos iguais a 1, para algum n natural e $n \geq 1$, ou seja, $R_n = \underbrace{11...1}_{n\,\text{vezes}}$, por exemplo, $R_1 = 1$, $R_2 = 11$ e $R_3 = 111$ e sucesivamete.

(a) Qual o resto da divisão de R_{2019} por 7?

(b) Quais são os números do tipo R_n são divisores de R_{2019} ?

Conforme a classificação de problema, o Problema 3.10 é dito *Heurístico*, uma vez que as informações necessárias para sua resolução não constam em seu enunciado, exigindo que o estudante estabeleça uma estratégia de solução.

Uma Proposta de Resolução:

Tomando como referência as fases para a resolução de um problema discutidas anteriormente, nascem algumas inquietações com a finalidade de fazer com que os estudantes enxerguem os elementos fundamentais para a resolução de um problema.

Para o item **(a)**

Qual a incógnita do problema? O que precisamos encontrar? A função dessa pergunta é que o estudante identifique qual a incógnita do problema, em outras palavras, determinar aquilo que precisa ser efetuado no problema. Que no item a) precisamos encontrar qual o resto da divisão de R_{2019} por 7.

Qual a condicionante? O intuito dessa questão é que o estudante perceba quais fatos podem influenciar na incógnita. Sabemos pelo algoritmo de Euclides que para a divisão de números inteiros garante que na divisão por 7, existem apenas sete possibilidades de resto, sendo essa possibilidades o conjunto $r_7 = \{0, 1, 2, \cdots, 6\}$, ou seja, $0 \leq r < 7$.

Quais informações possuímos sobre o restos da divisão de R_n por 7? Essa questão tem como ideias que o estudante realize uma conexão entre incógnita e condicionante do problema. Temos pelo algoritmo da divisão euclidiana que:

$$
\begin{aligned}
R_1 = &\quad 1 = 0 \times 7 + 1 \\
R_2 = &\quad 11 = 1 \times 7 + 4 \\
R_3 = &\quad 111 = 15 \times 7 + 6 \\
R_4 = &\quad 1111 = 158 \times 7 + 5 \\
R_5 = &\quad 11111 = 1587 \times 7 + 2 \\
R_6 = &\quad 111111 = 15873 \times 7 + 0 \\
R_7 = &\quad 1111111 = 158730 \times 7 + 1 \\
R_8 = &\quad 11111111 = 1587301 \times 7 + 4 \\
R_9 = &\quad 111111111 = 15873015 \times 7 + 6 \\
&\quad \ldots
\end{aligned}
$$

Assim, os restos das divisões de R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, ... por 7 são respectivamente 1, 4, 6, 5, 2, 0, e essa repetição acontece em intervalos de amplitude 6. Ao observar o padrão de repetição dos restos, concluirmos que o R_{2019} por 7 é 6, visto que $2019 = 6 \times 336 + 3$.

Para o item **(b)** emergem a seguintes questões:

Qual a incógnita do problema? O que devemos encontrar? Essa pergunta visa que o estudante perceba qual a incógnita do problema, ou seja, perceber o que deve ser mostrado. Que no tocante, ao item **(b)**, devemos encontrar todos os R_n que são múltiplo de R_{2019}.

Qual a condicionante? Ao realizarmos essa pergunta desejamos que o estudante note quais os fatos podem influenciar na incógnita. Assim, em relação a item **(b)** devemos saber quais números que devemos dividir R_{2019} e encontrar resto zero.

Quais as informações que possuímos sobre R_{2018}? Esta questão tem como propósito de fazer o estudante interligar a condicionante e a incógnita. Sabemos pelo TFA, Proposição 2.23, temos que $2018 = 3 \times 673$, então podemos concluir usando a Proposição 2.30 que R_{2019} é múltiplo de R_3 e R_{673}. ∎

Problema 3.11. Determine o $mdc(\underbrace{11...1}_{100\,\text{vezes}}, \underbrace{11...1}_{60\,\text{vezes}})$.

Consonante com as definições de problema, o Problema 3.11 é um *exercício de reconhecimento*, visto que seu objetivo é fazer com que o estudantes identifique e relembre porpriedades relacionadas aos números inteiros e os *números repunits*.

Uma Proposta de Resolução:

Segundo as as fases estabelecidas para a resolução de problemas, surgem algumas questões com a intenção que o estudante tenha a precepção dos elementos fundamentais para a resolução do problema.

