



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

JEDAÍAS SOUSA AQUINO

UM ESTUDO DAS CURVAS ELEMENTARES NA GEOMETRIA ANALÍTICA
PROPOSTA DIDÁTICA NO ENSINO MÉDIO COM *GRAFEQ*
EM UMA PERSPECTIVA PARA A ENGENHARIA CIVIL

PALMAS (TO)

2020

JEDAÍAS SOUSA AQUINO

**UM ESTUDO DAS CURVAS ELEMENTARES NA GEOMETRIA ANALÍTICA
PROPOSTA DIDÁTICA NO ENSINO MÉDIO COM *GRAFEQ*
EM UMA PERSPECTIVA PARA A ENGENHARIA CIVIL**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Me. Gilmar Pires Novaes.

PALMAS (TO)

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

- S725e Sousa Aquino, Jedaías.
UM ESTUDO DAS CURVAS ELEMENTARES NA GEOMETRIA ANALÍTICA: PROPOSTA DIDÁTICA NO ENSINO MÉDIO COM GRAFEQ EM UMA PERSPECTIVA PARA A ENGENHARIA CIVIL. / Jedaías Sousa Aquino. – Palmas, TO, 2020.
130 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2020.
Orientador: Gilmar Pires Novaes

1. Engenharia Civil. 2. Geometria Analítica. 3. GrafEq. 4. Softwares Educacionais. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

JEDAÍAS SOUSA AQUINO

UM ESTUDO DAS CURVAS ELEMENTARES NA GEOMETRIA ANALÍTICA -
PROPOSTA DIDÁTICA NO ENSINO MÉDIO COM GRAFEQ EM UMA
PERSPECTIVA PARA A ENGENHARIA CIVIL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
da Universidade Federal do Tocantins como
requisito parcial para obtenção do título de
Mestre – Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Me. Gilmar Pires Novaes.

Aprovada em 27 / 11 / 2020

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha (UFT)



Prof. Dra. Hellen Christina Fernandes Apolinário (UFT)



Prof. Dr. Paulo Henrique De Azevedo Rodrigues (UFG)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me dado forças, saúde e entendimento para superar os desafios encontrados nesta jornada.

À minha querida esposa Solange Brito e às minhas filhas Hillary e Nayla, que sempre me apoiaram e foram compreensivas nesta minha árdua lida de dedicação aos estudos.

Aos meus pais, aos meus avós, ao meu irmão caçula e às minhas irmãs, que sempre me falaram palavras de conforto e encorajamento.

Aos meus amigos, que sempre acreditaram em mim e me deram estímulo para fazer este curso.

Aos meus colegas de turma do PROFMAT-UFT em Palmas-TO pela troca de conhecimento, companheirismo, respeito e incentivos nesta caminhada.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) por ter me dado a oportunidade de realizar este sonho.

À Universidade Federal do Tocantins (UFT) em Palmas-TO por ter me acolhido por esses pouco mais de dois anos de curso.

Aos professores do PROFMAT, pois com eles aprendi bastante, que me deram suporte suficiente para que eu conseguisse chegar até o fim desta trajetória.

Ao meu orientador, professor Msc. Gilmar Pires Novaes, pelo conhecimento compartilhado e por ter me dado uma ótima orientação para a minha dissertação de mestrado.

RESUMO

As grandes mudanças no mundo globalizado estão cada vez mais obrigando os docentes a procurarem novas formas de lecionar estabelecendo estratégias para prender a atenção dos alunos, motivando-os aos estudos. Uma dessas estratégias que tem surtido efeito é a utilização das mídias tecnológicas em prol do ensino. Desde décadas passadas até agora, já foram desenvolvidos diversos aplicativos e softwares educacionais com o intuito de melhorar o ensino da Matemática. Assim, o presente trabalho tem por objetivo um estudo das curvas elementares na Geometria Analítica em uma perspectiva para a Engenharia Civil utilizando o software GrafEq, visto que muitos alunos entram e saem do Ensino Médio com grandes dificuldades, em se tratando da identificação e aplicação das linhas, curvas e regiões delimitadas por expressões algébricas elementares, gerando um tropeço para o estudo da Geometria Analítica, bem como outras disciplinas afins no Ensino Superior, em cursos como Engenharia Civil e Licenciatura em Matemática. Foi utilizada uma metodologia de cunho exploratório com uma revisão bibliográfica sobre o assunto pertinente, cujo trabalho final culmina em uma proposta didática que pode ser aplicada em turmas de alunos do Ensino Médio.

Palavras-chave: Engenharia Civil. Geometria Analítica. GrafEq. Softwares Educacionais.

ABSTRACT

The great changes in the globalized world are increasingly forcing teachers to look for new ways to teach, establishing strategies to hold the attention of students to motivate them to study. One of these strategies that has had an effect is the use of technological media in favor of teaching. Since decades past, several applications and educational software have been created in order to improve the teaching of mathematics. Thus, this work aims at a study of elementary curves in Analytical Geometry from a Civil Engineering perspective using GrafEq software, since many students enter and leave high school with great difficulties in dealing with the identification and application of lines, curves and regions delimited by elementary algebraic expressions generating a stumbling block for the study of Analytical Geometry and other related disciplines in Higher Education in courses such as Civil Engineering and Degree in Mathematics. An exploratory methodology was used with a bibliographic review on the pertinent subject, whose final work culminates in a didactic proposal that can be applied in high school students' classes.

Keywords: Civil Engineering. Analytical Geometry. GrafEq. Educational Softwares.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Descartes e Fermat	20
Figura 2 – Problema de Pappus	21
Figura 3 – Janela Cabri Geometry3 Plus	34
Figura 4 – Janela Cabri Geometry 3D	34
Figura 5 – Alunos de engenharia construindo planta baixa no piso.	38
Figura 6 – Tutorial de construção de planta baixa simples.	38
Figura 7 – Inserção da equação $y = ax + b$ no GrafEq.	40
Figura 8 – Inserindo os valores de a e b nas janelas de restrições.	40
Figura 9 – Feixe de retas paralelas originadas de uma mesma relação.	41
Figura 10 – Gráficos separados em cinco relações independentes.	41
Figura 11 – À esquerda, retas concorrentes geradas por uma mesma relação; à direita, retas concorrentes geradas por relações diferentes.	42
Figura 12 – Funções decrescentes.	43
Figura 13 – Função constante.	44
Figura 14 – Funções crescentes.	44
Figura 15 – Representações gráficas das funções $y > x + 5$, $y > x$ e $y > x - 4$	45
Figura 16 – Representação gráfica das funções $y > -x + 5$, $y > -x$ e $y > -x - 4$	46
Figura 17 – Regiões representadas pelas funções $y > 5$, $y > 0$ e $y > -4$	46
Figura 18 – Mesclagem de regiões tais que $a > 0$, $a < 0$ e $y > b$, respectivamente.	47
Figura 19 – Regiões representadas pela inequações $y < 2x + 4$, $y < 2x$ e $y < 2x - 3$	48
Figura 20 – Representações gráficas das inequações $y < -2x + 4$, $y < -2x$ e $y < -2x - 3$	49
Figura 21 – Regiões representadas pelas inequações $y < 4$, $y < 0$ e $y < -3$	49
Figura 22 – Mesclagem de regiões tais que $a > 0$, $a < 0$ e $y = b$, respectivamente.	50
Figura 23 – Diagramas de relações entre Domínios e Imagens das funções f e f^{-1}	51
Figura 24 – A função inversa g de uma função real de variável real f obtém-se de f por uma simetria em relação à reta $y = x$	51
Figura 25 – Análise das retas $y = 5$ e $x = 5$, em relação à reta $y = x$	53
Figura 26 – Análise das retas $y = 2x + 5$ e $x = 2y + 5$, em relação à reta $y = x$	53
Figura 27 – Retas (gráficos das funções f e f^{-1}) intersectando os eixos coordenados.	54

Figura 28 – Reta (gráfico da função $y = 2x + 5$) intersectando os eixos coordenados.	55
Figura 29 – Gráfico da função $y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2}$ intersectando os eixos coordenados.	56
Figura 30 – Deslocamento da reta da função inversa sobre o eixo x	56
Figura 31 – Rotação da reta da função inversa sobre o eixo x	57
Figura 32 – Regiões representadas pelas inequações $x > y - 2$, $x > y + 0$ e $x > y + 3$, respectivamente.	57
Figura 33 – Interseções das regiões representadas pelas inequações $x > y - 2$, $x > y$ e $x > y + 3$	58
Figura 34 – Representações gráficas das inequações $x > -y - 2$, $x > -y$ e $x > -y + 3$	58
Figura 35 – Representações gráficas das inequações $x > -4$, $x > 0$ e $x > 3$	59
Figura 36 – Regiões representadas pelas inequações $x < y - 2$, $x < y + 0$ e $x < y + 3$, respectivamente.	60
Figura 37 – Representações gráficas das inequações $x < -y - 5$, $x < -y$ e $x < -y + 4$	61
Figura 38 – Representações gráficas das inequações $x < -5$, $x < 0$ e $x < 4$	61
Figura 39 – Representações gráficas das expressões $y = 5$, $y > 5$ e $y < 5$	62
Figura 40 – Representações gráficas das expressões $x = -3$, $x > -3$ e $x < -3$	63
Figura 41 – Representações gráficas das inequações $4 > y > -2$ e $4 > x > -2$, respecti- vamente.	64
Figura 42 – Representações das curvas geradas pela equação $y = ax^2$, tal que $a > 0$	65
Figura 43 – Representações das curvas geradas pela equação $y = ax^2$, tal que $a < 0$	66
Figura 44 – Representação das curvas geradas pela equação $y = ax^2 + bx + c$, tal que a e b são fixos.	67
Figura 45 – Representação das curvas geradas pela equação $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$), tal que a e c são fixos.	69
Figura 46 – Representação individual das curvas geradas pela equação $y = ax^2 + bx + c$, tal que $a > 0$, $b \geq 0$, a e c são fixos.	69
Figura 47 – Representação individual das curvas geradas pela equação $y = ax^2 + bx + c$, tal que $a > 0$, $b \leq 0$, a e c são fixos.	70
Figura 48 – Representação das curvas geradas pela equação $y = ax^2 + bx + c$, tal que $a < 0$, a e c são fixos.	70
Figura 49 – Representação individual das curvas geradas pela equação $y = ax^2 + bx + c$, tal que $a < 0$, $b \leq 0$, a e c são fixos.	71

Figura 50 – Representação individual das curvas geradas pela equação $y = ax^2 + bx + c$, tal que $a < 0$, $b \geq 0$, a e c são fixos.	71
Figura 51 – Representação das curvas geradas pela função canônica $y = a(x - m)^2 + k$, tal que $m = 1$, $k = -1$, e $a \in \{1; 0, 1; 0, 01; 0, 0000001\}$	74
Figura 52 – Representação das curvas geradas pela função canônica $y = a(x - m)^2 + k$, tal que $m = 1$, $k = -1$, e $a \in \{-1; -0, 1; -0, 01; -0, 0000001\}$	74
Figura 53 – Representação das curvas geradas pela função canônica $y = a(x - m)^2 + k$, tal que $m = 5$, $k = -1$, e $a \in \{1, 10, 50, 250, 10^{17}\}$	75
Figura 54 – Representação das curvas geradas pela função canônica $y = a(x - m)^2 + k$, tal que $m = 5$, $k = -1$, e $a \in \{-1, -10, -50, -250, -10^{17}\}$	75
Figura 55 – Representação das curvas geradas pela função canônica $y = a(x - m)^2 + k$, tal que $a = 1$ e $k = 0$, e $m \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$	76
Figura 56 – Representação das curvas geradas pela função canônica $y = a(x - m)^2 + k$, tal que $a = 1$ e $m = 0$, e $k \in \{-6, -3, 0, 3, 6\}$	76
Figura 57 – Representação da região gerada pela inequação $y > x^2 + 2x - 3$	77
Figura 58 – Representação da região gerada pela inequação $y < x^2 + 2x - 3$	78
Figura 59 – Representação da região gerada pela inequação $y > -x^2 + 2x - 3$	79
Figura 60 – Representação da região gerada pela desigualdade $y < -x^2 + 2x - 3$	79
Figura 61 – Curva $x = ay^2 + by + c$ com $a < 0$, tais que $a \in \{-100, -5, -1, \frac{-5}{10}, \frac{-1}{10}, \frac{-1}{100}\}$	80
Figura 62 – Curva $x = ay^2 + by + c$ com $a > 0$, tais que $a \in \{\frac{1}{100}, \frac{1}{10}, \frac{5}{10}, \frac{15}{10}, 100\}$	81
Figura 63 – Representações das curvas $x = ay^2 + by + c$, tais que $a = 1$, $b = 2$, e $c \in \{-3, 0, 3\}$	81
Figura 64 – Representações das curvas geradas pela equação $x = ay^2 + by + c$, tal que $a > 0$, a e c fixos.	82
Figura 65 – Representação individual das curvas geradas pela equação $x = ay^2 + by + c$, tal que $a > 0$, $b \geq 0$, a e c fixos.	82
Figura 66 – Representação individual das curvas geradas pela equação $x = ay^2 + by + c$, tal que $a > 0$, $b \leq 0$, a e c fixos.	83
Figura 67 – Representação das curvas geradas pela equação $x = ay^2 + by + c$, tal que $a < 0$, a e c fixos.	83
Figura 68 – Representação individual das curvas geradas pela equação $x = ay^2 + by + c$, tal que $a < 0$, a e c fixos, e $b \leq 0$	84

Figura 69 – Representação individual das curvas geradas pela equação $x = ay^2 + by + c$, tal que $a < 0$, a e c fixos, e $b \geq 0$	84
Figura 70 – Representações das curvas da equação $x = ay^2 + by + c$, variando os sinais de Δ e o coeficiente a	86
Figura 71 – Representações das curvas geradas pela equação canônica $x = a(y - k)^2 + m$, tal que $a = 1$, $m = -3$, e $k \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$	87
Figura 72 – Representações das curvas geradas pela equação canônica $x = a(y - k)^2 + m$, tal que $a = 0, 2$, $k = 2$, e $m \in \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$	87
Figura 73 – Representação da região gerada pela inequação $x > y^2 + 3y - 2$	88
Figura 74 – Representação da região gerada pela inequação $x < y^2 + 3y - 2$	89
Figura 75 – Representação da região gerada pela inequação $x > -y^2 + 3y - 2$	90
Figura 76 – Representação da região gerada pela inequação $x < -y^2 + 3y - 2$	91
Figura 77 – Curva crescente da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e sua inversa relativa ao eixo de simetria $y = x$	93
Figura 78 – Curva decrescente da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e sua inversa relativa ao eixo de simetria $y = x$	93
Figura 79 – Representações gráficas das curvas crescente $x = 3 + \sqrt{y}$, decrescente $x = 3 - \sqrt{y}$, e suas respectivas inversas $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x}$ e $f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x}$, em relação ao eixo de simetria $y = x$	94
Figura 80 – Representações gráficas da equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$, tal que $a = b = 0$ e $k \in \{1, 4, 9, 16, 25\}$	95
Figura 81 – Representações gráficas das regiões geradas pelas inequações $x^2 + y^2 < R^2$ e $x^2 + y^2 > R^2$	96
Figura 82 – Representações gráficas de setores circulares gerados pelas inequações $R_m^2 < x^2 + y^2 < R_n^2$, tais que $R_m \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $R_n \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$	96
Figura 83 – Representações gráficas geradas pela equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, tal que $a = R = 2$ e $b \in \{2, 4, 6, 8\}$	97
Figura 84 – Representações gráficas geradas pela equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, tal que $b = R = 3$, e $a \in \{-4, -2, 0, 2\}$	98
Figura 85 – Representações gráficas geradas pela equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, tal que $a = 4$, $b = 3$, e $R \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$	98

Figura 86 – Representações gráficas da equação $\frac{(x-a)^2}{m^2} + \frac{(y-b)^2}{k^2} = 1$ com centro (a, b) na origem.	99
Figura 87 – Representações gráficas da inequação $\frac{(x-a)^2}{m^2} + \frac{(y-b)^2}{k^2} < 1$ com restrição $\frac{(x-a)^2}{z^2} + \frac{(y-b)^2}{n^2} > 1$	100
Figura 88 – Curvas da função $y = asin(bx) + c$, tal que a e b são fixos, e c está variando.	101
Figura 89 – Senoide e onda senoidal.	101
Figura 90 – Curvas da função $y = asin(bx) + c$, com ênfase na variação do período	102
Figura 91 – Curvas da função $y = asin(bx) + c$, com ênfase na variação de amplitude e imagem.	103
Figura 92 – Curvas da função $y = asin(bx) + c$, com ênfase na análise dos sinais de a e b	103
Figura 93 – Representação da região expressa por $y > asin(bx) + c$, $y < asin(bx) + c$ e $asin(bx) + cy > a'sin(b'x) + c'$	104
Figura 94 – Curvas da função $y = acos(bx) + c$, tal que a e b são fixos, e c está variando.	105
Figura 95 – Curvas da função $y = acos(bx) + c$, tal que a e b são fixos, e c está variando.	106
Figura 96 – Curvas da função $y = asin(bx) + c$, com ênfase na variação do período.	107
Figura 97 – Curvas da função $y = asin(bx) + c$, com ênfase na variação da amplitude e da imagem.	107
Figura 98 – Representação da região expressa por $y > acos(bx) + c$, $y < acos(bx) + c$ e $acos(bx) + c > y > a'cos(b'x) + c'$	108
Figura 99 – Traços do plano cartesiano sobre o desenho.	109
Figura 100–Região losangular amarela da placa.	110
Figura 101–Inserção da região retangular preta da placa.	111
Figura 102–Inserção dos círculos na região retangular preta da placa.	112
Figura 103–Faixa preta losangular formada a partir de sobreposições.	113
Figura 104–Figura formada pela sobreposição das regiões no GrafEq.	113
Figura 105–Figura formada pela sobreposição regiões no GrafEq- Projeto 2.	114
Figura 106–Figura formada a partir das regiões sobrepostas no GrafEq- Projeto 3	114

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	GEOMETRIA ANALÍTICA	20
2.1	Uma breve abordagem histórica	20
2.2	Introdução aos tópicos de Geometria Analítica	24
2.2.1	O plano cartesiano	24
2.2.2	A distância entre dois pontos	25
2.2.3	O ponto médio de um segmento	26
2.2.4	Condição de alinhamento de três pontos	27
2.2.5	A equação geral da reta e a função afim	28
2.2.6	Equação reduzida da circunferência	29
2.3	Uma reflexão sobre a avaliação do ensino da Matemática no Brasil	30
3	ALGUNS SOFTWARES DE GEOMETRIA: UMA APLICABILIDADE AO CONTEÚDO DE GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO BÁSICO	32
4	COLETÂNEAS DE ATIVIDADES PROPOSTAS	37
4.1	Atividades práticas aplicando conceitos de Geometria relacionados à Engenharia Civil	37
4.2	Análise do gráfico da função afim $y = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, utilizando o software GrafEq	39
4.3	Análise do gráfico da função quadrática ($y = ax^2 + bx + c$), tal que $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, com auxílio do software GrafEq	64
4.4	Análise dos gráfico da equação da circunferência $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, tal que $a, b, R \in \mathbb{R}$, $R > 0$, e das funções que descrevem as regiões internas e externas a ela, com auxílio do software GrafEq	94
4.5	Análise dos gráficos das funções $y = asin(bx) + c$ e $y = acos(bx) + c$, tal que $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, e análise das regiões delimitadas por essas funções com auxílio do software GrafEq	100
4.6	Trabalhando desenho artístico no GrafEq	108
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	115
	REFERÊNCIAS	117

APÊNDICE A – COLETÂNEAS DE ATIVIDADES PROPOSTAS-PARTE	
I	121
APÊNDICE A – COLETÂNEAS DE ATIVIDADES PROPOSTAS- PARTE	
II	123
ANEXO A – SUGESTÃO DE LINKS COMPLEMENTARES RELACIONADOS À GEOMETRIA ANALÍTICA E ENGENHARIA CIVIL PARA AJUDAREM NO DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES PROPOSTAS EM SALA DE AULA OU NO LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA	129

1 INTRODUÇÃO

Segundo (LIMA, 2014), a Geometria Analítica preocupa-se de fato em traduzir o conjunto de pontos de um gráfico para o conjunto dos números reais ou vice-versa. Assim, os pontos $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ que formam a unidimensão da reta retratam os elementos de \mathbb{R} , os pontos $P(x_n, y_n)$ que formam a bidimensão do plano expressam os elementos de \mathbb{R}^2 , e os pontos $P(x_n, y_n, z_n)$ que constituem a tridimensão do espaço inferem os elementos de \mathbb{R}^3 , esse processo lógico pode ser estendido para pontos P em um espaço com n variáveis representando elementos de \mathbb{R}^n no espaço euclidiano n -dimensional finito. Logo, no plano e no espaço, as equações descrevem as linhas e as superfícies, havendo, nesse caso, uma conexão entre a Geometria Analítica e a Álgebra, sendo possível resolver diversos problemas geométricos por meio da Álgebra ou problemas algébricos por meio da Geometria Analítica. Além disso, (LIMA, 2014) afirma que esse ponto de vista da união entre a Álgebra e a Geometria Analítica em si provocou uma revolução na Matemática trazendo avanços significativos e importantes aplicações da Geometria Analítica.

Ao investigar diversos trabalhos que tratam do ensino da Geometria Analítica, torna evidente a preocupação em aplicar diferentes métodos de ensino para que o aluno possa compreender de fato o conteúdo da Geometria Analítica, pois é um dos conteúdos de grande valia para a construção do conhecimento humano e sua aplicação está presente desde o mais singelo jogo de Batalha Naval, ou em uma organização de uma turma de alunos dispostos em fileiras com seus assentos e mesas na sala de aula, desde simples mapas até grandiosas obras arquitetônicas na construção civil. Além do mais, a Geometria Analítica é um dos pilares para os cursos das Engenharias Civil, Produção, Alimentos, Mecânica etc., cursos como Licenciaturas em Matemática, Física, Química, e outros cursos das áreas afins.

Na sala de aula, é notório que muitos alunos encontram obstáculos no domínio da representação das curvas de gráficos por meio de equações e\ou também da representação dessas equações por meio da visualização das curvas. Portanto, esses estudantes adquiriram, ao longo da carreira estudantil, pouco entendimento da essência das equações, inequações, funções e suas interpretações geométricas. Tais deficiências de conteúdos iniciam-se no Ensino Básico, proliferando-se até o Ensino Superior. Já logo nos 7º e 8º anos do Ensino Fundamental, em que o estudo da Álgebra e da Geometria começam a ficar intensos, é comum grande parte dos alunos oferecerem resistência aos conteúdos, a introdução de letras no processo de resolução e

representação de situações do cotidiano, muitas vezes, ainda é muito abstrata ao entendimento do aluno.

Na etapa dos anos finais do Ensino Fundamental, a Geometria continua sendo um dos conteúdos que mais são deixados para serem vistos no fim do ano letivo, e na maioria das vezes nem sequer são trabalhados, isto acarreta, a cada ano, no aumento do abismo entre o que o aluno aprendeu e o que realmente ele deveria ter aprendido, gerando consequências desastrosas no ensino-aprendizagem. Pesquisadores desse aspecto, como (CHRISTO; RESENDE; KUHN, 2017), consideram que a falta de domínio de conteúdos algébricos e geométricos constitui boa parte dos motivos que levam à evasão de estudantes dos cursos de engenharias e até mesmo de licenciaturas das áreas de exatas, o que se reflete também no sistema de avaliação educacional e no sistema socioeconômico do país. Daí, os incentivos e os esforços para explorar essas áreas da Matemática devem ser iniciados cedo. Remete-se, assim, a uma ramificação da problemática deste trabalho: como incentivar o jovem a estudar Matemática?

Nesse sentido, em busca de uma resposta a questionamentos como este, é que o presente trabalho está direcionado para um estudo das curvas elementares da Geometria Analítica no Ensino Médio com uma perspectiva para a Engenharia Civil, visto que, a álgebra e a geometria, juntas, tem um papel fundamental para a Geometria Analítica, e esta propicia pilares para os cursos de algumas Engenharias, inclusive a Civil, constituindo-se em uma possível resposta para uma indagação natural que surge no subconsciente do aluno e até mesmo em uma discussão do conteúdo na sala de aula: para que estudar Geometria Analítica?

A Geometria Analítica é uma disciplina importante para uma gama de profissões, em particular, Engenharia Civil. O tema escolhido é de suma importância para a sociedade, tanto no âmbito acadêmico quanto no âmbito econômico, pois é preciso repensar em algo a fim de diminuir a evasão de alunos do curso de Engenharia Civil, levando em consideração que, além de outros fatores, tais como financeiro e indecisão profissional, a falta de domínio dos conteúdos pré-requisitos para cursar Engenharia Civil é fortemente um fator que contribui para a evasão escolar. Além da evasão de alunos do curso de Engenharia Civil, outro fator preocupante é a enorme carência de bons profissionais do setor de construção civil no mercado de trabalho. Bons profissionais ajudam o país a crescer economicamente, no entanto, a base curricular desses alunos (futuros engenheiros) deve ser sólida para que isto se concretize.

Nesse sentido, é interessante tentar mostrar aos alunos da educação básica ao menos uma aplicação real do conteúdo matemático ministrado e também apontar a importância dos objetos de

conhecimento para os desafios futuros, cujas habilidades serão cobradas para poderem entender conteúdos mais complexos nas grades de alguns cursos superiores. Ressaltar a correlação da Geometria Analítica no Ensino Médio com a construção civil de maneira didática pode ser uma das tentativas de motivar os alunos para o cálculo, visto que, é um conhecimento prévio que facilita o entendimento sobre vetores, cálculo de vigas ou colunas, momentos de força e tração, situações corriqueiras na construção residencial e predial.

