UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

PROFMAT

JUCÉLIA FERREIRA DE SOUSA

APLICAÇÃO DA CONGRUÊNCIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

ARRAIAS-TO
2019

JUCÉLIA FERREIRA DE SOUSA

APLICAÇÃO DA CONGRUÊNCIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa.

ARRAIAS-TO
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S725a Sousa, Jucélia Ferreira de.

Aplicação da Congruência na Educação Básica. / Jucélia Ferreira de Sousa. – Arraias, TO, 2019.

75 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2019.

Orientador: Eudes Antonio da Costa

1. Divisibilidade. 2. Congruência. 3. Equação Diofantina. 4. Ensino de Matemática. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automatica de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

JUCÉLIA FERREIRA DE SOUSA[1]

APLICAÇÃO DA CONGRUÊNCIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede (ProfMat) da Universidade Federal do Tocantins (UFT), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Data de Aprovação: 06/12/2019

BANCA EXAMINADORA:

Dr. Eudes Antonio da Costa – UFT/Matemática
Orientador

Dr. Joubert Lima Ferreira – CCET/UFOB
Examinador

Dra. Alcione Marques Fernandes – UFT/Matemática
Examinadora

Arraias - TO
2019

1 O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Ás minhas duas âncoras: Maria dos Anjos e Cândido Pereira.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pois sem sua permissão não estaria realizando aqui este sonho;

Aos meus queridos e amados pais, Maria dos Anjos e Cândido Pereira, que por muitas vezes me encorajaram com orações, palavras e gestos que me fizeram prosseguir nesta jornada;

Aos meus professores do PROFMAT de Arraias - TO, em especial a professora Dr^a Keidna Cristiane Oliveira Souza, o professor Dr. Thiago Rodrigues Cavalcante e o professor Kaled Sulaiman Khidir, pelos ensinamentos transmitidos, recebam nesta a minha eterna gratidão;

Ao meu orientador professor Dr. Eudes Antonio da Costa, que por tantas vezes, com sua paciência sanou minhas dúvidas, dizer que suas palavras me deixaram mais tranquila e confiante na realização desta;

Aos meus queridos irmãos Juliano Ferreira e Jefferson Ferreira, que durante todo este percurso torceram muito por mim;

Aos meus colegas do PROFMAT 2018, em especial Valéria Batista e Valdemiro Carlos, que tornaram mais amenas as “tempestades”.

A Capes pelo incentivo financeiro.

Resumo

Este apresenta uma aplicação do projeto de intervenção pedagógica, "Congruência no Ensino Fundamental", em uma turma de 8^o ano da Escola Municipal Professor José Pereira da Silva, em Campos Belos - GO. Metodologicamente, abordamos a pesquisa qualitativa e pesquisa-ação, objetivando principalmente utilizar a Aritmética dos restos (Congruência), como uma metodologia para o desenvolvimento do raciocínio lógico ou letramento matemático. Como referência, em uma atividade diagnóstico composta por dez questões de "operações" elementares de matemática, constatamos uma situação muito delicada por parte dos discentes, acerca do alicerce matemático. Percebemos que quase 50% dos discentes não conseguem resolver "continhas" básicas de matemática. Conteúdos estes, conforme documentos oficiais, encontram-se na matriz curricular até o 6^o ano, além de serem imprescindíveis para o convívio em sociedade. Podemos perceber que a aritmética dos restos despertou o interesse dos discentes acerca do conteúdo através da utilização dos "truques" e "adivinhações" e mais, os problemas da aritmética dos restos provenientes das provas e do banco de questões da OBMEP trabalhados em sala, despertaram o "pensar" dos estudantes. Logo, notamos um avanço acerca do raciocínio lógico dos discentes do 8^o ano que participaram do projeto. Como, se trata de uma aprendizagem ativa, isto é, levando os alunos a pensarem, a produzirem, conduzimos-os ao letramento matemático, requisitos da BNCC.

Palavras-chaves: Divisibilidade, Aritmética dos restos, Truques e Adivinhações, Raciocínio lógico.

Abstract

It presents an application of the pedagogical intervention project, “Congruence in Elementary School ”in an 8th grade class at Professor José Municipal School Pereira da Silva, in Campos Belos - GO. Methodologically, we approach the research research and action research, mainly aiming to use the Arithmetic of the remains (Congruence) as a facilitating tool for the development of logical reasoning or mathematical literacy. As a reference, in a diagnostic activity composed of ten questions of elementary mathematical “operations” we find a very students on the mathematical foundation. We found that almost 50according to official documents, they are in the curriculum until the 6th grade, besides to be essential for socializing in society. We can see that arithmetic of the remains aroused the interest of the students about the content through the use of “Tricks” and “guesswork” and more, the problems of the arithmetic of the remains from the Evidence and the OBMEP in-room question bank aroused “thinking” of the students. Therefore, we notice an advance on the logical reasoning of the students of the 8th year they participated in the project. Like, it’s about active learning, that is, leading students to think, to produce, we lead them to mathematical literacy, BNCC requirements.

Key-words: Divisibility, Remains Arithmetic, Tricks and Divinations, Reasoning logical.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DC-GO	Documento Curricular de Goiás
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OCDE	Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico
MEC	Ministério da Educação
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudante
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
RPM	Revista do Professor de Matemática
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
UFT	Universidade Federal do Tocantins

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Congruência no Ensino Fundamental. Por que não? O alicerce da congruência é a divisão Euclidiana e esta se encontra na matriz curricular do Ensino Fundamental, mais especificamente no 6^o ano. Trabalhar a aritmética dos restos não exigirá uma matemática além da prevista nesta etapa de ensino. Todavia, há uma discrepância acerca das habilidades esperadas e relatório do SAEB-2017,

> 5^o ano (...) o nível de aprendizagem médio do país ainda se situa no limite inferior do nível básico, conforme interpretação do MEC (nível 4 de 10). (...) 9^o ano cerca de 70% dos estudantes do 9^o ano que participaram do SAEB 2017 apresentaram aprendizagem insuficiente em matemática. (...) 3^a série (...) apenas cerca de 4,5% dos estudantes do país que participaram do SAEB apresentaram aprendizagem adequada (níveis 7 a 10). MEC-Inep (2018, p. 26-58).

Este resultado faz jus ao que vivenciamos diariamente em sala de aula, percebemos claramente as dificuldades em operações elementares em matemática que muitos discentes só conseguem resolver com o auxílio da calculadora. Fato este verificado mediante aplicação de uma atividade diagnóstica envolvendo operações elementares, na qual constatamos que quase 50% dos alunos não conseguem resolver operações corriqueiras. Vejamos por exemplo uma entrevista do professor Elon Lages Lima,

> (...) você pode não saber nada de capitanias hereditárias e pode saber muito bem sobre a proclamação da república. Agora na matemática, se você não souber somar, você não vai aprender a multiplicar nunca, se você não sabe multiplicar, você não vai aprender a dividir nunca. Outra coisa é a dependência do que veio antes. Se você cometer um erro aqui, às vezes esse erro desaparece em uma parte que não é essencial, mas de um modo geral, esse erro vai se perpetuar e o seu resultado vai ser completamente errado. Na História, se você comete o erro de quem descobriu o Brasil foi Cristóvão Colombo, não faz diferença nenhuma para o resto da história do Brasil. A Princesa Izabel continua sendo a Princesa Izabel. Quer dizer, um erro da data, por exemplo, se o Brasil foi descoberto no dia 22 de abril ou no dia 01 de março. A matemática não tem isso, dois mais dois são quatro e acabou. LIMA (–).

Em conformidade com a fala do professor Elon e a dificuldade acerca da matemática básica apresentada pelos discentes é evidente que o prosseguimento acadêmico dos estudantes é afetado, pois acreditamos que é indispensável a aprendizagem do alicerce matemático, base para estudos futuros. Ademais, o convívio em sociedade também é abalado visto que a "matemática" é exigida em muitas situações, em particular dependemos diariamente das "continhas" para nos sobressairmos nos mais diversos acontecimentos diários. Como destaca uma das competências específicas da matemática para o Ensino Fundamental, segundo a BRASIL (2017, p. 267) "Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo". A partir desse paradigma, houve uma motivação na busca de uma intervenção pedagógica, buscando amenizar as dificuldades apresentadas pelos discentes da Escola Municipal Professor José Pereira da Silva, em Campos Belos - GO. O objetivo da intervenção é a utilização da Aritmética dos Restos (Congruência) como metodologia para o desenvolvimento do raciocínio lógico e letramento matemático requisitados pela BNCC. Para o desenvolvimento, elencamos os objetivos específicos, a saber: Fazer com que os estudantes compreendam que os números naturais são primos ou escritos de forma única como primos; fazer com que os alunos sejam capazes de formular e resolver equações diofantinas por meio de tentativas e erros; aprimorar o letramento matemático dos discentes através da divisibilidade e por fim, fazer com que os alunos percebam que a congruência está presente no cotidiano. Um problema que serviu de orientação para o desenvolvimento deste foi: Qual a importância da aritmética dos restos no ensino da divisibilidade para o 8^o ano? A hipótese é que dentre as várias utilizações da congruência, destacamos os "truques" e as "mágicas" despertando assim a atenção e por consequência a assimilação do conteúdo em questão por parte dos alunos. Logo, buscamos nortear os discentes na conquista de um pensamento mais ágil, em conformidade com,

> O professor seria somente uma espécie de parteira espiritual; ele daria oportunidade aos alunos de descobrirem por si mesmos as coisas a serem aprendidas. Este ideal é dificilmente alcançado na prática, sobretudo por falta de tempo. Contudo, mesmo um ideal inatingível pode guiar-nos indicando a direção correta - ninguém ainda atingiu a Estrela Polar, mas muitas pessoas encontraram o rumo certo guiando-se por ela. PÓLYA (1987).

A metodologia adotada foi qualitativa utilizando-se a pesquisa ação, em conformidade com (BARBIER, 2007) e (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Em relação a estrutura, esta se dá na divisão em três capítulos.

No primeiro capítulo abordaremos a origem da matemática, da necessidade do registro de quantidades ao conceito de números e deste aos números reais, em seguida, além de um breve histórico acerca de alguns matemáticos e algumas contribuições destes presentes na educação básica da atualidade.

No segundo capítulo apresentaremos a aritmética dos números inteiros, apresentando as leis básicas da aritmética no conjunto dos números inteiros, em particular aritmética dos restos, conteúdo do nosso trabalho.

No último capítulo, nos dedicamos a descrever os relatos e discussões (análise) da aplicação do projeto "Congruência no Ensino Fundamental" na Escola Municipal professor José Pereira da Silva, em Campos Belos - GO.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Ao longo dos tempos, a humanidade se defrontou com diversas situações-problemas que precisavam ser solucionadas. Para tanto, desenvolveu algumas ciências, os conhecimentos práticos ou teóricos obtidos foram sendo passados de uma geração para outra e, dentre esses, o conhecimento matemático. Para maiores informações e detalhes adicionais à este capítulo poderão ser consultados as seguintes referências (BOYER, 1996), (BRASIL, 1998), (BRASIL, 2000), (BRASIL, 2017), (CARAÇA, 2003), (CARVALHO; MORGADO, 2015), (COSTA, 1996), (COSTA, 1997), (COSTA; SANTOS, 2008), (DOMINGUES, 1991), (EVES, 2004), (GOIÁS, 2018), (HEFEZ, 2009), (HEFEZ, 2016), (IFRAH, 1985), (MEC, 2006), (MEC-INEP, 2017), (MOL, 2013), (ROQUE; CARVALHO, 2012).

2.1 Contexto Histórico

Como conhecemos hoje, A ciência matemática, é o resultado de mais de 4.000 anos de desenvolvimento, assim a matemática apresenta um alto nível de complexidade, pensamento lógico e abstrato; e, em decorrência disto, parece ser consenso que muitas vezes torna-se difícil de ser ensinada ou aplicada. Inicialmente pretendemos remontar parte dessa história e conectar alguns fatos com a matemática no ensino fundamental.

Não se sabe ao certo qual o início e o fim da idade da pedra, assim como não se sabe o “início” da matemática, ou seja, não sabemos exatamente como surgiu a matemática, e, algumas perguntas sobre fatos matemáticos estão ainda sem resposta. Há indícios, como apontam alguns estudos, que os primeiros povos viviam nos espaços abertos das matas e sobreviviam da caça e pesca de animais, da colheita de frutos e, frequentemente tinham que mudar de um lugar para outro em busca de alimentos, pois eram nômades. No entanto esse período não é infrutífero em relação ao pensamento matemático, visto que, as pessoas faziam trocas de mantimentos, “comercializavam” entre tribos e, tinham que dividir parte da caçada entre as famílias, atitudes essas que dependiam da ideia de contar e repartir, indícios de que possuíam de alguma forma um senso numérico.

Sabemos ainda que, com o desenvolvimento da agricultura e comércio era necessário a contagem. E esta tinha que ser expressa de alguma forma, então valiam-se de todo meio concreto que dispunham, dentre as quais destacamos: nós em corda, marcação em madeira, ossos ou barro; amontoamento ou empilhamentos de pedras; tinham povos que preferiam usar partes dos corpos, a saber: dedos das mão, dos pés, dentre outros artifícios. Esses meios de contagem eram usados, por exemplo, para enumerar rebanhos de cabras, bois e carneiros e isso era feito através de uma correspondência biunívoca entre os animais e um amontoamento de pedras, pois assim, era possível verificar que os animais que haviam saído pela manhã voltaram todos ou não ao estábulo a noite; contar os dias do ano, enumerar membros da família (nascimento, mortes etc); havia a necessidade de concluir transações comerciais, o escambo, e para tal tinham que saber se estavam em condições de trocar ou comprar alguma mercadoria. Em suma, é a história da humanidade, que devido a circunstâncias empíricas foram levados a enumerar os acontecimentos e para tal utilizam os materiais concretos que possuíam.

Devido observações já realizadas até por Aristóteles, acredita-se inclusive, que a base numérica usada atualmente prevaleceu devido nascermos, pelo menos a maioria das pessoas, com dez dedos nas mãos. E, desde os tempos remotos, os dedos das mãos e dos pés eram usados na contagem e, quando estes eram de alguma maneira inconvenientes para tal função, o homem primitivo fazia amontoamento de pedras em grupos de cinco, dez e vinte assemelhando assim com a contagem com os dedos. Existem também pesquisas antropológicas que apontam que a contagem surgiu em rituais religiosos primitivos, pois havia a necessidade de estabelecer uma ordem em que os indivíduos iriam ser chamados para participar das cenas, e tal fato aponta que a forma ordinal dos números nasceu primeiro que a quantitativa.

> Além disso, há um grande número de perguntas não respondidas com relação à origem da matemática. Supõe-se usualmente que surgiu em resposta as necessidades práticas, mas estudos antropológicos sugerem a possibilidade de uma outra origem. Foi sugerido que a arte de contar surgiu em conexão de rituais religiosos primitivos e que o aspecto ordinal precedeu o conceito quantitativo. Em ritos cerimoniais representado mitos da criação era necessário chamar os participantes à cena segundo uma ordem específica, e talvez a contagem tenha sido inventada para resolver esse problema. Se são corretas as teorias que dão origem ritual a contagem, o conceito de número ordinal pode ter precedido o de número cardinal. Além disso uma tal origem indicaria a possibilidade de que o contar tinha uma origem única, espalhando-se subsequentemente a outras partes da terra. Esse ponto de vista, embora esteja longe de ser provado, estaria em harmonia com a divisão ritual dos inteiros em ímpares e pares, os primeiros considerados como masculinos e os últimos, como femininos. Tais distinções eram conhecidas em civilizações em todos os cantos da terra, e mitos relativos a números masculinos e femininos se mostraram notavelmente persistentes. BOYER (1996, p. 04).

Percebe ainda, o surgimento de dois tipos de subconjuntos, categorias ou classificação, nos números naturais a saber: números pares (feminino) e números ímpares (masculino). Acredita que um marco na matemática está na criação ou utilização do símbolo para o nada, o zero. Fato este realizado de acordo com COSTA e SANTOS (2008, p. 11) pelos “hindus no final do século VI”. Após a criação do *zero* pode definir o sistema de posicionamento da base dez, utilizando assim a casa das unidades, dezenas, centenas etc, livrando dessa forma dos problemas gerados pela falta deste, como por exemplo distinguir o número 15 do 105. Como bem destaca Caraça,

> A criação de um símbolo para representar o *nada* constituiu “um dos actos mais audazes do pensamento, uma das maiores aventuras da razão”.

> Essa criação é relativamente recente (talvez pelos primeiros séculos da era cristã) e foi devida às exigências da numeração escrita. Todos conhecem o princípio em que essa numeração se baseia e qual é o papel que nela desempenha o símbolo *zero*. Uma coisa em que nem toda a gente repara é que essa numeração constitui uma autêntica maravilha que permite, não só escrever muito simplesmente os números, como efectuar as operações. CARAÇA (2003, p. 06).

Logo, a contagem, e por consequência os números surgiram da necessidade diária das pessoas, diante destas situações, o homem buscava uma maneira que facilitasse e agilizasse seus cálculos. Como feito, utilizaram ou inventaram diversos instrumentos de contagem, por exemplo o *ábaco*, que de acordo Costa,

> O ábaco, do grego abax (contador), é o mais antigo aparelho (2000 a.C). Muito prático desobrigou o homem do esforço de acumulações, porém exigiu o conhecimento das combinações resultantes da posição de cada conta. Não é, pois, um instrumento de cálculo, mas, apenas, indica os números adicionais e subtraídos. COSTA (1996, p. 175-178).

Destacamos também o complexo sistema de numeração romano e conforme IFRAH (1985, p. 396) "os algarismos romanos não permitiram a seus utilizadores fazerem cálculos(...) na verdade, os algarismos romanos não são sinais que servem para efetuar operações aritméticas, *mas abreviações destinadas a notificar e reter os números*". Então, para efetuar cálculos, os romanos recorriam à invenção grega: o ábaco. No entanto, de acordo COSTA (1996, p. 175-176), "Atualmente, usamos o sistema numérico desenvolvido pela civilização hindo - arábica; e as operações que realizamos é uma pequena variação do sistema tabular arábico, fundamentado no sistema decimal posicional". Registramos ainda a invenção de um instrumento ou aparelho que serviu de base para a construção dos atuais computadores, tal qual conhecemos hoje.