Quais as informações que possuímos sobre R_{100} e R_{60}? Esse questionamento tem por objetivo que o estudante reconheça informações relacionadas a incógnita. Sabemos pela Proposição 2.36 que $R_{100} = 10^{99} + 10^{98} + 10^{97} + \cdots + 10^3 + 10^2 + 10 + 1$ e $R_{60} = 10^{59} + 10^{58} + 10^{57} + \cdots + 10^3 + 10^2 + 10 + 1$

Dessa forma, pelo processo de divisão sucessivas, algoritmo de Euclides temos que o $mdc(R_{100}, R_{60})$. Será:

$$\begin{aligned}
R_{100} &= (10^{59} + 10^{58} + \cdots + 10 + 1) \times 10^{40} + 10^{39} + \cdots + 10^2 + 10 + 1 \\
R_{60} &= (10^{39} + 10^{38} + \cdots + 10 + 1) \times 10^{20} + 10^{19} + \cdots + 10^2 + 10 + 1 \\
R_{40} &= (10^{19} + 10^{18} + \cdots + 10 + 1) \times 10^{20} + 10^{19} + \cdots + 10^2 + 10 + 1
\end{aligned}$$

Das igualdades anteriores resulta que o o $mdc(R_{100}, R_{60}) = 10^{19} + \cdots + 10^2 + 10 + 1 = \underbrace{11\cdots1}_{20\,\text{algarismos}} = R_{20}$. ∎

Problema 3.12.

(a) Mostre que 37 divide R_{3k} para todo k natural.

(b) Mostre que 101 divide R_{4k} para todo k natural.

(c) Mostre que 41 divide R_{5k} para todo k natural.

Segundo as definições apresentadas o problema 3.12 é classificado como *problema-processo* ou *Heurístico*, pois os dados necessários para a sua resolução não estão contidos em seu enunciado, exigindo assim, uma estratégia de resolução, um plano embasado em conhecimentos anteriormente validados.

Uma Proposta de Resolução:

De acordo as fases para a resolução de um problema, surgem alguns questionamentos, cujo propósito é fazer o estudante perceba os elementos básicos do problema, tais como:

Para o item **(a)**, surgem as seguintes indagações:

Qual a nossa incógnita ? Ou seja, o que devemos mostrar? Essa indagação visa que o estudante reconheça qual a finalidade da questão, isto é, o que a situação exige que ele faça. Referente ao Problema 3.12, devemos mostrar que para todo k natural R_{3k} é múltiplo de 37.

Qual a condicionante ? Essa indagação tem por finalidade remeter o estudante a fatos que podem influenciar a incógnita. Na referida situação, a condicionante é que para todo k natural, R_k é múltiplo de 37.

Quais informações possuímos sobre o número natural 37? Essa questão tem por intuito fazer com que o estudante estabeleça uma relação entre a condicionante e a incógnita. Assim, percebemos que R_3 é múltiplo de 37, pois de acordo a Tabela 3 $R_3 = 111 = 3 \times 37$.

Quais informações possuímos de R_{3k}? Nesse questionamento o objetivo fazer com que o estudante reconheça e perceba alguma conexão entre os dados levantados e a incógnita. Sabemos que como $n = 3k$ é múltiplo de 3, então pela Proposição 2.30 temos que $R_{3k} = R_3 \times q$ com $q \in \mathbb{N}$,como $R_3 = 111 = 3 \times 37$, concluímos assim que $R_{3k} = R_3 \times q = 111 \times q = 3 \times 37 \times q = 37 \times (3q)$. Portanto múltiplo de 37 como queríamos mostrar.

Para o item **(b)**, surgem as seguintes perguntas:

Qual a nossa incógnita ? Ou seja, o que devemos mostrar? Tal questionamento tem por intenção que o estudante conheça a incógnita do problema, ou seja, consiga indicar aquilo que o problema pede que seja calculado. Neste quadro devemos mostrar que para todo k natural R_{4k} é múltiplo de 101.

Qual a condicionante ? Essa indagação tem como objetivo remeter o estudante a fatos que podem influenciar a incógnita. Na referida situação, a condicionante é que para todo k natural, R_k é múltiplo de 101.

Quais informações possuímos sobre o 101? Essa indagação tem o intuito de que o estudante descubra quais os dados que podem interferir na incógnita. Nessa situação sabemos que R_4 é múltiplo de 101, pois de acordo a Tabela 3 $R_4 = 1111 = 11 \times 101$.