Um estudo sobre linhas e curvas das equações, funções e inequações com a composição de figuras e símbolos artísticos, numa proposta desafiadora como problema de aplicação pode contribuir no desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático necessário para o estudo da Geometria Analítica. Muitos alunos precisam de motivação para estudar, essa motivação requer meios diversificados em uma organização de propostas didáticas, sejam elas por resolução de problemas, ou por modelagem, jogos, softwares educacionais, etc., pois cada tentativa destas poderá motivar parcelas diferentes do público estudantil, difundindo a consciência de que o domínio do cálculo algébrico e geométrico é preponderante para lapidação de um aluno crítico, um profissional competente no futuro e não apenas no setor de Engenharia Civil e áreas afins, mas como em qualquer outra profissão.

A metodologia aplicada para o desenvolvimento deste trabalho constituiu-se da pesquisa bibliográfica e da elaboração de uma sequência didática de atividades propostas com enfoque no estudo das linhas e curvas elementares na Geometria Analítica e um bloco de atividades dinâmicas aplicadas à Engenharia Civil. Para ajudar no desenvolvimento de alguns tópicos, contamos com a contribuição do software educacional GrafEq, softwares utilizados na Engenharia Civil e alguns vídeos tutoriais disponíveis na internet. A elaboração e execução das atividades propostas foi repensada também como uma forma de motivar o jovem a estudar Geometria Analítica, e incentivar a empatia por Engenharia Civil os jovens que almejam seguir esta carreira.

No levantamento bibliográfico sobre o tema escolhido, procuramos averiguar quais são as dificuldades e resistências encontradas no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos da Geometria Analítica no Ensino Médio em artigos pertinentes, assim como também, as sugestões de métodos de ensino e resultados de atividades já realizadas na tentativa de sanar um percentual dessas dificuldades. Realizou-se uma pesquisa exploratória sobre o ensino da Geometria Analítica no curso de Engenharia Civil, e investigou-se a obrigatoriedade deste conteúdo nas grades curriculares em cursos de 5 universidades públicas conceituadas do Brasil. Como já foi abordado, a seleção de atividades compõe uma proposta que pode ser realizada

no ambiente escolar com alunos matriculados na terceira série do Ensino Médio ou em séries anteriores com atividades adaptadas. Para isso, as atividades em questão devem fazer parte do planejamento em um bimestre do ano letivo. Esse projeto pode ser executado também imediatamente anterior aos tópicos de Geometria Analítica servindo como uma introdução de tais assuntos.

Assim, o trabalho está dividido da seguinte maneira:

- No capítulo 1, contempla principalmente a problemática, os objetivos, a metodologia e como estão divididas as etapas do trabalho.
- No capítulo 2, trata de um breve histórico da Geometria Analítica e também sobre a avaliação do ensino-aprendizagem de Matemática no Brasil.
- No capítulo 3, tratamos sobre alguns softwares de Geometria utilizados para melhorar o ensino de Matemática, onde inclusive um deles é o que utilizaremos para realizar o desenvolvimento do trabalho.
- No capítulo 4, compõe o desenvolvimento do trabalho, cuja realização acontece sob dois tipos diferenciados de atividades: as atividades dinâmicas com exercícios práticos relacionados aos conceitos mínimos de Engenharia Civil e as atividades investigativas sobre conceitos de equações e seus gráficos desenvolvidas com auxílio de um software.
- E no capítulo 5, finalizamos com as considerações sobre todo o trabalho realizado.

O objetivo geral deste trabalho é propor uma sequência didática sobre elementos da Geometria Analítica com perspectiva na Engenharia Civil em uma turma de Ensino Médio.

Os objetivos específicos são os seguintes:

1. investigar o que pode despertar nos alunos o interesse pela Matemática, em particular à Geometria Analítica;
2. apresentar as grades curriculares dos cursos de Engenharia Civil (no que diz respeito à Geometria Analítica como disciplina obrigatória) de 5 faculdades públicas conceituadas do país;
3. propor um debate sobre profissões, para aflorar as ideias dos alunos, incentivando-os a enxergar, em profissões diversificadas, uma motivação para estudar Matemática;
4. descrever brevemente alguns softwares aplicados no ensino da Geometria Analítica;
5. investigar alguns softwares utilizados nos cursos de Engenharia Civil;

6. propor aos alunos algumas atividades práticas com papel, lápis, régua e compasso: elaboração de plantas baixas simples, maquetes e desenhos com propriedades de perspectiva e de anamorfismo.

7. propor uma sequência didática sobre linhas, curvas e regiões delimitadas por equações, funções e inequações explorando o GrafEq e conhecimentos básicos de Geometria Analítica, culminando em produções de desenhos formados a partir das curvas e regiões delimitadas.

Ao realizar uma pesquisa minuciosa sobre as grades curriculares de alguns cursos de 5 universidades públicas conceituadas do Brasil, verificamos que em todas essas instituições a Geometria Analítica é uma disciplina obrigatória para os cursos de Engenharias Civil, Mecânica, Produção, Alimentos, dentre outros, bem como os cursos de Exatas: Matemática, Física, Química, Estatística, Ciências da Computação, dentre outros. Muitos alunos têm o sonho de cursar alguma dessas engenharias, mas, pelo fato de terem que estudar disciplinas que envolvem cálculos algébricos e geométricos, logo desvanecem do sonho de se tornarem engenheiros. Isso nos remete a uma segunda indagação: o que a escola deve fazer para incentivar esses alunos a não desistirem de seguir o ramo da Engenharia?

Segundo (BROLEZZI, 2004), a ausência do domínio de saberes anteriores, muitas vezes, é um fator que leva o aluno a fracassar na aprendizagem de conteúdos matemáticos posteriores. Assim, os alunos que não aprendem a manipular a Álgebra e a Geometria no Ensino Fundamental, geralmente, conduzem mal os tópicos de Geometria Analítica e demais conteúdos no Ensino Médio. Logo, também sofrem dificuldades nos cursos de Licenciatura em Matemática, Engenharia Civil, ou outros cursos superiores que abordam Geometria Analítica e suas variantes, como o Cálculo Vetorial em suas grades curriculares.

Como (GONÇALVES, 2007) salienta, nas universidades é exigido dos alunos competências e habilidades anteriores que, na maioria das vezes, não conseguiram adquirir ou acabaram se esquecendo. Consequentemente, os professores concluem que o conhecimento de um grande percentual dos discentes que entram para a faculdade pouco contribui para a aprendizagem da Matemática no Ensino Superior. Sabemos que a deficiência do ensino-aprendizagem de Matemática no Brasil existe e são muitos os fatores que contribuem para isto, tais quais, envolvem uma série de questões sociais e políticas, culminando no prejuízo final para o sujeito e para toda a sociedade.

De acordo com (BARROS, 2014), hoje em dia, apesar de ainda existir uma certa concorrência, o aluno tem mais facilidade para ser admitido no curso superior através de políticas

públicas voltadas à Educação, como o PROUNI, o FIES e a utilização da nota do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) como critério de classificação, porém, a bagagem de conhecimentos que carrega consigo para a universidade, às vezes, é muito insuficiente. Logo, não consegue acompanhar um ritmo de estudos e desempenho escolar mínimo exigido pelo curso em que foi admitido, levando-o ao desmotivo, reprovações, mudança de curso e até mesmo à evasão escolar, na área das exatas a chance deste fato acontecer é ainda maior. Assim, tal fato nos remete aos seguintes questionamentos: como corrigir essas lacunas dos conteúdos de Matemática básica necessários para evoluir no Ensino Superior? A atuação profissional desse aluno no futuro será satisfatória num mercado de trabalho que exige uma formação qualificada?

Visto que existem diversos fatores que implicam no fracasso da aprendizagem de Matemática no Ensino Básico e alguns desses fatores são a desmotivação e o desinteresse pela disciplina, sendo assim, o que fazer para despertar no aluno o interesse pela Matemática nesta etapa do Ensino? E, por fim, considerando a grande relevância da Geometria Analítica para a Engenharia Civil, áreas afins e algumas licenciaturas, todos esses questionamentos conduzem ao seguinte problema central da pesquisa: como despertar no aluno o interesse pela Geometria Analítica? Ensinar Geometria Analítica com softwares educacionais e softwares utilizados na Engenharia Civil com atividades propostas realmente faz despertar no aluno uma visão amigável da matemática ou apreço pelos estudos em uma perspectiva para a carreira de engenheiro Civil?

2 GEOMETRIA ANALÍTICA

2.1 Uma breve abordagem histórica

Ao estudar a História da Matemática sob a opinião de diferentes autores, por muito acredita-se que a Geometria Analítica surgiu no século XVII, cujo precursor fora o filósofo, físico e matemático francês René Descartes (1596-1650). No entanto, essa Geometria também recebeu grandes contribuições do magistrado, matemático e cientista francês Pierre de Fermat (1607-1665) como afirma (MOL, 2013).

Figura 1 – Descartes e Fermat



Fonte: (Kleber Kilhian, 2013)

Mas o que essa Geometria traz de diferente da Geometria de Euclides? Verdadeiramente, a Geometria Analítica faz uso dos elementos básicos da Geometria Euclidiana e conceitos primitivos, tais como o ponto, a reta e o plano, mas a grande genialidade é que, segundo (EVES, 2011), no plano cartesiano, existe uma correlação entre os pontos no plano e pares ordenados de números reais, que consiste, por exemplo, na representação de pontos de uma reta na qual esses pontos são as coordenadas equivalentes a números reais, cada qual desses sendo obtido através da distância entre a origem da reta e o ponto, respectivamente. Assim, a ideia das coordenadas no plano, proposta por Descartes e Fermat, propicia:

(...) uma correspondência entre curvas no plano e equações em duas variáveis, de maneira tal que para cada curva do plano está associada uma equação bem definida $f(x,y) = 0$, e, a cada equação dessas, está associada uma curva (ou conjunto de pontos) bem definida do plano. Estabelece-se, além disso, uma correspondência entre as propriedades algébricas e analíticas da equação $f(x,y) = 0$ e as propriedades geométricas da curva associada. Transfere-se, assim, de maneira inteligente, a tarefa de demonstrar um

teorema em Geometria para a de demonstrar um teorema correspondente em Álgebra e Análise.(EVES, 2011, p.382)

A relação entre curvas no plano e suas equações $f(x,y) = 0$ correspondentes, em que o produto final adveio das ideias análogas de Descartes e Fermat acabou por transformar algo inimaginável, cuja façanha seria aliar a visão geométrica à visão algébrica ajudando a democratizar os conceitos analíticos da Geometria. (LIMA, 2014) acentua que essa criação da representação geométrica no plano fora um extraordinário salto para a Matemática moderna, pois questões de difíceis resoluções para a época foram resolvidas com mais facilidade por intermédio da Geometria Analítica, bem como serviu de base para assuntos mais aprofundados posteriormente (Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral, dentre outros).

De acordo com (AVRITZER, 2009), foi em *A Geometria*, uma das três aplicações complementares do livro *O discurso do método*, escrito e publicado por Descartes em 1637, que Descartes apresenta, em primeira mão, a mais importante das suas invenções: a Geometria Analítica. (VAZ, 2011) menciona que Descartes tinha um anseio para solucionar problemas de qualquer natureza utilizando regras universais, e, ainda segundo ele, Descartes traz um método em seu livro *A Geometria*, no qual Descartes afirma ser capaz de solucionar qualquer problema geométrico. Inclusive seu método fora inaugurado quando ele o utilizara para solucionar um famoso problema de Pappus que consistia em fixar, nesta ordem, quatro retas AB , AD , EF , GH , quatro ângulos β_1 , β_2 , β_3 , β_4 e descobrir tal ponto C onde através deste é possível traçar linhas até às retas, na ordem fixadas, validando a proporção $\overline{CB} \cdot \overline{CF} = \overline{CD} \cdot \overline{CH}$, conforme a Figura 2 a seguir.

Figura 2 – Problema de Pappus

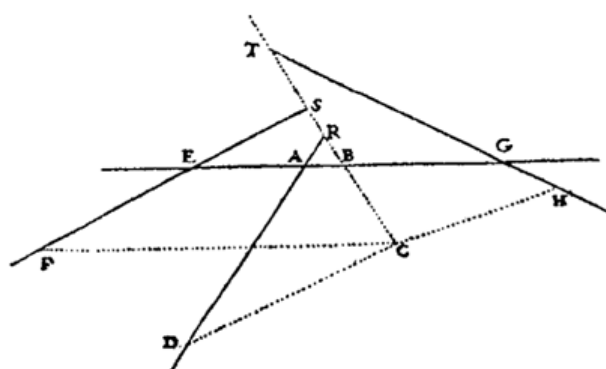


Imagem extraída do Livro I de Descartes, traduzido por José Portugal dos Santos Ramos.

Fonte: (DESCARTES, 2009, p.240)

Segundo (GAUKROGER, 2002), foi em 1630 que Descartes tomou conhecimento do problema das quatro linhas de Pappus, mas foi apenas no ano seguinte que ele dispõe do problema, por Jacob Gool, quando Descartes era seu aluno na Universidade de Leiden. Para resolvê-lo, Descartes fixou uma reta (o eixo x), de forma que todos os passos da solução fossem atrelados a essa reta. Essa ideia foi “o pulo do gato” elaborado por Descartes. Uma técnica usada e atribuída por Descartes fora reduzir o problema a duas incógnitas e fixar valores a umas delas para obter os valores da outra incógnita. Assim, Descartes traçaria e conheceria a curva e o lugar geométrico formado pelos pontos.

Conforme (RAMOS, 2012), a obra *La Géométrie (A Geometria)*, escrita por René Descartes, subdivide-se em três livros, a saber: O Livro I, que trata da construção de problemas usando apenas círculos e linhas retas; o Livro II, que discorre sobre o estudo das linhas curvas; o Livro III, que mostra como construir os problemas sólidos. Nesta obra encontra-se os passos da solução do problema de Pappus, resolvido por Descartes no Livro II que em uma tradução para a nossa linguagem ficou da seguinte maneira:

Primeiro, supondo o problema resolvido e, para sair da confusão de todas essas linhas, considero uma das dadas e uma das que há que obter, por exemplo, AB e CB , como as principais, às quais trato de referir todas as outras. Designe por x o segmento de linha AB compreendido entre os pontos A e B ; e seja CB designado por y ; e prolonguem-se todas as demais linhas até que cortem também essas duas, prolongadas, se necessário, e se não lhe são paralelas; como se vê, elas cortam a linha AB nos pontos A , E , G , e a linha BC nos pontos R , S , T . Ora bem, como todos os ângulos do triângulo ARB são dados, a proporção dos lados AB e RB é também dada, e indico-a como de z para b ; de maneira que representando AB por x , RB será $\frac{bx}{z}$, e a linha total CR será $y + \frac{bx}{z}$, pois o ponto B cai entre C e R ; se R caísse entre C e B , seria $CR = y - \frac{bx}{z}$, e se caísse entre B e R , seria $CR = -y + \frac{bx}{z}$. Analogamente, os três ângulos do triângulo DRC são dados e, por conseguinte, também a proporção que há entre os lados CR e CD , indico como z para c , de modo que sendo $CR = y + \frac{bx}{z}$, será $CD = \frac{cy}{z} + \frac{bcx}{z}$. Após isso, como as linhas AB , AD , e EF são dadas em posição, a distância entre os pontos A e E também é dada, e, designando-a por k , ter-se-á EB igual a $x + k$, que seria $k'x$, se o ponto B caísse entre E e A ; e $k + x$, se E caísse entre A e B . E como todos os ângulos do triângulo ESB são dados, e estabelecendo que BE está para BS assim como z está para d , tem-se $BS = \frac{(dk+dx)}{z}$, e a linha CS é $\frac{(zy+dk+dx)}{z}$. Se o ponto S caísse entre B e C , seria $CS = (zy - dk - dx)$; e quando C cair entre B e S , teremos $CS = \frac{(-zy+dk+dx)}{z}$. Além disso, os três ângulos do triângulo FSC também são conhecidos, e, portanto, é dada a proporção de CS para CF , que z para e , e será $CF = \frac{(ezy+dek+dex)}{z}$. Analogamente, AG ou l é dada, e BG é $l - x$, pois no triângulo BGT , é também conhecida a proporção $BG : BT = \frac{z}{f}$, teremos: $BT = \frac{(fl-fx)}{z}$, sendo $CT = \frac{(zy+-fx)}{z}$. Agora, como a proporção de TC para CH está dada pelo triângulo TCH , fazendo-a como z para g , tem-se $CH = \frac{(gzy+fgl-fgx)}{z}$. Descartes (2001,p.21,22, apud VAZ, 2011, p.459,460)

Na resolução deste problema, é notável como Descartes utiliza uma técnica elaborada por ele para obter soluções de problemas geométricos conhecidos, convertendo-os em problemas algébricos e supondo-os já resolvidos, nomeava os segmentos conhecidos e não conhecidos,

depois efetuava operações com objetivo de obter uma equação com apenas uma incógnita, simplificando assim os problemas. Generalizando a sua técnica, Descartes conseguiria resolver qualquer outro problema de lugares geométricos.

Para (BOYER, 1974), existiram muitas discordâncias quanto a quem realmente criou a Geometria Analítica, uma vez que a obra de Fermat que utilizava um método muito parecido com método descartiano foi publicada somente após sua morte. No entanto, a contribuição de Fermat para a Geometria Analítica foi divulgada mesmo antes de seu falecimento, veiculada através de manuscritos por volta de 1629. Intitulada como “Introdução aos Lugares Geométricos Planos e Sólidos”, a obra de Fermat trazia abordagens sobre equações da reta, da circunferência e equações das cônicas numa forma mais branda e outras abordagens como equações tangentes sendo mais tarde explorada por cientistas renomados, aponta (BOYER, 1974). Fato curioso é que o trabalho de Fermat sobre a Geometria Analítica já circulava antes da publicação da obra descartiana *La Géométrie* causando uma confusão na época sobre quem era merecedor do devido mérito, a criação da Geometria Analítica.

Contudo, (EVES, 2011) menciona que os antigos gregos eram praticantes da álgebra geométrica, e que, na confecção de mapas e medições de terras, já era usada a noção de coordenadas cartesianas por romanos e egípcios. Outros matemáticos, tais como Apolônio de Perga e Menêmo, contribuíram com ideias e trabalhos de geometria das secções cônicas com equações cartesianas dessas curvas, e Nicole Oresme, no século XIV, trouxe representações parecidas com as coordenadas cartesianas da Geometria Analítica, quando estabeleceu variável dependente (*latitudo*) e variável independente (*longitudo*), atribuindo e manipulando valores em alguns dos seus estudos. Para (EVES, 2011), tudo isso pode ter influenciado outros matemáticos, inclusive Descartes e Fermat.

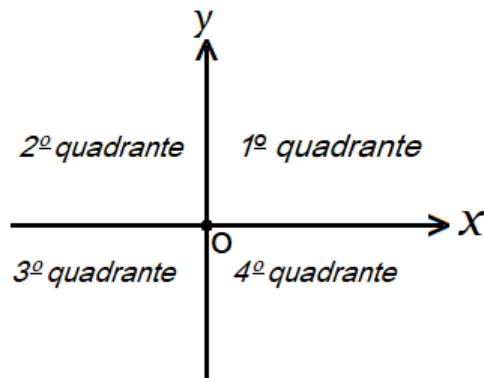
É inegável que ao longo dos séculos podem ter existido inúmeros pensadores que contribuíram para o surgimento da Geometria Analítica. No entanto, em consonância com (BOYER, 1974), (EVES, 2011), (VAZ, 2011) e outros autores, René Descartes e Pierre de Fermat foram os idealizadores que trouxeram ao mundo a Geometria Analítica um pouco diferente da que conhecemos hoje, mas com rigor, onde a concepção central era associar equações a curvas e superfícies, dando um grande passo para o avanço da ciência Matemática onde mais tarde teve incontáveis aplicações na tecnologia.

2.2 Introdução aos tópicos de Geometria Analítica

2.2.1 O plano cartesiano

Tomemos duas retas perpendiculares x e y onde a intersecção entre elas é o ponto O , chamado de origem. Essas duas retas ou eixos orientados a partir da origem determinam o plano cartesiano, onde x é denominado eixo das abscissas e y é denominado eixo das ordenadas. Assim, o plano cartesiano subdivide-se em quatro quadrantes, conforme a figura a seguir.

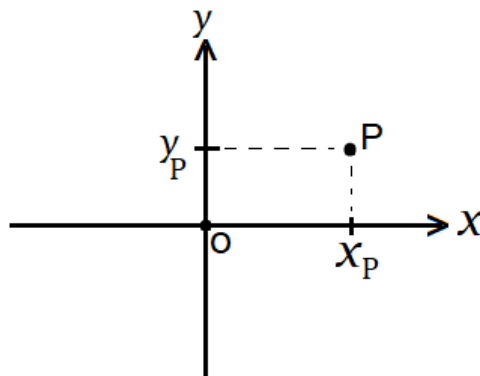
Figura 2.1- Plano cartesiano



Fonte: Autor

Quando queremos indicar um ponto no plano devemos denotar a abscissa e a ordenada deste ponto, que nesta ordem, representam um par ordenado de números reais. De acordo com (IEZZI *et al.*, 2016), se tomarmos um ponto P qualquer do plano cartesiano, e traçamos por ele retas paralelas aos eixos x e y , existem os pontos x_p e y_p que correspondem à intersecção dessas retas com os eixos x e y de tal maneira que Ox_p é a medida que representa a abscissa de P e Oy_p representa a ordenada de P . Veja a imagem a seguir.

Figura 2.2- Ponto P no plano cartesiano



Fonte: Autor

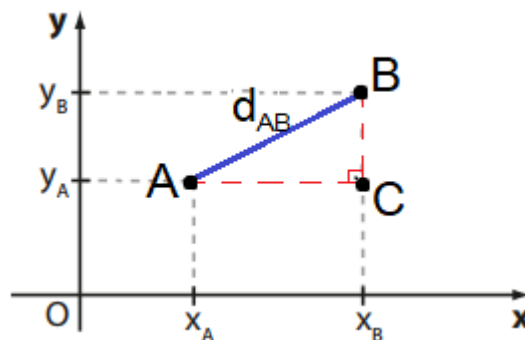
2.2.2 A distância entre dois pontos

Sejam dois pontos distintos A e B . A distância entre esses pontos é determinada através da medida do segmento AB , cuja nomenclatura pode ser indicada por d_{AB} . A distância entre os pontos A e B podem ocorrer de três formas geometricamente, considerando os pares ordenados $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, quais quer:

- d_{AB} paralela ao eixo x , que ocorre quando $y_A = y_B$
- d_{AB} paralela ao eixo y , que ocorre quando $x_A = x_B$
- d_{AB} é inclinada em relação aos eixos x e y .

Na forma inclinada da distância d_{AB} , é possível calcular d_{AB} aplicando o **Teorema de Pitágoras**. Vejamos

Figura 2.3- Segmento que representa a distância entre os pontos A e B



Fonte: Autor

Note que, na figura, d_{AB} é a medida da hipotenusa no triângulo ABC . E as distâncias $d_{BC} = |y_A - y_B|$ e $d_{AC} = |x_A - x_B|$ são as medidas dos dois catetos, respectivamente. Assim, por Pitágoras, temos

$$d_{AB}^2 = d_{AC}^2 + d_{BC}^2 = |x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2.$$

$$\text{Logo, } d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

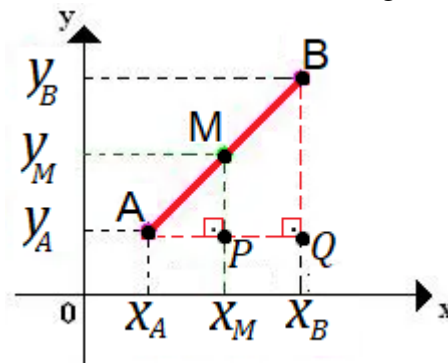
Através desta fórmula podemos calcular a distância entre quais quer dois pontos no plano cartesiano. Neste tópico não iremos resolver exemplos, deixaremos para os exercícios propostos.

2.2.3 O ponto médio de um segmento

O ponto médio de um segmento pode ser caracterizado também no plano cartesiano como o ponto que divide qualquer segmento AB em dois segmentos de mesma medida, que por sua vez, é muito útil na resolução de diversos problemas na Geometria Analítica.

Seja um segmento com extremidades nos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, daí tomemos um ponto M que divide ao meio o segmento AB . Veja a figura abaixo.

Figura 2.4- Ponto médio de um segmento AB



Fonte: Autor

Podemos observar que os triângulos APM e MQB são congruentes, logo é possível estabelecer convenientemente o Teorema de Tales:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AQ}.$$

Como M é ponto médio de AB , logo temos que $AB = 2 \cdot AM$. Substituindo na proporção acima temos

$$\frac{AM}{2 \cdot AM} = \frac{AP}{AQ} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AP}{AQ} \rightarrow AQ = 2 \cdot AP.$$

Por outro lado $AQ = |x_Q - x_A|$, $AP = |x_P - x_A|$.

Segue, que $AQ = 2 \cdot AP \rightarrow |x_Q - x_A| = 2 \cdot |x_P - x_A| \rightarrow x_Q - x_A = 2 \cdot (x_P - x_A)$.

Note que $x_M = x_P$, $x_B = x_Q$, $x_Q > x_A$ e $x_P > x_A$.

Assim, $x_B - x_A = 2 \cdot (x_M - x_A) \rightarrow x_B - x_A = 2 \cdot x_M - 2 \cdot x_A$.

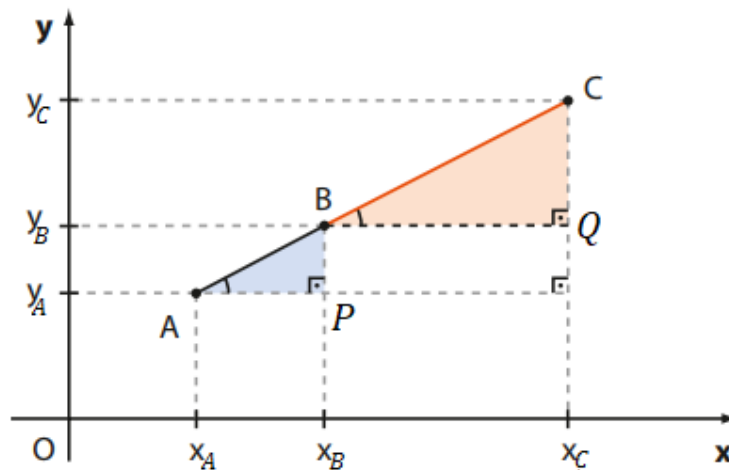
Logo, $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$.