> Jonh Napier, matemático escocês, em 1614 apresentou um aparelho para facilitar as operações aritméticas, substituindo as multiplicações por adições e as divisões por subtrações; neste aparelho, ele generalizou o procedimento tabular dos árabes e construiu um dispositivo simples e barato; constituído de bastões de ossos, facilitando os cálculos com números grandes. Esta foi a primeira máquina de calcular, base para as que conhecemos hoje e para os computadores, já com dispositivos eletrônicos. COSTA (1996, p. 175-178).

Assim percebemos que a contagem foi tateada através dos acontecimento empíricos até tornar um processo abstrato e aperfeiçoado como conhecemos hoje, tal invenção ou utilização trouxe também as operações de adição e multiplicação e as relações de diferença, divisão e ordem, designado por números naturais e representado pela sequência

$$1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ n+1,\ \cdots.$$

Contudo, somente em 1891 Giuseppe Peano $(1858-1932)$ construiu de maneira formal o conjunto dos números naturais e para tal escolheu três conceitos primitivos: *zero, número natural* e a relação *é sucessor de*. E, para caracterizá-los, formulou os seguintes axiomas:

> P_1: Zero é um número natural.
> P_2: Se a é um número natural, então a tem um único sucessor que também é um número natural.
> P_3: Zero não é sucessor de nenhum número natural.
> P_4: Dois números naturais que têm sucessores iguais são, eles próprios, iguais.
> P_5: Se uma coleção S de números naturais contém o zero e, também, o sucessor de todo elemento de S, então S é o conjunto de todos os números naturais. DOMINGUES (1991, p. 80-81).

O conjunto dos naturais, indicado por $\mathbb{N}$, atualmente é representado por

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ n+1,\ \cdots\}.$$

As reticências depois do número 2 nos informa que entre 1 e n existem números que não estão escritos nesta sequência, números estes obtidos através da ideia de sucessor de 1, do sucessor do sucessor de 1 etc. Já, as reticências depois no $n+1$ o sucessor de n, indicam que não existe um número natural maior que todos os outros naturais, isto é, um número natural por maior que seja, sempre existe o sucessor deste, ou seja, um outro número maior. Logo, essa ideia nos remete ao ilimitado, em outras palavras, que os números naturais são infinitos. O conjunto dos números naturais é fechado em relação a adição e multiplicação, isto é, dados $a,\ b$ naturais, tem que $a+b$ é natural; assim como $a \times b$ é natural.

Apenas o conjunto dos naturais sozinho não resolvia questões que envolvessem certas diferenças, como por exemplo: dados $a,\ b$ números naturais, com $a < b$, a diferença $a-b$ não é natural. Então, para resolver questões como $1-4$ de modo a tornar o conjunto fechado em relação a subtração, houve a necessidade de determinar outros símbolos. Estes novos símbolos são os números negativos cuja união com os naturais formam o conjunto de números inteiros que são representados por

$$\mathbb{Z} = \{\cdots,\ -n,\ -(n+1),\ \cdots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n,\ n+1,\ \cdots\}\ .$$

Notemos que o conceito de número inteiro precede o dos naturais e até mesmo sua utilização para registrar dívidas ou débitos, no entanto eles não eram aceitos formalmente pelos matemáticos, nem tinha uma notação específica, conforme destaca Hefez,

> O conceito de número inteiro originou - se do conceito bem mais antigo de número natural, cuja criação objetivava resolver problemas de contagem. Os números negativos têm sido considerados esporadicamente desde a antiguidade, mas sempre com muita desconfiança por parte dos matemáticos até que, a partir do desenvolvimento das atividades mercantins que ocorriam na Europa no final da Idade Média, sentiu-se a necessidade de considerar os inteiros relativos e com eles efetuar operações. (...)A evolução da noção intuitiva de número inteiro para um conceito mais elaborado foi muito lenta. Só no final do século XIX, quando os fundamentos de toda a matemática foram questionados e intensamente repensados, é que a noção de número passou a ser baseada em conceitos da teoria dos conjuntos, considerados mais primitivos.HEFEZ (2016, p. 02).

O conjunto $\mathbb{Z}$ é fechado em relação às operações de adição, subtração e multiplicação. No entanto, o conjunto dos números inteiros agora formado não é fechado em relação a divisão, isto é dados a, $b \in \mathbb{Z}$, nem sempre é possível dividir a por b em $\mathbb{Z}$. Como exemplo temos 2 não divide 1. As necessidades diárias iam além da contagem, requeria também medições e pesagem, e estas, muito raramente são inteiras. Diante disso, houve a necessidade de utilizar um novo símbolo para representar partes ou fração do todo, indicado por $\frac{a}{b}$, uma parte a do todo b obtendo dessa forma um conjunto fechado em relação a divisão designado de números racionais e denotado por $\mathbb{Q}$. De um modo geral adotamos como sendo uma fração (irredutível) representado por $\frac{a}{b}$ sendo a, b inteiros com b não-nulo. Ademais exigimos que a e b não tenham divisores comuns. O conjunto de todas as frações (irredutíveis) será indicado pelo conjunto $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$, e $\frac{a}{b}$ é chamado de número racional não nulo se $a \neq 0$. Por fim registramos que o conjunto dos números racionais é fechado para as operações de adição, multiplicação, subtração e divisão.

De acordo com COSTA (1997, p. 196) "A tese pitagórica de que as coisas são números, isto é, feitas de unidades discretas como os pontos, atribuíam aos números a essência de todas as coisas". Logo, os Pitagóricos exaltavam os números inteiros e pensaram serem estes suficientes para explicar os fenômenos do Universo e ao descobriram a incomensurabilidade da medida da diagonal de um quadrado de lado um entraram em crise, como destaca Eves,

> A descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos. Em primeiro lugar porque parecia desferir um golpe mortal na filosofia pitagórica segundo a qual tudo dependia dos números inteiros. Além disso, parecia contraria ao senso comum, pois intuitivamente havia o sentimento de que toda grandeza poderia ser expressa por *algum* número racional. A contrapartida geométrica era igualmente espantosa, pois quem poderia duvidar que, dados dois segmentos de reta, sempre seria possível encontrar um terceiro segmento de reta, talvez muito, mas muito pequeno, que coubesse exatamente um número inteiro de vezes em cada um dos dois segmentos dados? EVES (2004, p. 106).

Estes e outros fatos levaram os matemáticos à considerarem outros tipos de números, como exemplo, o conjunto dos números irracionais denotado por $\mathbb{I}$. A união do $\mathbb{Q}$ com $\mathbb{I}$ forma o conjunto dos números reais e é designado por $\mathbb{R}$, e estes formam uma correspondência biunívoca com a reta real.

2.2 Alguns matemáticos e algumas de suas contribuições em relação ao ensino atualmente

Um dos primeiros pensadores a ser referendado como matemático é Tales. Tales de Mileto, assim chamado porque nasceu na cidade comercial de Mileto na Ásia Menor, fundou a escola Ioniana e nesta estudava a geometria, astronomia e teoria dos números. No entanto não se sabe ao certo as obras provindas de Tales e tampouco com precisão sobre sua vida. Sabemos que Tales de Mileto era considerado muito inteligente, sendo portanto designado o primeiro dos Sete Sábios da Antiguidade. Comerciante de profissão, conseguiu tornar-se rico e, no final de sua vida pode dedicar-se aos estudos e viagens. Tales viajava muito em virtude de sua profissão e, em uma dessas viagens deparou-se no Egito e Mesopotâmia adquirindo base matemática devido seu contato com a matemática desenvolvida naquelas localidades, fato este que o fez tornar matemático. E, em virtude de sua passagem pelo Egito, calculou a altura de uma pirâmide, usando para tal a sombra da referida pirâmide. Porém Eves destaca que,

> Há duas versões de como Tales calculou a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra. O relato mais antigo, dado por Hierônimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e fez uso da semelhança de triângulos. Ambas as versões pecam ao não mencionar a dificuldade de obter, nos dois casos, o comprimento da sombra da pirâmide. EVES (2004, p. 115).

De acordo com BOYER (1996, p. 34) “A proposição agora conhecida como teorema de Tales - que um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto - pode ter sido aprendida por Tales durante suas viagens à Babilônia”. É atribuído a Tales a criação da geometria dedutiva, e algumas das primeiras demonstrações matemáticas. E ainda conforme Boyer credita a Tales a prova dos seguintes Teoremas:

> 1.Um círculo é bissectado por um diâmetro.
> 2.Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
> 3.Os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais.
> 4.Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes. BOYER (1996, p. 34).

Coube a Tales diante de raciocínio lógico grandes descobertas matemáticas em particular na geometria, descobertas essas que estão presentes no ensino acadêmico de hoje, conforme a Base Nacional Comum Curricular - BNCC,

> No Ensino Fundamental (...) devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações ou reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Esses conceitos devem ter destaque nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo. BRASIL (2017, p. 272).

Destacamos também MEC,

> O trabalho de representar as diferentes figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, deve ser aprofundado e sistematizado nesta etapa de escolarização. Alguns conceitos estudados no ensino fundamental devem ser consolidados, como, por exemplo, as ideias de congruência, semelhança e proporcionalidade, o Teorema de Tales e suas aplicações, as relações métricas e trigonométricas nos triângulos (retângulos e quaisquer). MEC (2006, p. 75-76).

A Escola Ioniana de Tales, foi perdendo força até que foi substituída pela escola Pitagórica situada no sul da Itália, fundada por Pitágoras, uma unidade munida de rituais e cerimônias, além de estudar matemática (aritmética e geometria), música, astronomia, filosofia e ciências. Segundo EVES (2004, p. 97) "É possível que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales, pois era cinquenta anos mais novo do que este e morava perto de Mileto, onde vivia Tales". No entanto BOYER (1996, p. 35) afirma que "é improvável dada a diferença de meio século entre suas idades". Algumas semelhanças de seus interesses pode ser explicado graças a viagens em que Pitágoras também tenha realizado, como Egito e Babilônia". Para Pitágoras, todo o universo era matemática como destaca Costa,

> Pitágoras de Samos (580/78 – 497/6 a.C.) fundou uma espécie de associação de caráter mais religioso que filosófico, cujas doutrinas eram mantidas em segredo, os ensinamentos não eram escritos, eram transmitidos oralmente e guardados em segredo pelos iniciados. Segundo seus ensinamentos, o sagrado mistério da ciência tem o seu centro nas matemáticas, no estudo do número, cuja lei domina em todas as coisas: nos astros, cujas distâncias, grandezas e movimentos são regulados por meio de relações matemáticas (geométricas e numéricas); nos sons, cujas relações de harmonia obedecem a leis numéricas fixas; na vida e na saúde, que são proporções numéricas e harmônicas de elementos; nos fatos morais entre os quais também a justiça é proporção etc. Assim, concluem eles que os números são entes geométricos e reduzem todas as coisas à unidade e ao ponto (unidade que tem posição), e consideram os elementos do número (limite e ilimitado) como elementos de todas as coisas. COSTA (1997, p. 196).

Percebemos então que Pitágoras exaltava os números. Místico e profeta da natureza, para ele os números eram entes de devoção. Bem como destaca Boyer,

> Misticismo sobre números não é criação dos pitagóricos. O número sete , por exemplo, era objeto de especial respeito, presumivelmente por causa das sete estrelas errantes, ou planetas, das quais a semana derivou. Os pitagóricos não eram os únicos a imaginar que os números ímpares tinham atributos masculinos e femininos os pares – com a concomitante crença (não destituída de preconceito), encontrada ainda em Shakespeare, de que "há divindade nos números ímpares". Muitas civilizações primitivas partilharam de vários aspectos da numerologia, mas os pitagóricos levaram a extremos a adoração dos números, baseando neles sua filosofia e modo de viver. O número um, diziam eles, é o gerador dos números e o número da razão; o dois é o primeiro número par, ou feminino, o número da opinião; três é o primeiro número masculino verdadeiro, o da harmonia, sendo composto de unidade e diversidade; quatro é o número da justiça ou retribuição indicando o ajuste de contas; cinco é o número do casamento, união dos primeiros números verdadeiros feminino e masculino; e seis é o número da criação. Cada número tinha, por sua vez, seus atributos peculiares. O mais sagrado era o dez ou o tetractys, pois

> representava o número do universo, inclusive a soma de todas as possíveis dimensões geométricas. Um ponto gera as dimensões, dois pontos determinam uma reta de dimensão um, três pontos não alinhados determinam um triângulo com área de dimensão dois, e quatro pontos não coplanares determinam um tetraedro com volume de dimensão três; a soma dos números que representam todas as dimensões é, portanto, o adorado número dez. É um tributo à abstração da matemática pitagórica que a veneração ao número dez evidentemente não era ditada pela anatomia da mão ou pé humanos. BOYER (1996, p. 39).

O costume da época era dar ao fundador da escola o mérito de todas as descobertas realizadas pela escola, então, não se sabe ao certo se as descobertas atribuídas a Pitágoras tenham sido realizadas realmente por ele, ou algum membro de sua escola. Grandes feitos na Teoria dos números são atribuídos a Pitágoras, por exemplo, a classificação em par e ímpar. A definição de número primo, entre outras. Além da descoberta do teorema que leva seu nome, a saber: “Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos”. Dentre as contribuições de Pitágoras na matemática presente hoje em dia no ensino básico, podemos destacar:

> Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais.(...) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes. BRASIL (2017, p. 318-319).

Destacamos ainda conforme o Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB MEC-Inep (2017, p. 65), “o estudante pode ser capaz de reconhecer a proporcionalidade dos elementos lineares de figuras semelhantes. também é provável que seja capaz de determinar: uma das medidas de uma figura tridimensional, utilizando o teorema de Pitágoras”.

Com o fim da escola Pitagórica que conforme MOL (2013, p. 35) “Após um levante popular, o templo de Pitágoras em Crotona foi destruído e sua irmandade deixou de existir como um grupo ativo e organizado”, Platão, influenciado pelas ideias do também filósofo Pitágoras, fundou em Atenas a sua escola: *Academia*, lugar destinado ao estudo da filosofia e ciência. Platão dava muita importância ao estudo da matemática, especificamente geometria, acreditava que esta dominava o universo e a considerava indispensável para a formação racional das pessoas. E, na entrada de sua escola, estava escrito conforme afirma BOYER (1996, p. 63) “Que ninguém que ignore a geometria entre aqui”. Evidenciando dessa forma o quão importante era a matemática para Platão. E ainda conforme BOYER (1996, p. 63) “os poliedros regulares (...) foram chamados (...) *sólidos platônicos* devido a maneira pela qual Platão (...)os aplicou à explicação de fenômenos científicos”. No entanto, não existem contribuições matemáticas apontadas a Platão. Assim destaca Eves,

> A importância de Platão na matemática não se deve a nenhuma das descobertas que fez mas, isto sim, à sua convicção entusiástica de que o estudo da matemática fornecia o mais refinado treinamento do espírito e

> que, portanto, era essencial que fosse cultivado pelos filósofos e pelos que deveriam governar seu Estado ideal.(...) A matemática parecia da mais alta importância a Platão devido ao seu componente lógico e à atitude espiritual abstrata gerada por seu estudo; por essa razão ela ocupava um lugar de destaque no currículo da Academia. Alguns vêem nos diálogos de Platão o que poderia ser considerada a primeira tentativa séria de uma filosofia da matemática. EVES (2004, p. 131-132).

Percebemos então que apesar da matemática ser de suma importância para Platão, este não se tornou um matemático, todavia, em sua escola (Academia) formava matemáticos. E de acordo com Boyer,

> Platão é importante na história da matemática principalmente por seu papel como inspirador e guia de outros, e talvez a ele se deva a distinção clara que se fez na Grécia antiga entre aritmética (no sentido de teoria dos números) e logística (a técnica de computação). Platão considerava a logística adequada para negociantes e guerreiros, *que precisam aprender a arte dos números, ou não saberão dispor suas tropas.* O filósofo, de outro lado, deve conhecer a aritmética, *porque deve subir acima do mar das mudanças e captar o verdadeiro ser.* (...) *a aritmética tem um efeito muito grande de elevar a mente, compelindo-a a racionar sobre o número do abstrato.* BOYER (1996, p. 64)

Mostrando dessa forma, que suas contribuições vão além da geometria, e, por exemplo o estudo da aritmética. Enfatizemos também, que deve a Platão a formalização de alguns conceitos matemáticos, assim afirma Roque e Carvalho,

> Platão começa a criticar os geômetras por não empregarem critérios de rigor desejáveis nas práticas matemáticas. (...) Sendo assim, ainda que não possamos dizer que a transformação dos fundamentos da Matemática grega é devida a Platão, ele expressa o descontentamento dos filósofos com os métodos empregados e articula o trabalho dos pensadores à sua volta para que se dediquem a formalizar os conceitos e técnicas utilizadas indiscriminadamente na Matemática da época. ROQUE e CARVALHO (2012, p. 52)

Podemos enumerar algumas contribuições de Platão na matemática acadêmica da atualidade,

> Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes. BRASIL (2017, p. 267).