Quais informações possuímos de R_{4k}? Essa indagação tem por propósito o levantamento de dados sobre a incógnita. Sabemos que como $n = 4k$ é múltiplo de 4, então pela Proposição 2.30 temos que $R_{4k} = R_4 \times q$ com $q \in \mathbb{N}$, como $R_4 = 1111 = 11 \times 101$, concluímos assim que $R_{4k} = R_4 \times q = 1111 \times q = 11 \times 101 \times q = 101 \times (11q)$. Portanto múltiplo de 101 como queríamos mostrar.

Para o item **(c)**, surgem as seguintes questões:

Qual a nossa incógnita ? Ou seja, o que devemos mostrar? Essa inquietação tem por finalidade fazer com que o estudante note a incógnita do problema, isto é, aponte aquilo que o problema solicita que seja feito. Na condição do item **(c)** devemos mostrar que para todo k natural R_{5k} é múltiplo de 41.

Quais informações possuímos sobre 41? Esse questionamento tem por finalidade o levantamento de dados que podem influenciar na incógnita do problema. Sabemos que R_5 é múltiplo de 41, pois de acordo a Tabela 3 $R_5 = 11111 = 41 \times 271$.

Qual a condicionante ? Essa indagação tem como objetivo remeter o estudante a fatos que podem influenciar a incógnita. Na referida situação, a condicionante é que para todo k natural, R_k é múltiplo de 41.

Quais informações possuímos de R_{5k}? Essa pergunta visa que o estudante determine alguns dados sobre a incógnita. Diante dessa circunstância, sabemos que como $n = 5k$ é múltiplo de 5, então pela Proposição 2.30 temos que $R_{5k} = R_5 \times q$ com $q \in \mathbb{N}$, como $R_5 = 11111 = 41 \times 271$, concluímos assim que $R_{5k} = R_5 \times q = 11111 \times q = 41 \times 271 \times q = 41 \times (271q)$. Portanto múltiplo de 41 como queríamos mostrar. ■

Problema 3.13 (OBMEP (2018))**.** Considere os números $A = \underbrace{11...1}_{2n \text{ vezes}}$ e $B = \underbrace{44...4}_{n \text{ vezes}}$. Para todo n natural, verifique que $A+B+1$ é um quadrado perfeito e calcule sua raíz quadrada.

O Problema 3.13 é um *Problema-padrão* , visto que sua resolução depende exclusivamente da aplicação de um ou mais algoritmos previamente definido.

Uma Proposta de Resolução:

Em consonância com as fases para a resolução de um problema, nascem questões com a finalidade de fazer que o estudante identifique os elementos fundamentais do problema, como exemplo:

Qual a nossa incógnita A intenção desta questão é que o estudante indique qual a incógnita envolvida no problema, ou seja, fazer com que ele determine o que o problema pede para ser efetuado. No caso do Problema 3.13 devemos mostrar que $A+B+1$ é um quadrado perfeito e depois calcular sua raiz quadrada.

Qual a condicionante? O intuito desta questão é que o aluno note fatores que podem influenciar a incógnita. Neste caso, a condicionante é que os números a é um *número repunit* ou R_n e $b = 4 \times R_n$, cuja definição consta no Problema 3.6.

Quais informações possuímos sobre os números repunits? A finalidade é que o discente estabeleça uma relação entre incógnita e condicionante. Sabemos pelo Problema

3.6 que $R_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$, sendo assim, temos que $A = \dfrac{10^{2n} - 1}{9}$ e $B = 4 \times \dfrac{10^n - 1}{9}$, assim:

$$\begin{aligned} A+B+1 = & \quad \frac{10^{2n}-1}{9} + 4 \times \frac{10^n - 1}{9} + 1 \\ = & \quad \frac{10^{2n} - 1 + 4 \times 10^n - 4 + 9}{9} \\ = & \quad \frac{10^{2n} + 4 \times 10^n + 4}{9} \\ = & \quad \frac{(10^n + 2)(10^n + 2)}{9} \\ = & \quad \left(\frac{10^n + 2}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

Portanto $A+B+1$ é um quadrado perfeito, e sua raiz quadrada é $\dfrac{10^n + 2}{3}$ ∎

Problema 3.14. **(a)** Mostre que existe um múltiplo de 2019 formado apenas com os dígitos (algarismos) 0 e 1.

(b) Dado um número positivo a, mostre existe um mútiplo de a que se escreve apenas cos os algarismos 0 e 1.