O processo para encontrar y_M é análogo. Portanto, as coordenadas do ponto médio de um segmento AB são definidas por $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

2.2.4 Condição de alinhamento de três pontos

Dados três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, diz-se que estes pontos estão alinhados sempre que estiverem numa mesma reta r . Observe a figura a seguir.

Figura 2.5- Alinhamento dos pontos A , B e C



Fonte: Autor

Pelo caso AA (Ângulo Ângulo), fica notório a condição de semelhança entre os triângulos APB e BQC . Assim, há uma proporção direta dos segmentos BQ , AP , CQ e BP , nesta ordem. Como $BQ = x_C - x_B$, $AP = x_B - x_A$, $CQ = y_C - y_Q$, $BP = y_B - y_P$ e efetuando a proporção, temos

$$\begin{aligned} \frac{BQ}{AP} &= \frac{CQ}{BP} \rightarrow \frac{x_C - x_B}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_Q}{y_B - y_P} \rightarrow \\ &\rightarrow (x_C - x_B) \cdot (y_B - y_P) = (y_C - y_Q) \cdot (x_B - x_A) \rightarrow \\ &\rightarrow (x_C - x_B) \cdot (y_B - y_P) - (y_C - y_Q) \cdot (x_B - x_A) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow x_A \cdot y_B + x_C \cdot y_A + x_B \cdot y_C - x_C \cdot y_B - x_A \cdot y_C - x_B \cdot y_A = 0 \end{aligned}$$

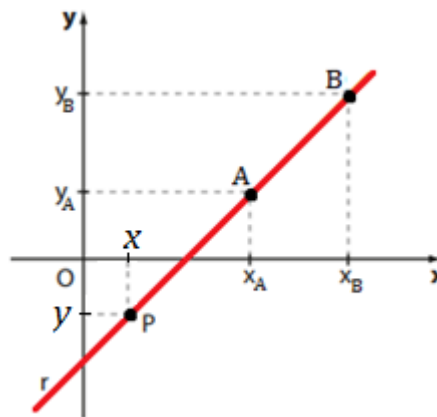
Esta última equação pode ser obtida através do determinante da matriz 3×3 formada a partir dos pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ igualando à zero. Portanto, podemos confirmar a colinearidade dos três pontos distintos A , B e C quando ocorrer a seguinte situação:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.2.5 A equação geral da reta e a função afim

A equação da reta pode ser obtida através de uma consequência do resultado anterior, da conjectura e prova da colinearidade de três pontos dados. No entanto, para obtermos a equação geral basta que um dos três pontos A , B e C seja um ponto genérico, assim utilizamos o determinante de matrizes para os pontos $P(x, y)$, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, e igualemos a zero este determinante. Veja a figura a seguir.

Figura 2.6- Alinhamento dos pontos P , B e C



Fonte: Autor

Suponha que os três pontos P , A e B estejam alinhados. Logo, como consequência temos

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = x(y_A - y_B) + y(x_B - x_A) + x_A y_B - x_B y_A = 0.$$

Considerando $y_A - y_B = a$, $x_B - x_A = b$, $x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A = c$, e substituindo na expressão anterior chegamos à equação geral da reta $ax + by + c = 0$. A prova deste resultado veremos com mais detalhes no desenvolvimento dos exercícios propostos.

Há uma imensa relação entre a equação geral da reta e a função afim. Para visualizarmos esta relação basta isolarmos a variável y da equação geral da reta. Vejamos

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \Rightarrow y = \frac{-ax}{b} - \frac{c}{b}.$$

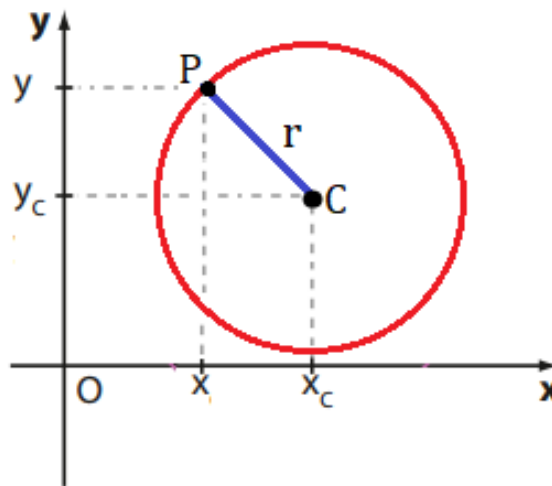
Fazendo $\frac{-a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = n$, e substituindo na expressão anterior, chegamos à expressão $y = mx + n$ conhecida equação reduzida da reta ou função afim. O coeficiente m é chamado

coeficiente angular da reta e na função é denominado taxa de variação. Já o coeficiente n é dito coeficiente linear da reta. Nos exercícios propostos iremos explorar a funcionalidade dos coeficientes angular e linear no plano cartesiano.

2.2.6 Equação reduzida da circunferência

Para falarmos da equação reduzida da circunferência vamos tomar uma circunferência λ de centro no ponto $C(x_c, y_c)$, um ponto genérico pertencente à circunferência $P(x, y)$ e a distância d_{pc} que representa o raio r desta circunferência, conforme a figura a seguir.

Figura 2.7- Cicunferência de centro C , raio r e passando por P



Fonte: Autor

Agora, sabendo que podemos aplicar a fórmula estudada anteriormente para encontrarmos a distância entre dois pontos no plano cartesiano, apliquemo-la para obtermos uma conexão entre o raio d_{pc} , o centro $C(x_c, y_c)$ e o ponto $P(x, y)$. Assim,

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = r.$$

Ao elevar cada membro ao quadrado chegamos a expressão final da equação reduzida da circunferência:

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = r^2.$$

Alguns exemplos sobre a equação da circunferência serão abordados no capítulo 4.

2.3 Uma reflexão sobre a avaliação do ensino da Matemática no Brasil

As dificuldades encontradas no ensino da Matemática em sala de aula não são poucas, chegando a atrapalhar o desenvolvimento escolar e, conseqüentemente, o futuro profissional do aluno. Uma dessas dificuldades é a deficiência na construção de um conhecimento matemático sólido, no qual muitas vezes essas lacunas e déficits na aprendizagem de conteúdos matemáticos perduram, passando por todas as fases do Ensino Básico, chegando até ao Ensino Superior. Um resultado do MEC divulgado pelo (Inep, 2018), em agosto de 2018, mostra que apenas 4,52 % dos estudantes do Ensino Médio avaliados pelo Saeb 2017 conseguiram ultrapassar o nível 7 da Escala de Proficiência da avaliação na Educação Básica brasileira. De acordo com o portal do MEC, o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) elabora as avaliações com itens de Português e Matemática que são aplicadas ao 9º ano do Ensino Fundamental como diagnóstico, cujo objetivo é verificar a qualidade do ensino concedido pelo sistema educacional brasileiro com base em testes padronizados e questionários socioeconômicos. Ao resolverem os itens da prova Saeb, “[...] os estudantes fornecem informações sobre fatores de contexto que podem estar associados ao desempenho.” (Portal do MEC, 2011).

Também ainda sobre avaliação, o índice brasileiro no Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa) está muito aquém em comparação com outros países, tais como Singapura, Japão e Finlândia. No portal do MEC, o resultado da edição (PISA, 2015) mostra que o Brasil ocupou a 66ª colocação em Matemática, ficando atrás de países latinos tais como o Chile, Uruguai e Colômbia. Um resultado do (PISA, 2018), divulgado no dia 03 de dezembro de 2019 pela OCDE, mostra que o Brasil teve um desempenho pior ainda em Matemática, caindo da posição 66ª para a posição 70ª, em que 79 países participaram da avaliação. Pesquisadores articulam que, dentre outros fatores, esse quadro vivenciado no Brasil também é resultado da baixa qualidade do ensino que acaba prejudicando a formação do aluno, e, segundo (FRANZONI; PINO; OLIVEIRA, 2018), isso reflete no atraso do desenvolvimento social e econômico do país.

O ensino da Matemática no Brasil precisa ser reformulado, para que ocorra uma tentativa de alcançar melhores patamares nas avaliações de desempenho escolar, o que é possível com uma educação de qualidade, e também fazer cumprir a principal finalidade da educação brasileira, que é “[...] o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.” (LDB, 1996, Art.2º).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sugere uma proposta que gera expectativa de melhoria no ensino da Matemática, bem como outras áreas do conhecimento, pois ela define,

de forma concisa, as competências e habilidades em cada etapa do Ensino Básico priorizando a vivência do aluno e a troca de experiências entre os profissionais da Educação. Além da BNCC, outro fator importante que já vem acontecendo é o estreitamento das relações sobre educação entre Brasil e países tais como Singapura e Japão, a exemplo do encontro Brasil-Finlândia que ocorreu em Brasília, novembro de 2011, cujo objetivo principal foi a “[...] troca de experiências nas áreas de currículo, tecnologias, avaliação e gestão na educação básica [...]” (Portal do MEC, 2011).

A deficiência no ensino de conteúdos algébricos e geométricos, dentre outros fatores, gera um baixo rendimento escolar e baixos índices na avaliação. Assim, na prática, o ensino tem que ser estratégico, ter um objetivo e uma aplicação real dos conteúdos, pois o estudante já está cansado de simplesmente calcular o determinante de uma matriz, obter a equação de uma reta (dados dois pontos distintos) ou obter o valor numérico de uma expressão algébrica. Segundo (D’AMBROSIO, 2009, p.31), o aluno tem interesse naquilo que satisfaça “[...] as suas percepções materiais e intelectuais mais imediatas”. Por isso, (D’AMBROSIO, 2009) propõe ao professor idealizar situações-problema atreladas às situações mais emergentes do aluno, já que a criança ou jovem aluno tem pressa nessa sociedade globalizada, na qual a propagação de informações é instantânea. Esse é um dos fatores que explica por que jogar *Free Fire online* com os amigos é mais interessante do que estudar uma matemática obscura que não tem sentido algum para ele (aluno). Estudar Matemática só para obter a nota aprovativa é um processo enfadonho para o aluno, levando-o a estudar unicamente por obrigação e não por prazer. Portanto, é um grande desafio o professor fazer o aluno enxergar a Matemática com outros olhos e se beneficiar dela para utilizá-la como ferramenta que dá acesso a caminhos mais curtos, ou seja, a Matemática ajuda a facilitar a vida do aluno, em grande parte.

Para que o ensino da Matemática avance, são necessários um governo responsável, uma boa estrutura escolar, uma equipe de professores e gestão capacitados, uma sociedade acolhedora, uma família saudável e comprometida, e, principalmente, a disposição do próprio aluno, o agente mais importante do processo de ensino. Para (GHANI, 2019), o processo de aprendizado exige dedicação pessoal para insistir em superar suas próprias limitações. Logo, é essencial o esforço do aluno em tentar vencer suas dificuldades. Com isso, em Matemática, espera-se que o aluno também consiga adquirir a capacidade de demonstrar fórmulas, identificar o conteúdo matemático a ser aplicado em problemas de um contexto real e solucioná-los.

3 ALGUNS SOFTWARES DE GEOMETRIA: UMA APLICABILIDADE AO CONTEÚDO DE GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO BÁSICO

O progresso do ensino da Matemática exige investimentos tanto financeiro quanto humano. Existe uma grande preocupação quanto ao valor que é aplicado na Educação aqui no Brasil, mas “Não basta simplesmente colocar mais dinheiro na Educação, se não houver um ambiente cultural de valorização do conhecimento, que desperte nos alunos o apreço pelo conhecimento, independentemente de títulos, rótulos ou incentivos financeiros.” (GHANI, 2019). Faz-se necessário despertar no aluno a curiosidade, a pesquisa, a crítica, um ser capaz de romper barreiras, ter predisposição para que ele possa buscar e construir conhecimento que, em Matemática, vai muito além de memorizar fórmulas e processar algoritmos. No entanto, para isto se realizar, é indispensável um ambiente propício com situações que levem o aluno a raciocinar e a gostar de desafios, a valorização dos profissionais da educação, as formações pedagógicas e a atuação presente da família também são importantíssimas para todo o processo de ensino. Investir em ambiente informatizado, jogos e softwares educativos e outras benfeitorias faz-se necessário. Tudo isso pode melhorar o relacionamento do educando com o ensino da Matemática. Para (FIORENTINI; LORENZATO, 2012), é possível traçar diversos caminhos que levem à aprendizagem da Matemática quando se usa novas tecnologias.

Conforme (KENSKI, 2007), desde à antiguidade o homem vem trabalhando e desenvolvendo tecnologias na maioria das vezes por necessidades, fazendo descobertas e utilizando-as para facilitar a vida. Na história dos números afirma-se que o homem antigo utilizava pedrinhas, nós em cordas, riscos em ossos e madeira para representar contagem de animais caçados ou criados por pastores, frutos colhidos, etc. Mas de certo que eram tecnologias novas para a época. Com a criação da escrita e dos sistemas de numeração houve uma outra ascensão para o campo das ciências inclusive a Matemática. Devido a manipulação do homem, a escrita alfanumérica se tornou cada vez mais sofisticada para a elaboração de fórmulas e códigos com linguagens capazes de construir e comandar máquinas, sequenciar, codificar DNA, modificar genes de seres vivos, salvar vidas, prever estatísticas, construir pontes e edifícios, etc. Em meio à esta evolução estão também as tecnologias aplicadas ao ensino da Matemática com poderosíssimos softwares educacionais e aplicativos para computadores e celulares.

Ainda para (KENSKI, 2007), ao longo da história da humanidade, surgiram, com a evolução da Ciência, novas tecnologias que podem ser aproveitadas e aplicadas ao ensino-

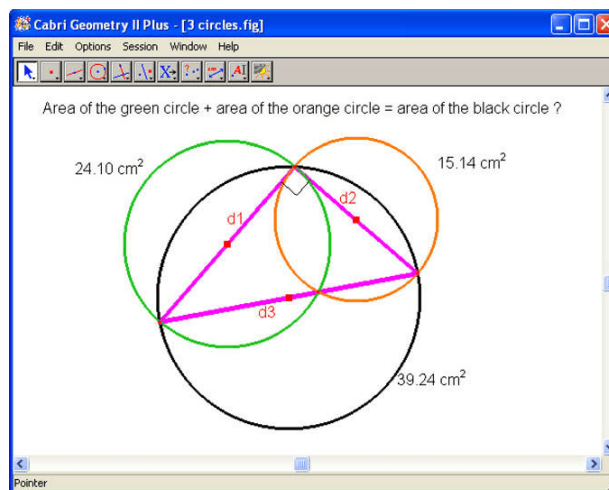
aprendizagem para deixar um pouco de lado a aula tradicional lecionada apenas com quadro e giz, de certo modo já ultrapassados. Um ambiente aconchegante, cercado por tecnologias modernas e jogos educativos pode não ser o suficiente para prender a atenção de todos os alunos ao conteúdo matemático estudado, mas ainda sim pode ser um dos melhores caminhos para se chegar a esse fim, uma vez que, só o uso do computador ou celular em uma aula bem planejada em si, já otimiza o conceito de uma aula, confirmando o apontamento de (BORBA; PENTEADO, 2007) em que, o uso do computador no ensino-aprendizagem pode motivar o aluno, pois é uma mídia com *design* de gráficos interessantes, um artigo importante para a sociedade.

Hoje têm-se à disponibilidade diversos softwares que podem ser aplicados na aprendizagem da Matemática sendo já utilizados em computadores, celulares, tablets, etc por professores e alunos. Nas áreas da Geometria Sintética, Geometria Analítica, Estudo das Curvas de Funções e Modelagem de Polinômios alguns desses softwares tem boa aceitação e tem apresentado resultados de aprendizagem excelentes. De acordo com o (MAP PPGMAp, 2010)(Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada) da UFRGS e outros autores, temos uma breve descrição de alguns desses softwares que são gratuitos, conforme a lista a seguir.

CABRI-GEOMETRY

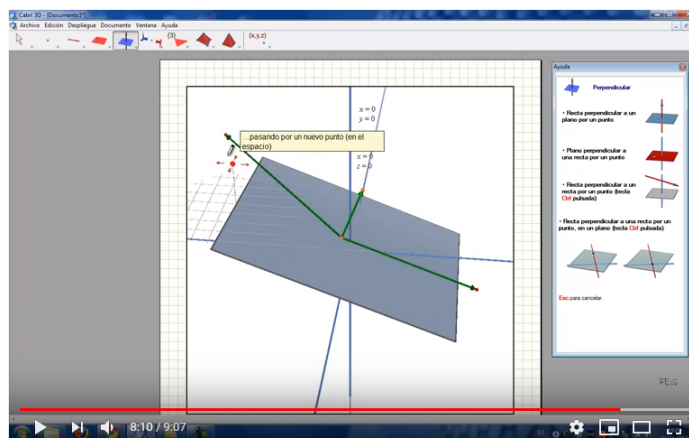
Criado no Institut d'Informatique et de Mathematiques Appliquees em Grenoble IMAG, o Cabri-Geometry é um ótimo software com menus interativos trazendo além de vários elementos da Geometria, a régua e o compasso para ajudar nas construções geométricas. Assim, é um software de Geometria Dinâmica super intuitivo com o qual os alunos podem contruir desenhos, trabalhar modelagem, conjecturar situações e verificar resultados. Pode ser usado principalmente no Ensino Médio, bem como nas universidades. O Cabri-Geometry II (ou Cabri-Geometry Plus) é ideal para trabalhar Geometria Analítica no plano bidimensional. Já o Cabri 3D é excelente para se trabalhar em coordenadas tridimensionais com planos, vetores e retas no espaço.

Figura 3 – Janela Cabri Geometry3 Plus



FONTE: (Soft Deluxe, 2010)

Figura 4 – Janela Cabri Geometry 3D



FONTE: (Canal DUVI, 2011)

CINDERELLA

Este programa foi desenvolvido pela Jürgen Richter-Gebert & Ulrich Kortenkamp e comercializado pela empresa Sun Microsystems, Inc. Segundo (Abreu, 2002), o Cinderella apresenta uma máxima fidelidade de aproveitamento das construções geométricas e animações com muita perfeição envolvendo geometrias euclidiana, hiperbólica e esférica que podem ser exportadas para a web. O que o difere do Sketchpad e Cabri é que é possível desenvolver dinâmicas com as Geometrias Esférica e Hiperbólicas, podendo ser arquivadas em https. Como é um software de construção ele dispõe-se dos atributos de régua e compasso para serem trabalhados de forma digital.

CURVE EXPERT

É um software desenvolvido pela empresa Hyams Development, cujo objetivo é o ajuste de curvas através da organização dos dados XY e modelagem do conjunto de pontos no plano para encontrar o melhor ajuste da curva de forma prática. Para isto, o CurveExpert dispõe-se de ferramentas de modelos de regressão linear, não linear, interpolação ou splines disponível para algumas plataformas inclusive o Windows. Portanto, é um software excelente para se trabalhar Geometria Analítica e modelagem de Polinômios no ensino de Matemática onde um planejamento abrangendo situações problemas do cotidiano poderá deixar a aula ainda mais interessante.

EUKLID

Com peculiaridades comparadas ao Sketchpad e Cabri, o EUKLID DynaGeo é um software que trabalha com geometria dinâmica. Assim, utiliza de recursos para construções geométricas tais como a régua e o compasso podendo dar vida aos desenhos movendo-os sem que sejam desfeitas as relações geométricas pré-definidas corretamente em sua construção. Com o DynaGeo é possível fazer macro criando sequências programadas para dar movimentação ao desenho criado, além disso, é possível calcular áreas, medir distâncias, redimensionar os desenhos, pintá-los, imprimi-los e exportá-los sem nenhum problema. Tem capacidade de visualização em qualquer navegador, pois utiliza a tecnologia JAVA. E os recursos não param apenas nas construções geométricas do Ensino Fundamental, pois o programa permite trabalhar desenhos com secções cônicas a partir de cinco pontos, sendo possível também trabalhar com análise de gráficos de funções, superfícies integrais e outros mais no EUKLID DynaGeo versão 3.

GEOGEBRA

Desenvolvido por Markus Hohenwarter, na Universität Salzburg, este software de matemática Dinâmica que já ganhou diversos prêmios internacionais é capaz de englobar conhecimentos de Geometria, Álgebra, Estatística e Probabilidade, sendo possível trabalhar com análise de gráficos e com Planilha de Cálculos. Por utilizar tecnologia JAVA, o Geogebra é operante em qualquer navegador. Enfim, esse é um aplicativo muito completo de fácil manuseio e com poderosíssimas propriedades em seus menus viabilizando estudos desde a matemática básica até cálculos mais avançados, é também explorado em outras áreas como Ciências e Engenharia, além disso, é gratuito para o uso não comercial.

GRAFEQ

Criado pelo canadense Jeff Tupper, o GraFeq é um ótimo software para explorar o comportamento gráfico de equações, inequações, tanto em coordenadas cartesianas, quanto em coordenadas polares. Logo, utilizando as ferramentas disponíveis nesse software, pode-se estudar o esboço das mais diversas linhas, curvas ou regiões de forma intuitiva sobre o plano bidimensional.

De acordo com vários artigos já pesquisados, acredita-se que os softwares Geogebra e GrafEq sejam os mais utilizados para se trabalhar a Geometria Analítica, devido às suas flexibilidades, fácil manuseio e resultados surpreendentes quando utilizados em sala de aula, gerando resultados satisfatórios no ensino-aprendizagem de relações algébricas e geométricas. Com atributos diferentes do GrafEq, o Geogebra é um software de Geometria Dinâmica, pode ser acessado de modo online diretamente pelo navegador de internet e pode ser aproveitado desde o mais básico até elevados níveis de estudos, provavelmente, esses sejam uns dos fatores que tornou este software ser tão popular.

Para tornar a Geometria Analítica atraente aos olhos dos alunos, pode-se também utilizar softwares utilizados em Engenharia Civil, já que existe uma imensa relação entre a Engenharia Civil e a Geometria Analítica. Realizando atividades práticas, como elaboração de plantas baixas e construção de maquetes nas plataformas, os alunos conseguem enxergar uma aplicabilidade da Geometria em situações reais.

4 COLETÂNEAS DE ATIVIDADES PROPOSTAS

A partir de agora, daremos início ao desenvolvimento das coletâneas de atividades propostas nas quais estão divididas em duas seções: seção 4.1 e 4.2.

A seção 4.1 aborda exercícios práticos que envolvem conhecimentos bem básicos da Engenharia Civil, cuja finalidade é fazer uma aproximação do aluno com a Matemática através de aplicações de conteúdos desta disciplina, às vezes, rotineiras na profissão de engenheiro civil, uma profissão admirada e almejada por muitas pessoas.

Já a seção 4.2 é mais voltada para o estudo analítico das equações, inequações, funções e regiões delimitadas com auxílio do software livre GrafEq. O último tópico desta seção apresenta três protótipos de obra artísticas produzidas no GrafEq onde foram utilizadas sobreposição de regiões delimitadas de inequações e alguns cálculos referente aos conceitos da Geometria Analítica.

4.1 Atividades práticas aplicando conceitos de Geometria relacionados à Engenharia Civil

Objetivos:

1. familiarizar o aluno com algumas atividades vivenciadas no campo da Engenharia Civil;
2. mostrar a importância da Geometria Analítica para a Engenharia;
3. compreender as noções de perspectiva isométrica e de Cavalera e suas aplicações;
4. aprender a construção de plantas simples de casas manualmente e com a ajuda de softwares.

Atividade 1. Construir uma planta baixa no piso com fitas adesivas, conforme o modelo da Figura 5 a seguir.

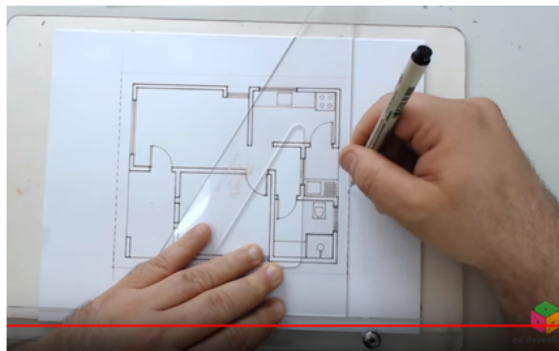
Figura 5 – Alunos de engenharia construindo planta baixa no piso.



Fonte: (UFD Centro Universitário, 2017)
(Gisele Vieira, 2017)

Atividade 2. Elaborar uma planta baixa no papel utilizando as dicas do Blog da (Luciana Paixão, 2013) e do canal (Markoni Heringer, 2018).

Figura 6 – Tutorial de construção de planta baixa simples.



Fonte: (Canal Markoni Heringer, 2018)

Atividade 3. Criar uma maquete de telhado com quedas d'água usando as regras de Engenharia nas inclinações, cujas dicas estão nos canais (Gisele Vieira, 2017) e (Fabrício Rossi, 2018).

Atividade 4. Elaborar um projeto de uma escada calculando as medidas ideais de degraus para sua construção, cujas dicas estão no (CANAL ARQUISEFAZ, 2019).

Atividade 5. Criar uma casa em 3D usando o software AutoCAD.

Dicas no canal FPCAD TEC:

Aula 1 (Wanderson Madureira, 2013a)

Aula 2 (Wanderson Madureira, 2013b)

Aula 3 (Wanderson Madureira, 2013c)

Aula 4 (Wanderson Madureira, 2013d)

Atividade 6. Criar uma planta de casa em 3D usando o Google Sketchup.

Dicas com (Wesley Almeida, 2016) no Canal Ailton Brito, e com (Elson Fidelis, 2013) no Canal cursosenquad.

Atividade 7. Criar uma casa popular no revit.

Dicas com (Ronaldo Carreta, 2019) no canal Gênios do CAD.

Atividade 8. Produzir um desenho ou pintura com propriedades de ilusão Anamórfica e Perspectiva Isométrica e de Cavalera.