Alexandre, o Grande, fundou a cidade de Alexandria e esta, no lugar de Atenas, tornou o centro de saberes culturais, filosóficos e matemáticos. Ali, construiu uma escola conhecida como Museu, muito bem equipada e que possuía ampla biblioteca. E tiveram que recorrer a alguns intelectuais "estrangeiros" para desenvolver os vários campos de estudos, em particular foram atrás se Euclides. Pouco se sabe da vida de Euclides, acredita que sua formação matemática é proveniente da escola de Platão. Euclides escreveu cerca de uma dúzia de livros, intitulado os *Elementos*, livros estes que versavam sobre vários assuntos matemáticos, em que são expostos de forma clara e precisa os conhecimentos matemáticos elementares acumulados ou conhecidos até então. A saber: Teoria dos números, Geometria (pontos, retas, círculos e esferas) e Álgebra, sendo este depois da bíblia, o livro mais lido e editado em toda história. E conforme Roque e Carvalho,

> Com Euclides, a Matemática na Grécia parece ter adquirido uma configuração particular, passando a empregar enunciados geométricos gerais, que não envolvem somente procedimentos de medida. Os *Elementos* de Euclides representam, neste contexto, o resultado dos esforços de formalização da Matemática para apresentar uma geometria consistente e unificada que valesse para grandezas quaisquer, fossem elas comensuráveis ou incomensuráveis. (...). O papel desta obra na Matemática não pode ser superestimado. Em primeiro lugar, ela expõe, de maneira organizada, a Matemática elementar que os gregos da época clássica tinham criado e desenvolvido. Assim, muito do que sabemos da Matemática grega deve-se a esta obra de Euclides. Em segundo lugar, como os Elementos constituem a mais antiga exposição organizada de Matemática que nos chegou, eles muito influenciaram seu desenvolvimento posterior. (...) Os *Elementos* se dividem em três grandes partes:
> 1.Geometria plana – Livros I-VI;
> 2. Aritmética – Livros VII-IX;
> 3. Geometria espacial – Livros XI-XIII. ROQUE e CARVALHO (2012, p. 53-67).

Acredita que os *Elementos* não é obra exclusiva de Euclides, e que os matemáticos coordenados por ele, colaboraram com a escrita da tão importante obra na matemática, que infelizmente metade se perdeu. Esta brilhante obra foi usada conforme MOL (2013, p. 45) "como livros-textos para o ensino da matemática até o final do século XIX e início do século XX". No entanto, não existem evidências de descobertas matemáticas atribuídas a Euclides, e sua contribuição a matemática se dá na organização, sistematização, demonstração e exposição da matemática através dos *Elementos*. Além dos *Elementos*, Euclides escreveu vários outros livros, em que alguns se perderam. Dentre as várias contribuições de Euclides ainda presentes no ensino da matemática da atualidade, destacamos:

> Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. BRASIL (2017, p. 267).

Destacamos ainda os objetos de conhecimentos presentes no 6^o do ensino fundamental que conforme a BNCC BRASIL (2017, p. 300) "*Operações* adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação com números naturais." O último matemático da escola de Alexandria foi Diofanto, este escreveu uma coleção composta por treze livros intitulada *Aritmética* onde expôs resoluções de problemas sem o uso da geometria, até então presente em toda matemática, e assim sendo, sua obra se aproxima muito da álgebra da atualidade, pois introduziu símbolos, notações e abreviaturas matemáticas. Segundo ROQUE e CARVALHO (2012, p. 131) "Uma de suas principais contribuições está em ter introduzido uma forma de representar o valor desconhecido em um problema, designando-o como *arithme*, de onde vem o nome aritmética". Foi pela obra de Diofanto que surgiu a álgebra moderna. No entanto, muitos desses livros foram perdidos. Conforme EVES (2004, p. 207) "Diofanto escreveu três trabalhos: *Aritmética*, o mais importante, do qual remanesceram seis dos treze livros; sobre *Números Poligonais* do qual restou apenas um fragmento; e *Porismas*, que se perdeu". Dentre os vários assuntos estudados por Diofanto destacamos: equações indeterminadas cuja soluções empregava artifícios nos cálculos indicando dessa forma seu vasto conhecimento das propriedades dos números naturais, sendo portando considerado conforme MOL (2013, p. 58) "o *pai da álgebra*, mas talvez seja muito mais adequado tratá-lo como precursor da moderna teoria de números". Vejamos suas contribuições sendo aplicadas no ensino atual,

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações. BRASIL (2017, p. 270).

Acredita-se que foi a *Aritmética* de Diofanto que influenciou o humilde e discreto advogado francês Pierre Fermat. Este, dedicava as suas horas de lazer ao estudo da matemática, mas, pouco publicou a respeito. Contudo, manteve correspondência com os principais matemáticos de sua época, exercendo dessa forma vasta influência na área, sendo assim considerado o maior matemático francês do século XVII. Conforme EVES (2004, p. 390) "Dentre as variadas contribuições de Fermat à matemática, a mais importante é a fundação da moderna teoria dos números. Neste campo a intuição e o talento de Fermat eram extraordinários". De acordo com MOL (2013, p. 97) "Seus interesses principais em aritmética estavam nos números primos e nas propriedades de divisibilidade". No entanto, Fermat não concluiu nenhuma obra, e, estas ficaram conhecidas (depois de sua morte) através de cartas escritas a seus amigos ou colaboradores. Dentre as várias descobertas atribuídas a Fermat destacamos conforme Mol,

> O pequeno Teorema de Fermat que afirma que: *Se p é primo e a é um número não divisível por p o número a^{p-1} - 1 é divisível por p.*(...) O último Teorema de Fermat: *Para $n > 2$, não existem números inteiros positivos x, y e z satisfazendo a identidade $x^n + y^n = z^n$* . MOL (2013, p. 97-98).

Os Teoremas acima enunciados foram demonstrados pelos seus seguidores e de acordo com EVES (2004, p. 392) "o último teorema de Fermat ganhou a distinção de ser o problema matemático com maior número de demonstrações incorretas publicadas".

Eis aqui algumas contribuições de Fermat no ensino atual,

> Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par). Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100$ e 1000. Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor. BRASIL (2017, p. 301).

Observamos ainda nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN'S,

> Conceitos como os de "múltiplo" e "divisor" de um número natural ou o conceito de "número primo" podem ser abordados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum sem compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver. Os números inteiros podem surgir como uma ampliação do campo aditivo, pela análise de diferentes situações em que esses números estejam presentes. Eles podem representar diferença, "falta", orientação e posições relativas. As primeiras abordagens dos inteiros podem apoiar-se nas ideias intuitivas que os alunos já têm sobre esses números por vivenciarem situações de perdas e ganhos num jogo, débitos e créditos bancários ou outra situações. BRASIL (1998, p. 66).

Deve-se ao teólogo e matemático suíço Leonhard Euler a prova do Pequeno Teorema de Fermat e contribuição na demonstração do último Teorema de Fermat. Euler é considerado um dos grandes gênios responsáveis pela matemática da atualidade. De acordo com MOL (2013, p. 118) "Euler foi considerado o matemático mais produtivo de seu tempo e, possivelmente, foi o mais prolífico matemático da história". Publicou diversos livros e artigos totalizando 866 trabalhos. Não existe na matemática qualquer ramo que não tenha contribuição de Euler. No entanto, em toda sua vida Euler não ocupou cargo de professor. Morreu subitamente aos 76 anos totalmente cego, deficiência esta não o fez parar de produzir.

> A cegueira poderia parecer um obstáculo intransponível para um matemático, mas (...) Euler conseguiu manter extraordinária atividade produtiva depois de sofrer essa perda. Ajudado por uma memória fenomenal e por um poder de concentração incomum e imperturbável, Euler

> continuou seu trabalho criativo com a ajuda de um secretário que anotava suas ideias, expressas verbalmente ou escritas com giz numa lousa grande. EVES (2004, p. 472).

Algumas notações usadas atualmente na álgebra, geometria e análise devem a Euler, e conforme BNCC,

> Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. BRASIL (2017, p. 539).

Destacamos ainda Parâmetros Curriculares nacionais do Ensino Médio - PCNEM,

> Ler e interpretar textos de Matemática. Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc). Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa. Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta. Produzir textos matemáticos adequados. BRASIL (2000, p. 46).

O matemático Carl Friedrich Gauss $(1777-1855)$, desde cedo demonstrou sua tendência para a matemática,

> Carl foi uma das mais notáveis crianças-prodígio, dessas que aparecem de raro em raro. Diz-se que com a idade de três anos detectou um erro aritmético no borrador de seu pai. Há uma história segundo o qual o professor de Carl na escola pública, quando ele tinha dez anos de idade, teria passado à classe, para mantê-la ocupada, a tarefa de somar os números de 1 a 100. Quase que imediatamente Carl colocou sua lousa sobre a escrivaninha do irritado professor. Quando as lousas foram finalmente viradas, o professor surpreso verificou que Carl tinha sido o único a acertar a resposta, 5050, mas sem fazê-la acompanhar de nenhum cálculo. Carl havia mentalmente calculado a soma da progressão aritmética $1+2+\cdots+100$ observando que $100+1=101, 99+2=101, 98+3=101$ e assim por diante com os cinquenta pares possíveis dessa maneira, sendo a soma portanto $50\times 101=5050$. Mais tarde, quando adulto, Gauss costumava jactar-se de ter aprendido a contar antes de aprender a falar. EVES (2004, p. 519).

Apesar de tamanha inteligência matemática, Gauss chegou a questionar se tornaria um filósofo ou um matemático, e a queda pela matemática prevaleceu, tornando um dos grandes nomes da área, ficando mais tarde conhecido como “o Príncipe dos Matemáticos”. Conforme EVES (2004, p. 521) “É famosa a afirmação de Gauss de que *a matemática é a rainha das ciências, e a teoria dos números é a rainha da matemática*. Já se descreveu Gauss como o *gigante matemático* que do alto de sua magnitude abarca num relance as estrelas e os abismos”. Gauss aos vinte e três anos de idade, na sua tese de doutorado apresentou a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, a saber:

"todo polinômio não constante com coeficientes complexos possui pelo menos uma raiz complexa", sendo que ele apresentou durante toda sua vida quatro demonstrações desse Teorema. Gauss possuía um diário matemático no qual anotava todas as suas descobertas, e, como era muito perfeccionista, só divulgava suas teorias quando estas estivesse totalmente acabadas, Gauss adotou como lema segundo EVES (2004, p. 521): "Pouca sed matura (Poucos, porém maduros)". E diante deste paradigma, muitas obras ficaram por publicar, dentre os quais destacamos a geometria não-euclidiana, tornando dessa forma um dos "inventores" desta geometria. Para Gauss a matemática deveria abarcar o mundo real.

Dentre as várias obras publicados por Gauss, destacamos a *Disquisitiones arithmeticae* (Investigações aritméticas), considerada o marco inicial da teoria dos números atual. Quão grande sua importância, esta obra tornou-se um clássico da literatura matemática.

> Essa obra célebre é a principal responsável pelo desenvolvimento da linguagem e notação do ramo da teoria dos números conhecido como álgebra das congruências que fornece um exemplo de classes de equivalência. A exposição começa com a definição: Se um número a divide a diferença entre dois números b e c, então b e c dizem-se congruentes, de outra forma incongruentes; e a chama-se o módulo. Qualquer dos números diz-se um resíduo do outro, no primeiro caso, um não-resíduo no segundo caso. A notação que Gauss adotou foi a que se usa hoje $b \equiv c \mod a$. (...) Nas *Disquisitiones* Gauss inclui o Teorema Fundamental de Aritmética.(...) Uma das contribuições de *Disquisitiones* foi uma prova rigorosa do teorema, conhecido desde os dias de Euclides, que diz que todo inteiro positivo pode ser representado de uma e só uma maneira (exceto pela ordem dos fatores)como produto de primos. BOYER (1996, p. 371-372).

Apresentemos agora algumas contribuições de Gauss no ensino atual,

> Examinar as noções de divisor e de múltiplo de um número natural. Ler, interpretar, resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos. GOIÁS (2018, p. 672).

No próximo capítulo apresentaremos uma fundamentação teórica dos conceitos matemáticos que foram aplicados no decorrer do desenvolvimento do projeto de intervenção, Capítulo 4.

3 ARITMÉTICA DOS NÚMEROS INTEIROS $\mathbb{Z}$ E ALGUMAS APLICAÇÕES

Abordaremos neste capítulo as sementes da Congruência, o alicerce da aritmética dos restos, conteúdo este que é desconhecido por muitos, em particular pelos discentes do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Destacamos que estes conceitos são imprescindíveis na aritmética e mostraremos algumas aplicações na matemática do cotidiano. Para maiores informações e detalhes adicionais à este capítulo poderão ser consultados as seguintes referências (ALENCAR-FILHO, 1981), (CADAR; DUTENHEFNER, 2015), (CARVALHO; MORGADO, 2015), (DOMINGUES, 1991), (HEFEZ, 2009), (HEFEZ, 2016), (IEZZI; DOMINGUES, 2003), (JURKIEWICZ, 2006), (SILVA, 2003).

3.1 Leis básicas da aritmética e algumas propriedades

O conjunto dos números inteiros designados por

$$\mathbb{Z} = \{\cdots,\ -n,\ -(n+1),\ \cdots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ n+1,\ \cdots\}\ ,$$

pode ser subdivididos no *conjunto dos inteiros não nulos* designado por $\mathbb{Z}^* = \{x \in \mathbb{Z} | x \neq 0\}$, no *conjunto dos inteiros não negativos*, designado por $\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq 0\}$, no *conjunto dos inteiros não positivos,* denotado por $\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} | x \leqslant 0\}$, e No *conjunto dos inteiros positivos* $\mathbb{Z}_+^* = \{x \in \mathbb{Z} | x > 0\}$ e por fim no *conjunto dos inteiros negativos* $\mathbb{Z}_-^* = \{x \in \mathbb{Z} | x < 0\}$. Ademais o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, provido das operações da adição e multiplicação satisfaz as seguintes propriedades,

Proposição 3.1.1. *A adição e multiplicação são* bem definidas*, isto é, dados* $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Z}$ *se* $a = b$ *e* $c = d$*, então* $a + c = b + d$*, analogamente* $a \cdot c = b \cdot d$

Proposição 3.1.2. *A adição e multiplicação são* comutativas*, ou seja, dados* $a,\ b \in \mathbb{Z}$ *então* $a + b = b + a$ *e* $a \cdot b = b \cdot a$

Proposição 3.1.3. *A adição e multiplicação são* associativas*, isto é, para todos* $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ *e* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Proposição 3.1.4. *A adição e a multiplicação possuem* elementos neutros*, sendo* 0 *o elemento neutro da adição, e* 1 *o elemento neutro da multiplicação. Assim, para todo* $a \in \mathbb{Z}$*, temos que* $a + 0 = a$ *e* $a \cdot 1 = a$

Proposição 3.1.5. *A adição possui* elemento simétrico*, isto é, para todo* $a \in \mathbb{Z}$*, existe* $b = (-a)$*, tal que* $a + b = 0$.

Proposição 3.1.6. *A multiplicação é* distributiva *em relação à adição, ou seja, para todos* $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$*, tem - se* $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$*.*

As demonstrações das proposições 3.1.1 à 3.1.6 podem ser consultadas, por exemplo em SILVA (2003, p. 47-50). Em $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ são satisfeitas as proposições de 3.1.1 à 3.1.6, dito de outra forma, dizemos que $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ satisfaz as leis básicas da aritmética, ou que $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ é um anel. Temos ainda que,

Proposição 3.1.7. *O anel* $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ *é um* domínio de integridade*, ou seja, se* $a,\ b \in \mathbb{Z}$ *tais que* $a \cdot b = 0$*, então* $a = 0$ *ou* $b = 0$*.*

Adicionalmente dizemos que $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ é um anel de integridade, satisfazendo a proposição 3.1.7 e a demonstração desse fato pode ser encontrada em HEFEZ (2016, p. 8). Recordemos que $\mathbb{Z}$ possui também uma relação de ordem, a relação menor que ou igual "$\leqslant$", vale ressaltar que $\leqslant$ é uma relação de ordem total sobre o conjuntos dos números inteiros, pois dados quaisquer $a,\ b$ inteiros, temos $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$. Por fim lembramos que a relação $\leqslant$ é compatível tanto na adição quanto na multiplicação por elementos de $\mathbb{Z}_+^*$. Para que nosso texto seja minimamente auto-contido, apresentamos o conceito de valor absoluto.

Definição 3.1.1. *Para todo* $a \in \mathbb{Z}$*, o valor absoluto de* a *(notação* $|a|$*) é definido pelas seguintes condições:* $|a| = a$ *se* $a \geqslant 0$*, e* $|a| = -a$ *se* $a < 0$*. Como exemplo temos:* $|-3| = -(-3) = +3$.

O valor absoluto de um número inteiro possui as seguintes propriedades e suas demonstrações podem ser encontradas em DOMINGUES (1991, p. 97).

Proposição 3.1.8. *Para quaisquer* $a,\ b$ *inteiros e* r *natural, temos:*

(i) $|ab| = |a||b|$*;*

(ii) $|a| = |-a|$

(iii) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$*;*

(iv) a desigualdade triangular:
$||a|-|b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|$.

Destacamos ainda uma importante propriedade de $\mathbb{Z}$, a Propriedade *Arquimediana*, cuja demonstração pode ser encontrada em HEFEZ (2016, p. 11-12).

Proposição 3.1.9. *Sejam* $a,\ b \in \mathbb{Z}$*, com* $b \neq 0$*. Então existe* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que* $nb > a$*.*

Além das proposições já descritas, o conjunto dos números inteiros possui uma importante propriedade que é o *Princípio da Boa Ordenação*, isto é, se um subconjunto S de $\mathbb{Z}$ é *limitado inferiormente*, então S possui um menor elemento. Uma importante consequência do *Princípio da Boa Ordenação* é o *Princípio de Indução Matemática*, e, a partir daqui diremos apenas Indução Matemática, ferramenta muito utilizada em algumas demonstrações.

Dados dois números inteiros a e b, diremos que a divide b, escrevendo $a \mid b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = c \cdot a$. Se a divide b, também se diz que a é um *divisor* de b, que b é um *múltiplo* de a, que a é um *fator* de b ou que b é *divisível* por a. A negação dessa sentença, representada por $a \nmid b$, significa que não existe nenhum número inteiro c tal que $b = c \cdot a$. Este inteiro c é indicado por $c = \frac{b}{a}$, e é conhecido como o quociente de b por a. Como exemplo temos que 2 divide 6, $2 \mid 6$, porque $6 = 2 \cdot 3$. Então o quociente 3 é indicado por $\frac{6}{2}$. Da mesma forma -5 divide 30, $-5 \mid 30$, porque $30 = (-5)(-6)$ e $-6 = \frac{30}{-5}$. Enquanto 3 não divide 10, $3 \nmid 10$, porque não existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $10 = 3 \cdot q$, ou seja, $3 \nmid 10$. Ademais $0 \mid 0$, pois, $0 = 0 \cdot n$, com n inteiro não nulo e $0 = \frac{0}{n}$.