Conforme as características apresentadas, o problema 3.14 é um *problema Heurístico*, visto que sua resolução depende de informações que não estão inseridas no seu enunciado, exigindo por parte do estudante a elaboração e execução de uma estratégia de resolução.

Uma Proposta de Resolução:

Considerando as fases da resolução de um problema, brotam algumas questões, cujo a ideia é fazer com que os estudantes tenham a percepção de alguns aspectos do problema.

Para o item **(a)** surgem a seguintes questões:

Qual a nossa incógnita? Ou seja, O que devemos mostrar? O plano por trás dessa indagação é fazer com que o estudante note a incógnita do problema, ou seja, fazer com que o estudante notar aquilo que deve ser realizado no problema. Assim devemos mostrar que 2019 possui um múltiplo no sistema de numeração decimal formado apenas pelos algarismos 1 e 0 (zero).

Qual a condicionante? A ideia desse questionamento é aguçar a percepção dos estudantes com relação a fatos que podem influenciar na incógnita. Logo, podemos notar que para um número ser múltiplo de 2019, esse número tem que ser divisível por 2019, ou seja, o resto da divisão por 2019 tem que ser zero.

Quais informações possuímos sobre os restos na divisão por 2019? O propósito desse questionamento é que os estudantes percebam uma relação entre incógnita e a condicionante do problema. Assim, pelo algoritmo da divisão euclidiana sabemos que na divisão por 2019 possuímos o seguinte conjunto de restos $r_{2019} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, 2018\}$, ou seja, possuímos 2019 possibilidades.

Você conhece algum problema que possui elementos semelhantes a esse? Ou seja, possui incógnita ou condicionante semelhantes ao problema proposto? A finalidade desta indagação é que o estudante encontre um problema correlato que seja útil na resolução deste problema. Neste caso, podemos perceber que o problema 3.5 possui alguns elementos comuns.

Podemos utilizar a estratégia resolução ou resultado do problema 3.5 ? O objetivo por trás desse questionamento é fazer com que o estudante perceba que é possível utilizar a estratégia ou o resultado de um problema previamente explorado, na resolução de problemas futuros. Nesse caso, considere a seguinte coleção de 2020 números:

$$2020\,números \begin{cases} 1 \\ 11 \\ 111 \\ 1111 \\ \cdots \\ \quad \underbrace{111\cdots 11.}_{2020\text{ algarismos}} \end{cases}$$

Assim, de acordo com o Princípio das Casas dos Pombos, Proposição 2.26 temos que ao menos dois números dessa lista deixa o mesmo resto na divisão por 2019. Considere dois números da coleção acima que deixam o mesmo resto na divisão por 2019:

$$\underbrace{11\cdots 1}_{p\text{ algarismos}} = 2019 \times k_1 + r \quad \text{e} \quad \underbrace{11\cdots 1}_{q\text{ algarismos}} = 2019 \times k_2 + r$$

em que $1 \leq q \leq p \leq 2020$. Donde, possuímos pelo algoritmo da divisão euclidiana que:

$$\underbrace{11\cdots 1}_{p} - \underbrace{11\cdots 1}_{q} = \underbrace{11\cdots\underbrace{00\cdots 0}_{q}}_{p} = 2019(k_1 - k_2).$$

Portanto, obtemos um múltiplo de 2019 formado apenas com algarismos 1 e 0 (zero).

Para o item **(b)** surgem a seguintes questões:

Qual a nossa incógnita? Ou seja, O que devemos mostrar? O objetivo dessa indagação é fazer com que o estudante note a incógnita do problema, ou seja, fazer o estudante notar aquilo que deve ser realizado no problema. Assim devemos mostrar que qualquer número inteiro n possui um múltiplo no sistema de numeração decimal formado apenas pelos algarismos 1 e 0 (zero).

Qual a condicionante? A ideia desse questionamento é aguçar a percepção dos estudantes com relação a fatos que podem influenciar na incógnita. Logo, podemos notar que para um número ser múltiplo de n, esse número tem que ser divisível por n, ou seja, o resto da divisão por n tem que ser zero.

Quais informações possuímos sobre os restos na divisão por 2019? O propósito desse questionamento é que os estudantes percebam uma relação entre incógnita e a condicionante do problema. Assim, pelo algoritmo da divisão euclidiana sabemos que na divisão por 2019 possuímos o seguinte conjunto de restos $r_n = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n-1\}$, ou seja, possuímos n possibilidades.