Dicas:

(Luciano Vidal, 2017) disponível no Canal Luciano Vidal – Artes e Dicas.

(Canal ABC do Saber, 2014) disponível no Canal ABC do Saber.

(Iberê Thenório, 2015) disponível no Canal Manual do Mundo.

(Francis Iwamura, 2016) disponível no Canal Arquitêta - Arquitetura & Arte.

4.2 Análise do gráfico da função afim $y = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, utilizando o software GrafEq

Objetivos:

1. analisar a curva da função afim;
2. conhecer a curva da função afim;
3. identificar a função por meio do seu gráfico;
4. identificar o gráfico por meio da função;
5. entender a dinâmica dos coeficientes;
6. entender as mudanças e diferenças ao utilizar os sinais $=$, $>$ ou $<$ na expressão.
7. conhecer o gráfico ao aplicar a forma inversa da função.

Para todos os itens, de 1 a 7, os alunos deverão tentar esboçar os gráficos utilizando papel, régua e lápis. Logo depois, comparar os resultados obtidos com aqueles do GrafEq.

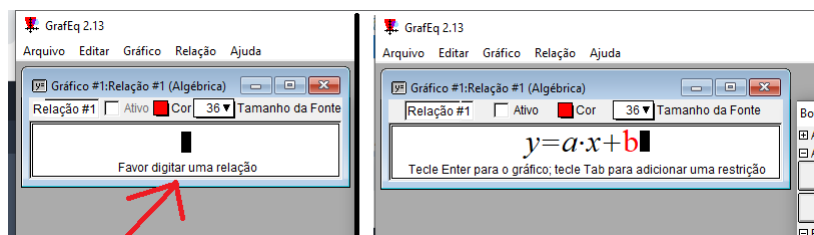
(a) Analise, graficamente, $y = ax + b$, fixando um valor para “ a ” e variando “ b ”, em que $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Que é possível concluir?

Resolução.

Vamos considerar, por exemplo, $a = 1$, $b \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, e aplicar os seguintes passos no GrafEq:

Abra o software GrafEq, e na janela à esquerda da tela, digite a expressão $y = ax + b$.

Figura 7 – Inserção da equação $y = ax + b$ no GrafEq.

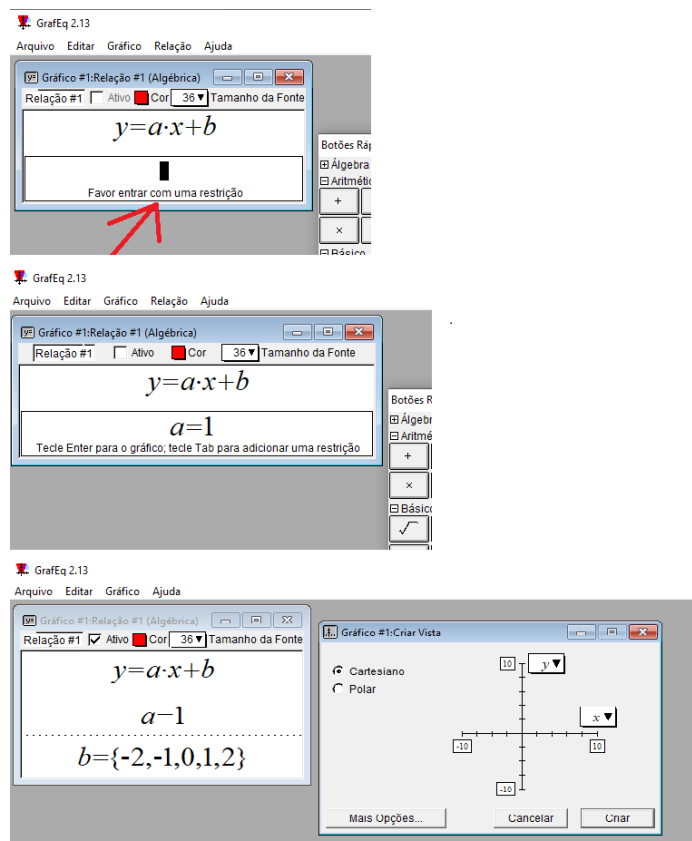


Fonte: Autor

Em seguida, aperte a tecla Tab para inserir uma restrição, e nessa janela de restrição, digite $a = 1$.

Aperte novamente a tecla Tab para aplicar a nova restrição $b \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

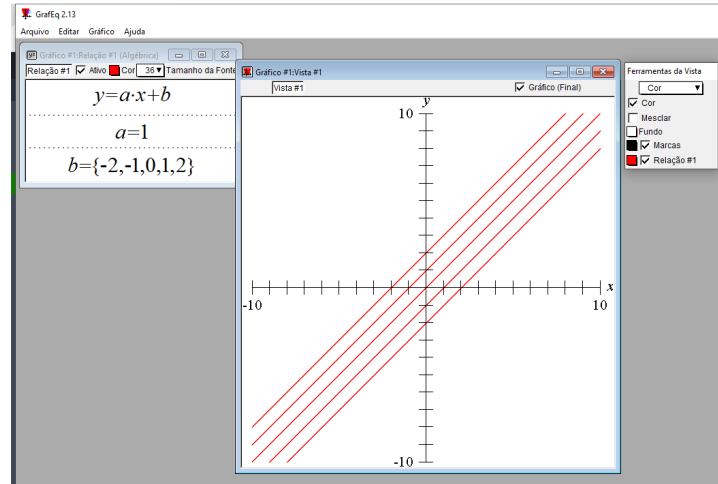
Figura 8 – Inserindo os valores de a e b nas janelas de restrições.



Fonte: Autor

Agora, clicando em “criar” na segunda janela que surgiu à direita, aparecerão os gráficos relacionados, conforme a Figura 9 a seguir.

Figura 9 – Feixe de retas paralelas originadas de uma mesma relação.

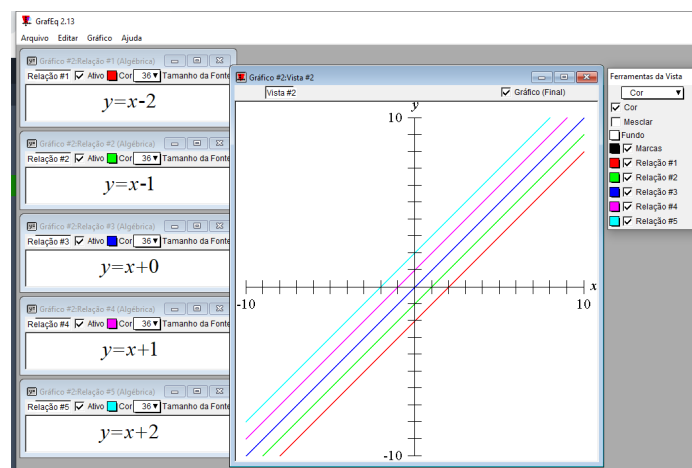


Fonte: Autor

As cinco retas paralelas geradas devido aos valores atribuídos aos coeficientes a e b , as quais são as curvas das funções $y = x - 2$, $y = x - 1$, $y = x$, $y = x + 1$ e $y = x + 2$, respectivamente. Essa conclusão é percebida mais facilmente quando visualizamos cada gráfico separadamente. Observe que essas retas indicam que elas têm o mesmo ângulo de inclinação em relação ao eixo da ordenada ou da abscissa. Outro fato importante é que o valor do coeficiente b determina o ponto de interseção de cada reta com o eixo y , ou seja, ele é o coeficiente linear da função dada. Portanto, o coeficiente b desempenha o papel de deslocar a reta sobre o eixo y .

Na Figura 10 a seguir, as retas vermelha, verde, azul escura, rosa e azul clara intersectam o eixo y nos pontos $(0, -2)$, $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, 2)$, respectivamente.

Figura 10 – Gráficos separados em cinco relações independentes.



Fonte: Autor

(b) Analise, graficamente, a função $y = ax + b$, fixando um valor para “ b ” e variando “ a ”, com $a \neq 0$. Analise também a função $y = b$. Que é possível concluir?

Resolução.

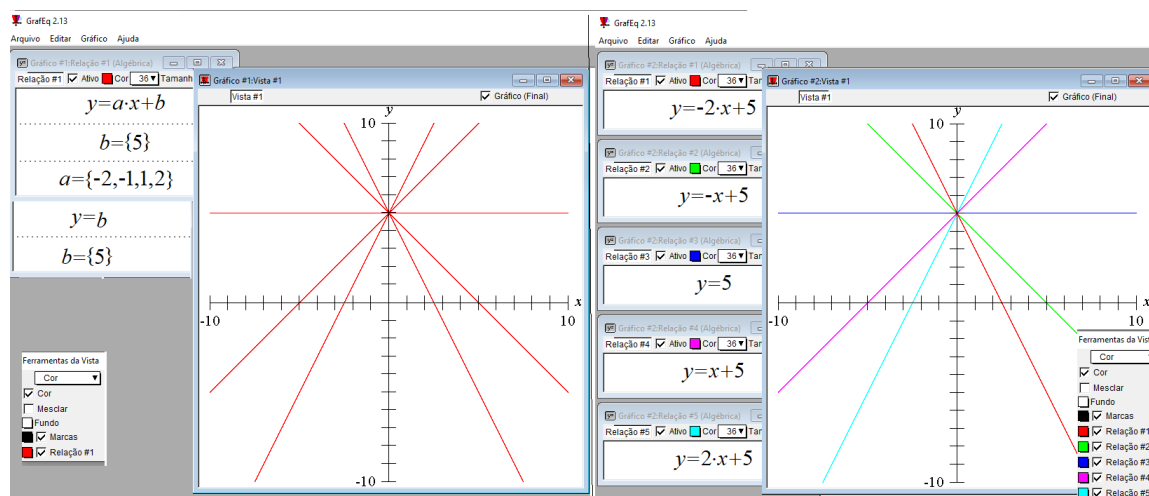
Repetindo alguns comandos do item anterior, vamos considerar, por exemplo, $b = 5$, $a \in \{-2, -1, 1, 2\}$, e aplicar os seguintes passos no GrafEq:

Abra o software GrafEq, e na janela à esquerda da tela, digite a expressão $y = ax + b$.

Em seguida, aperte a tecla Tab para inserir uma restrição, e nessa janela de restrição, digite $b = 5$.

Aperte novamente a tecla Tab para aplicar a nova restrição $a \in \{-2, -1, 1, 2\}$. Crie também uma nova relação e digite a expressão $y = b$, na janela de restrição insira $b = 5$. Depois, clicando em “criar” na segunda janela que surgiu à direita, aparecerão os gráficos relacionados, conforme a Figura 11 a seguir.

Figura 11 – À esquerda, retas concorrentes geradas por uma mesma relação; à direita, retas concorrentes geradas por relações diferentes.



Fonte: Autor

As cinco retas geradas de acordo com os valores atribuídos aos coeficientes a e b são as curvas das funções $y = -2x + 5$, $y = -x + 5$, $y = 5$, $y = x + 5$ e $y = 2x + 5$, respectivamente. Essa conclusão é melhor percebida ao visualizar cada gráfico separadamente. Observe que essas retas têm o mesmo ponto de interseção com o eixo y na coordenada $(0, 5)$, de modo que $b = 5$ é o coeficiente linear. Também, os ângulos de inclinação em relação aos eixos da ordenada ou da abscissa são diferentes. Logo, um fato importante é que o coeficiente a desempenha o papel de rotacionar a reta sobre o eixo y , pois ele é o coeficiente angular da função, de modo que determina se a função afim ($y = ax + b$) é crescente ou decrescente, sendo decrescente quando

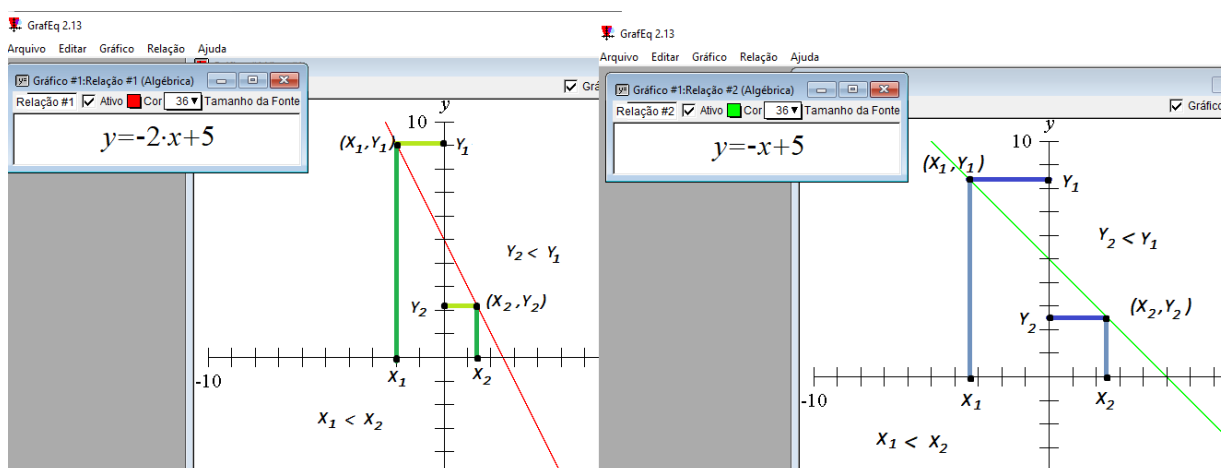
$a < 0$ ou crescente quando $a > 0$. A função afim será constante quando $f(x) = y = b$, com $b \in \mathbb{R}$. Assim, todos os valores de x do domínio real levam ao valor de b da imagem de $f(x)$.

Na Figura 11 a seguir, as retas vermelha, verde, rosa e azul clara intersectam o eixo x nos pontos $(5/2, 0)$, $(5, 0)$, $(-5, 0)$ e $(-5/2, 0)$, respectivamente. Já a reta de cor azul escura representa uma função constante, a qual intersecta o eixo y no ponto $(0, 5)$. Quais dessas cinco retas têm a sua função como decrescente, constante ou crescente? Por quê?

Se analisarmos o coeficiente a das funções dessas retas, poderemos realmente afirmar se a função é decrescente ou crescente, sendo constante caso $f(x) = b$, pois as definições sustentam essa veracidade. De acordo com (LIMA *et al.*, 2006), dada a função $f(x) = ax + b$, e considerando $a, b, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tais que $x_2 > x_1$, temos que a função $f(x)$ é decrescente quando $f(x_2) < f(x_1)$, constante quando $f(x_2) = f(x_1)$, e crescente quando $f(x_2) > f(x_1)$. Poderíamos usar essa definição e atribuímos valores à x para identificarmos algebricamente a natureza da função afim, mas a Geometria Analítica nos garante que, apenas analisando o gráfico de cada função, podemos julgar a natureza da função afim.

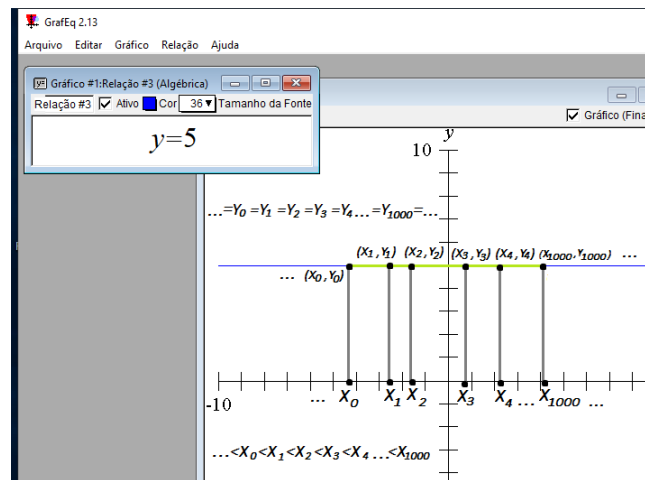
Nesse sentido, são decrescentes as funções $y = -2x + 5$ e $y = -x + 5$ (gráficos nas cores vermelha e verde claro, respectivamente), são crescentes as funções $y = x + 5$ e $y = 2x + 5$ (gráficos nas cores rosa e azul clara, respectivamente), e é constante a função $y = 5$ (gráfico na cor azul). Observe a análise do gráfico de cada uma dessas funções nas Figuras 12, 13 e 14 a seguir.

Figura 12 – Funções decrescentes.



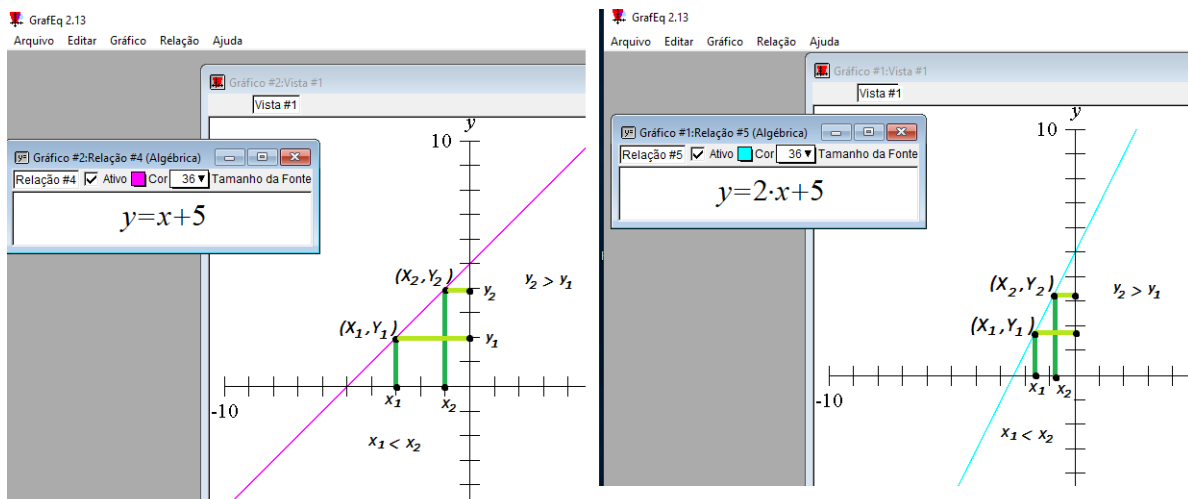
Fonte: Autor

Figura 13 – Função constante.



Fonte: Autor

Figura 14 – Funções crescentes.



Fonte: Autor

(c) Analise, graficamente, $y > ax + b$, fixando um valor para $a > 0$ e depois $a < 0$, variando “ b ”. Analise também $y > b$. Que é possível concluir?

Resolução.

Vamos considerar, por exemplo, $a = 1$, $b \in \{-4, 0, 5\}$, e aplicar os seguintes passos no GrafEq, para gerar três gráficos em relações separadas.

Abra o software GrafEq, e na janela à esquerda da tela, digite a expressão $y > x + 5$, e acione a tecla Enter. Em seguida, na tela “Criar Vista”, que surge à direita, clique em “Criar”. Logo, será criada a primeira relação ou Relação#1, cuja região é mostrada à esquerda na Figura 15.

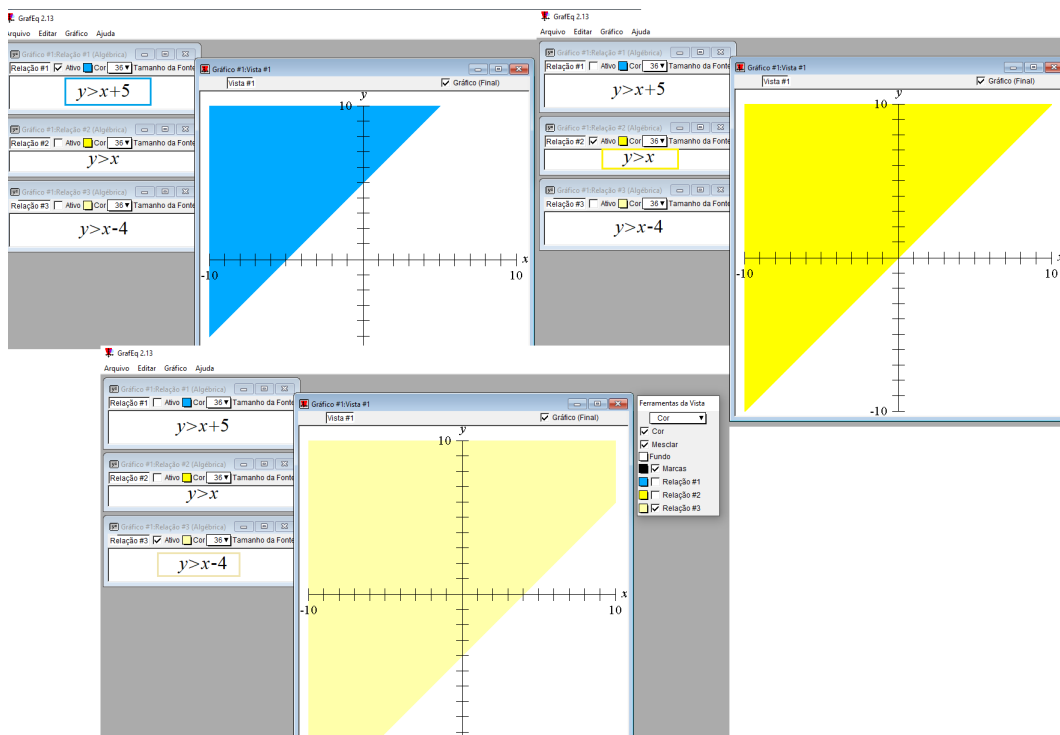
Agora, clique no menu “Gráfico” e no submenu “Nova Relação”, e na janela que surgir, digite $y > x$ e tecele Enter. Será criada a Relação#2, cuja região é mostrada à direita na Figura 15.

Por fim, efetuando os mesmos passos, crie a Relação#3, cuja expressão é $y > x - 4$, mostrada na Figura 15, parte inferior.

No menu “Ferramentas da Vista”, na caixa à direita, desmarcamos alternadamente duas das três relações, para uma melhor visualização individual, como é mostrada na Figura 15.

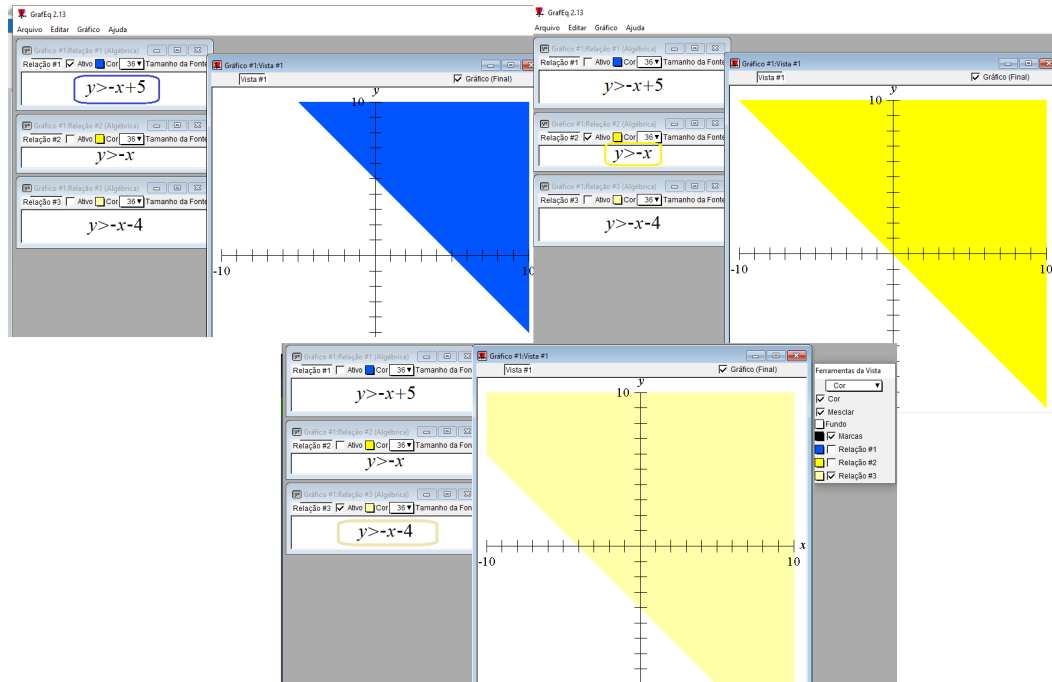
Agora, para o resultado mostrado na Figura 16, consideramos $a < 0$, por exemplo, $a = -1$, $b \in \{-4, 0, 5\}$, e aplicamos alguns passos descritos anteriormente no GrafEq, para gerar três gráficos em relações separadas.

Figura 15 – Representações gráficas das funções $y > x + 5$, $y > x$ e $y > x - 4$.



Fonte: Autor

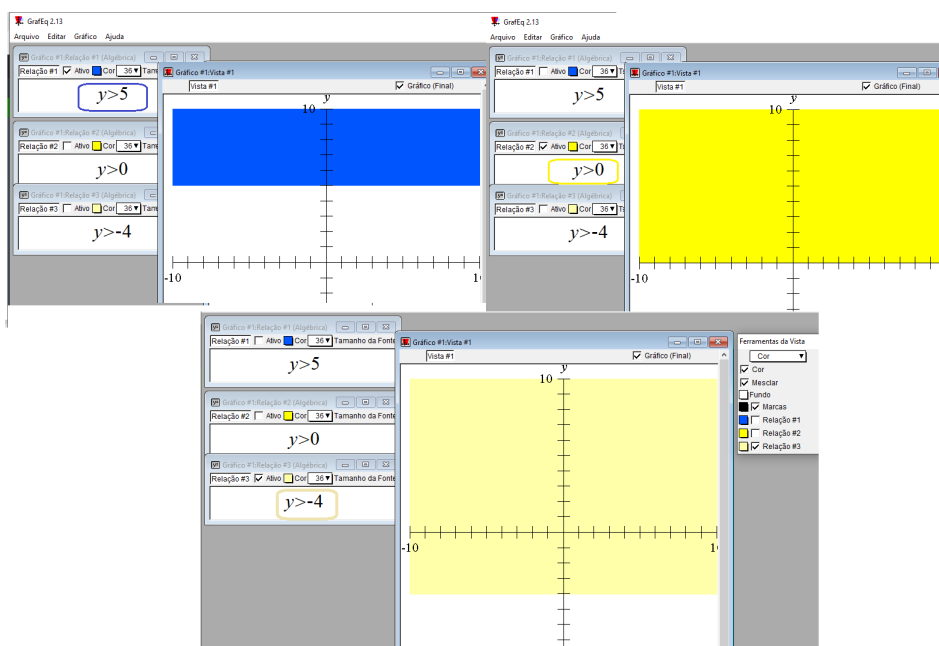
Figura 16 – Representação gráfica das funções $y > -x + 5$, $y > -x$ e $y > -x - 4$.