Proposição 3.1.10. *A relação de divisibilidade em $\mathbb{Z}$ é reflexiva, transitiva, mas não é simétrica.*

A demonstração pode ser consultada em ALENCAR-Filho (1981, p. 71). Exemplificamos a não simetria, visto que $3 \mid 6$, pois, $6 = 3 \cdot 2$, enquanto que $6 \nmid 3$. A relação divide em $\mathbb{Z}$ possui algumas propriedades, conforme listamos abaixo e as devidas demonstrações podem ser consultadas em ALENCAR-Filho (1981, p. 69-71) ou HEFEZ (2016, p. 40-41).

Proposição 3.1.11. *Quaisquer que sejam os inteiros a, b e c, tem-se:*

(1) $a \mid 0$, $1 \mid a$ *e* $a \mid a$.

(2) Se $a \mid 1$, *então* $a = \pm 1$.

(3) Se $a \mid b$ *e se* $c \mid d$, *então* $a \cdot c \mid b \cdot d$.

(4) Se $a \mid b$ *e se* $b \mid c$, *então* $a \mid c$.

(5) Se $a \mid b$ *e se* $b \mid a$, *então* $a = \pm b$.

(6) Se $a \mid b$, *com* $b \neq 0$, *então* $|a| \leqslant |b|$.

(7) Se $a \mid b$ *e se* $a \mid c$, *então* $a \mid (b \cdot x + c \cdot y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

(8) a *divide* b *se, e somente se,* $|a|$ *divide* $|b|$.

(9) Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, *tais que* $a \mid (b \pm c)$. *Então* $a \mid b \Leftrightarrow a \mid c$.

(10) Sejam $a,b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Temos que $a-b$ divide $a^n - b^n$.

(11) Sejam $a,b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Temos que $a+b$ divide $a^{2n+1} + b^{2n+1}$.

(12) Sejam $a,b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. temos que $a+b$ divide $a^{2n} - b^{2n}$.

Como consequência da proposição 3.1.11, item 7, temos,

Proposição 3.1.12. *Dados a, b_k inteiros com $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Se $a \mid b_k$ para $k \in \{1,2,3,\cdots,n\}$ quaisquer que sejam os inteiros x_k tem-se que $a \mid (b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_kx_k)$.*

Demonstração. Mostraremos por indução em n.
(i) Iniciaremos para $n = 1$, queremos mostrar que se $a \mid b_1$, então $a \mid b_1x_1$.
De $a \mid b_1$, temos que $b_1 = a \cdot q_1$, para algum $q_1 \in \mathbb{Z}$, multiplicando em ambos os membros essa última igualdade por x_1 temos, $b_1x_1 = a \cdot \underbrace{q_1x_1}_{q'}$ (1), e segue o resultado para $n = 1$.
Verificaremos também para $n = 2$ ou seja, se $a \mid b_1$ e $a \mid b_2$, então $a \mid b_1x_1 + b_2x_2$.
Como $a \mid b_1$ por (1) temos $a \mid b_1x_1$ se, e só se, $b_1x_1 = a \cdot q_1$ (2)
$a \mid b_2$ e, novamente por (1) temos $a \mid b_2x_2$ se, e só se, $b_2x_2 = a \cdot q_2$ (3)
Somando membro a membro (2) e (3), obtemos $b_1x_1 + b_2x_2 = a \cdot q_1 + a \cdot q_2 = a(q_1 + q_2)$, ou seja, a proposição 3.1.12 também é válida para $n = 2$.
(ii) Suponhamos que a proposição 3.1.12 seja verdadeira para algum n inteiro positivo, queremos mostrar que é válida também para $(n+1)$. Nossa hipótese de indução é $a \mid (b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n)$, ou seja, $(b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n) = aq_n$. Agora se $a \mid b_k$ com $k \in \{1, 2, \cdots, n, n+1\}$, então existem x_k com $K \in \mathbb{Z}$, $K \in \{1, 2, \cdots, n, n+1\}$, tais que $a \mid b_kx_k$. Pela hipótese de indução temos $b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = aq_n$, e $b_{n+1}x_{n+1} = aq_{n+1}$. Somando membro a membro estas igualdades obtemos,

$$(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n) + b_{n+1}x_{n+1} = aq_n + aq_{n+1} = a(q_n + q_{n+1}).$$

Portanto, a proposição 3.1.12 é válida para todo n. □

Segundo HEFEZ (2016, p. 46), “mesmo quando um número $b \neq 0$ não divide o número inteiro a, Euclides, nos seus *Elementos*, utiliza, sem enunciá-lo explicitamente, o fato de que é sempre possível efetuar a divisão de a por b, com resto.” Sendo este enunciado abaixo e a demonstração pode ser encontrada em HEFEZ (2016, p. 46).

Teorema 3.1.1 (algoritmo da divisão ou de Euclides)**.** *Para quaisquer a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que*

$$a = b \cdot q + r, \text{ com } 0 \leqslant r \leqslant |b|.$$

Os elementos a, b, q e r são chamados respectivamente, de *divisor*, *dividendo*, *quociente* e *resto* da divisão de a por b. Evidentemente, se o resto da divisão de a por b for zero temos que b divide a. Como exemplo, o quociente e o resto da divisão de 35 por 6 são $q = 5$ e $r = 5$, pois, $35 \ = \ 6 \cdot 5 + 5$. O quociente e o resto da divisão de -35 por 6 são $q = -6$ e $r = 1$, visto que, $-35 \ = \ 6 \cdot (-6) + 1$. O quociente e o resto da divisão de 20 por 5 são $q = 4$ e $r = 0$, já que $20 \ = \ 5 \cdot 4 + 0$.

Recordemos que dados os números inteiros a e b distintos ou não, é sempre possível determinar um divisor comum de a e b, ou seja, um número d que satisfaz a condição que $d \mid a$ e $d \mid b$. Por exemplo os números $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3$ e ± 6 são os divisores comuns de 24 e 30. A definição abaixo, já constava nos *Elementos* por Euclides e é a base de sua Aritmética.

Definição 3.1.2. *Diremos que um número inteiro $d \geqslant 0$ é um* máximo divisor comum *(mdc) de a e b, se possuir as seguintes propriedades:*

- *d é um divisor comum de a e de b;*
- *d é divisível por todo divisor comum de a e de b, equivalentemente temos que se c é um divisor comum de a e de b, então $c \mid d$.*

Retornaremos ao exemplo anterior, temos que: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3$ e ± 6 são os divisores comuns de 24 e 30, e 6 é o máximo (maior) divisor comum de 24 e 30, assim, escrevemos, $mdc(24,30) = 6$.

Proposição 3.1.13. *Para todo $a,\ b \in \mathbb{Z}$ temos,*

- $mdc(0,a) = |a|, a \in \mathbb{Z}^*$*;*
- $mdc(1,a) = 1$*;*
- $mdc(a,a) = |a|$*;*
- $mdc(a,b) \ = \ mdc(b,a)$*;*
- $mdc(0,0)$ *não existe;*
- *Para todo $b \in \mathbb{Z}$ temos que $a \mid b$ se, e somente se, $mdc(a,b) \ = \ |a|$.*

A demonstração dessa proposição pode ser verificada em HEFEZ (2016, p. 74-75). Como exemplo temos $mdc(6,0) \ = \ 6$, porque todo divisor de 6 é também divisor de zero e, o maior divisor comum é o próprio 6. Outro exemplo, o $mdc(8,-10) = 2$, pois, os divisores de 8 são $-8,\ -4,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 4$ e 8, enquanto os divisores de -10 são $-10,\ -5,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 5$ e 10, note que a intersecção dos divisores de 8 e 10 é igual ao conjunto $\{-2,\ -1,\ 1\ \text{ e }\ 2\}$, logo, o maior divisor comum de 8 e de 10 é o número 2, designado assim por $mdc(8,10) = 2$. Ademais, vale a igualdade $mdc(-4,6) = mdc(4,6) = 2$.

O método acima para o cálculo do *mdc* de dois números inteiros quaisquer não é conveniente quando tratar de números grandes, sendo muito trabalhoso e para tal, utiliza-se outro método conhecido como Algoritmo do *mdc* de Euclides, método este usado por Euclides, e até hoje, apesar da era computacional, não foi aperfeiçoado.

Podemos então enunciar o seguinte resultado e sua demonstração consta em HEFEZ (2009, p. 66):

Lema 3.1.1 (O Lema de Euclides)**.** *Dados inteiros a e b, os divisores comuns de a e b são os mesmos que os divisores comuns de a e $b - c \cdot a$, para todo número inteiro c fixado.*

Proposição 3.1.14. *Se $a = bq + r$, então $mdc(a,b) = mdc(b,r)$.*

Ilustraremos o resultado acima para calcular o *mdc* de $a = 162$ e $b = 372$. Pela divisão euclidiana podemos escrever o número 372 da seguinte maneira $372 = 162 \cdot 2 + 48$. pela 3.1.14,

$$mdc(372,162) = mdc(372 - 162.2, 162) = mdc(48,162).$$

Repetindo o procedimento agora para $a = 48$ e $b = 162$, podemos escrever 162 na equação de Euclides da seguinte forma $162 = 48 \cdot 3 + 18$. Utilizando novamente 3.1.14 obtemos,

$$mdc(372,162) = mdc(162,48) = mdc(18,48)\ .$$

Repetindo o procedimento, agora a vale 18 e b vale 48 temos que $48 = 18.2 + 12$, o que nos remete a

$$mdc(372,162) = mdc(162,48) = mdc(48,18) = mdc(18,12).$$

Agora, para $a = 12$ e $b = 18$, a equação euclidiana fica da seguinte maneira: $18 = 12.1 + 6$, e novamente,

$$mdc(372,162) = mdc(162,48) = mdc(48,18) = mdc(18,12) = (12,6) = 6$$

O procedimento acima pode ser sistematizado, como segue:

Quociente	2	3	2	1	2
372	162	48	18	12	6=*mdc*
Resto	48	18	12	6	0

O Algoritmo de Euclides usado de trás para frente nos dá uma informação adicional fundamental, das igualdades acima podemos escrever:

$$\begin{aligned} 6 &= 18-12\times 1\ , \\ 12 &= 48-18\times 2\ , \\ 18 &= 162-48\times 3\ , \\ 48 &= 372-162\times 2\ . \end{aligned}$$

Fazendo as substituições dos restos, temos,

$$\begin{aligned} 6 &= 18-12\times 1 = 18-(48-18\times 2) \\ &= 18\times 3-48 = (162-48\times 3)\times 3-48 \\ &= 162\times 3-48\times 10 = 162-(372-162\times 2)\times 10 \\ &= 162\times 23-372\times 10\ . \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever $6 = mdc(372,162) = 162\times 23+372\times(-10)$. Este método nos remete ao importante resultado abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em DOMINGUES (1991, p. 107).

Proposição 3.1.15. *(Relação de Bézout) Dados quaisquer inteiros a e b, mas não ambos nulos, existem dois inteiros m e n tais que*

$$mdc(a,b) = a.n+b.m\ .$$

Se $mdc(a,b)=1$ diz-se que a e b são *primos entre si* ou que a é *primo com* b e vice-versa, em particular temos a seguinte proposição,

Proposição 3.1.16. *Dois números a e b são primos entre si se, e somente se, existem $n,m\in\mathbb{Z}$ de maneira que $an+bm=1$*

Demonstração. É uma consequência imediata da proposição 3.1.15 no caso em que $mdc(a,b) = 1$. □

Façamos a seguinte aplicação da proposição 3.1.16, verificar se 35 e 111 são primos entre si. Devemos escrever a combinação linear do $mdc(35,111)$:

Quociente	3	5	1	5
111	35	6	5	$1 = mdc$
Resto	6	5	1	0

Isolando os restos temos,

$$\begin{aligned} 1 &= 6-5\times 1 \ , \\ 5 &= 35-6\times 5 \ , \\ 6 &= 111-35\times 3 \ . \end{aligned}$$

Fazendo as substituições dos restos, obtemos,

$$\begin{aligned} 1 &= 6-1\times 5 = 6-1(35-6\times 5) = 6-35+6\times 5 = 6\times -1\times 35 \\ &= 6(111-35\times 3)-1\times 35 = 6\times 111-18\times 35-1\times 35 \\ &= 6(111)+35(-19) \ . \end{aligned}$$

Esclarecemos que o conceito de máximo divisor comum pode ser estendido para três ou mais números inteiros, por recorrência:

$$mdc(a_1,a_2,\cdots,a_n) = mdc(mdc(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}),a_n).$$

Assim, para determinar o mdc dos números 6, 4 e 8 fazemos $mdc\ (mdc\ (6,4),8) = mdc\ (2,8) = 2$.

Teorema 3.1.2. *Sejam a,b e c números inteiros. Se $a \mid bc$ e $mdc\ (a,b)=1$, então $a \mid c$.*

Demonstração. Se $a \mid bc$, então existe $e \in \mathbb{Z}$ tal que $bc = ae$ (1). Por hipótese temos que $mdc(a,b)=1$, então, pela proposição 3.1.15 existem $m,n \in \mathbb{Z}$ tais que $ma+nb=1$. Multiplicando por c ambos os lados dessa igualdade, obtemos, $c = mac+nbc$. Agora, substituindo bc por ae, conforme (1), temos que $c = mac+nae = a(mc+ne)$. Seja $k=(mc+ne)$ segue que $c = a\cdot k$, e, portanto $a \mid c$. □

Dentre as várias aplicações do mdc destacamos aqui a resolução de equações diofantinas lineares. A resolução de alguns problemas de aritmética recaem em uma equação do tipo $ax+by=c$, com $a,b,c \in \mathbb{Z}$ e x e y incógnitas determinadas em $\mathbb{Z}$, equação esta denominada equação diofantina em homenagem a Diofanto de Alexandria. No entanto, muitas equações desse tipo não possuem soluções nos inteiros, como por exemplo: $4x+6y=3$, pois, $4x$ e $6y$ são pares e é impossível que seja igual a 3. Vejamos então as condições para que uma equação diofantina possua soluções, e as demonstrações podem ser encontradas em HEFEZ (2016, p. 100) ou DOMINGUES (1991, p. 119).

Proposição 3.1.17. *Uma equação diofantina $ax+by=c$, em que $a\neq 0$ ou $b\neq 0$, admite solução se, e somente se, $d = mdc(a,b)$ divide c.*

Proposição 3.1.18. *Seja (x_0,y_0) uma particular solução da equação diofantina $ax+by=c$, com $a\neq 0$ e $b\neq 0$. Então essa equação admite infinitas soluções e o conjunto dessas soluções é: $S=\left\{(x_0+\frac{b}{d}t, y_0-\frac{a}{d}t) t\in\mathbb{Z}\right\}$ sendo $d = mdc\ (a,b)$.*

Proposição 3.1.19. *Seja x_0, y_0 uma solução da equação $ax+by=c$, com mdc $(a,b)=1$. Então, as soluções x,y em $\mathbb{Z}$ são $x=x_0+tb,\ y=y_0-ta;\ t\in\mathbb{Z}$*

Como aplicação destes resultados, resolveremos a 5^a questão do segundo exame nacional de qualificação 2018 (PROFMAT, 2018):

Problema 3.1.1. *Considere a equação diofantina linear $5x+3y=2018$.*
(a) Escreva a solução geral em $\mathbb{Z}$.
(b) Quantas soluções existem em $\mathbb{N}\cup\{0\}$?

Resolução: (a) Temos que $5\cdot(-1)+3\cdot(2)=1$, logo $5\cdot(-2018)+3\cdot(4036)=2018$. Fazendo a divisão euclidiana de -2018 por 3,
$-2018=3\cdot(-673)+1$.
Substituindo na equação acima, obtemos
$5\cdot(-3\cdot 673+1)+3\cdot(4036)=2018$
$5\cdot(1)+3\cdot(4036-5\cdot 673)=2018$
$5\cdot(1)+3\cdot(671)=2018$
Portanto, $x_0=1$ e $y_0=671$ é uma solução particular e a solução geral em $\mathbb{Z}$ é dada por

$$\begin{cases} x=1+3t \\ y=671-5t \end{cases} ;\quad \text{com } t\in\mathbb{Z}.$$

(b) A solução geral em $\mathbb{N}\cup\{0\}$ é dada por

$$\begin{cases} x=1+3t \\ y=671-5t \end{cases} \quad \text{onde } t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

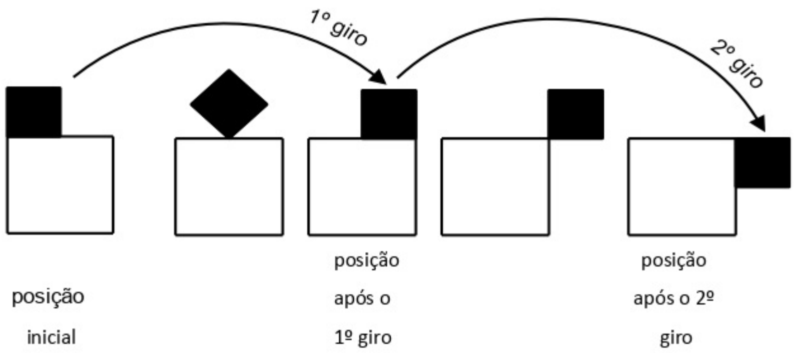
e $671-5t\geqslant 0$, logo $0\leqslant t\leqslant 134$.
Portanto, existem 135 soluções em $\mathbb{N}\cup\{0\}$. •

3.2 Crongruência e Divisibilidade

Iniciaremos esta seção com uma questão do nível 1 da primeira etapa das Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP de 2012:

Problema 3.2.1. *Um quadrado de lado 1 cm roda em torno de um quadrado de lado 2 cm, como na figura, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior.*

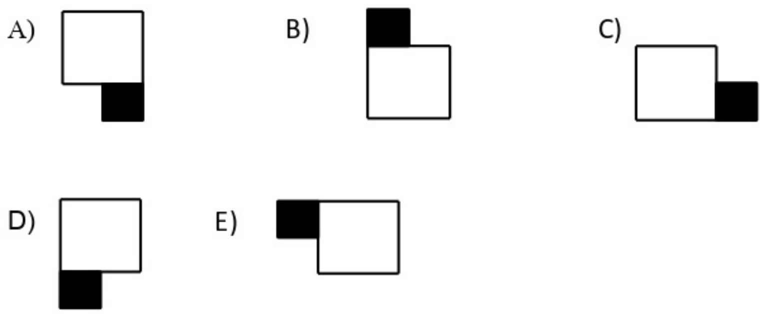
Figura 1 – Giros do quadrado menor



Fonte: OBMEP (2012, p. 2)

Qual das figuras a seguir representa a posição dos dois quadrados após o 2012*º* *giros?*

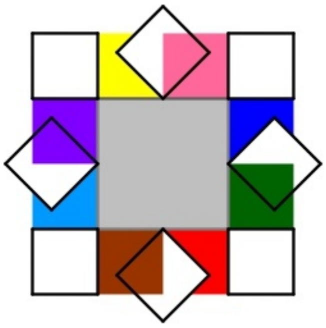
Figura 2 – Resultado depois de 2012 giros



Fonte: OBMEP (2012, p. 2)

Resolução:

Figura 3 – Buscando a resolução



Fonte: Autora

Analisando a figura acima, verificamos que após oito giros sucessivos o quadrado menor retorna à sua posição inicial (quadradinho amarelo). Como $2012 = 8 \times 251 + 4$, após o 2012^o giro o quadrado preto terá dado 251 voltas completas no quadrado maior e mais quatro giros, parando na posição que corresponde à alternativa A. •

A ideia do exemplo acima foi desenvolvida por Gauss e consiste na aritmética dos restos, pois, para saber a resposta não houve a necessidade de rodar o quadrinho preto 2012 vezes, necessitamos apenas do resto da divisão de 2012 por 8.