Portanto, considere a lista a seguir fomada por $n+1$ números.

$$n+1\, números \begin{cases} 1 \\ 11 \\ 111 \\ 1111 \\ \cdots \\ \underbrace{111\cdots11.}_{n+1\,\text{algarismos}} \end{cases}$$

Assim, de acordo a Proposição 2.26, o Pricínpio das Casa dos Pombos, temos que ao menos dois números dessa lista deixam o mesmo resto ao serem divididos por n. Considere dois números do rol acima que deixam o mesmo resto na divisão por n:

$$\underbrace{11\cdots1}_{p\,\text{algarismos}} = n\times k_1 + r \quad \text{e} \quad \underbrace{11\cdots1}_{q\,\text{algarismos}} = n\times k_2 + r$$

em que $1 \leq q \leq p \leq n+1$. Donde, possuímos pelo algoritmo da divisão euclidiana que

$$\underbrace{11\cdots1}_{p} - \underbrace{11\cdots1}_{q} = \underbrace{11\cdots\underbrace{00\cdots0}_{q}}_{p} = n(k_1-k_2).$$

Portanto, obtemos um múltiplo de n formado apenas com algarismos 1 e 0 (zero). ∎

3.3 PROBLEMAS DESAFIADORES

Para finalizar propomos um lista de problemas que tem por objetivo fazer com que o leitor aplique os conceitos relacionados aos *números repunits*, apresentados nesse trabalho para resolver essa coleção de problemas.

Problema 3.15 (PROFMAT (2015))**.** Considere os números $a = 111...11$ (n dígitos iguais a 1) e $b = 100...05$ ($n-1$ dígitos iguais a 0), representados no sistema decimal. Prove que $ab+1$ é um quadrado perfeito e determine a sua raiz quadrada.

Problema 3.16 (OBMEP (2014))**.** Calcule a soma

$$1+11+111+\cdots+\underbrace{111\cdots111}_{n\,\text{uns}}$$

Problema 3.17. Mostre que 73 divide R_{8k} para todo k natural.

Problema 3.18. Quais são os números do tipo R_n são divisores de R_{2020} ?

Problema 3.19 (OBMEP (2015))**.** Mostre que os números $49, 4489, 444889, ...$, obtidos colocando o número 48 no meio do número anterior, são quadrados perfeitos.

CONSIDERAÇÕES

No decorrer deste trablaho, procuramos relizar um estudo dos *números repunits*, fazendo uma caracterização, mostrando algumas proposições e propriedades associadas a essa classe numérica. Além disso, buscamos desenvolver uma proposta de oficina de ensino que contemple os conceitos acerca desses números através da resolução de problemas, para tanto, nossa proposta de oficina foi dividida em duas partes, a primeira é a de problemas introdutórios e a segunda é de problemas exploratórios.

A parte voltada aos problemas introdutórios tem como objetivo fazer com que os estudantes recordem conceitos fundamentais relacionados a aritmética básica dos números inteiros e partir da resoulução destes problemas construir um leque de conceitos que os auxilie na resolução de outros problemas.

A parte voltada aos problemas exploratórios, constitiu numa coleção de problemas, cujo objetivo é aplicar a metodologia da resolução de problemas, com o intuito de resolver suituações relacionadas ao *números repunits*, e a partir do processo de resolução de problemas propocionar aos estudantes capacidade de observar, descobrir, conjecturar, propor e pesquisar padrões, conceitos e propriedades associadas aos *números repunits.*

Dessa forma, esperamos mostrar uma estratégia de ensino para a Matemática, que enfatize o papel de destaque do estudante no seu processo de aprendizagem, mostrando uma proposta que incentiva que o estudante seja capaz de apreender de forma ativa. Porfim, motivando outros professores a desenvolverem estratégias que primem pela participação do estudante e contraponha a visão do professor como transmissor do conhecimento.

Referências

BEILER, A. H. **Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains**. 1. ed. New York: Dover, 1966. Citado 4 vezes nas páginas 13, 24, 34 e 35.

BRASIL, M. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**. Brasília, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 18.

_____. **Orientações Curriculares para o Ensino médio. Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias**. **Secretaria de Educação Média e Tecnológica/MEC, Brasília**, 2006. Acesso em: 05 de outubro 2019. Citado na página 22.

_____. **Base Nacional Curricular Comum**. Brasília, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 15, 16, 20 e 42.

CARVALHO, F. S.; COSTA, E. A. **Escrever o número 111...111 como o produto de dois números**. **Revista Professor de Matemática**, 2015. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/87/36.html>. Acesso em: 05 de outubro 2019. Citado 6 vezes nas páginas 13, 24, 34, 35, 36 e 54.

CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. d. O. **Matemática Discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2015. Citado na página 34.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de Matemática**. 12. ed. São Paulo-SP: Ática, 2003. Citado 5 vezes nas páginas 13, 15, 18, 20 e 42.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. 2. ed. Florianopólis-SC: Ed. da UFSC, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 13, 24, 25 e 27.

DUBNER, H. **Repunit R49081 is a Probable Prime?** **Matemática**, Dezembro 2001. Disponível em: <https://www.ams.org/journals/mcom/2002-71-238/S0025-5718-01-01319-9/S0025-5718-01-01319-9.pdf>. Acesso em: 05 de outubro 2019. Citado na página 36.

ECHEVERRíA, M. D. P. P.; POZO, J. I. **Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender**. 1. ed. Porto Alegre-RS: Artmed, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 15, 18 e 42.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. Citado na página 13.

HEFEZ, A. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2016. Citado 8 vezes nas páginas 13, 24, 25, 27, 29, 30, 32 e 38.

MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula**. 2. ed. São Paulo-SP: Livraria da Física, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

NÚMEROS, F. de. **O Imprio dos Números**. **Numberempire**, 2019. Disponível em: <https://pt.numberempire.com/factoringcalculator.php/>. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 54.

OBMEP. **Banco de Qestões 2018**. 1. ed. Rio de Janeiro-RJ: IMPA, 2008. Citado na página 51.

_____. **Banco de Qestões 2010**. 1. ed. Rio de Janeiro-RJ: IMPA, 2010. Citado na página 50.

_____. **Banco de Qestões 2013**. 1. ed. Rio de Janeiro-RJ: IMPA, 2013. Citado na página 52.

_____. **Banco de Qestões 2014**. 1. ed. Rio de Janeiro-RJ: IMPA, 2014. Citado na página 62.

_____. **Banco de Qestões 2015**. 1. ed. Rio de Janeiro-RJ: IMPA, 2015. Citado na página 62.

_____. **Clube de Matemática da OBMEP**. Rio de Janeiro-RJ, 2017. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-triangulo-magico/>. Citado na página 17.

_____. **Banco de Qestões 2018**. 1. ed. Rio de Janeiro-RJ: IMPA, 2018. Citado na página 58.

OLIVEIRA, K. I. M.; CORCHO, A. J. F. **Iniciação á matemática**. **Rio de Janeiro: SBM**, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 24, 27, 30 e 34.

ONUCHIC, L. d. l. R. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas . Em: Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: Editora UNESP**, p. 199–220, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 15, 22, 23 e 42.

POLYA, G. **Dez mandamentos para professores**. **Revista do Professor de Matemática**, v. 10, p. 2–10, 1987. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/10/2.htm>. Acesso em: 29 de outubro 2019. Citado na página 13.

_____. **A Arte de resolver problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro-RJ: Interciência, 2003. Citado 8 vezes nas páginas 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20 e 42.

PROFMAT. **Avaliação 1 - MA14 - 2015.2**. **SBM**, 2015. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2016/08/MA14_AV1_2015.pdf>. Acesso em: 05 de novembro 2019. Citado na página 61.

SNYDER, W. M. ***Factoring repunits***. 1. ed. Maimi: Monthly,, 1982. Citado na página 38.

APÊNDICES

3.4 APRESENTAÇÂO DE ALGUNS RESULDADOS DA PESQUISA

Alguns resultados deste estudo foram apresentados no IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática na modalidade poster, evento organizado pela Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica (ANPMat) realizado na Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), Vitória -ES, de 22 a 24 de Novembro de 2019, conforme a Figura 2.

Figura 2 – Apresentação dos resultados de pesquisa

(Fonte: Próprio autor.)

3.5 DICAS E RESOLUÇÕES PARA OS PROBLEMAS DESAFIADORES

Na seção 3.3 foram apresentados os problemas que são rrelacionados ao conceitos inerentes ao *números repunits*. Segue a dica de resolução de cada problema utilizando as definições dos *números repunits*.

Problema 3.15. Utilize a Proposição 2.35.

Problema 3.16. Utilize a fórmula para soma dos n primeiros termos de uma PG finita.

Problema 3.17. Aplique a Proposição 2.30.

Problema 3.18. Correlato ao Problema 3.17.

Problema 3.19. Utilize a Proposição 2.35.