Fonte: Autor

Consideremos, agora $b \in \{-4, 0, 5\}$, para a função $y > b$, e as desenvolvamos em três relações distintas no GrafEq marcando na caixa do menu “Ferramentas da Vista” apenas uma função de cada vez, para a visualização individual das regiões formadas. O resultado é mostrado na Figura a seguir.

Figura 17 – Regiões representadas pelas funções $y > 5$, $y > 0$ e $y > -4$.

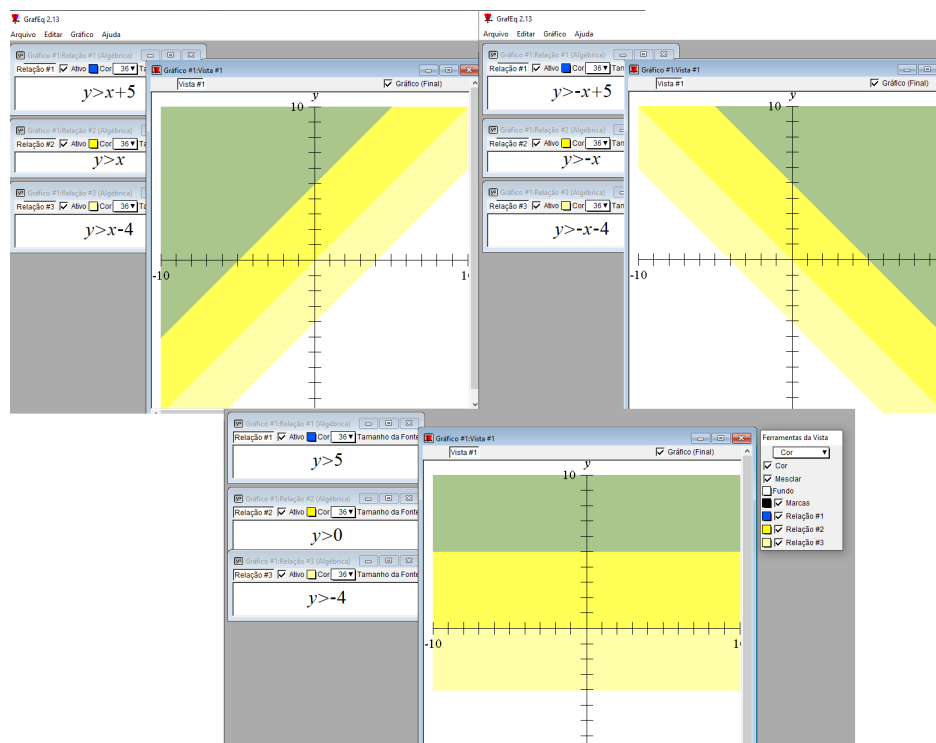


Fonte: Autor

Concluimos que, ao utilizar o sinal de igualdade(=), a função afim descreve sua curva (uma reta). No entanto, quando substituimos o sinal de igualdade pelo sinal de “maior que” ($>$) na função, então ela descreverá a área determinada pelo conjunto de pontos $(x,y) \in \mathbb{R}$ que estão na região superior da reta dada. Há, portanto, uma exclusão do conjunto de pontos $(x,y) \in \mathbb{R}$ que estão abaixo da reta e também dos pontos pertencentes à própria reta. Haveria a inclusão dos pontos pertencentes à reta caso o símbolo inserido fosse o de “maior que ou igual a” (\geq).

É possível visualizar, no GrafEq, a interseção dessas regiões. Basta, no menu "Ferramentas da Vista", clicar na caixa “Mesclar”. Observe que, nos testes com a aplicação da restrição $a > 0$, a interseção das regiões é o conjunto dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}$ que estão na parte imediatamente superior à linha representada pela reta $y = x + 5$. Nos exemplos com a restrição $a < 0$, a interseção das regiões é a região imediatamente superior à reta $y = -x + 5$. No caso da função $y > b$, a interseção das regiões compreende a região imediatamente superior à reta $y = 5$. A interseção dessas três regiões está representada na cor verde, mostrada na Figura 18 a seguir.

Figura 18 – Mesclagem de regiões tais que $a > 0$, $a < 0$ e $y > b$, respectivamente.



Fonte: Autor

(d) Analise, graficamente, $y < ax + b$, fixando um valor para $a > 0$ e $a < 0$, variando “ b ”. Analise também $y < b$ Que é possível concluir?

Resolução.

Considere $a > 0$, por exemplo $a = 2$, e $b \in \{-3, 0, 4\}$, e repita alguns passos no GrafEq, para gerar três gráficos em relações separadas:

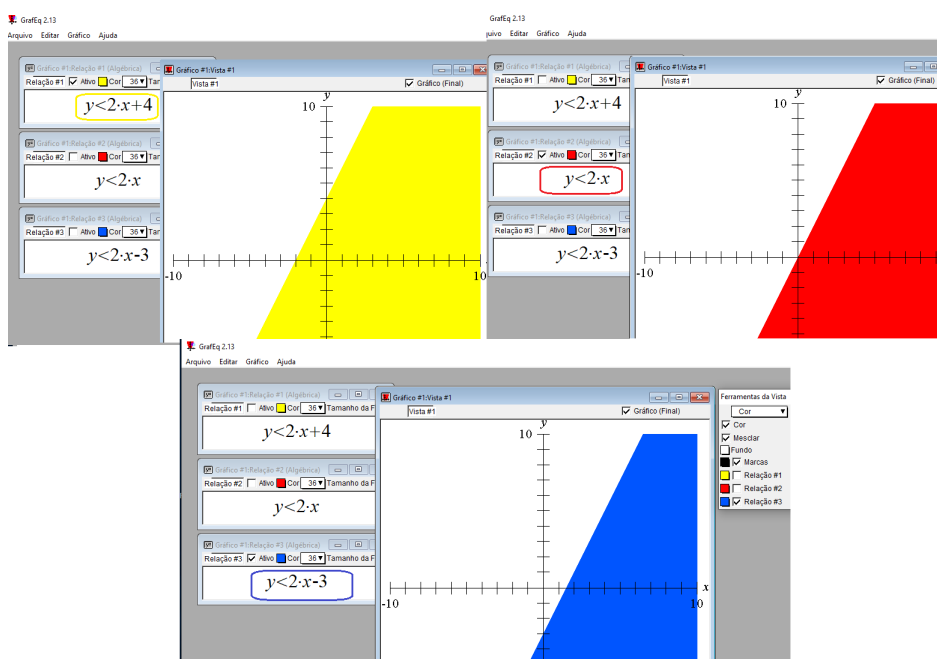
Abra o GrafEq, e no menu “Arquivo”, clique na aba “Novo gráfico”, e na janela à esquerda da tela que surgir (janela Gráfico/Relação Algébrica), digite a expressão $y < x + 4$ e acione a tecla Enter. Depois, clique em “Criar”, na janela “Criar Vista”. Logo, será criada a Relação#1 mostrada à esquerda na Figura 19.

Agora, para gerar a Relação#2, clique no menu “Gráfico” e no submenu “Nova Relação”. Em seguida, na janela que surgir, digite $y < 2x$, e crie o gráfico mostrado à direita na Figura 19.

Crie, agora, a Relação#3 usando passos já descritos anteriormente, e gere o gráfico da expressão $y < 2x - 3$, mostrada na parte inferior na Figura 19.

É preciso ir ao menu “Ferramentas da Vista”. Na caixa à direita, desmarque alternadamente duas da três relações, para visualizar individualmente cada relação algébrica, como é mostrado na Figura 19.

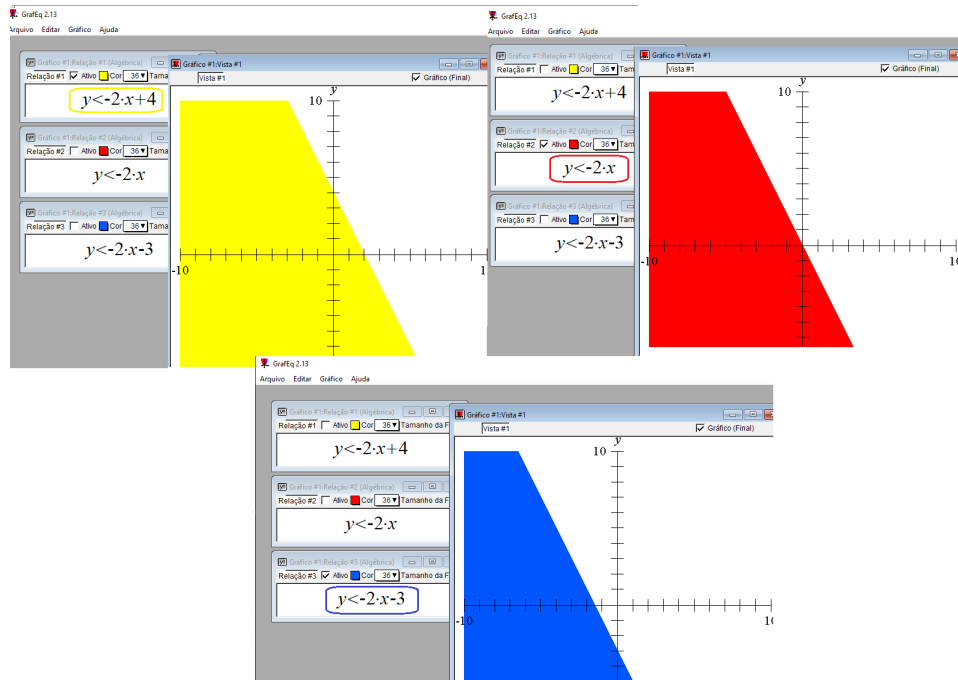
Figura 19 – Regiões representadas pela inequações $y < 2x + 4$, $y < 2x$ e $y < 2x - 3$.



Fonte: Autor

Agora, considere $a < 0$, por exemplo, $a = -2$, $b \in \{-3, 0, 4\}$, e realize os passos no GrafEq, para gerar três gráficos em relações separadas. O resultado é mostrado na Figura 20 a seguir.

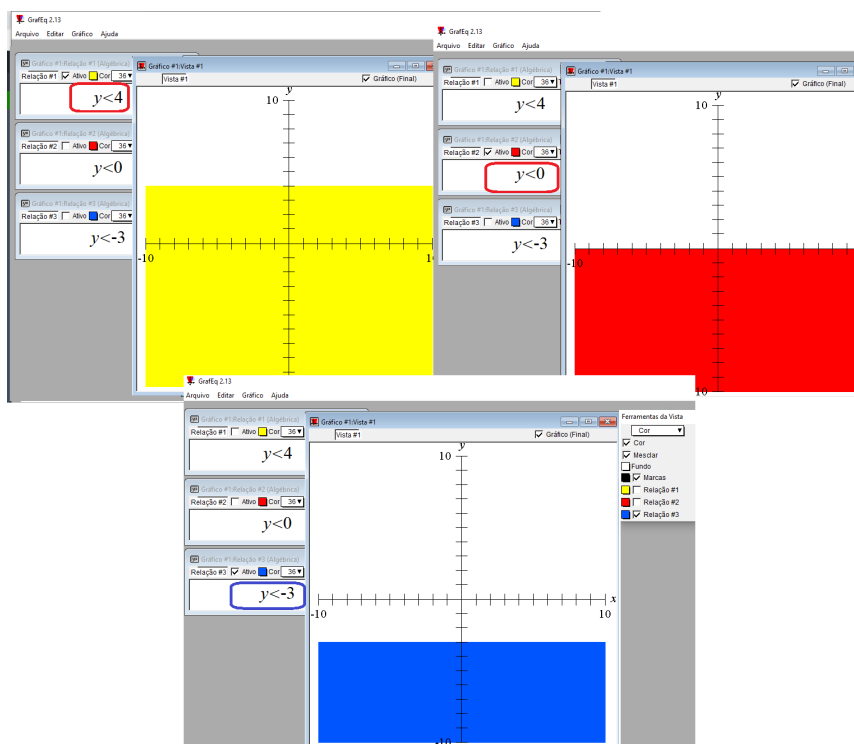
Figura 20 – Representações gráficas das inequações $y < -2x + 4$, $y < -2x$ e $y < -2x - 3$.



Fonte: Autor

Consideremos, agora, $b \in \{-3, 0, 4\}$, para a função $y < b$. Vamos desenvolvê-las em três relações distintas no GrafEq marcando na caixa do menu “Ferramentas da Vista”, apenas uma função de cada vez. Teremos as formas mostradas na Figura 21 a seguir.

Figura 21 – Regiões representadas pelas inequações $y < 4$, $y < 0$ e $y < -3$.

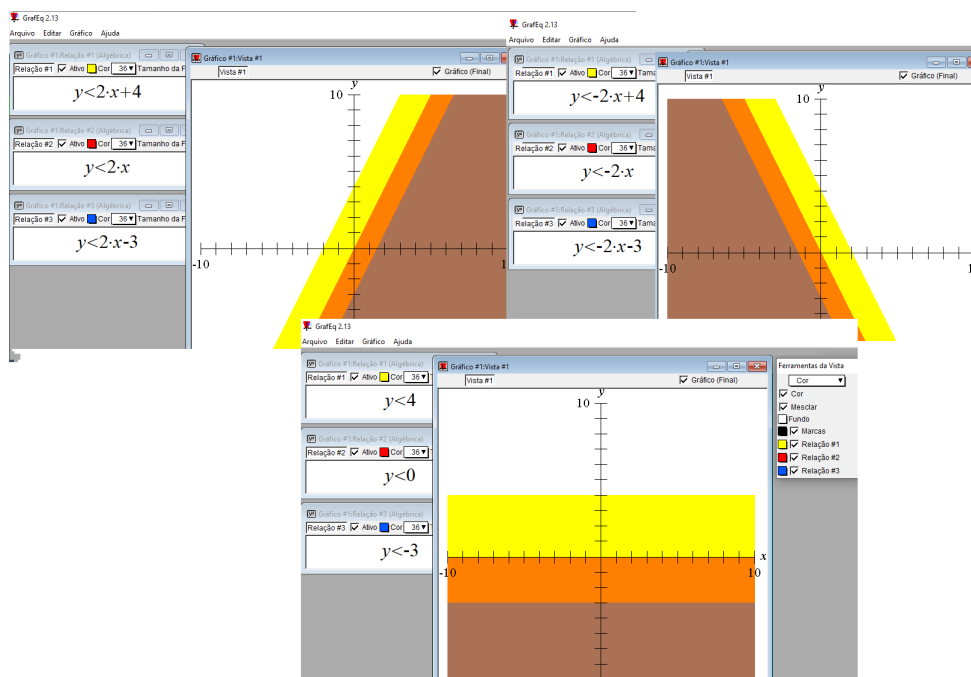


Fonte: Autor

Já comentamos que, ao utilizar o sinal de “igualdade” ($=$), a curva da função afim é uma reta. Quando utilizamos o sinal de desigualdade “ $>$ ” no lugar da igualdade, então a função descreve uma região determinada pelo conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}$ que estão na região superior à reta dada $y = ax + b$ ou $y = b$, caso se trate de uma função constante. Por outro lado, quando substituímos o sinal de igualdade pelo sinal de desigualdade “menor que” ($<$), então a função descreve uma região determinada pelo conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}$ que estão na parte inferior da reta $y = ax + b$ ou $y = b$, dependendo do caso. Há, portanto, uma exclusão da região formada pelo conjunto dos pontos acima da reta $y = ax + b$ e também dos pontos pertencente a essa mesma reta. Os pontos pertencentes a essa reta também seriam incluídos caso o símbolo utilizado fosse o de “menor que ou igual a” (\leq).

Novamente, podemos visualizar a intersecção das regiões por meio do menu “Ferramentas da Vista” clicando na caixa “Mesclar”. Nos exemplos aplicados à restrição $a > 0$, a intersecção das regiões é o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}$ situados na região inferior imediatamente após a reta $y = 2x - 3$. Já nos exemplos com a restrição $a < 0$, a intersecção das regiões é a região inferior à reta $y = -2x - 3$. No caso da restrição $y = b$, com $b \in \{-3, 0, 4\}$, a intersecção das regiões corresponde à região que está imediatamente abaixo da reta $y = -3$. Na cor marrom, temos a representação da intersecção dessas três regiões.

Figura 22 – Mesclagem de regiões tais que $a > 0$, $a < 0$ e $y = b$, respectivamente.



Fonte: Autor

(e) Análise, graficamente, $x = ay + b$, fixando um valor para “ a ”, com $a \neq 0$ e variando

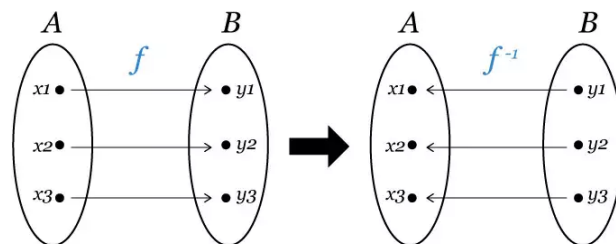
“b”. Que é possível concluir?

Resolução.

Esse item nos convida a realizar uma rápida investigação sobre a função inversa de uma função invertível $f(x)$, e a raciocinar como é a relação entre essas expressões e seus respectivos gráficos.

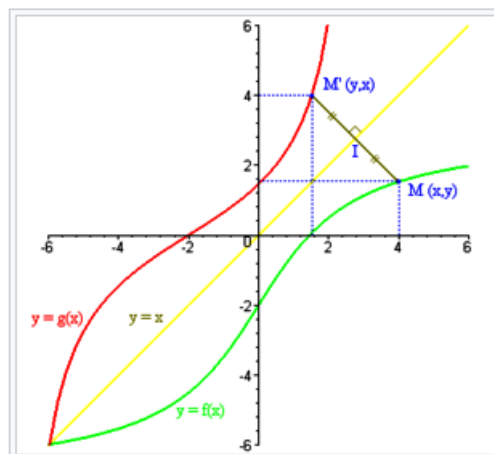
Segundo (LIMA, 2004), caso exista a função inversa de uma função $f : X \rightarrow Y$, então há uma forte correspondência entre os conjuntos X e Y , de forma que a função $f^{-1} : Y \rightarrow X$ é tal que $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$ e $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$, onde id é denominada *função identidade*. Isso significa que o domínio da função original $f(x)$ se transforma na imagem da função inversa f^{-1} . De modo análogo, temos que a imagem da função original $f(x)$ se transforma no domínio da função inversa f^{-1} . Observe os conjuntos X e Y mostrados na Figura 23 a seguir.

Figura 23 – Diagramas de relações entre Domínios e Imagens das funções f e f^{-1} .



Fonte: (Educa Mais Brasil, 2019)

Figura 24 – A função inversa g de uma função real de variável real f obtém-se de f por uma simetria em relação à reta $y = x$.



Fonte: (Romero Schmidtke, 2007)

Uma função é denominada *invertível* quando ela admite função inversa, sendo essa única. Para que uma função seja invertível, é condição necessária e suficiente que ela seja bijetiva.

De acordo com (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014), se a função $f : X \rightarrow Y$ é injetiva de X em Y , então temos que f é uma função bijetiva de X em $f(X)$, e, portanto, admite uma inversa de $f(X)$ em X . Não é conveniente designar essa função por inversa de f , pois nem sempre o conjunto Y é domínio da função.

Vamos, agora, prosseguir com os testes, estudando-os do mesmo modo que estudamos os casos dos itens de (a) a (d).

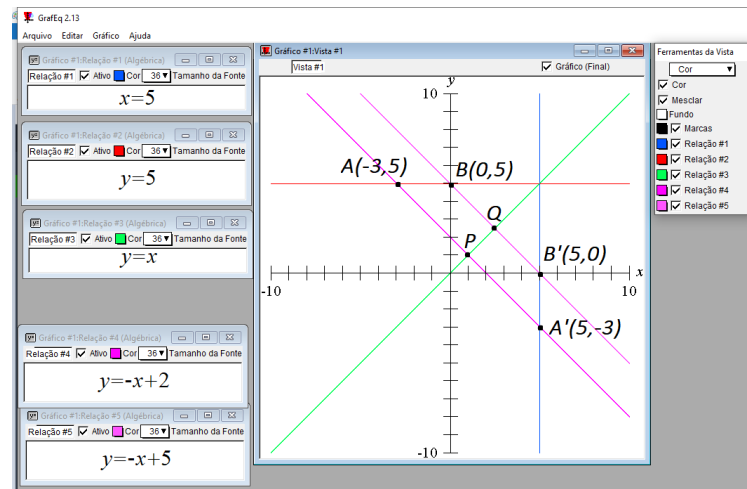
Primeiramente, vamos criar, no GrafEq, os gráficos de duas funções afins e das suas respectivas funções inversas. Queremos frizar aqui um ponto importante em que para as plotagens no GrafEq não utilizaremos a função inversa na forma $y = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$, mas sim a forma $x = ay + b$ para dar ênfase na visualização independente dos coeficientes a e b , mesmo consciente de que x ainda permanece sendo a variável dependente e y a variável independente.

Como exemplo, vamos considerar $y = 2x + 5$ e $y = 5$ e suas respectivas inversas, $x = 2y + 5$ e $x = 5$.

Agora, seja $r : y = x$ a reta da função identidade $f(x) = x$ e esboçamo-la para percebemos melhor uma propriedade da função inversa: caso $f(x)$ admita inversa, então para cada ponto $A = (x, y)$ pertencente à reta $y = ax + b$ onde $d((x, y), r)$ é a distância do ponto A até r , temos um ponto $A' = (y, x)$ pertencente à reta $x = ay + b$ onde $d((y, x), r)$ é a distância do ponto A' até r , tal que, esses pontos A e A' são equidistantes em relação à reta $r : y = x$, isto é, $d((x, y), r) = d((y, x), r)$. Propriedade assegurada pela definição mencionada anteriormente.

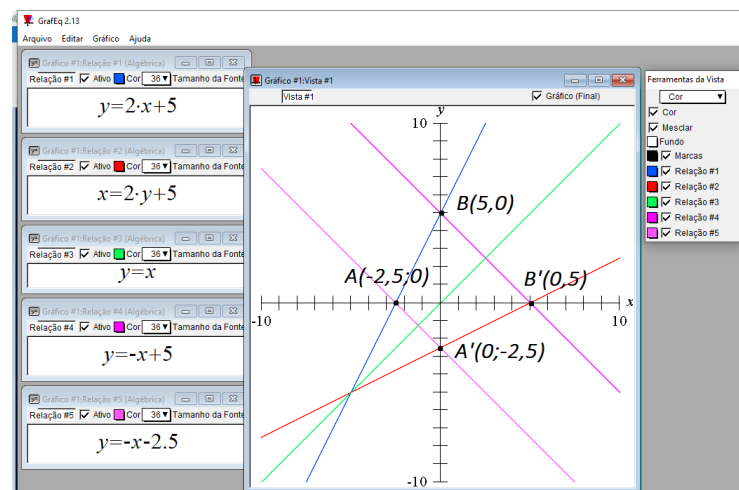
Na Figura 25, consideramos as retas $y = 5$ e $x = 5$, e, passando por elas, traçamos as retas $y = -x + 2$ e $y = -x + 5$ perpendiculares à reta $x = y$. Já na Figura 26, consideramos a reta $y = 2x + 5$ e a sua inversa $x = 2y + 5$, e, passando por elas, traçamos as retas $y = -x + 5$ e $y = -x - 2,5$, na cor rosa. Procedemos desse modo propositalmente para avaliarmos os pontos de interseção A, A', B e B' , que podem ser obtidos igualando a zero x ou y . Observe que a garantia da perpendicularidade das retas $y = -x + 2, y = -x + 5, y = -x - 2,5$ à a reta $r : y = x$ é a propriedade segundo a qual o produto dos seus coeficientes angulares é -1 . Essa perpendicularidade implica a menor distância entre um ponto e uma reta. Na Figura 25, por exemplo, temos as distâncias $d(A, P), d(A', P), d(B, Q)$ e $d(B', Q)$, em que $d(A, P) = d(A', P)$ e $d(B, Q) = d(B', Q)$, pois a reta da função identidade $y = x$ atua como uma mediatriz.

Figura 25 – Análise das retas $y = 5$ e $x = 5$, em relação à reta $y = x$.



Fonte: Autor

Figura 26 – Análise das retas $y = 2x + 5$ e $x = 2y + 5$, em relação à reta $y = x$.



Fonte: Autor

Pelo que já estudamos, dada a função $y = ax + b$, temos que o coeficiente b representa a interseção da reta com o eixo das ordenadas. Além da visualização gráfica no GrafEq, também podemos comprovar esse fato quando resolvemos o sistema com as equações $x = 0$ (eixo das ordenadas) e $y = ax + b$: obtemos $y = b$.

Logo, a solução $(0, b)$ significa que a reta $y = ax + b$ intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0, b)$.

Podemos também obter a interseção da reta $y = ax + b$ com o eixo das abscissas ($y = 0$): obtemos $x = \frac{-b}{a}$.

Logo, a solução $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ significa que a reta $y = ax + b$ intersecta o eixo das abscissas nesse referido ponto.

Realmente, o fato de deduzir o ponto de interseção no eixo das ordenadas apenas visualizando o coeficiente linear b é garantido justamente pela solução do sistema de equações constituído pela reta e pelo eixo $x = 0$.