Definição 3.2.1. *Seja $m > 1$ um número natural. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escreve-se*

$$a \equiv b \mod m.$$

Quando a e b não são congruentes módulo m, podemos dizer também incongruentes, escreve-se

$$a \not\equiv b \mod m$$

Como exemplo podemos verificar se 15 é ou não côngruo a 8 módulo 7, para tal, podemos fazer a divisão euclidiana de 15 e de 8 por 7:

$$\begin{array}{r|l} 15 & \underline{\;7\;} \\ 1 & \;2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 8 & \underline{\;7\;} \\ 1 & \;1 \end{array}$$

Comparando os dois restos, percebemos que ambos são iguais a 1, com isso concluímos 15 é congruente a 8 módulo 7, ou seja $15 \equiv 8 \mod 7$. Outro exemplo, verificarmos se 31 é congruente a 29 módulo 5 e, repetindo o procedimento, isto é fazendo a divisão euclidiana de 31 e de 29 por 5 obtemos,

$$\begin{array}{r|l} 31 & \underline{\;5\;} \\ 1 & \;6 \end{array} \qquad\qquad\qquad \begin{array}{r|l} 29 & \underline{\;5\;} \\ 4 & \;5 \end{array}$$

Detectamos que os restos são diferentes, isto é, os restos da divisão de 31 e 29 por 5 são 1 e 4 respectivamente, logo, $31 \not\equiv 29 \mod 5$, ou seja, 31 não é congruente a 29 módulo 5.

Recordemos que a restrição da definição 3.2.1 de $m > 1$ se deve ao fato de que o resto da divisão de qualquer inteiro por 1 é sempre exata, isto é $a \equiv b \mod 1$ para todo inteiro a e b. Temos ainda um importante resultado, para verificar se dois inteiros a e b são congruentes, não sendo necessário efetuar a divisão euclidiana de a e b por m, para depois fazer a comparação dos restos, basta para tal aplicar a seguinte proposição.

Proposição 3.2.1. *Tem -se que $a \equiv b \mod m$ se e somente se, m divide $b-a$, isto é, $m \mid b-a$.*

Demonstração. De fato, pela divisão euclidiana temos:

$$a = mq + r \text{ com } 0 \leqslant r < m \text{ e } b = mq_1 + r_1, \text{ com } 0 \leqslant r_1 < m,$$

logo,

$$b - a = mq_1 + r_1 - mq - r = m(q_1 - q) + (r_1 - r).$$

Portanto, m divide $b-a$ se, e somente se, m divide $r_1 - r$. Por ser $0 \leqslant r_1 - r < m$, segue que m divide $b-a$ se e somente se, $r_1 - r = 0$, isto é, se e somente se $r_1 = r$. □

Como exemplo, para verificaremos se $35 \equiv 27 \mod 4$, basta examinarmos se a diferença $35-27$ é divisível por 4. Como $35-27 = 8$, e o resto da divisão de 8 por 4 é igual a 0, temos que $35-27 = 8 \equiv 0 \mod 4$, logo, $35 \equiv 27 \mod 4$.

Em consoante a definição, percebemos que a congruência módulo um inteiro m, é uma relação de equivalência ou seja, é reflexiva, simétrica e transitiva, logo, vale a seguinte proposição cuja demonstração pode ser encontrada em DOMINGUES (1991, p. 125):

Proposição 3.2.2. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tem-se:*

- $a \equiv a \mod m$
- *se* $a \equiv b \mod m$, *então* $b \equiv a \mod m$
- *se* $a \equiv b \mod m$ *e* $b \equiv c \mod m$, *então,* $a \equiv c \mod m$

Destacamos também os seguintes resultados,

Definição 3.2.2. *Um conjunto de m inteiros $m > 0$, forma um sistema completo de restos módulo m se dois quaisquer desses números, diferentes entre si, são incôngruos módulo m.*

Em decorrência 3.2.2 temos a seguinte proposição:

Proposição 3.2.3. *Se $r_1, \cdots, r_m$ é um sistema completo de resto módulo m, então todo inteiro a é côngruo a um e somente um dos r_i*

Demonstração. Aplicando a divisão euclidiana aos elementos a e m temos que $a = mq + r$, com $0 \leqslant r < m$, o que é equivalente a $a \equiv r \mod m$ e $r \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$. Por outro lado, se consideramos a divisão de $\{r_1, \cdots, r_m\}$ por m, fornecerá m restos, distintos dois a dois, e daí, para algum r_i temos $r_i = mq_i + r$, isto é, $r_i \equiv r \mod m$. Mas $a \equiv r \mod m$, então $a \equiv r_i \mod m$. Mas, se $a \equiv r_k \mod m$, implica que $r_i \equiv r_k \mod m$, isto é, pela definição de sistema completo de restos que $r_i = r_k$. □

Exemplificaremos os resultados mostrando que o conjunto $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ é um sistema completo de resíduos módulo 5. Sabemos que os possíveis restos da divisão de um inteiro a por 5 são os números $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Note que, $-2 \equiv 3 \mod 5$; $-1 \equiv 4 \mod 5$; $0 \equiv 0 \mod 5$; $1 \equiv 1 \mod 5$ e $2 \equiv 2 \mod 5$. O que nos mostra que dado um inteiro b, b é côngruo a somente um dos elementos do conjunto A. Logo, A é um sistema completo de restos módulo 5.

Salientamos que a noção de congruência, por ser uma relação de equivalência, comporta as operações de adição e multiplicação, conforme estudaremos a seguir.

Proposição 3.2.4. *Sejam a, b, c, d, $m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$.*

(i) Se $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$, então $a \pm c = b \pm d \mod m$;

(ii) Se $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$, então $ac \equiv bd \mod m$.

Demonstração. Suponhamos que $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$. Logo, temos que $m \mid b \pm a$ e $m \mid d \pm c$. Basta observar que $m \mid (b-a) \pm (d-c)$ e, portanto, $m \mid (b \pm d) - (a \pm c)$, o que prova essa parte da proposição acima.
Basta notar que $bd - ac = d(b-a) + a(d-c)$ e concluir que $m \mid bd - ac$ □

A proposição 3.2.4 nos leva a concluir que as congruências de *módulos iguais*, assim como nas igualdades, somam-se, subtraem e multiplicam-se membro a membro e como consequência segue o seguinte resultado:

Proposição 3.2.5. *Para todos* $n \in \mathbb{N}$, a, $b \in \mathbb{Z}$, *se* $a \equiv b \mod m$, *então tem-se que*

(i) $na \equiv nb \mod m$;

(ii) $a^n \equiv b^n \mod m$.

(i) Pode ser demonstrada por indução, mas faremos apenas (ii).

(ii). Provaremos por indução em n.

(i) é fácil ver que a proposição é verdadeira para $n = 1$.

(ii) Suponhamos que a proposição seja verdadeira para algum n natural, isto é, se $a \equiv b \mod m$ então $a^n \equiv b^n \mod m$. Queremos mostrar que é válido também para $(n+1)$. Por hipótese de indução $a \equiv b \mod m$, então, pela proposição 3.2.4 temos $a^n \cdot a \equiv b^n \cdot b \mod m$, ou seja, $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \mod m$. Isto é, a proposição é verdadeira para todo inteiro positivo n.

□

A proposição 3.2.4 ainda nos leva a concluir que, para as congruências vale o cancelamento em relação à adição, no entanto, não vale a lei do cancelamento para a multiplicação, pois, $2 \times 3 \equiv 2 \times 6 \mod 6$, mas, $3 \not\equiv 6 \mod 6$. Todavia, é possível efetuar o cancelamento de fatores de ambos membros da congruência se forem primos com o módulo, vejamos:

Proposição 3.2.6. *Sejam* a, b, c, $m \in \mathbb{Z}$, *com* $m > 1$ *e* $mdc(c,m) = 1$. *Temos que*

$$ac \equiv bc \mod m \Leftrightarrow a \equiv b \mod m$$

Como exemplo, se considerarmos a congruência $-35 \equiv 45 \mod 8$, podemos escrever -35 e 45 como $5 \cdot (-7)$ e $5 \cdot (9)$ respectivamente. Reescrevendo a congruência temos $5 \cdot (-7) \equiv 5 \cdot (9) \mod 8$. Notemos que $mdc(5,8) = 1$, logo, são primos entre si, usando a proposição 3.2.6, podemos cancelar o fator 5 de ambos os membros da congruência, o que nos fornece $-7 \equiv 9 \mod 8$. Outro exemplo, a congruência $44 \equiv 60 \mod 8$, como $44 = 4 \cdot 11$ e $60 = 4 \cdot 15$, reescrevendo a congruência temos $4 \cdot 11 \equiv 4 \cdot 15 \mod 8$. Note que não podemos cancelar o fator 4, pois $mdc\ (4,8) = 2 \neq 1$. E ainda, $11 \not\equiv 15 \mod 8$.

Em relação a multiplicação, listamos agora algumas propriedades da congruência:

Proposição 3.2.7. *Sejam* a, $b \in \mathbb{Z}$ *e* m, n, $m_1, \cdots, m_r$ *inteiros maiores do que* 1. *Temos que* *i) se* $a \equiv b \mod m$ *e* $n \mid m$*, então* $a \equiv b \mod n$*;*

ii) $a \equiv b \mod m_i$*, para todo*

$$i = 1, \cdots, r \Leftrightarrow a \equiv b \mod [m_1, \cdots, m_r]$$

;

iii) se $a \equiv b \mod m$*, então mdc* $(a, m) = $ *mdc* (b, m)*.*

Demonstração. (i) se $a \equiv b \mod m$, então $m \mid b - a$. Como $n \mid m$, segue -se que $n \mid b - a$. Logo, $a \equiv b \mod n$.
(ii)Se $a \equiv b \mod m_i$, para $i = 1, \cdots, r$, então $m_i \mid b - a$, para todo i. sendo $b - a$ um múltiplo de cada m_i, segue-se que $[m_1, \cdots, m_r] \mid b - a$, o que prova que $a \equiv b \mod [m_1, \cdots, m_r]$. Note que a recíproca decorre do item (i).
(iii) Se $a \equiv b \mod m$, então $m \mid b - a$ e, portanto, $b = a + tm$, com $t \in \mathbb{Z}$. Logo temos que $mdc\ (a, m) = mdc\ (a + tm, m) = mdc(b, m)$. □

E, para ilustrar a proposição 3.2.7 queremos achar o menor múltiplo positivo de 7 que deixa resto 1 quando dividido por 2, 3, 4, 5 e 6. Conforme 3.2.7, devemos encontrar a solução da congruência

$$7x \equiv 1 \mod [2, 3, 4, 5, 6], \text{ ou seja, } 7x \equiv 1 \mod 60.$$

Note que, esta congruência é equivalente a equação diofantina $7x - 60y = 1$ e pelo algoritmo de Euclides temos:

$$4 = 60 - 7 \cdot 8$$
$$3 = 7 - 4 \cdot 1$$
$$1 = 4 - 3 \cdot 1$$

Fazendo as substituições dos restos temos,

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 \cdot 1 \\ &= 4 - (7 - 4) \\ &= 2 \cdot 4 - 7 \\ &= 2\ (60 - 7 \cdot 8) - 7 \\ &= 7 \cdot (-17) - 60 \cdot (-2). \end{aligned}$$

Sendo $x_0 = -17$ e $y_0 = -2$ uma solução particular e, a solução geral é dada por $x = -17 + 60t$ e $y = -2 - 7t$, com $t \in \mathbb{Z}$. Portanto, o menor valor t, que seja a solução do problema, é $t = -1$. Então, $-17+60 = 43$. Segue-se então que o número procurado é $7 \cdot 43 = 301$.

Passaremos agora a algumas aplicações das congruências, dentre as aplicações da congruência destacamos aqui os critérios de divisibilidade ou de multiplicidade que são regras que nos informa se a divisão euclidiana de um número inteiro por outro inteiro fixado tem resto zero, em outras palavras, decide se um número inteiro é ou não múltiplo do inteiro fixado. Listamos neste, alguns critérios de divisibilidade,

Proposição 3.2.8. *Um número é divisível por* 2 *(ou par), quando seu último algarismo for* $0,2,4,6$ *ou* 8.

Demonstração. Seja n um número inteiro escrito no sistema decimal $n = n_r...n_1n_0 = n_r \cdot 10^r + ... + n_1 \cdot 10 + n_0$. Note que $10 \equiv 0 \mod 2$, logo, $n_i \cdot 10^i \equiv 0 \mod 2$, segue que $n \equiv n_0 \mod 2$, o que nos leva a concluir que n é divisível por 2 se, e somente se, n_0 é divisível por 2, ou seja, se n_0 for par. $\square$

Proposição 3.2.9. *Um número é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos for um número múltiplo de 3.*

Demonstração. Como $10 \equiv 1 \mod 3$, temos que $n_i 10^i \equiv n_i \mod 3$. Logo, se $n = n_r n_{r-1} \cdots n_0$ é um número representado na base 10, então, $n \equiv n_r + n_{r-1} + \cdots + n_0 \mod 3$. O que nos leva a concluir que n é divisível por 3 se, e somente se, $n_r + \cdots + n_0$ é divisível por 3. $\square$

Proposição 3.2.10. *Um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos for um número múltiplo de 9.*

Demonstração. Análogo a demonstração anterior $\square$

Proposição 3.2.11. *Um número é divisível por 4 quando os dois últimos algarismos for múltiplo de 4.*

Demonstração. Seja $n = n_r 10^r + \cdots + n_2 \cdot 10^2 + n_1 \cdot 10 + n_0$ um inteiro qualquer escrito na sua forma decimal. Mas n pode ser reescrito como: $n = 10^2 \cdot (n_r 10^{r-2} + ... + n_2) + n_1 \cdot 10 + n_0$. Note que: $10^2 \equiv 0 \mod 4$. Então, $n \equiv 10n_1 + n_0 \mod 4$. O que nos leva a concluir o resultado. $\square$

Proposição 3.2.12. *Um número é divisível por 5 quando termina em zero ou cinco.*

Demonstração. Sendo $n = 10 \cdot$ $(r_n...r_1)$ + r_0, como $10 \equiv 0 \mod 5$, então temos $n \equiv n_0 \mod 5$, percebemos então que n é divisível por 5 se, e somente se, n_0 o for, e portanto, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 5$. $\square$

Proposição 3.2.13. *Um número é divisível por 6 quando for ao mesmo tempo divisível por 2 e 3.*

Demonstração. Como $6 = 2 \cdot 3$, o resultado segue. □

Proposição 3.2.14. *Um número é divisível por* 10 *quando terminar em zero.*

Demonstração. Sendo $n = 10 \cdot (r_n ... r_1) + r_0$, como $10 \equiv 0 \mod 10$, então $n \equiv n_0 \mod 10$. Logo, n é divisível por 10 se, e somente se, r_0 o for, e portanto, $r_0 = 0$. □

Finalizaremos este capítulo com o seguinte problema.

Problema 3.2.2. *Se somarmos todos os números de* 1 *a* 2019 *qual o resto da divisão por* 10*?*

Resolução: A soma dos algarismos de 1 a 9

$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9+0) = 45$$

Notemos que,

$$\begin{gathered}
1+2+\cdots+10 = 55 \;\text{ resto }\; 5 \;\text{ na }\; \text{divisão} \;\text{ por }\; 10 \\
11+12+\cdots+20 = 155 \;\text{ resto }\; 5 \;\text{ na }\; \text{divisão} \;\text{ por }\; 10 \\
21+22+\cdots+30 = 255 \;\text{ resto }\; 5 \;\text{ na }\; \text{divisão} \;\text{ por }\; 10 \\
\vdots \\
2001+2002+\cdots+2010 = 20.055 \;\text{ resto }\; 5 \;\text{ na }\; \text{divisão} \;\text{ por }\; 10
\end{gathered}$$

Como $2010 = 201 \cdot 10$, que conforme acima são 201 blocos de 10 números, cuja soma deixa resto 5 na divisão por 10. Logo, só precisamos nos preocupar com este 5 e com o último algarismo dos nove últimos números:$5+1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 50$. O último algarismo é 0, pela proposição 3.2.14 temos que esse número é divisível por 10, logo, o resto da soma é 0.●

No próximo capítulo apresentaremos alguns destes resultados aplicados na execução do projeto de intervenção pedagógica.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O Projeto de intervenção pedagógica "Congruência no Ensino Fundamental" foi aplicado na Escola Municipal Professor José Pereira da Silva, em Campos Belos - GO, entre os dias 22 de maio à 11 de junho do corrente ano, no qual sou professora regente de matemática das turmas de 6^o, 7^o e 8^o anos no turno matutino. A metodologia usada foi qualitativa e pesquisa-ação. Qualitativa porque é de origem naturalista e segundo Bogdan,

> Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. (...) Contudo, mesmo quando se utiliza o equipamento, os dados são recolhidos em situação e complementados pela informação que se obtém através do contacto directo. (...) Entendem que as acções podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência. BOGDAN e BIKLEN (1994, p. 47-48)

Pesquisa-ação, pois todos os alunos estavam envolvidos na exploração da estratégia para a resolução dos problemas propostos em aritmética dos restos conforme Barbier,

> A pesquisa-ação submete seus resultados, previamente negociados dia a dia entre o pesquisador e os participantes da pesquisa, a toda a coletividade para provocar sua avaliação. A coletividade passa, então, à determinação das *possibilidades de melhoria*. No fim da pesquisa, pode ou não haver a redação de um relatório final; mas, de qualquer modo, há sempre discussão sobre os resultados e uma proposta de novas estratégias de ação. BARBIER (2007, p. 56).