Outro resultado também importante que pode ser garantido pela solução do sistema de equações constituído pela reta e pelo eixo das abscissas é este que obtemos, ao isolar a variável x

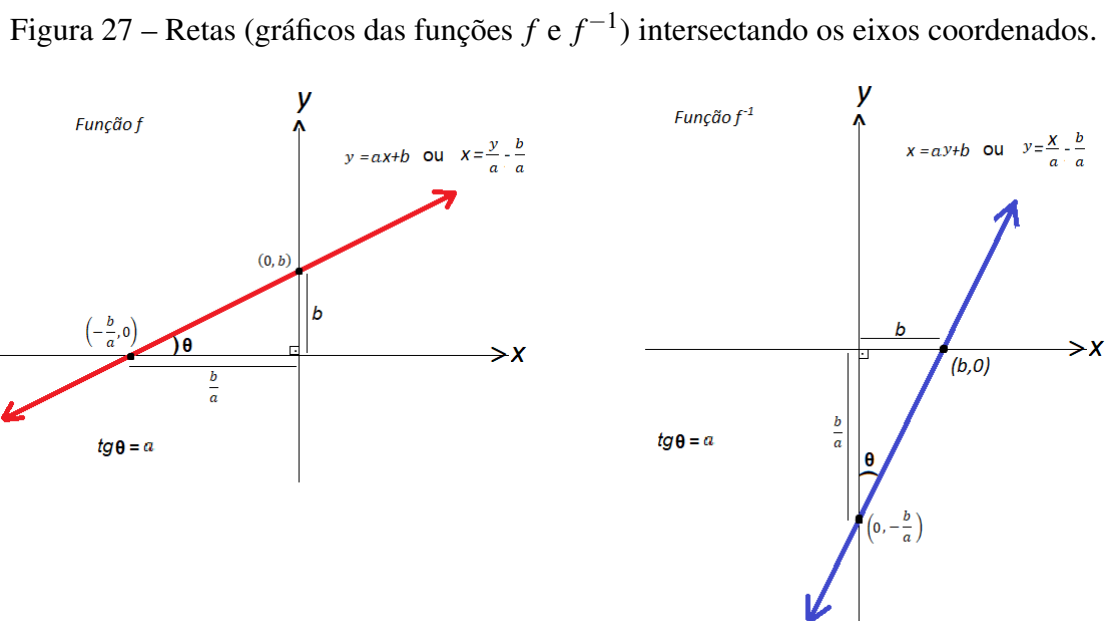
$$y = ax + b \rightarrow ax = y - b \rightarrow x = \frac{y}{a} - \frac{b}{a}.$$

Com esse resultado concluímos que o termo independente $-\frac{b}{a}$ representa a interseção da reta $y = ax + b$ com o eixo das abscissas exatamente no ponto $(-\frac{b}{a}, 0)$. E o coeficiente $\frac{1}{a}$ é a tangente do ângulo que a reta faz com o eixo das ordenadas.

Para a função inversa $x = ay + b$, ocorre que o coeficiente b representa a interseção da reta com o eixo das abscissas exatamente no ponto $(b, 0)$, e o coeficiente a é a tangente do ângulo que a reta $x = ay + b$ faz com o eixo das ordenadas. Temos, ainda, um resultado importante expressando y em função de x :

$$x = ay + b \rightarrow ay = x - b \rightarrow y = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}.$$

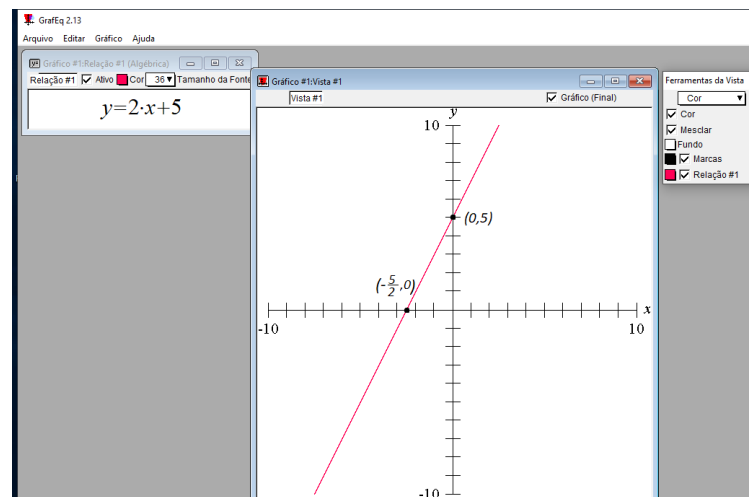
Logo, a solução $(0, -\frac{b}{a})$ significa que a reta $x = ay + b$ intersecta o eixo das ordenadas nesse referido ponto, sendo o coeficiente $\frac{1}{a}$ a tangente do ângulo que essa reta faz com o eixo das abscissas. Veja a Figura 27 a seguir.



Verifiquemos, agora, separadamente no GrafEq, dois exemplos anteriores já plotados: a reta $y = 2x + 5$ e a sua inversa $x = 2y + 5$. Em quais pontos essas retas intersectam os eixos coordenados?

A Figura 28 a seguir mostra geometricamente a solução da equação $y = 2x + 5$, trazendo visivelmente os pontos de interseção dos eixos com a reta $y = 2x + 5$ no GrafEq. Obtendo a solução algebricamente, temos que, na função $y = 2x + 5$, os seus coeficientes são $a = 2$ e $b = 5$. Como a reta (gráfico da função $y = ax + b$) sempre intersecta os eixos coordenados nos pontos $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ e $(0, b)$, o gráfico da função $y = 2x + 5$ intersecta os eixos das abscissas e ordenadas nos pontos $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ e $(0, 5)$, respectivamente.

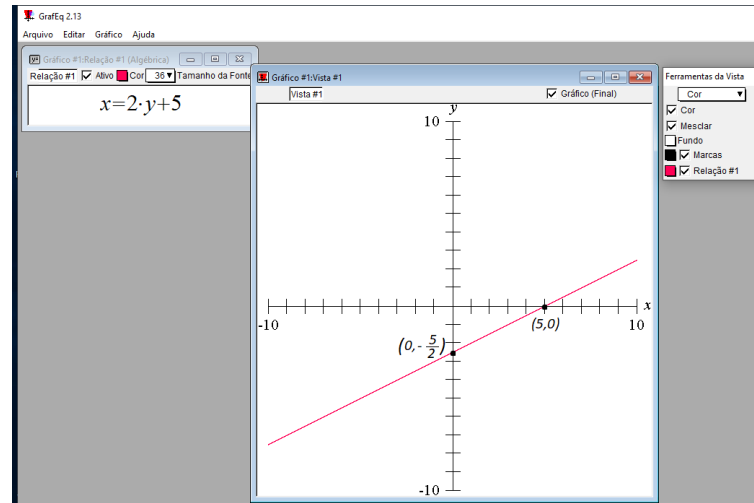
Figura 28 – Reta (gráfico da função $y = 2x + 5$) intersectando os eixos coordenados.



Fonte: Autor

A Figura 29 a seguir mostra geometricamente a função $x = 2y + 5$, trazendo graficamente os pontos de interseção dos eixos coordenados com a reta no GrafEq. Os coeficientes são $a = 2$ e $b = 5$. Como a reta (gráfico da função $x = ay + b$) intersecta os eixos das abscissas e ordenadas nos pontos $(b, 0)$ e $\left(0, -\frac{b}{a}\right)$, nesta ordem, logo, o gráfico da função $x = 2y + 5$ intersecta os eixos das abscissas e ordenadas nos pontos $(5, 0)$ e $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$, respectivamente.

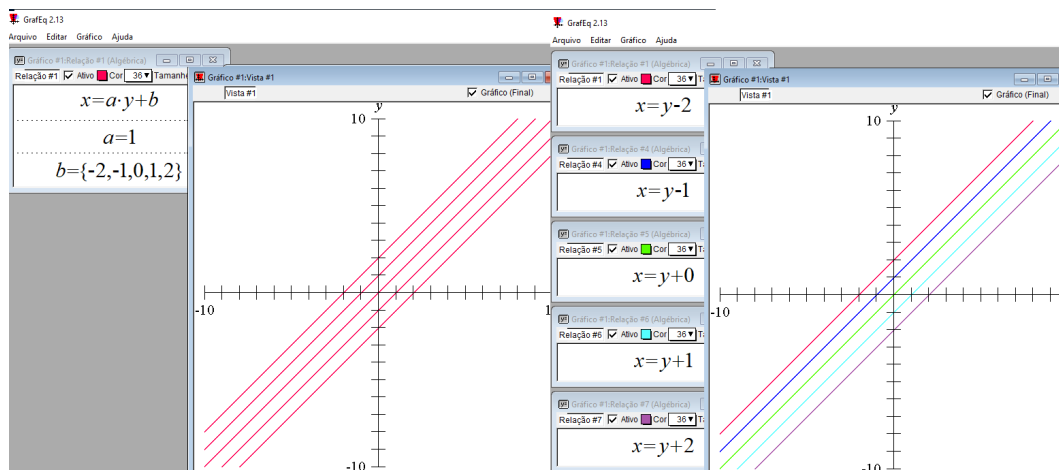
Figura 29 – Gráfico da função $y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2}$ intersectando os eixos coordenados.



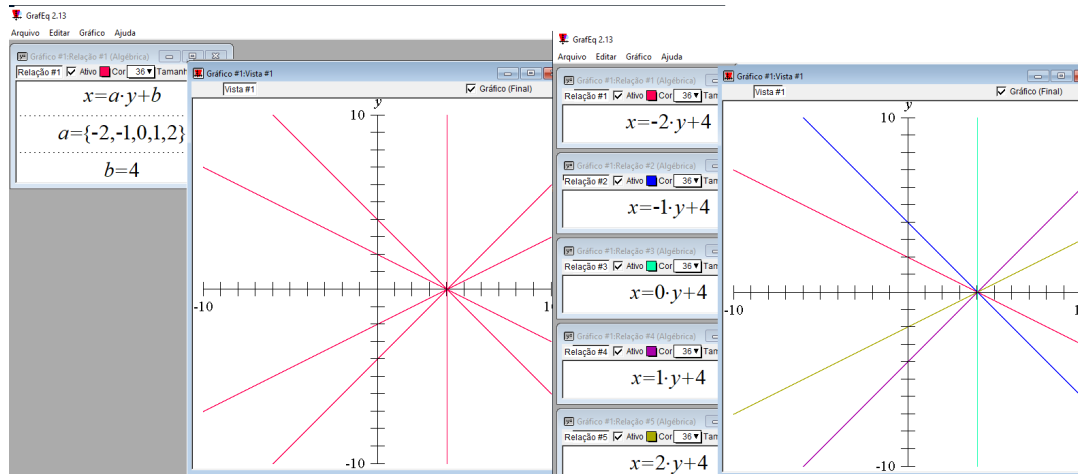
Fonte: Autor

Com o estudo desse item (e) concluímos que, na função inversa $x = ay + b$, o coeficiente b tem a incumbência de deslocar a reta ao longo do eixo x , o que se torna visivelmente claro quando fixamos a e variamos b . Já o coeficiente a tem a incumbência de rotacionar a reta em torno do eixo x , o que se torna bem notório quando fixamos um ponto sobre o eixo x (fixando b) e variamos o coeficiente a . Observe os exemplos a seguir. Na Figura 30, fixamos o coeficiente a , e na Figura 31, fixamos o coeficiente b .

Figura 30 – Deslocamento da reta da função inversa sobre o eixo x .



Fonte: Autor

Figura 31 – Rotação da reta da função inversa sobre o eixo x .

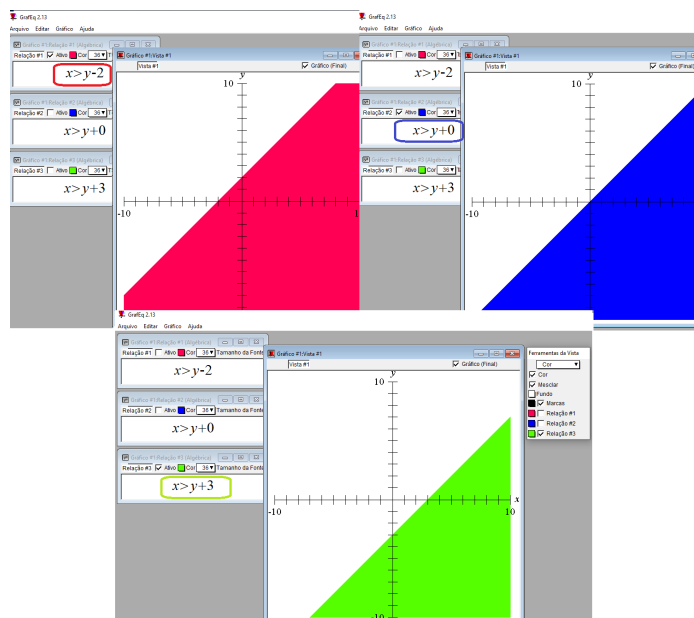
Fonte: Autor

(f) Analise, graficamente, $x > ay + b$. Que é possível concluir?

Resolução.

Vamos fixar um $a > 0$ (por exemplo, $a = 1$), $b = \{-2, 0, 3\}$, e desenvolver no GrafEq as diferentes relações. Podemos verificar os resultados na Figura 32 a seguir.

Figura 32 – Regiões representadas pelas inequações $x > y - 2$, $x > y + 0$ e $x > y + 3$, respectivamente.

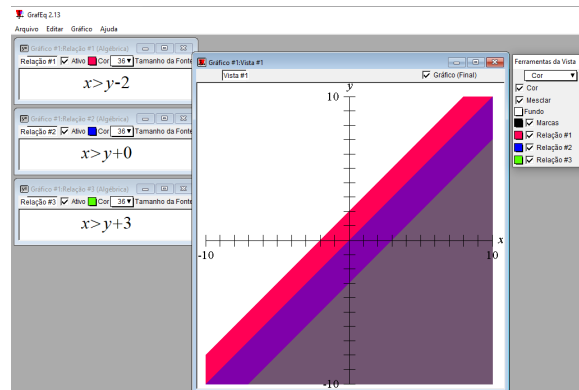


Fonte: Autor

Concluimos que, trocando o sinal de igualdade da função inversa $x = ay + b$ pelo sinal de desigualdade “>”, a inequação representará a região formada pelo conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}$ que estão abaixo da reta $x = ay + b$ com coeficiente a positivo. A inclusão dos pontos pertencentes

a essa reta seria possível caso utilizássemos a desigualdade “ \geq ”, em vez da igualdade. Observe que a interseção das regiões geradas pelas inequações $x > y - 2$, $x > y$ e $x > y + 3$ é a região formada pelo conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}$ que estão abaixo da reta $x = y + 3$, conforme Figura 33 a seguir.

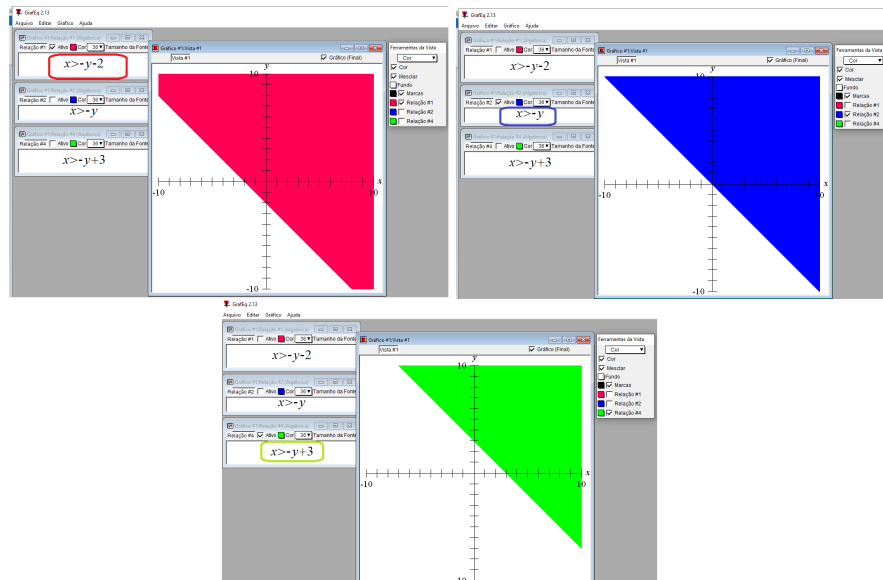
Figura 33 – Interseções das regiões representadas pelas inequações $x > y - 2$, $x > y$ e $x > y + 3$.



Fonte: Autor

Vamos, agora, fixar um $a < 0$ (por exemplo, $a = -1$), $b = \{-2, 0, 3\}$, e plotar no GrafEq as diferentes relações. Obtemos os resultados mostrados na Figura 34 a seguir.

Figura 34 – Representações gráficas das inequações $x > -y - 2$, $x > -y$ e $x > -y + 3$.

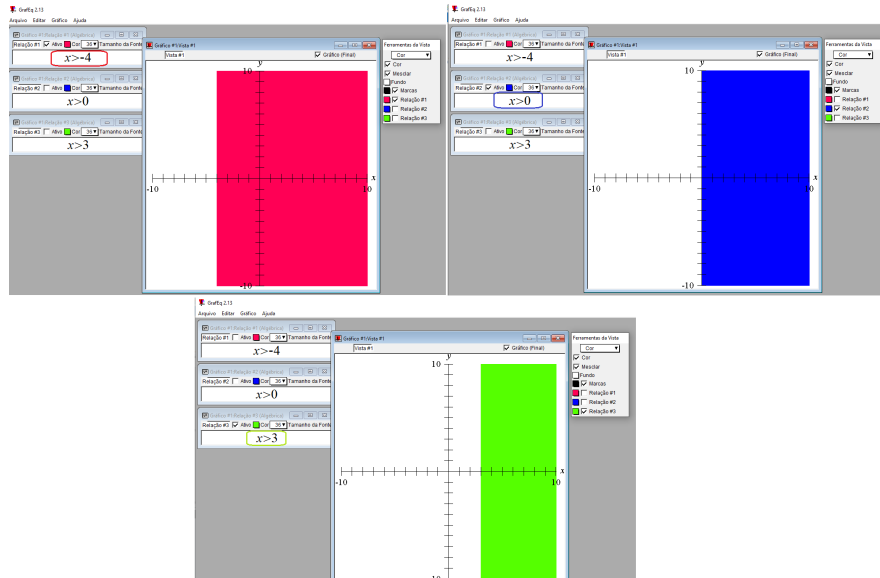


Fonte: Autor

Portanto, de modo geral, se temos uma inequação do tipo $x > ay + b$, em que $a < 0$, então a região determinada é o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}$ que estão acima da reta $x = ay + b$ cujo coeficiente a é negativo. Os pontos da reta $x = ay + b$ também são incluídos, desde que o sinal de desigualdade seja “ \geq ”, em vez de “ $>$ ”.

Fixemos, agora, $a = 0$, e consideremos $b = \{-4, 0, 3\}$. Obtemos os resultados mostrados nas Figura 35 a seguir.

Figura 35 – Representações gráficas das inequações $x > -4$, $x > 0$ e $x > 3$.



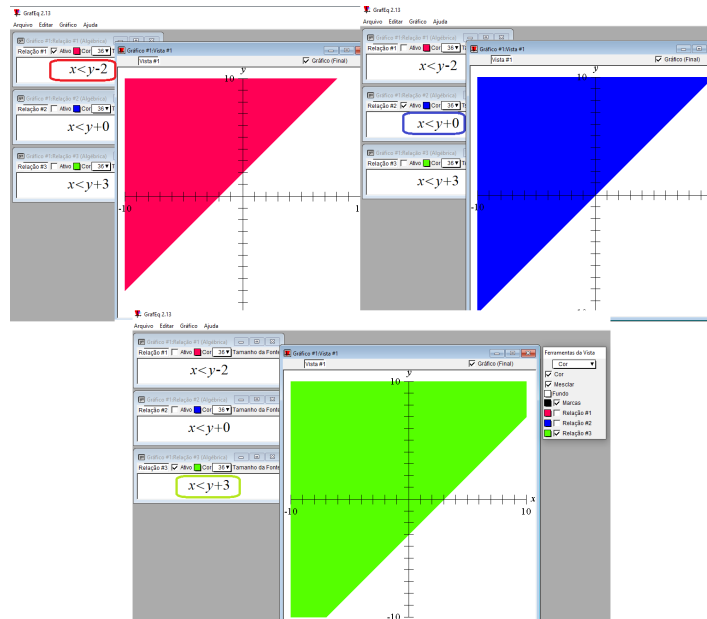
Fonte: Autor

Logo, de modo geral, se temos uma inequação do tipo $x > b$, então temos que a região determinada é o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}$ que estão à direita da reta $x = b$. Os pontos que pertencem à reta $x = b$ seriam também incluídos caso utilizássemos o sinal de “ \geq ”, em vez de “ $>$ ”.

(g) Analise, graficamente, $x < ay + b$. Que é possível concluir?

Realizando passos semelhantes aos do item anterior, vamos fixar $a = 1$ e $b = \{-2, 0, 3\}$, e desenvolver no GrafEq diferentes relações. A Figura 36 a seguir mostra as regiões formadas.

Figura 36 – Regiões representadas pelas inequações $x < y - 2$, $x < y + 0$ e $x < y + 3$, respectivamente.

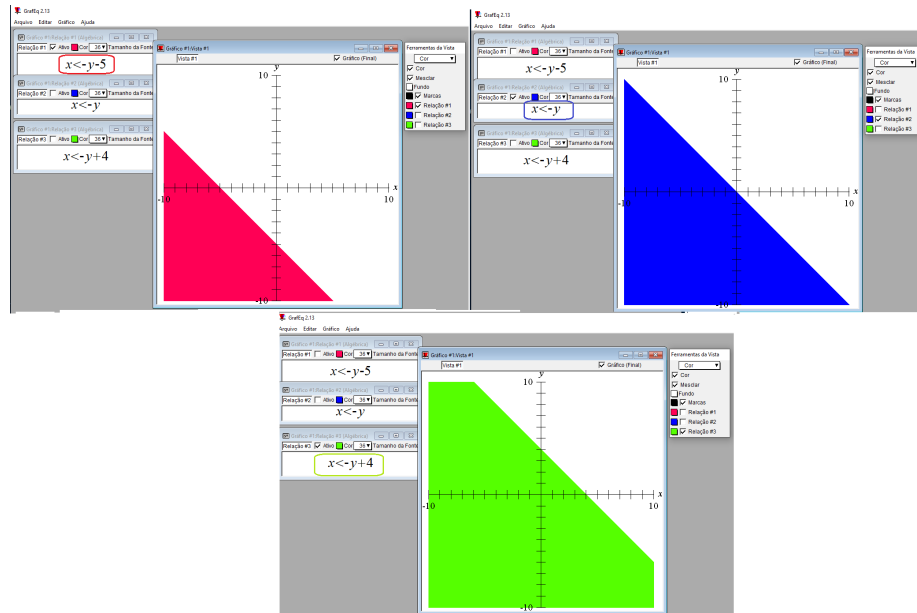


Fonte: Autor

Concluimos que, ao substituir o sinal de igualdade da função inversa $x = ay + b$ pelo sinal de desigualdade “<”, a inequação obtida agora determinará a região formada pelo conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}$ que estão acima da reta $x = ay + b$. A inclusão dos pontos pertencentes a essa reta será possível caso utilizemos a desigualdade “ \leq ”, em vez da igualdade. Observe que a interseção das regiões geradas pelas inequações $x < y - 2$, $x < y$ e $x < y + 3$ é a região formada pelo conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}$ que estão acima da reta $x = y - 2$.

Vamos, agora, fixar um $a < 0$ (por exemplo, $a = \{-1\}$), $b = \{-5, 0, 4\}$, e plotar no GrafEq as diferentes relações. Obtemos os resultados mostrados na Figura 37 a seguir.

Figura 37 – Representações gráficas das inequações $x < -y - 5$, $x < -y$ e $x < -y + 4$.

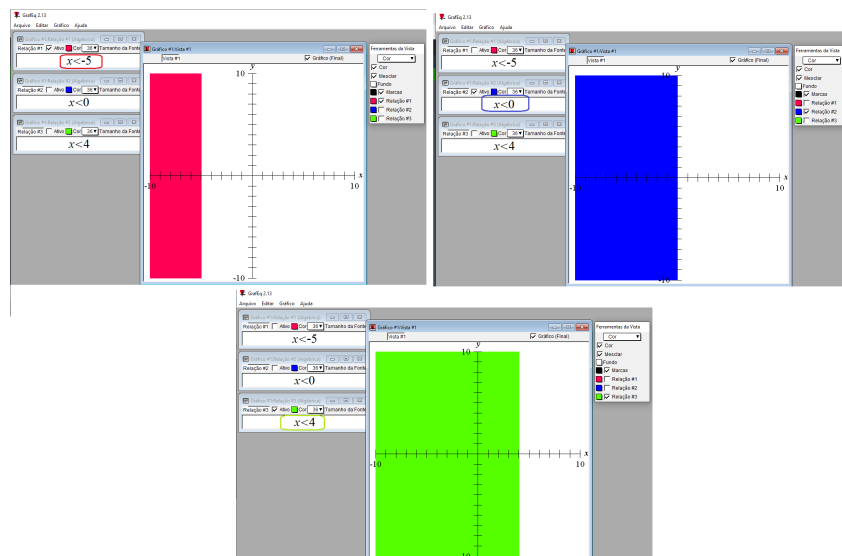


Fonte: Autor

Portanto, de modo geral, se a inequação é do tipo $x < ay + b$, em que $a < 0$, então a região determinada é o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}$ que estão abaixo da reta $x = ay + b$ cujo coeficiente a é negativo. Os pontos da reta $x = ay + b$ também são incluídos, desde que o sinal de desigualdade seja “ \leq ”, em vez de “ $<$ ”.

Fixemos, agora, $a = 0$, e consideremos $b = \{-5, 0, 4\}$, para plotar no GrafEq as diferentes relações. Os resultados são estes mostrados na Figura 38 a seguir.

Figura 38 – Representações gráficas das inequações $x < -5$, $x < 0$ e $x < 4$.



Fonte: Autor

Logo, de modo geral, se a inequação é do tipo $x < b$, então temos que a região determinada

é o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}$ que estão à esquerda da reta $x = b$. Os pontos que pertencem a essa reta seriam também incluídos caso utilizássemos o sinal de “ \leq ”, em vez de “ $<$ ”.

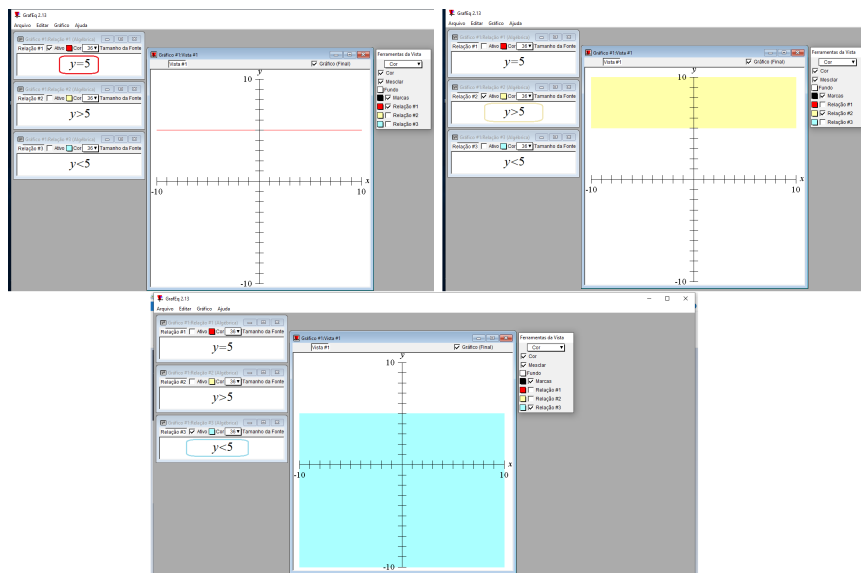
(h) Analise, graficamente, $y = b$, $y > b$, $y < b$, $x = b$, $x > b$, $x < b$, variando “ b ”. Que é possível concluir?

Resolução.

Nesse item, reforçamos como é o formato individual das curvas e as regiões representadas por essas expressões, as quais já foram comentadas anteriormente.

Logo, consideremos $b = 5$ e plotemos as expressões $y = b$, $y > b$, $y < b$. O resultado segue (Figura 39).

Figura 39 – Representações gráficas das expressões $y = 5$, $y > 5$ e $y < 5$.



Fonte: Autor

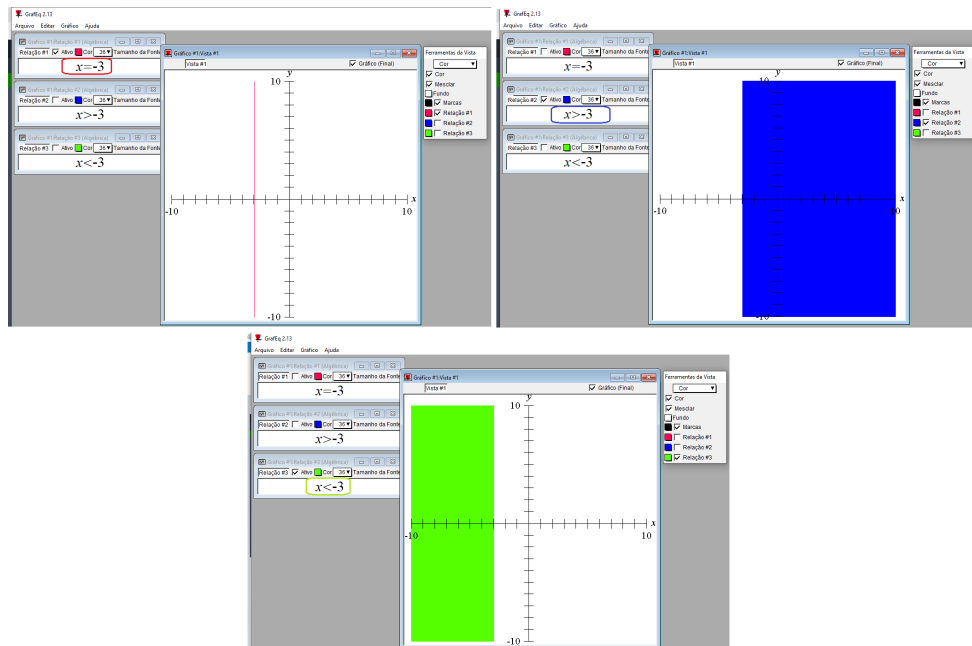
Logo, a equação $y = b$ representa reta paralela ao eixo x .

A inequação $y > b$ representa a região do plano constituída pelo conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}$ que estão acima da reta $y = b$. Os pontos pertencentes à reta $y = b$ são incluídos quando consideramos o sinal de desigualdade “ \geq ”, em vez de “ $>$ ”.

Já a inequação $y < b$ representa a região do plano constituída pelo conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}$ que estão abaixo da reta $y = b$. A inclusão dos pontos pertencentes a essa reta é possível quando trocamos o sinal de desigualdade “ $<$ ” por “ \leq ”.

Agora, para avaliar $x = b$, $x > b$ e $x < b$, consideremos $b = -3$, e plotemos no GrafEq as expressões $x = -3$, $x > -3$, $x < -3$. O resultado segue (Figura 40).

Figura 40 – Representações gráficas das expressões $x = -3$, $x > -3$ e $x < -3$.



Fonte: Autor

Concluimos que a equação $x = b$ representa uma reta paralela ao eixo y .

A inequação $x > b$ representa a região do plano constituída pelo conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}$ que estão à direita da reta $x = b$. Os pontos pertencentes à reta $x = b$ são incluídos quando consideramos o sinal de desigualdade “ \geq ”, em vez de “ $>$ ”.

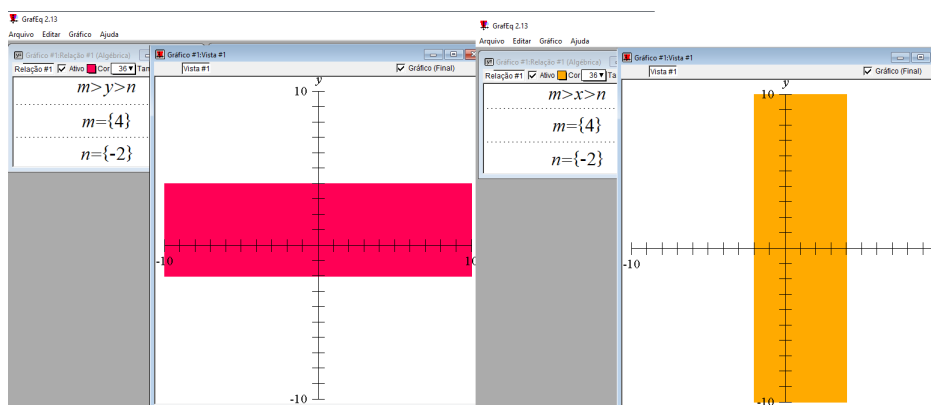
Já a reta $x < b$ representa a região do plano constituída pelo conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}$ que estão à esquerda da reta $x = b$. A inclusão dos pontos pertencentes a essa reta é possível quando trocamos o sinal de desigualdade “ $<$ ” por “ \leq ”.

(i) Analise, graficamente, $m > y > n$ e $m > x > n$, em que $m > n$, $m, n \in \mathbb{R}$. Que é possível concluir?

Resolução.

Vamos considerar $m = 4$ e $n = -2$ e plotar as expressões $m > y > n$ e $m > x > n$ no GrafEq. A Figura 41 a seguir mostra resultado.

Figura 41 – Representações gráficas das inequações $4 > y > -2$ e $4 > x > -2$, respectivamente.



Fonte: Autor

Concluimos que a representação gráfica da inequação $4 > y > -2$, na Figura 41 à esquerda, é a região formada pelo conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}$ que estão na faixa compreendida acima da reta $y = -2$ e abaixo da reta $y = 4$: é uma faixa paralela ao eixo x em que a imagem da função é o intervalo $] -2, 4[$, e o seu domínio é todo o \mathbb{R} . De modo geral, $m > y > n$ é uma faixa paralela ao eixo das abscissas, cuja imagem é $]n, m[$, e o domínio é \mathbb{R} .

Na Figura 41 à direita, obtemos a conclusão de que a inequação $4 > x > -2$ representa a região formada pelo conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}$ que estão na faixa à direita da reta $x = -2$ e à esquerda da reta $x = 4$: é uma faixa paralela ao eixo y , cuja imagem da função é o conjunto \mathbb{R} , e cujo domínio é o intervalo $] -2, 4[$. De modo geral, $m > x > n$ é uma faixa paralela ao eixo das ordenadas, cuja imagem é todo o conjunto \mathbb{R} , e o domínio é $]n, m[$.

4.3 Análise do gráfico da função quadrática ($y = ax^2 + bx + c$), tal que $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, com auxílio do software Grafeq

Objetivos:

1. analisar a curva da função quadrática;
2. conhecer a curva da função quadrática;
3. identificar a função por meio do seu gráfico;
4. identificar o gráfico por meio da função;
5. entender a dinâmica dos coeficientes;
6. entender as variações gráficas ao utilizar os sinais $=$, $>$ ou $<$ na expressão;
7. conhecer o gráfico ao aplicar a forma inversa da função.

Para os itens de 1 a 7, os alunos deverão construir uma tabela de valores, substituí-los na função, de acordo com o que se pede no enunciado, utilizando o software GrafEq, e depois verificar os resultados obtidos.

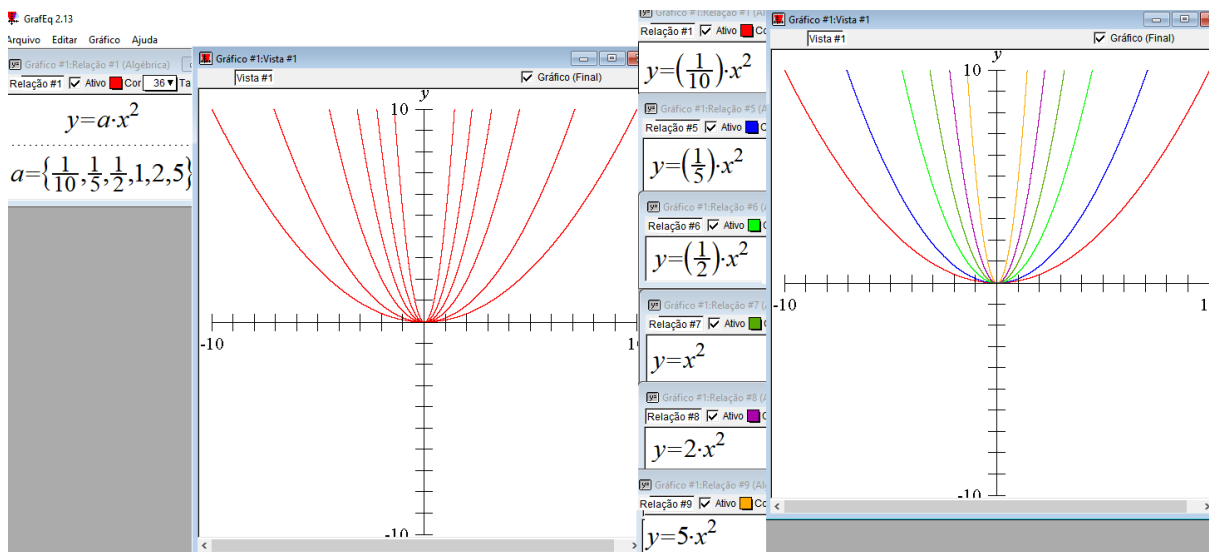
LISTA DE EXERCÍCIOS

(a) Realizar uma análise da curva $y = ax^2$, em que $a \neq 0$, variando “ a ”. Que é possível concluir?

Resolução.

Vamos considerar, como 1º caso, uma equação quadrática incompleta, tal que $a > 0$, $b = c = 0$. Abra o GrafEq e plote a equação $y = ax^2$. Digite Tab para entrar na tela de restrição e digite $a = \left\{ \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1, 2, 5 \right\}$. Em seguida, gere o gráfico. Depois também gere os gráficos separadamente em relações independentes. Os resultados obtidos deverão ser estes mostrados na Figura 42 a seguir.

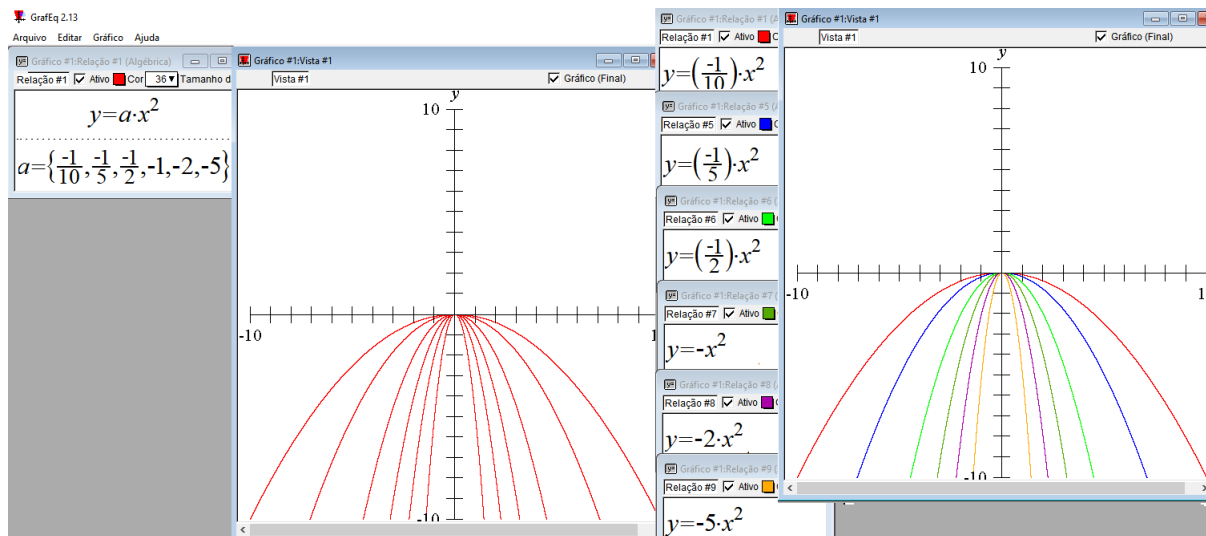
Figura 42 – Representações das curvas geradas pela equação $y = ax^2$, tal que $a > 0$.



Fonte: Autor

Concluimos que uma finalidade do coeficiente a na função quadrática é o de “abrir” ou “fechar” a parábola. Nesse 1º caso, em que $a > 0$, quanto mais tender a zero o coeficiente a , mais aberta ficará a parábola, e quanto mais tender a $+\infty$ (mais infinito) o coeficiente a , mais fechada ficará a parábola.

Figura 43 – Representações das curvas geradas pela equação $y = ax^2$, tal que $a < 0$.



Fonte: Autor

Para esse 2º caso, em que na função quadrática $a < 0$, conclui-se que uma finalidade do coeficiente a continua sendo a de “abrir” ou “fechar” a parábola. Além disso, nessa condição em que $a < 0$, quanto mais tender a zero o coeficiente a , mais aberta ficará a parábola, e quando mais tender a $-\infty$ (menos infinito) o coeficiente a , mais fechada ficará a parábola. Uma conclusão importantíssima que obtemos ao verificar o 1º e o 2º casos é que, quando na função quadrática $a > 0$, a concavidade da parábola gerada é voltada para cima, atingindo ponto mínimo no vértice, e quando $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo, atingindo, portanto, ponto de máximo em seu vértice.

Na maioria dos problemas modelados com função do 2º grau, é explorado o vértice da parábola, ou seja, nesses estudos é importantíssimo saber quando valores de x ou y atingem ponto mínimo ou ponto máximo. Veja alguns exemplos abaixo, encontrados em (Brasil ESCOLA, 2012):

1. Em uma apresentação aérea de acrobacias, um avião a jato descreve um arco no formato de uma parábola, de acordo com a seguinte função $y = -x^2 + 30x$. Determine a altura máxima atingida pelo avião.

2. De acordo com conceitos administrativos, o lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática $L = R - C$, em que L é o lucro, C é o custo da produção, e R é a receita do produto.

Uma indústria de peças automotivas produziu x unidades e verificou que o custo de produção era dado pela função $C(x) = x^2 - 4000x$, e a receita representada por $R(x) = 8000x - x^2$.

Com base nessas informações, determine o número de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo.

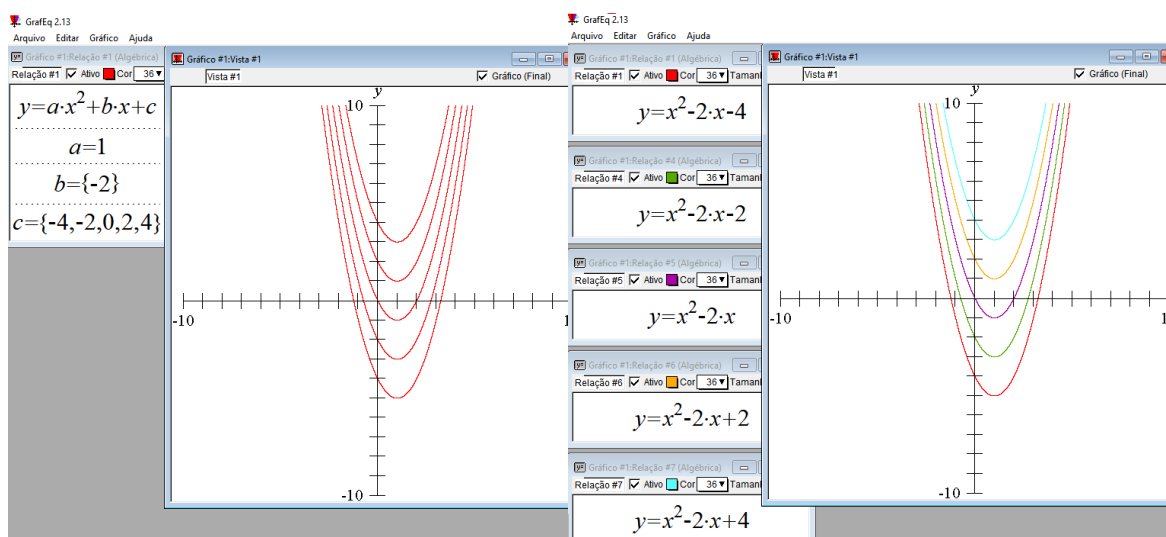
3. Uma empresa produz um determinado produto com o custo definido pela seguinte função $C(x) = x^2 - 50x + 7000$. Considerando o custo C em reais e x a quantidade de unidades produzidas, determine a quantidade de unidades para que o custo seja mínimo, e o valor desse custo mínimo.

(b) Realizar uma análise da curva da função $y = ax^2 + bx + c$, fixando a e b e variando o coeficiente c . Que é possível concluir?

Resolução.

Consideremos, por exemplo, $a = 1$ e $b = -2$ e $c = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. No GrafEq, plotemos a equação $y = ax^2 + bx + c$ inserindo as restrições dadas apertando Tab. Consideremos também as equações separadamente, para uma melhor análise. A Figura 44 a seguir mostra os resultados.

Figura 44 – Representação das curvas geradas pela equação $y = ax^2 + bx + c$, tal que a e b são fixos.



Fonte: Autor

Concluimos que o coeficiente c é responsável pela interseção da parábola com o eixo das ordenadas (y). Essa informação nos ajuda a resolver inúmeros problemas por meio da visualização gráfica da função quadrática. A justificativa dessa propriedade decorre naturalmente quando consideramos $x = 0$, isso por que qualquer ponto sobre o eixo das ordenadas é do tipo $(0, y)$. Daí, considerando y avaliado em $x = 0$, temos:

$$y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow y = c.$$

Portanto, a parábola intersecta o eixo y no único ponto $(0, c)$.

Outra informação essencial é que os pontos de interseção da parábola com o eixo das abscissas (x) representam as raízes ou zeros da função quadrática. Com isso, para a equação $y = ax^2 + bx + c$, devemos ter $y = 0$, pois, de fato, a parábola pode intersectar o eixo das abscissas em até dois pontos, $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$.

Como já falamos, a função quadrática tem raízes reais se, graficamente, a parábola intersecta o eixo das abscissas em um ou dois pontos. Algebricamente, ela tem raízes reais se, sendo a , b e c os coeficientes da função $y = ax^2 + bx + c$, a desigualdade $b^2 \geq 4ac$ é satisfeita. Considerando a fórmula resolutive da equação do segundo grau, obtemos as raízes reais da função quadrática quando $\Delta \geq 0$.

A dedução da fórmula resolutive da equação do segundo grau, conforme (JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018), pode ser efetuada de acordo com os passos a seguir.

Consideremos a equação $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Dividindo essa equação por a , obtemos

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0.$$

Adicionando $-\frac{a}{c}$ a ambos os membros, obtemos

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}.$$

Agora, devemos completar o quadrado da soma dos dois termos que ocorrem no primeiro membro. Para isso, dividiremos $\frac{b}{a}$ por 2, elevamos resultado ao quadrado e o adicionamos a essa soma. Assim,

$$x^2 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Agora, extraímos a raiz quadrada de ambos os membros:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Por fim, adicionemos $-\frac{b}{2a}$ a ambos os membros e reduzimos os termos restantes do 2º membro ao mesmo denominador:

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

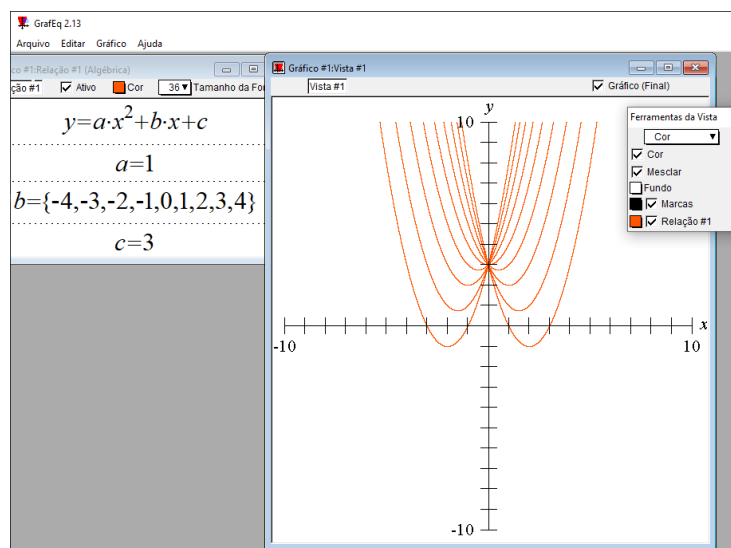
A expressão $b^2 - 4ac$ é um número real, usualmente representada pela letra grega maiúscula Δ (delta), denominado *discriminante* da equação quadrática.

(c) Realizar uma análise da curva da função $y = ax^2 + bx + c$, fixando a e c e variando o coeficiente b . Que é possível concluir?

Resolução.

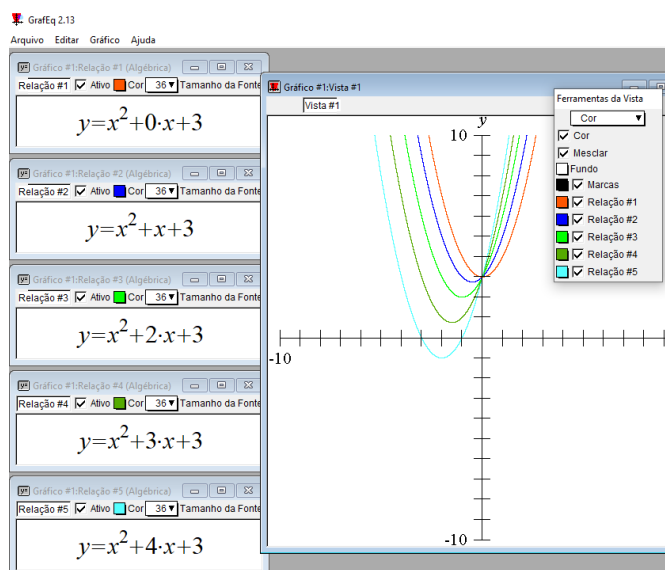
Plotemos no GrafEq a equação $y = ax^2 + bx + c$, e no quadro de restrições (escolhendo $a > 0$), digitemos os valores fixos $a = 1$, $c = 3$, e a variação $b \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Plotemos também as equações separadamente, para uma melhor visualização. Os resultados obtemos logo a seguir (Figuras 45-47).

Figura 45 – Representação das curvas geradas pela equação $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$), tal que a e c são fixos.



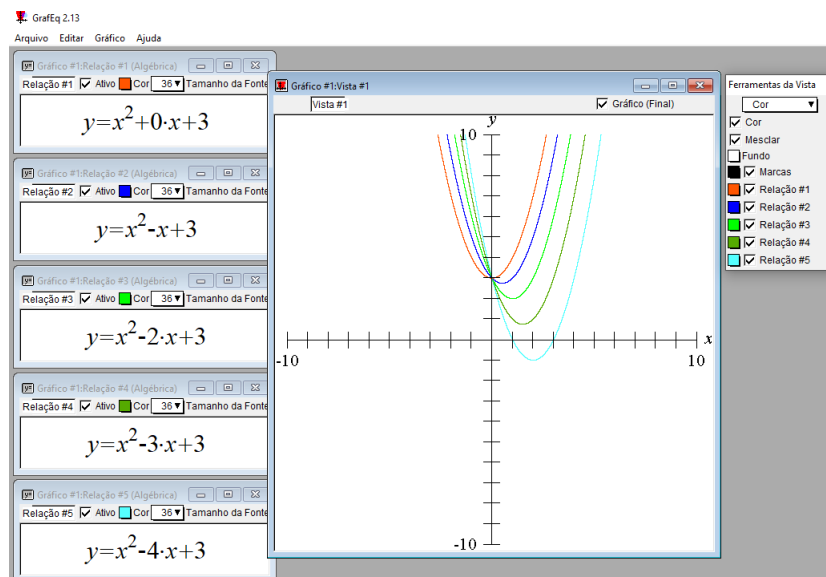
Fonte: Autor

Figura 46 – Representação individual das curvas geradas pela equação $y = ax^2 + bx + c$, tal que $a > 0$, $b \geq 0$, a e c são fixos.