Ressaltamos que incentivamos a resolução dos problemas propostos em sala de aula de forma empírica.

Neste projeto abordamos um conteúdo que não está diretamente presente na Matriz Curricular do Ensino Básico: A Aritmética Modular (Congruência). No entanto, este conceito e suas aplicações não exigem conhecimentos matemáticos além do programa escolar. Em suma, a divisibilidade é um dos subsídios imprescindíveis para o ensino da Congruência, de sorte que está presente nos conteúdos a serem ministrados no 6^o ano do Ensino Fundamental. Entendemos que além da divisibilidade estar presente na matemática acadêmica básica, ela também se encontra em diversas situações no cotidiano das pessoas, como por exemplo: ao se formar times de futebol (ao dividir os atletas formando dessa forma os times), na divisão de valor gasto por um grupo de amigos após saírem de uma lanchonete etc. Muitas vezes alguns alunos não sabem relacionar o empirismo do mundo real com a matemática vivenciada em sala, sendo esta considerada muito difícil pela maioria. Considere por exemplo o resultado do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) divulgado pelo Ministério da Educação - MEC,

> O desempenho médio dos jovens brasileiros de 15 anos na avaliação da disciplina foi de 377 pontos, valor significativamente inferior à média dos estudantes dos países membros da OCDE: 490. "Nos últimos 12 anos, o

> acesso ao ensino melhorou, mas não evoluímos em qualidade. A necessidade da reforma do ensino médio se traduz nos dados", disse o ministro. "Tivemos a divulgação do índice de desenvolvimento da educação básica (Ideb) e, agora, o Pisa. O desempenho em matemática piorou em relação a anos anteriores". MEC (2016a).

E ainda conforme MEC,

> Em matemática, o país apresentou a primeira queda desde 2003, início da série histórica da avaliação, e constatou que sete em cada dez alunos brasileiros, com idade entre 15 e 16 anos, estão abaixo do nível básico de conhecimento. O ministro da Educação, Mendonça Filho, lamentou os números. "Esse resultado é uma tragédia", afirmou. "E confirma exatamente o diagnóstico que fizemos, desde o início da nossa gestão, de que, apesar de termos multiplicado por três o orçamento do Ministério da Educação, em termos reais, o desempenho ficou estagnado ou até retrocedeu, como é o caso específico de matemática". MEC (2016b).

Fato este condizente com o resultado do último SAEB,

> A proficiência média nacional $(224,1)$ em matemática no 5^o ano está no intervalo referente ao nível 4 dessa escala de proficiência. Abaixo desse nível situam -se 33% dos estudantes, o que indica um menor desempenho em termos das habilidades avaliadas no teste. Desse nível até o nível 10, encontram - se 67%.(...) A proficiência média nacional $(258,4)$ em matemática no 9^o ano está no intervalo referente ao nível 3 dessa escala de proficiência. Abaixo desse nível situam - se 45% dos estudantes, o que indica um menor desempenho em termos das habilidades avaliadas no teste. Desse nível até o nível 9, encontram - se 55%. (...) A proficiência média nacional $(269,4)$ em matemática na 3^a série do ensino médio está no intervalo referente ao nível 2 dessa escala de proficiência. Abaixo desse nível situam - se 39% dos estudantes, o que indica um menor desempenho em termos das habilidades avaliadas no teste. Desse nível até o nível 10, encontram - se 61%. MEC-Inep (2017, p. 97-105).

Assim sendo, os discentes apresentam muitas dificuldades acerca de conteúdos básicos de matemática, cujo resultado foi constatado por meio de uma atividade diagnóstico (Apêndice A) composto por dez questões em que aplicamos em turma do 6^o, 7^o e 8^o anos daquela escola conforme mostra a tabela 1 abaixo:

Tabela 1 – Resultado da Atividade Diagnóstico

Número de acertos	Quantidade de alunos	Percentual(%)
0	16	37,2
1	4	9,3
2	6	13,9
3	3	6,9
4	3	6,9
5	2	4,6
6	3	6,9
7	3	6,9
8	2	4,6
9	0	0,0
10	1	2,3

Fonte: Autora

Estes dados nos remete a uma triste realidade, constatamos que é inferior a 50% a quantidade de alunos que não conseguem resolver "operações básicas" de matemática envolvendo apenas números naturais, vejamos ainda que, considerando um aproveitamento igual ou superior a 50% das questões, temos um total de apenas 11 alunos. Fato este em desacordo com as habilidades propostas para este nível de escolaridade segundo a BNCC,

> Com referência ao Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais. Os alunos devem dominar também o cálculo de porcentagem, porcentagem de porcentagem, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais. No tocante a esse tema, espera-se que saibam reconhecer, comparar e ordenar números reais, com apoio da relação desses números com pontos na reta numérica. BRASIL (2017, p. 269).

Ainda conforme o documento BNCC BRASIL (2017, p. 301) Uma das habilidades propostas para o início do Ensino Fundamental II, ou seja, 6^o ano é " Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora". Habilidades estas que envolvem as operações básicas da matemática (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais. Destacamos também a uol educação,

> O aluno da 2^a fase do ensino fundamental precisa ter domínio sobre as quatro operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão, a fim de obter sucesso nos conteúdos subsequentes, pois a partir do 6^o ano serão constantemente usadas em situações matemáticas mais complexas, tais como problemas e relações com situações cotidianas. NOÉ (–).

Acerca da dificuldade encontrada pelos alunos em relação a conteúdos básicos de matemática em particular divisão euclidiana entre números inteiros, conteúdo este relevante para o prosseguimento acadêmico do educando, é que elaboramos o projeto de forma a trabalhar congruência no Ensino Fundamental, objetivamos com isso, utilizá-la como metodologia do desenvolvimento do raciocínio lógico ou letramento matemático. Buscamos também fazer um elo entre o cotidiano e a matemática, conforme BRASIL (1998, p. 29) “O estabelecimento de relações é tão importante quanto a exploração dos conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, os conteúdos podem acabar representando muito pouco para a formação do aluno, particularmente para a formação da cidadania”. Assim, facilitou o entendimento e consequentemente o interesse dos alunos pela matemática, desenvolvendo dessa forma o letramento matemático tão necessário para atuar em sociedade. Que conforme a BNCC temos,

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso. BRASIL (2017, p. 266).

Os encontros para a realização do projeto foram concomitantes com o horário normal de aula (de 48 minutos cada), ou seja, o primeiro encontro utilizamos 02 aulas; o segundo e terceiro encontros foram necessários 03 aulas cada; o quarto, quinto e sexto 02 aulas cada; finalmente o sétimo encontro foram 03 aulas.

No primeiro encontro, programamos atividades de revisão dos conceitos de múltiplos e divisores de um número inteiro positivo, conforme referência (NERY, 2013) (Apêndice A), primos menores que 20 e decomposição de números em fatores primos, seguida de oficina de resolução de exercícios, objetivando dessa forma fazer com que os alunos compreendam que os números naturais são primos ou escritos de forma única como primos. Iniciamos a aula relatando a história do surgimento da congruência, e de acordo com a BNCC,

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais,(...) é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos. BRASIL (2017, p. 298).

Em seguida deu início a revisão de múltiplos e divisores de um número inteiro positivo. Mas, devido a dificuldade em operações básicas da matemática, revisamos também as duas operações (adição e multiplicação) e as duas relações (diferença e divisão). Este encontro foi marcado pela participação efetiva dos alunos, participação esta justificada pelo fato dos discentes estarem familiarizados com a ideia de múltiplos e divisores dos números naturais. Houve vários questionamentos dentre os quais destacamos: quantos são os números primos? E ainda, porque o 2 é o único número par que é primo? Salientamos que estas questões foram discutidas através de exemplos expostos no quadro branco. No decorrer da aula foi proposto algumas atividades (Apêndice A) para que os alunos fizessem, e, após algum tempo, estas foram discutidas corrigidas no quadro com a sua devida explicação.

No segundo encontro estava planejado apresentar um cartaz com números entre 1 e 2019 e em seguida pedir os alunos organizarem em uma tabela ou de outra forma conveniente os números divisíveis por $2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10$ e 11 e a partir daí, instigá - los a perceber as regras de divisibilidade e fazendo anotações das mesmas. E por fim, relembrar que se a divide b então existe c pertencente aos inteiros tal que $b = a \cdot bc$. Aquele encontro despertou o interesse dos alunos, e todos, sem exceção, estavam muito motivados em descobrir quais daquelas divisões seriam exatas, ou seja, com resto zero. A euforia foi enorme, pois eles conheciam algumas regras de divisibilidade, e, a regra da divisibilidade por 9 foi deduzida por eles quando comentamos a regra do 3. Todavia, apesar de conhecerem algumas regras, os alunos não faziam a conexão destas com as divisões que estavam fazendo. Fato este explicado e exemplificado em sala, levando assim, os alunos a fazerem a ligação dos conteúdos estudados e dessa forma tentarem descobrir as regras de divisibilidade. Até o final daquele encontro os alunos não conseguiram descobrir as regras de divisibilidade por $4, 7$ e 11, então, foi proposto à eles que pesquisassem em casa as regras que estavam faltando, objetivando dessa forma a sua assimilação bem como agilidade nos cálculos futuros.

O terceiro encontro, utilizamos atividades de (JURKIEWICZ, 2006) (Apêndice A), estratégia esta pautada no Documento Curricular de Goiás - DC-GO,

> (...) é fundamental trabalhar as ideias, os conceitos matemáticos intuitivamente antes da simbologia, antes da linguagem matemática.(...). O professor, ao trabalhar o conteúdo com significado, proporciona ao estudante sentir o que é importante saber, o que está sendo ensinado, para sua vida em sociedade ou que o conteúdo trabalhado lhe será útil para entender o mundo em que vive, valorizando a experiência acumulada dentro e fora da escola. GOIÁS (2018, p. 370)

E finalizamos com uma lista de exercícios de divisão euclidiana nos naturais escrita na forma da equação de Euclides e socialização da resolução dos mesmos. Antes realizamos a socialização da pesquisa sobre regras de divisibilidade requisitada na aula anterior. Houve muita concentração dos alunos e eles chegaram a conclusão de que a divisão na qual estão acostumados a fazer nada mais é que a divisão euclidiana, cujo nome só agora foi apresentado. Ainda neste encontro, abordamos diversos exemplos e a generalização do seguinte resultado “se a divide b então existe c pertencentes aos inteiros tal que $b = a \cdot c$”.

Com isso pode-se reforçar o nome de cada uma das parcelas da divisão, com enfoque maior no quociente e resto, e assim sendo apresentamos no quadro branco, usando símbolos matemáticos para a divisão euclidiana ($D = d \cdot q + r$), com $0 \leqslant r < d$. Logo depois, foi proposto aos alunos uma aula de resolução de atividades(Apendice A) sobre divisão dos números naturais na forma de equação de Euclides, seguida da resolução dos mesmos. No decorrer desta atividade, resolução da lista, os alunos mostraram muito dispostos e, o resultado de tamanha disposição foi a conclusão com êxito de todas as atividades propostas.

O quarto encontro, reservamos para desenvolver o cálculo do M.D.C. pelo algoritmo de Euclides. Foi apresentado aos alunos uma lista de atividades (Apêndice A). Apesar do interesse geral da turma, houve uma certa dificuldade em relação a cálculos corriqueiros, em particular, na divisão euclidiana, conteúdo este imprescindível para a atuação em sociedade, bem como, para o desenvolvimento do raciocínio lógico. Os alunos queriam descobrir quando as divisões sucessivas acabariam, houve até uma disputa entre eles para ver quem conseguia primeiro, e a comemoração por parte de quem alcançava o objetivo, despertava nos outros o interesse de também poder comemorar. Em suma, esta aula provocou um desafio genuíno nos alunos, e por consequência, um estímulo para o raciocínio lógico.

O quinto encontro, apresentamos e instigamos a resolução de equações diofantinas através do algoritmo de Euclides para o cálculo do MDC. Teve início com um problema exposto no quadro branco (Apêndice A) cuja resolução era uma equação diofantina. As soluções foram apresentadas através do algoritmo de Euclides, mas, o método de tentativas e erros foi adotado pelos alunos depois da sua explicação. Em seguida, foram apresentados algumas situações problemas contextualizada à possibilidade de vivência no dia a dia dos alunos(Apêndice A), fazendo dessa forma um elo entre a matemática acadêmica e o cotidiano dos discentes, favorecendo dessa forma a compreensão. Tais situações problemas despertou o interesse no conteúdo estudado por parte dos alunos, circunstância esta especificada em:

> O aspecto local está associado a matemática vivida no cotidiano no qual devemos saber quais situações serão cabíveis para determinada realidade local, com atividades do cotidiano facilitando o desenvolvimento de estratégias matemáticas para assimilação dos conteúdos. Além disso, a Matemática contextualizada localmente possibilita a formação de uma consciência cidadã capaz de se fazer presente em níveis cognitivo, social, cultural e político de forma participativa e de construção coletiva na comunidade local, com fortalecimento de práticas individuais e sociais que gerem ações e instrumentos em favor da promoção, da proteção e da defesa dos direitos humanos, da sustentabilidade, da educação financeira e de outros temas de interesse da comunidade.GOIÁS (2018, p. 368)

No sexto encontro, trouxemos para sala de aula duas equações diofantinas (Apêndice A) modelado no cotidiano dos discentes, a partir daí foi possível instigá-los a resolver as equações propostas, com objetivo de que os alunos fossem capazes de formular e resolver equações diofantinas por meio de tentativas e erros. As equações diofantinas propostas foram comentadas, corrigidas e discutidas e sua resolução socializada; neste momento foi apresentado aos alunos o padrão que existe nas soluções, isto é, quando uma incógnita aumenta, a outra diminui, acompanhando sempre a mesma regra das primeiras. Neste encontro os alunos em grupo, modelaram e propuseram duas situações-problemas dos quais foram resolvidos no quadro pelos próprios discentes (Apêndice A).

No sétimo e último encontro, estava proposto trabalhar a ideia de congruência; então iniciamos com um truque de divisibilidade disponível em (JURKIEWICZ, 2006) (Apêndice A), e um outro disponível em (HEFEZ, 2016) (Apêndice A) truques estes que despertou a curiosidade dos discentes. Em seguida realizamos a verificação que o dia daquela aula 11/06/2019 era terça-feira, usando para tal a congruência. Com isso, os alunos ficaram empolgados em descobrir o dia da semana que julgam importantes para eles, como por exemplo o dia da semana do nascimento. Então, explicamos o procedimento e devido algumas dificuldades apresentadas em operações elementares foi permitido o uso da calculadora. No entanto, instigamos e incentivamos a usar sempre que possível as regras de divisibilidade estudadas, estratégia esta elencada no DC - GO,

> Diversas estratégias de ensino deverão ser desenvolvidas, pelo professor, com a intencionalidade de formar esse cidadão integral, protagonista de sua história, preparando-o para agir de forma responsável e assim alcançar o sucesso tanto pessoal quanto profissional. Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores outros materiais tem um papel importante nesse processo. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão. GOIÁS (2018, p. 376).

Também este encontro transcorreu com a participação e empolgação de todos. Os alunos ficaram surpresos ao descobrirem que existe matemática, em particular congruência no cotidiano, dentre os quais exibimos e destacamos no número do CPF, código de barras e também nos relógios. Também neste encontro, reservamos para trabalhar problemas da prova e banco de questões da OBMEP (Apêndice A e o problema 3.2.1).

No que concerne, a aritmética dos restos facilita a autonomia e consequentemente a segurança dos alunos em resolver questões que envolva divisibilidade. Além do mais, este conteúdo é usado para fazer "truques", "mágicas" e "adivinhações", despertando o interesse, resultando dessa forma na compreensão e assimilação dos alunos pelo conteúdo em questão.

5 CONSIDERAÇÕES

Nesta abordamos a congruência como aplicação a divisão Euclidiana e divisibilidade. De um lado tínhamos a relevância do assunto e por outro, o insucesso da atividade diagnóstico aplicadas em turmas de 6^o, 7^o e 8^o anos, níveis estes que, conforme os documentos oficiais, deveriam possuir tais habilidades, propusemos então a trabalhar na turma do 8^o ano, e, nos colocando no lugar desses alunos, procuramos amenizar as supostas dificuldades encontradas pelos discentes em relação a "operações" elementares de matemática, pois entendemos que tais alunos já estudaram o conteúdo mencionado, e seria uma revisão diferenciada. Notemos o trabalho do educador Pólya,

> Para que o ensinar, por parte de um, resulte no aprender, por parte de outro, deve haver uma espécie de contacto ou conexão entre professor e aluno: o professor deve ser capaz de perceber a posição do aluno; ele deve ser capaz de assumir a causa do aluno. Daí o próximo mandamento: *Procure ler o semblante dos seus alunos; procure enxergar suas expectativas e suas dificuldades; ponha-se no lugar deles* PÓLYA (1987).

Diante de tais dificuldades, propusemos inicialmente trabalhar uma revisão dos números inteiros, números primos, seguida de divisores e múltiplos de números inteiros positivos. No decorrer dessa revisão, os discentes apontaram algumas dificuldades em "operações" elementares, dificuldades estas que não nos fizeram desistir, ao contrário, tínhamos em mãos a oportunidade de "orientar" os alunos na busca por conjecturas, na busca pelo pensar, mesmo que muitas vezes este pensar não estava correto. Fato este em conformidade com Pólya,

> Dê aos seus alunos não apenas informações, mas know-how, atitudes mentais, o hábito de trabalho metódico. Já que know-how é mais importante em Matemática do que informação, a maneira como você ensina pode ser mais importante nas aulas de matemática do que aquilo que você ensina PÓLYA (1987).

Salientamos que *know-how*, citado acima (PÓLYA, 1987) " é a destreza; é a habilidade em lidar com informações, usá-las para um dado propósito (...) pode ser descrito como um apanhado de atitudes mentais apropriadas (...) é em última análise a habilidade para trabalhar metodicamente."

Nos encontros destinados ao cálculo do *mdc* e resolução de equações diofantinas, percebemos um avanço no quesito "know-how", no entanto, ao solicitar que produzissem as questões para serem resolvidas no quadro, notamos grande dificuldades na criação do enunciado do problema. Diante desse fato, pedimos que se dividissem em dois grupos e produzissem uma questão cada.

Em seguida trabalhamos a aritmética dos restos, percebemos que os discentes se sentiram motivados pelo conteúdo, visto que os "truques" e "mágicas" despertaram neles a vontade de aprender, para assim aplicá-los em casa ou grupos de amigos, favorecendo dessa forma, os cálculos de "cabeça". Destacamos ainda, que os problemas de aritmética dos restos, provenientes das provas e do banco de questões da OBMEP trabalhados em sala, despertou o "pensar" dos alunos.

Enquanto professora da turma, percebemos que a aplicação da aritmética dos restos favoreceu o desenvolvimento do raciocínio lógico nos estudantes do 8^o ano que participaram do projeto. E fazendo uma análise de todo o processo, entendemos que cada faz necessário, sempre que possível, aplicação de projetos de intervenções pedagógicas nas escolas; projetos estes pautados na aprendizagem ativa, isto é, projetos que levem os discentes a pensarem, a produzirem e que os conduzem ao letramento matemático.

Referências

ALENCAR-FILHO, E. d. **Teoria elementar dos números**. Nobel, 1981. Disponível em: <http://www.matematicauva.org/disciplinas2/mat_novas_tecnologias/livro.pdf>. Acesso em: 05 ago. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 30.

BARBIER, R. **A pesquisa-ação**. [S.l.: s.n.], 2007. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 45.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto editora, 1994. Disponível em: <file:///C:/Users/USER/Desktop/Bogdan_Biklen_investigacao_qualitativa_e.pdf>. Acesso em: 26 out. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 45.

BOYER, C. B. **História da Matemática. 2ª edição**. [S.l.: s.n.], 1996. Citado 7 vezes nas páginas 14, 15, 19, 20, 21, 22 e 27.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**. Brasília, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 14 set. 2019. Citado 3 vezes nas páginas 14, 25 e 48.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM): ensino médio**. Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 15 out. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 26.

_____. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 04 out. 2019. Citado 11 vezes nas páginas 12, 14, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 47 e 48.

CADAR, L.; DUTENHEFNER, F. **Encontros de Aritmética**. [s.n.], 2015. Disponível em: <www.obmep.org.br>. Acesso em: 05 mai. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 72.

CARAÇA, B. d. J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. [S.l.]: Gradiva, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 16.

CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. d. O. **Matemática Discreta: coleção PROFMAT**. Rio de Janeiro: [s.n.], 2015. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 28.

COSTA, E. A. O homem, a matemática e a calculadora. **Fragmentos de Cultura**, n. 19, p. 175–178, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 16.

_____. Paradoxo de zenão. **Fragmentos de Cultura**, Goiânia, n. 7, p. 193–204, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 14, 18 e 20.

COSTA, E. A.; SANTOS, R. A. Números: dos naturais aos reais. **Proceedings do XXIII Semana do IME/UFG**, p. 10, 2008. Disponível em: <https://semanadoime.ime.ufg.br/up/34/o/min_eudes_ronaldo.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de aritmética**. [S.l.]: Atual Editora Ltda, 1991. Citado 7 vezes nas páginas 14, 17, 28, 29, 34, 35 e 39.

DOMINGUES-NETO, H. J. **Critérios de Divisibilidade**. [S.l.], –. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/msg/7svpyg59srok0.pdf>. Acesso em: 01 mai. 2019. Citado na página 68.

EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. [S.l.]: Unicamp, 2004. Citado 9 vezes nas páginas 14, 18, 19, 20, 22, 24, 25, 26 e 27.

GOIÁS. **Documento Curricular para Goiás (DC GO)**. Goiânia, 2018. Disponível em: <https://cee.go.gov.br/wp-content/uploads/2019/08/Documento-Curricular-para-Goi{'a}s.p>. Acesso em: 04 out. 2019. Citado 5 vezes nas páginas 14, 27, 49, 50 e 51.

HEFEZ, A. Iniciação à aritmética. **Sociedade Brasileira de Matemática**, 2009. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila1.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2019. Citado 4 vezes nas páginas 14, 28, 33 e 64.

_____. **Aritmética: Coleçao PROFMAT, 2a Ediçao**. Rio de Janeiro: [s.n.], 2016. Citado 11 vezes nas páginas 14, 17, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 51, 66 e 73.

IEZZI, G.; DOMINGUES, H. H. **Álgebra moderna**. São Paulo: [s.n.], 2003. Citado na página 28.

IFRAH, G. **Os números: A história de uma grande invenção**. Rio de Janeiro: [s.n.], 1985. Disponível em: <https://edmatematica1.files.wordpress.com/2014/07/georges-ifrah-historia-universal-dos-algarismos-vol1-11.pdf>. Acesso em: 07 set. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 16.

JURKIEWICZ, S. **Divisibilidade e Números Inteiros-Introdução à Aritmética Modular**. Rio de Janeiro: OBMEP - PIC, 2006. Disponível em: <https://miltonborba.org/OBMEP/APOST_1-Divis_Inteiros.pdf>. Acesso em: 01 mai. 2019. Citado 6 vezes nas páginas 28, 49, 51, 61, 63 e 66.

LIMA, e. l. Anpmat-associação nacional dos professores de matemática na educação básica. –. Disponível em: <https://anpmat.org.br/cafe-com-a-anpmat/entrevista-com-o-prof-elon-lima>. Acesso em: 22 out. 2019. Citado na página 12.

MEC. **Orientações Curriculares Para o Ensino Médio**. Brasília, 2006. 135 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 08 set. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 20.

_____. **Média de Matemática está entre as menores do Pisa**. Brasília, 2016. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=42771>. Acesso em: 10 out. 2019. Citado na página 46.

_____. **Média de Matemática está entre as menores do Pisa**. Brasília, 2016. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=42741>. Acesso em: 10 out. 2019. Citado na página 46.

MEC-INEP. **Relatório SAEB 2017**. Brasília, 2017. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/informacao-da-publicacao/-/asset_publisher/6JYIsGMAMkW1/document/id/6730262>. Acesso em: 10 out. 2019. Citado 3 vezes nas páginas 14, 21 e 46.

______. **Saeb evidências da edição 2017**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=94161-saeb-2017-versao-ministro-revfinal&category_slug=agosto-2018-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 23 out. 2019. Citado na página 12.

MILIES, C. P. **A matemática dos Códigos de Barras Detectando Erros,RPM**. [S.l.], 2009. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/68/12.html>. Acesso em: 01 mai. 2019. Citado na página 68.

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: [s.n.], 2013. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/introducao_a_historia_da_matematica.pdf>. Acesso em: 24 set. 2019. Citado 5 vezes nas páginas 14, 21, 23, 24 e 25.

NERY, c. Revisitando a aritmética,rpm. **RPM edi 80**, 2013. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/80/8.html>. Acesso em: 10 mai. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 59.

NOÉ, M. **Brasil Escola**. [S.l.], –. Disponível em: <https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/treinando-as-quatro-operacoes-basicas.htm>. Acesso em: 10 out. 2019. Citado na página 47.

OBMEP. **Banco de questões da OBMEP**. [S.l.], –. 73-74 p. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/168H-_Q07ytvda2HB7PTfTfa3-BiY2AJO/view>. Acesso em: 05 mai. 2019. Citado na página 69.

______. **Banco de questões da OBMEP**. [S.l.], –. 73-74 p. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1GzURIN_Aes4NVPtQfMPDyUtQs2FMbZQC/view>. Acesso em: 05 mai. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.

______. **Banco de questões da OBMEP**. [S.l.], –. 5 p. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/bq/bq2010.pdf>. Acesso em: 05 mai. 2019. Citado na página 69.

______. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. [S.l.], 2012. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/>. Acesso em: 14 out. 2019. Citado na página 37.

OLIVEIRA, G. G. **Congresso Nacional de Educação**. [S.l.], –. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV045_MD4_SA8_ID5394_08092015183759.pdf>. Acesso em: 05 mai. 2019. Citado na página 66.

PÓLYA, G. Dez mandamentos para professores,rpm. **RPM edi 10**, 1987. Disponível em: <http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/polya/10%20mandamentos%20para%20professores%20de%20matem%E1tica%20-%20george%20polya.pdf>. Acesso em: 26 out. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 52.

PROFMAT. **2 ENQ**. [S.l.], 2018. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/exame-nacional-de-qualificacao/>. Acesso em: 14 abr. 2019. Citado na página 36.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. d. **Tópicos de história da matemática**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 14, 22, 23 e 24.

SILVA, V. V. **Números: construções e propriedades**. Goiânia-Go: [s.n.], 2003. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

A Apêndice 1

Atividade diagnóstica aplicada em turmas do $6^o, 7^o$ e 8^o anos na Escola Municipal Professor José Pereira da Silva em Campos Belos - GO.

Problema A.0.1. *João foi em uma loja e comprou uma calça por* 40 *reais e uma camisa por* 24 *reais. Quanto João gastou nessa compra?*

Problema A.0.2. *Considerando o problema anterior, se João pagou a compra com uma nota de cem reais, quanto recebeu de troco?*

Problema A.0.3. *Uma praça tem* $4.300m$ *de extensão. Quantos metros percorre uma pessoa ao completar* 7 *voltas?*

Problema A.0.4. *Considerando o problema anterior, quantos metros percorre uma pessoa que completar* 65 *voltas?*

Problema A.0.5. *Usando o algoritmo usual calcule* 7×357.

Problema A.0.6. *Usando o algoritmo usual calcule* $1.000 - 597$.

Problema A.0.7. *A professora irá distribuir* 100 *bombons entre os seus* 26 *alunos. Quantos bombons cada um receberá?*

Problema A.0.8. *Usando o algoritmo usual calcule* $2074 \div 32$.

Problema A.0.9. *Sabendo que o dividendo é* 4567 *e* 23 *é o divisor, qual é o quociente e o resto dessa divisão?*

Problema A.0.10. *Maria comprou uma geladeira que custava* 2.520 *reais em* 12 *parcelas iguais e sem acréscimos. Qual o valor de cada parcela?*

Atividade extraída de (NERY, 2013), serviu de base para o primeiro encontro.

Sendo $21 = 3 \times 7$, podemos afirmar que 21 é múltiplo de 3 e 7, e tanto o 3 como o 7 são divisores de 21. Quando montamos a "tabuada" de algum número natural, estamos obtendo os seus múltiplos, por exemplo:

$$3 \times 1 = 3, 3 \times 2 = 6, 3 \times 3 = 9,$$

$$3 \times 4 = 12, 3 \times 5 = 15, \cdots$$

a tabuada do 3 gera os seus infinitos múltiplos: $M(3) = \{3, 6, 9, 12, 15, \cdots\}$.

Consideremos um número natural, por exemplo o 42, e todas as maneiras de escrevê-lo como um produto de dois números naturais:

$$42 = 1 \times 42 = 2 \times 21 = 3 \times 14 = 6 \times 7$$

. Reunindo esses fatores que "produzem" o 42, obtemos o conjunto dos divisores dele:

$$D(42) = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$$

.

Quando um número p é primo ele possui apenas dois divisores: $D(p) = \{1, p\}$. Exceto o zero, todo número natural n tem um conjunto finito de divisores, onde o menor elemento é o 1 e o maior é o próprio n.

A quantidade de divisores de um número natural é facilmente determinável, bastando para isso escrevê-lo na forma canônica, isto é, decompô-lo em fatores primos. Tomemos como exemplo o número 72: $72 = 2^3 \cdot 3^2$.
Para que um número natural seja divisor de 72, ele, decomposto, deve ser da forma $2^\alpha \cdot 3^\beta$, com α podendo ser $0, 1, 2$ ou 3, e β podendo ser $0, 1$ ou 2. Se α pode assumir 4 valores e β pode assumir 3 valores, o par de expoentes (α, β) pode produzir, aplicando o Princípio Multiplicativo, $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades e, portanto, o número 72 possui 12 divisores, que são:

$$2^0 \cdot 3^0, 2^0 \cdot 3^1, 2^0 \cdot 3^2, 2^1 \cdot 3^0, 2^1 \cdot 3^1, 2^1 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 3^0, 2^2 \cdot 3^1, 2^2 \cdot 3^2, 2^3 \cdot 3^0, 2^3 \cdot 3^1, 2^3 \cdot 3^2$$

Ou seja, $D(72) = \{1, 3, 9, 2, 6, 18, 4, 12, 36, 8, 24, 72\}$.
Analogamente, se um número natural n, decomposto em fatores primos, for tal que: $4n = p_1^\alpha \cdot p_2^\beta$ os divisores de n serão da forma $n = p_1^\alpha \cdot p_2^\beta$ com α podendo assumir os $\alpha + 1$ valores de 0 a α e β podendo assumir $\beta + 1$ valores de α a β e, portanto, esse número n terá $(\alpha + 1), (\beta + 1)$ divisores.

Problema A.0.11. *Quantos divisores positivos possui o número* 5400*? Quantos deles são ímpares?*

Problema A.0.12. *O número* 720 *possui vários divisores positivos. Quantos são eles?*

Extraído de (JURKIEWICZ, 2006), serviu de base para o terceiro encontro:

Vamos fazer as seguintes questões aos alunos: Como dividir 3 queijos para duas pessoas? Sem dúvidas eles responderão que cada pessoa ficará com $1,5$ queijo. Mostrar no quadro branco a operação que acabaram de fazer: $3 \div 2 = \frac{3}{2}$
Uma outra questão é:
Como dividir 27 livros para 4 alunos? Note que não podemos cortar um livro em pedaços como fizemos com o queijo. Nesse momento relembrar o Conjuntos dos Números Naturais e Números Inteiros. Esperar pela resposta dos alunos.
Em seguida, com a participação dos alunos e usando o quadro branco vamos colocar um livro de cada vez na pilha do aluno 1, depois na pilha do aluno 2, depois na pilha do aluno 3 e depois na pilha do aluno 4. Voltamos ao aluno 1 e assim por diante. Quando paramos? Paramos quando, depois de colocar um livro para o aluno 4, sobram menos do que 4 livros. No nosso caso, cada aluno ficou com 6 livros e sobraram 3 livros.
Retratar matematicamente no quadro a situação acima.

$$27 \div 4 = 6 \text{ com resto } 3.$$

Mostrar aos alunos:

i) O dividendo (D), no nosso caso o 27;

ii) O número que vai dividir o dividendo (chamado divisor (d)), no nosso caso o 4, e este tem que ser diferente de zero;

iii) O maior número de vezes que conseguimos colocar o divisor dentro do dividendo (chamado de quociente (q) ou resultado no caso o 6);

iv) E o número de unidades que resta (chamado de resto (r) e que deve ser menor que o divisor no nosso caso, o 3).

Escrever no quadro, resumidamente usando símbolos a situação acima:
$D = d \cdot q + r$; $r < d$; $d > 0$; com $D, d, q, r \in \mathbb{N}$ (1)
Mostrar que existe e são únicos o resto r e quociente q no algoritmo de Euclides. Falar que a equação de Euclides escrita conforme (1), nada mais é a divisão que todos estão acostumados a fazer.
Apresentar o seguinte problema:
Uma caixa de 33 lápis deve ser divididas entre 7 pessoas. Quando cada um receberá? Quantos lápis sobrarão? descreva a situação usando a equação de Euclides.
Resolução:

$33 \div 7 = 4$ com resto 5. Cada pessoa receberá 4 lápis. Sobrarão 5 lápis. A situação pode ser descrita por:

$$33 = 4 \cdot 7 + 5.$$

Problema A.0.13. 1*) Efetue as divisões e descreva o resultado na forma da equação de Euclides:*
(a) $44 \div 5$
(b) $44 \div 7$
(c) $353 \div 3$
(d) $483 \div 438$
(e) $1253 \div 125$
(f) $757 \div 75$
(g) $21 \div 10$
(h) $1210 \div 10$
(i) $210 \div 100$
(j) $1285 \div 100$
(k) $1285 \div 1000$
(l) $11285 \div 10$
(m) $157325 \div 10000$
(n) $157325 \div 1000$
(o) $57325 \div 100$
(p) $57325 \div 10$

2*) Efetue as divisões e descreva o resultado na forma da equação de Euclides. O que observa na sequência dos restos? (a)* $48 \div 4$
(b) $47 \div 4$
(c) $46 \div 4$
(d) $45 \div 4$
(e) $44 \div 4$
(f) $43 \div 4$
(g) $42 \div 4$
(h) $41 \div 4$
(i) $40 \div 4$
3*) Porque o resto tem que ser menor que o divisor?*

Extraído de (JURKIEWICZ, 2006), serviu de base para o quarto encontro.

Problema A.0.14. *Calcular, usando o algoritmo de Euclides:*
(a) $mdc(1176; 471)$
(b) $mdc(57; 36)$
(c) $mdc(175; 98)$
(d) $mdc(2536; 938)$
(e) $mdc(12578; 6248)$
(f) $mdc(1589; 3584)$

Exercícios extraído de (HEFEZ, 2009), referência para o quinto encontro:
Exemplo apresentado no quadro:

Problema A.0.15. *De quantos modos podemos comprar selos de cinco e de três reais, de modo a gastar cinquenta reais?*

Exercícios apresentados no quinto encontro (modelados no cotidiano dos alunos):

Problema A.0.16. *O aluno X dispõe de notas de* $R\$\ 10,00$ *e* $R\$\ 5,00$*, de quantas maneiras ele pode comprar* 50 *cremosinhos, sabendo que cada cremosinho é R\$* $1,00$*?*

Problema A.0.17. *O preço dos tapetes da mãe da Aluna Y são* $R\$\ 20,00$ *o tapete pequeno e* $R\$\ 40,00$ *o tapete grande. Se tenho* $R\$\ 100,00$*, de quantas maneiras posso comprar tapetes de* $R\$\ 20,00$ *ou* $R\$\ 40,00$*?*

Produzimos duas equações diofantinas baseada no cotidiano dos alunos para o sexto encontro:

Problema A.0.18. *A mãe do Aluno Z faz bolos de pote de* $R\$$ 10,00 *o menor e de* $R\$$ 15,00 *o maior. Aluno W possui* $R\$$ 60,00*. De quantas maneiras ele pode comprar dos dois tipos bolos?*

Problema A.0.19. *O armazém em frente a escola vende de bombons de* $R\$$ 1,00 *e de* $R\$$ 2,00*. Se Aluno K tem* $R\$$ 5,00*, de quantas maneiras ele pode comprar dos dois tipos de bombons?*

Situações problemas modeladas pelos alunos(sexto encontro):

Problema A.0.20. *Disponho de notas de* $R\$$ 5,00 *e de* $R\$$ 2,00*, de quantas maneiras posso comprar* 20 *cremosinhos? (cada cremosinho custa* $R\$1,00$*)*

Problema A.0.21. *Minha mãe faz unhas de* $R\$$ 10,00 *sem bordar e* $R\$$ 15,00 *as unhas bordadas, de quantas maneiras a professora pode fazer a unha sabendo que dispõe de* $R\$$ 50,00*?*

Truque de divisibilidade disponível em (JURKIEWICZ, 2006), apresentado no sétimo encontro:

Pense num número de 3 algarismos (por exemplo 347). Escreva ele duas vezes formando um número de 6 algarismos (no nosso exemplo 347347). Divida esse número por 13. (No nosso exemplo, o resultado é 26719). Divida esse número por 11. (No nosso exemplo, o resultado é 2429.) Divida esse número por 7. (No nosso exemplo, o resultado é$\cdots$347.) Experimente com seu número agora. Você verá que:

- as divisões são exatas e
- o número final é o que você escolheu

Por que isto acontece? Bem, se fizemos divisões exatas e obtivemos o mesmo número, é porque o número "duplicado" é múltiplo do número original. O que fizemos? 327327 é a mesma coisa que $1000 \times 327 + 327$. Ou melhor: $327327 = 327 \times 1001$. A fatoração do 1001 é igual a $1001 = 7 \times 11 \times 13$ Está explicado o "mistério". Ao duplicar o número (sempre de 3 algarismos), você multiplicou o número por 7, por 11 e por 13. Uma variação deste truque é usar um número de dois algarismos mas colocando um zero na duplicação:
$35 \longrightarrow 35035$
$35035 \div 13 = 2695$
$2695 \div 11 = 245$
$245 \div 7 = 35$

Este "truque" foi extraído (HEFEZ, 2016),

Problema A.0.22. *O Nove Misterioso. Peça para alguém escolher, em segredo, um número natural com pelo menos, três algarismos distintos (no sistema decimal, é claro). Peça, ainda, para que efetue uma permutação qualquer dos seus algarismos, obtendo um novo número, e que subtraia o menor do maior dos dois números. Finalmente, peça ao seu parceiro de jogo para reter um dos algarismos diferente de zero desse novo número e divulgar os restantes. É possível adivinhar o algarismo retido!*

Problema extraído de (OLIVEIRA, –)

O mágico pede a uma pessoa para escrever, em segredo, um número inteiro, de quatro ou cinco algarismos diferentes de 0, mas que não precisam ser diferentes entre si. Ressalta-se que o número de algarismos é irrelevante para esta brincadeira. Em seguida o mágico pede à pessoa para calcular a soma dos algarismos de seu número. Suponhamos que a pessoa escreveu o número 24543. A soma dos algarismos deste número é 18. O mágico pede, então, à pessoa para suprimir um dos algarismos de seu número, riscando-o e, com os algarismos que restaram, formar um novo número, alterando a ordem dos algarismos como quiser. No exemplo que estamos tomando, a pessoa pode suprimir, do seu número original, o algarismo 5 e, em seguida, com os algarismos restantes, formar o número 3442. Assim, o mágico solicita à pessoa para subtrair, desse novo número (encurtado e com seus algarismos embaralhados) a soma dos algarismos do número original. No nosso exemplo, a pessoa calculará $3442 - 18 = 3424$. O mágico pede à pessoa que lhe informe o resultado dessa subtração e, ouvido o resultado, revela imediatamente qual foi o algarismo suprimido do número original.

Atividades do último encontro.

Fazer a explicação de como descobre os dois últimos dígitos de um CPF, usando a congruência módulo 11, modelado de (DOMINGUES-NETO, –)

Apresentando um exemplo: suponhamos um CPF fictício 100 000 710. Para encontrar os dígitos de controle devemos multiplicar todos os nove primeiros dígitos respectivamente por $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9, e somar os resultados, no nosso exemplo 58. O décimo dígito, primeiro de controle, será o resto da divisão de 58 por 11, no nosso caso 3. Caso o resto seja 10, usar o dígito 0 como o décimo algarismo do CPF. Repita os passos para encontrar o próximo dígito de controle, mas agora, usando os 10 dígitos que se tem, isto é, fazer o produto dos $100\ 000\ 710 - 3$ respectivamente por $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9 e soma os resultados, no nosso caso, a soma é 76, sendo assim, o décimo primeiro dígito será o resto da divisão de 76 por 11, no nosso exemplo 10, logo o último número é igual a 0 (no caso particular de o resto ser 10, o último algarismo é igual a 0).
Para casa, pedir os discentes para verificar os dígitos verificadores do CPF do próprio aluno, caso possua, da mãe e do pai.

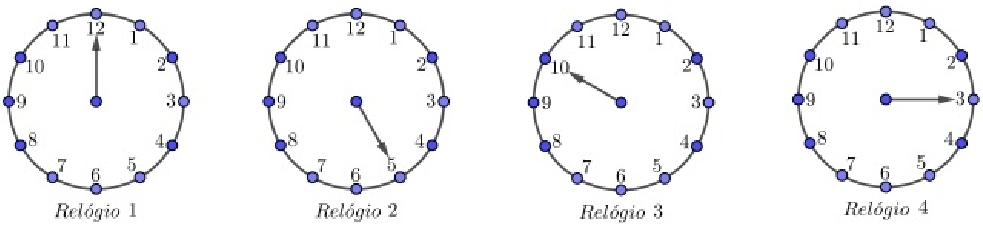
Código de Barras modelado de (MILIES, 2009),

Explicar aos alunos como descobrir o dígito verificador, isto é, o último algarismo do código de barras, para tal, utilizaremos o seguinte código de barras fictício: 709895020500. Devemos multiplicar todos os doze números por 1, 3, 1, 3, 1, 3, $\cdots 3$ e somar estes produtos; no nosso exemplo temos: $7 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 9 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3$ o que resulta 85, constatamos que faltam 5 para que esta soma seja múltiplo de 10, logo, 5 é o nosso dígito verificador, e portanto o último algarismo. (Alternativamente usa-se o resto da divisão por 10, para descobrir quanto falta para que a soma seja 10).
Levar para sala de aula várias embalagens, pedir aos alunos atestarem o dígito verificador destas.

Problema do banco de questões da OBMEP disponível em (OBMEP, –a) ou (OBMEP, –b) ou (OBMEP, –c).

Problema A.0.23. 1.000 *Relógios? A figura abaixo é o início de uma sequência lógica composta por* 1.000 *relógios.*

Figura 4 – Sequência lógica dos relógios



Fonte: OBMEP (–a, p. 18)

a) O ponteiro do Relógio 5 *aponta para qual número?*

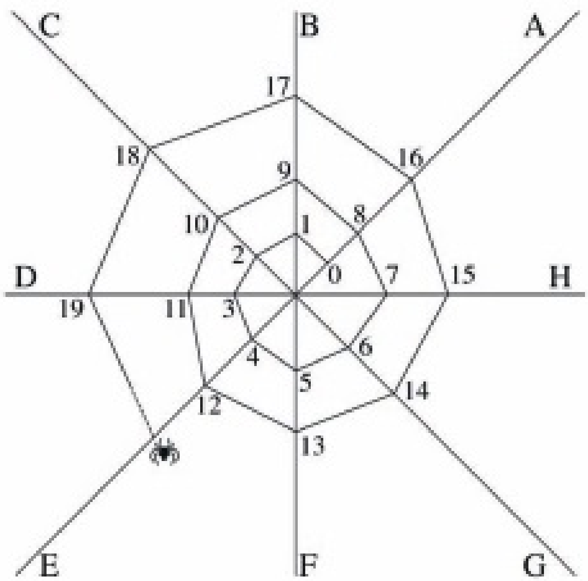
b) O ponteiro do Relógio 1.000 *aponta para que número?*

c) Perceba que de um Relógio para o seguinte o ponteiro (dos minutos) avança 25 *minutos, mas o ponteiro das horas não vemos, pois ele é invisível. Supondo que no Relógio* 1 *sejam* 12 *horas em ponto, que horas são no Relógio* 997*?*

Resolução: a) Como o ponteiro, de um relógio para o seguinte, percorre, no sentido horário, 5 casas (25 minutos), no Relógio 5 o ponteiro estará apontando para o 8.
b) Como "anda" de 5 em 5 e são 12 casas nos relógios, ele estará novamente no 12 depois de 60 casas, pois $mmc(5,12) = 60$, ou seja, depois de 12 giros completos. Então, partindo do Relógio 1, de 12 em 12 relógios, o ponteiro volta para a posição inicial (Relógios $1, 13, 25, 37, 49, \cdots$). Todos estes relógios são números que deixam resto 1 na divisão por 12. Se 1.000 dividido por 12 deixa resto 4, então no Relógio 997 o ponteiro está no 12 e, consequentemente, no Relógio 1.000 está no 3.
c) A cada 12 giros do ponteiro dos minutos, que equivalem a 5 voltas completas, o ponteiro das horas (invisível) "anda" 5 casas. Usando o item anterior, 997 dividido por 12, resulta em 83 como quociente e resto 1, ou seja, o ponteiro dos minutos para 83 vezes na posição inicial, sendo que em cada uma delas o ponteiro das horas "anda" 5 casas. Como $83 \cdot 5 = 415$ e 415 dividido por 12 deixa resto 7, são 7h no Relógio 997. •

Problema A.0.24. *A, B, C, D, E, F, G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a figura. A aranha continua seu trabalho. Sobre* *qual fio de apoio estará o número* 118 *?*

Figura 5 – Posição da aranha



Fonte: OBMEP (–b, p. 56)

A) B *B) D* *C) E* *D) G* *E) H*

Resolução: Resposta (D). Observe que são 8 fios de apoio que a aranha utiliza, numerados a partir do fio A iniciando com 0. Logo:

- sobre o fio A aparecem os múltiplos de 8;
- sobre o fio B aparecem os (múltiplos de 8) $+1$;
- sobre o fio C aparecem os (múltiplos de 8) $+2$;
- sobre o fio D aparecem os (múltiplos de 8) $+3$;
- sobre o fio E aparecem os (múltiplos de 8) $+4$;
- sobre o fio F aparecem os (múltiplos de 8) $+5$;
- sobre o fio G aparecem os (múltiplos de 8) $+6$;
- sobre o fio H aparecem os (múltiplos de 8) $+7$.

Na divisão de 118 por 8 encontramos resto 6 , o que significa que $118 = (\text{múltiplo de } 8) + 6$. Portanto, 118 está sobre o fio G. •

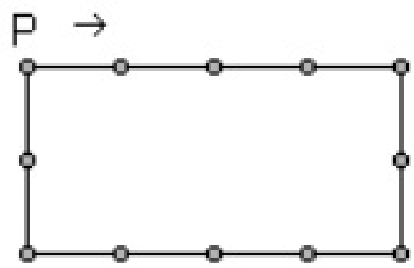
Problema A.0.25. *Ano bissexto – Um ano comum tem* 365 *dias e um ano bissexto,* 366 *dias. O ano bissexto, quando o mês de fevereiro tem* 29 *dias, ocorre a cada quatro anos.*
(a) Com frequência dizemos "Um ano comum tem 52 *semanas". Será correta essa afirmação? E para um ano bissexto? Justifique suas respostas.*
(b) Se um ano comum inicia numa terça-feira, então o ano seguinte iniciará em qual dia da semana?
(c) Responda a pergunta anterior para um ano bissexto.

Resolução: (a) Uma semana tem sete dias. Na divisão de 365 por 7 encontramos quociente 52 e resto 1. Logo, o ano comum tem 52 semanas e 1 dia. Portanto, a frase correta é "O ano comum tem cinquenta e duas semanas e um dia." Como o ano bissexto tem 366 dias, ele possui 52 semanas e 2 dias. Portanto, o correto é dizer "O ano bissexto tem cinquenta e duas semanas e dois dias."
(b) Se um ano comum inicia numa terça-feira, então a sua 52^a semana inicia numa terça e termina numa segunda, ou seja, a 52^a semana é dada por terça – quarta – quinta – sexta – sábado – domingo – segunda. Como esse ano tem 52 semanas e mais 1 dia, o último dia deste ano será uma terça. Logo, o ano seguinte iniciará numa quarta.
(c) No caso do ano bissexto, devemos considerar um dia a mais do que no item anterior. Logo, o seu último dia será uma quarta e, portanto, o ano seguinte iniciará numa quinta-feira. •

Problema extraído de (CADAR; DUTENHEFNER, 2015),

Problema A.0.26. *Pedro caminha ao redor de uma praça retangular onde estão dispostas 12 árvores, brincando de tocar cada árvore durante seu passeio. Se no início ele toca a árvore indicada na figura, e se ele anda no sentido da seta, indique que árvore ele estará tocando ao encostar em uma árvore pela centésima vez.*

Figura 6 – Praça retangular

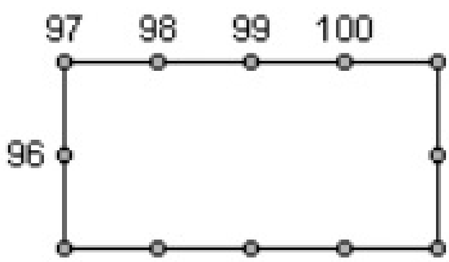


Fonte: CADAR e DUTENHEFNER (2015, p. 32)

Resolução:

Na figura, próximo de cada árvore escreva os números $1,2,3,\cdots$, correspondentes aos números de árvores tocadas por Pedro (a árvore indicada pela letra P recebe o número 1, a próxima o número 2, e assim por diante). Como existem 12 árvores na praça, na árvore indicada pela letra P estarão escritos os números $1,13,25,\cdots$ que são todos os números que deixam resto 1 quando divididos por 12. Dividindo 100 por 12, obtemos quociente 8 e resto 4, isto é, $100 = 8 \times 12 + 4$. Daí vemos que na centésima vez, Pedro estará tocando a árvore que está 3 posições à frente daquela indicada pela letra P.

Figura 7 – Resultado após a centésima vez do toque



Fonte: CADAR e DUTENHEFNER (2015, p. 32)

•

Fórmula do Algoritmo de Zeller, aplicado no último encontro para descobrir qual é o dia da semana correspondente a uma data passada ou futura. Extraída de (HEFEZ, 2016),

Teorema A.0.1. *s(d, m, A) = d + 1 +* $[\frac{13m-1}{5}]$ *+ A +* $[\frac{A}{4}]$ - $[\frac{A}{100}]$ *+* $[\frac{A}{400}] \mod 7$.

E ainda conforme (HEFEZ, 2016), A fórmula terá validade a partir do ano de 1.601 e ainda, devido a irregularidade do mês de fevereiro, para dar maior uniformidade à fórmula, o colocaremos no final da contagem dos meses, ou seja, o mês 1 de um ano será março, seguido de abril etc., até chegar aos meses 11 e 12, que são janeiro e fevereiro, e estes serão considerados como os meses 11 e 12 do ano anterior. Vamos ainda enumerar os dias da semana: domingo(1), segunda (2), terça (3) etc e sábado (7). Ressaltamos que consideramos apenas a parte inteira de cada fração. Com exemplo provaremos que o dia do último encontro 11/06/2019 foi em uma terça-feira, isto é, o resto da divisão por 7 é igual a 3. pelo que vimos (11/06/2019) = (11/04/2019). fazendo a substituição no teorema acima obtemos:

$$11+1+[\frac{13\cdot4-1}{5}]+2019+[\frac{2019}{4}]-[\frac{2019}{100}]+[\frac{2019}{400}] \mod 7 =$$

$$11+1+10+2019+504-20+5 \mod 7 =$$

$$2530 \mod 7 =$$

$$2530 \equiv 3 \mod 7.$$

B Anexo 1

ESTADO DE GOIÁS
PREFEITURA MUNICIPAL DE CAMPOS BELOS
SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO E CULTURA
ESCOLA MUNICIPAL JOSÉ PEREIRA DA SILVA

Governo Municipal de Campos Belos ADM. 2017/2020

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Foi realizado nesta unidade educativa, durante entre os meses de maio e junho de 2019, o Projeto Congruência no Ensino Fundamental, coordenado pela professora Jucélia Ferreira de Souza. Diante da relevância do projeto, autorizamos a utilização do nome desta Unidade Educativa, bem como imagens da instituição, nos termos estabelecidos pela Universidade Federal do Tocantins, Campus Arraias

Ronivaldo de O. R. Santos
Diretor da Escola Mun.
José Pereira da Silva

Prof. Me. Ronivaldo de Oliveira Rego Santos
Diretor Escolar

Campos Belos, 16 de outubro de 2019.