Fonte: Autor

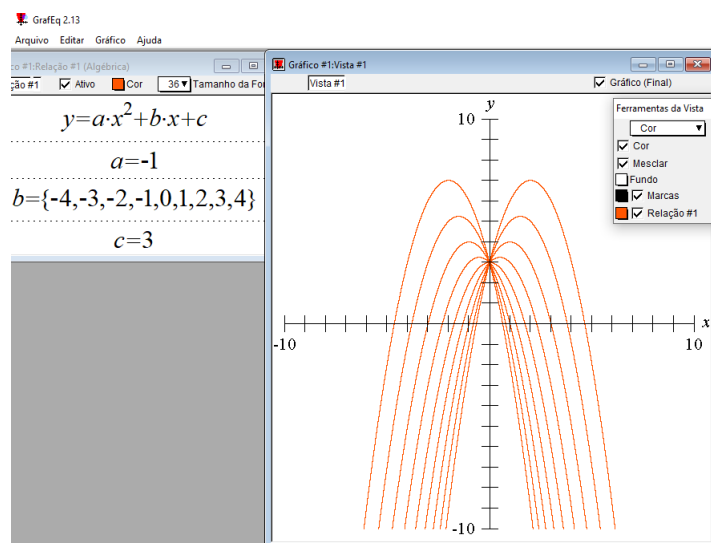
Figura 47 – Representação individual das curvas geradas pela equação $y = ax^2 + bx + c$, tal que $a > 0$, $b \leq 0$, a e c são fixos.



Fonte: Autor

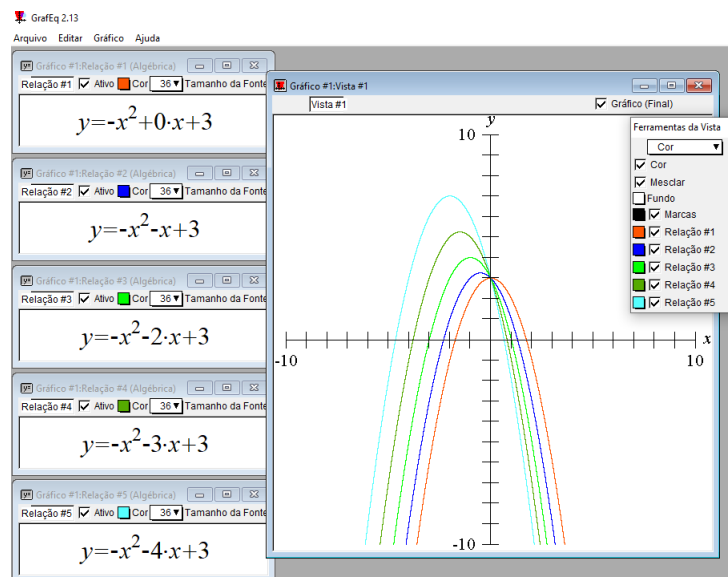
Plotemos, agora, no GrafEq a equação $y = ax^2 + bx + c$, e no quadro de restrições (escolhendo $a < 0$), digitemos os valores fixos $a = -1$, $c = 3$, e a variação $b \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. As equações individuais deverão ser plotadas, para uma melhor investigação. As Figuras 48-50 a seguir mostram os resultados.

Figura 48 – Representação das curvas geradas pela equação $y = ax^2 + bx + c$, tal que $a < 0$, a e c são fixos.



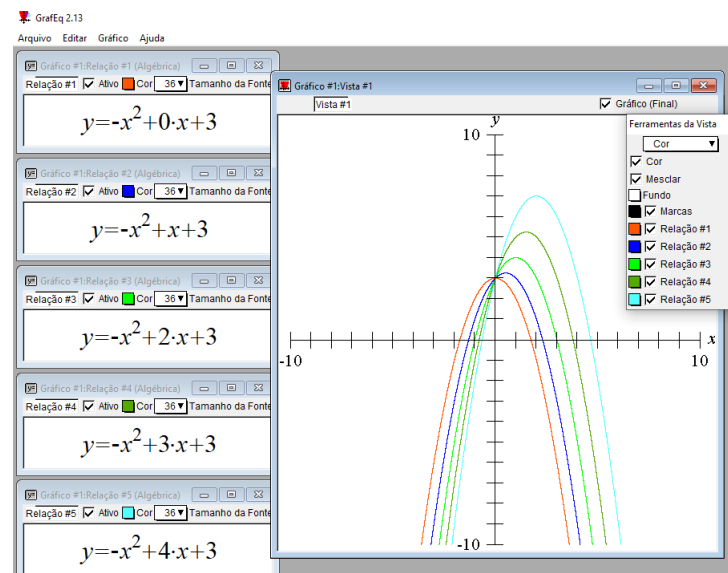
Fonte: Elaborada pelo próprio Autor

Figura 49 – Representação individual das curvas geradas pela equação $y = ax^2 + bx + c$, tal que $a < 0, b \leq 0, a$ e c são fixos.



Fonte: Elaborada pelo próprio Autor

Figura 50 – Representação individual das curvas geradas pela equação $y = ax^2 + bx + c$, tal que $a < 0, b \geq 0, a$ e c são fixos.



Fonte: Elaborada pelo próprio Autor

Concluindo essas análises, verificamos que os valores dos coeficientes a e b são preponderantes para o julgamento quanto à posição do vértice da parábola em relação ao eixo das ordenadas. Se a e b têm sinais iguais ($a > 0$ e $b > 0$, ou $a < 0$ e $b < 0$), então o vértice da parábola está à esquerda do eixo y . Quando a e b têm sinais distintos ($a > 0$ e $b < 0$, ou $a < 0$ e $b > 0$), o vértice da parábola está à direita do eixo y . Pela análise gráfica, deduzimos essa

propriedade. No entanto, pela análise algébrica, conseguimos demonstrar a sua veracidade por meio dos resultados de jogos de sinais dos coeficientes da expressão, que nos fornecem o valor da abscissa do vértice, $X_v = -\frac{b}{2a}$:

- observe que quando a e b são positivos ou negativos simultaneamente, então o resultado para X_v é negativo;
- observe que quando a e b apresentam sinais distintos, então o resultado para X_v é positivo;
- Se $b = 0$, então $X_v = 0$, e o vértice da parábola estará exatamente sobre o eixo y .

A ordenada do vértice Y_v da parábola poderá se situar acima ou abaixo do eixo x , e não é difícil localizá-la realizando uma análise algébrica dos sinais dos coeficientes da equação. Observe que:

- se $a > 0$ e $b^2 > 4ac$, então Y_v situa-se abaixo do eixo x . De fato, como $b^2 > 4ac$, temos que $\Delta > 0$. Assim, a parábola intersecta o eixo das abscissas em dois pontos distintos, e sendo $a > 0$, a concavidade da parábola estará voltada para cima, nos garantindo ainda que o vértice está na parte inferior em relação ao eixo x ;
- se $a < 0$ e $b^2 > 4ac$, então Y_v situa-se acima do eixo x . A desigualdade $b^2 > 4ac$ implica $\Delta > 0$, garantindo que a parábola intersecta o eixo das abscissas em dois pontos distintos, e sendo $a < 0$, a concavidade da parábola estará voltada para baixo, nos garantindo agora que o vértice está na parte superior em relação ao eixo x ;
- se $b^2 < 4ac$, em que $b \neq 0$, então a parábola não intersecta o eixo x , e temos dois casos a considerar: quando $a > 0$, o vértice da parábola está acima do eixo x , e quando $a < 0$, o vértice da parábola está abaixo do eixo x ;
- se $b^2 = 4ac$, então o vértice da parábola está exatamente sobre o eixo x , e há dois casos a considerar: se $a > 0$, a concavidade é voltada para cima; se $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo.

De modo geral, é possível discernir a localização da ordenada do vértice analisando os sinais de Δ e do coeficiente a na fórmula $Y_v = -\frac{\Delta}{4a}$. Portanto, o vértice da parábola situa-se acima do eixo x quando Δ e “ a ” apresentam sinais iguais, ou então o vértice da parábola situa-se abaixo do eixo x , caso Δ e “ a ” apresentem sinais opostos.

(d) Dada a forma canônica da função quadrática $a(x - m)^2 + k$, realizar análises fixando dois dos três coeficientes a , m e k , e variando o terceiro. Que é possível concluir?

Resolução.

Nos itens (b) e (c) anteriores, investigamos as possíveis localizações do vértice da parábola no plano. No entanto, a translação da parábola pode ser verificada com exatidão quando obtemos a função canônica da função quadrática. A seguir, apresentamos alguns passos para obtenção da equação canônica, segundo (LIMA, 2013, p.31).

Consideremos uma parábola qualquer $y = ax^2 + bx + c$. Aplicando a técnica de completar quadrados, temos

$$\begin{aligned}
 y &= ax^2 + bx + c \\
 &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \\
 &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a} + c \\
 &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \\
 &= a \left[x - \left(-\frac{b}{2a} \right) \right]^2 + \left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) \\
 &= a \left[x - \left(-\frac{b}{2a} \right) \right]^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a} \right) \\
 &= a(x - m)^2 + k.
 \end{aligned}$$

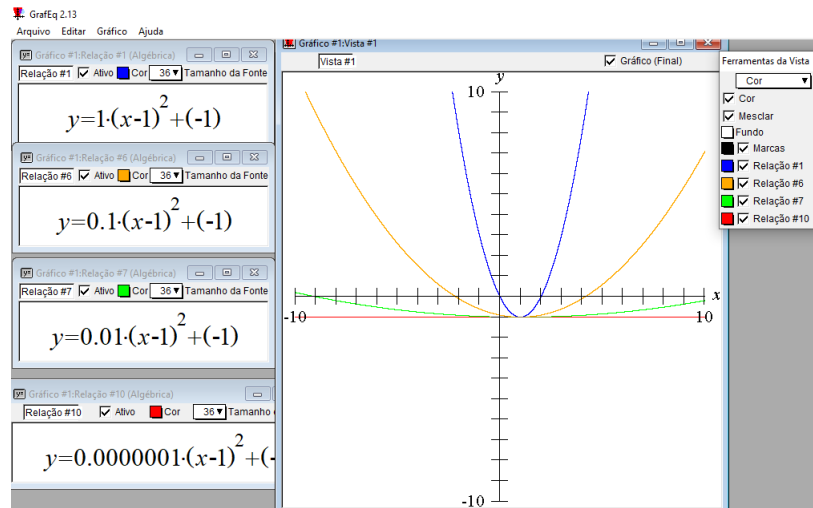
Observe que $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = -\frac{\Delta}{4a}$, em que m e k representam a abscissa do vértice e a ordenada do vértice, respectivamente.

No item (a), já investigamos as funcionalidades do coeficiente “ a ” na função quadrática, que é a de abrir ou fechar a parábola ou a de deixar a parábola com a concavidade voltada para cima ou para baixo. Não há, portanto, a necessidade de testar o coeficiente “ a ” novamente. No entanto, queremos relatar uma curiosidade, a qual é perceptível somente com mais nitidez com o auxílio de um software. Estamos falando da capacidade da parábola de abrir ou fechar o bastante a ponto de se aproximar da forma de reta ou semirreta, respectivamente. Quando o coeficiente a (seja positivo ou negativo) tende a zero, então a parábola se aproxima da forma de reta paralela ao eixo x . Quando temos $a > 0$ tendendo a um valor imensamente grande $(+\infty)$, ou quando

temos $a < 0$ tendendo a um valor extremamente ínfimo ($-\infty$), a forma da parábola se aproxima de uma semirreta paralela ao eixo y , em que o ponto do vértice é a sua origem.

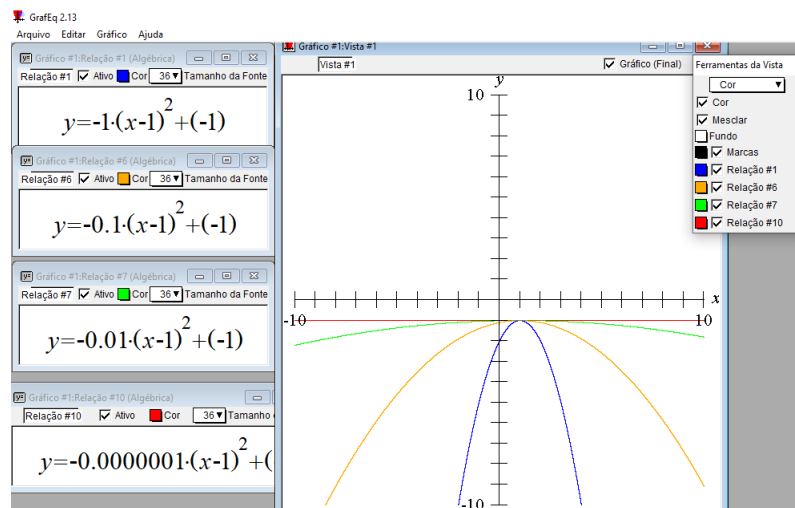
Nas Figuras 51 e 52 a seguir, plotamos no GrafEq a função canônica $y = a(x - m)^2 + k$, em que m e k são fixos, e o coeficiente “ a ” tende a zero.

Figura 51 – Representação das curvas geradas pela função canônica $y = a(x - m)^2 + k$, tal que $m = 1$, $k = -1$, e $a \in \{1; 0,1; 0,01; 0,0000001\}$.



Fonte: Autor

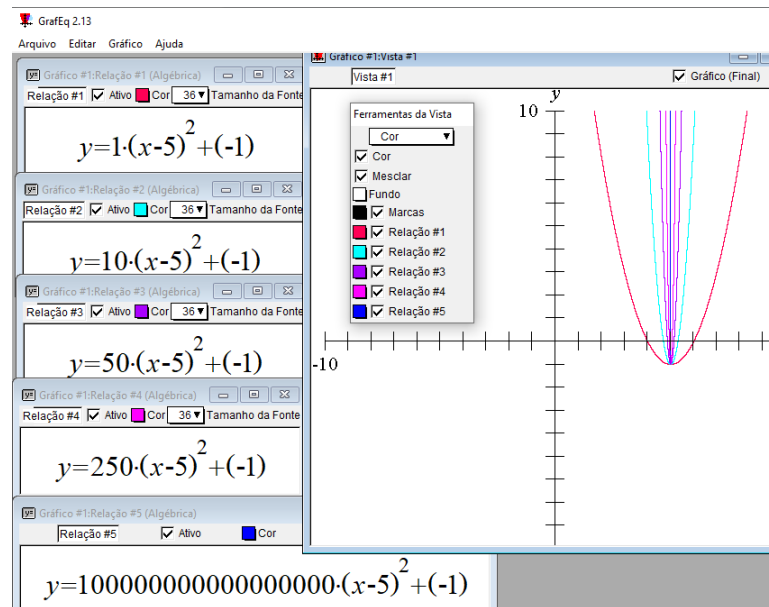
Figura 52 – Representação das curvas geradas pela função canônica $y = a(x - m)^2 + k$, tal que $m = 1$, $k = -1$, e $a \in \{-1; -0,1; -0,01; -0,0000001\}$.



Fonte: Autor

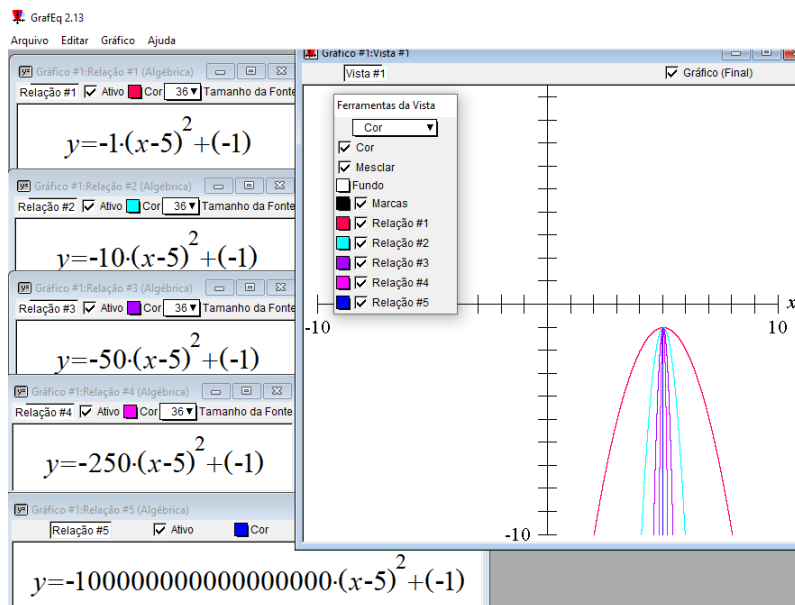
Agora nas Figuras 53 e 54 a seguir, plotemos no GrafEq a função canônica $y = a(x - m)^2 + k$, com m e k fixos, em duas situações para o coeficiente a : quando $a > 0$, consideremos “ a ” tendendo a mais infinito, e quando $a < 0$, consideremos “ a ” tendendo a menos infinito. Vejamos essas figuras e seus respectivos resultados.

Figura 53 – Representação das curvas geradas pela função canônica $y = a(x - m)^2 + k$, tal que $m = 5$, $k = -1$, e $a \in \{1, 10, 50, 250, 10^{17}\}$.



Fonte: Elaborada pelo próprio Autor

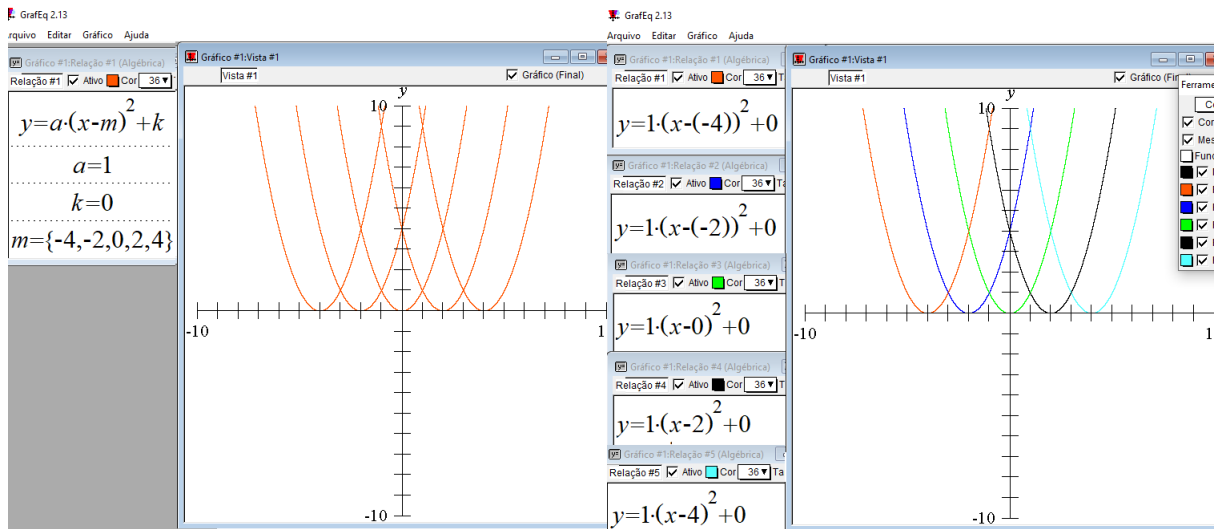
Figura 54 – Representação das curvas geradas pela função canônica $y = a(x - m)^2 + k$, tal que $m = 5$, $k = -1$, e $a \in \{-1, -10, -50, -250, -10^{17}\}$.



Fonte: Autor

A partir de agora, neste item (d), analisaremos o desempenho dos coeficiente m e k da função canônica aqui apresentada. Vamos, então, fixar $a = 1$ e $k = 0$, e variar m , $m \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$. Plotemos a equação $y = a(x - m)^2 + k$ no GrafEq e coloquemos as restrições mencionadas. Plotemos também as funções individuais. Os resultados seguem (Figura 55).

Figura 55 – Representação das curvas geradas pela função canônica $y = a(x - m)^2 + k$, tal que $a = 1$ e $k = 0$, e $m \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$.

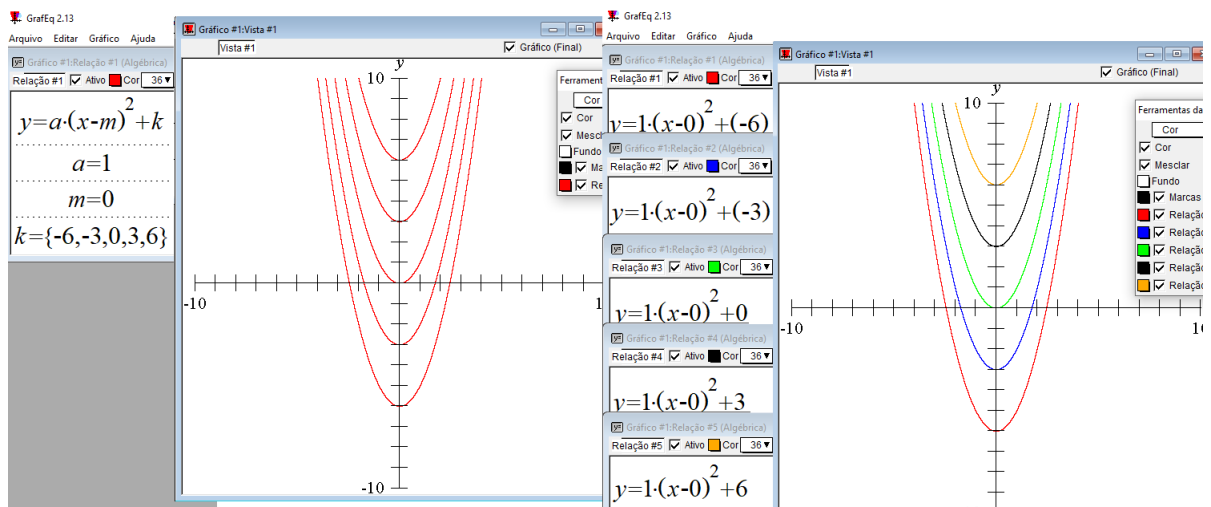


Fonte: Autor

Concluimos que os valores $m \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ são os valores de X_v . Logo, o coeficiente m na função canônica $y = a(x - m)^2 + k$ tem a incumbência de deslocar o vértice e toda a parábola para a direita ou para a esquerda, em relação ao eixo x .

Vamos, agora, investigar o desempenho do coeficiente k . Para isso, fixaremos $a = 1$ e $m = 0$, e variaremos k , $k \in \{-6, -3, 0, 3, 6\}$. Daí, plotaremos no GrafEq a equação $y = a(x - m)^2 + k$, e colocaremos as restrições mencionadas. Plotaremos também as funções individuais. Os resultados seguem (Figura 56).

Figura 56 – Representação das curvas geradas pela função canônica $y = a(x - m)^2 + k$, tal que $a = 1$ e $m = 0$, e $k \in \{-6, -3, 0, 3, 6\}$.



Fonte: Autor

Concluimos que os valores $k = \{-6, -3, 0, 3, 6\}$ são os valores de Y_v . Portanto, o coefi-

ciente k na função canônica $y = a(x - m)^2 + k$ tem a incumbência de deslocar o vértice e toda a parábola para a cima ou para baixo, em relação ao eixo y .

Por fim, vimos que a forma canônica da função quadrática é de suma importância para os estudos algébricos com análises de gráficos, pois ela nos fornece, de antemão, as coordenadas do vértice da parábola e uma melhor visão para o estudo da parábola. Ainda uma importância da forma canônica é a facilidade de verificar se a função apresenta raízes reais ou não. Observe que, dada a forma canônica $y = a(x - m)^2 + k$ da função quadrática, temos que $(x - m)^2 \geq 0$ e $a \neq 0$. Agora, façamos $y = 0$ para encontrarmos as raízes da equação quadrática na sua forma canônica:

$$y = a(x - m)^2 + k = 0 \Rightarrow a(x - m)^2 = -k \Rightarrow (x - m)^2 = \frac{-k}{a} \Rightarrow x - m = \pm \sqrt{\frac{-k}{a}} \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-k}{a}} + m.$$

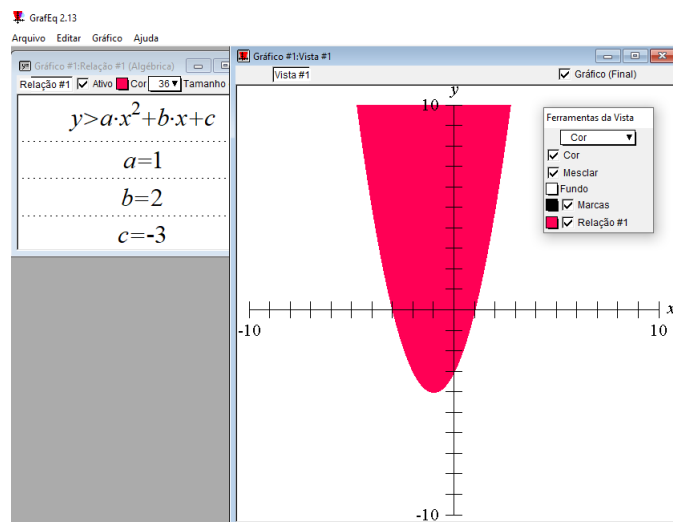
Logo, para que a equação quadrática na sua forma canônica tenha raízes reais, temos dois casos a considerar:

- ou $\frac{-k}{a} = 0$, e isto ocorre somente quando $k = 0$;
- ou $\frac{-k}{a} > 0$, e isto só será possível caso a e k tenham sinais opostos.

(e) Realizar análises de $y > ax^2 + bx + c$ e $y < ax^2 + bx + c$, quando $a > 0$. Que é possível concluir?

(I) Plotemos a inequação $y > ax^2 + bx + c$ considerando $a > 0$ (por exemplo, $a = 1$), $b = 2$ e $c = -3$. A Figura 57 a seguir mostra o resultado.

Figura 57 – Representação da região gerada pela inequação $y > x^2 + 2x - 3$.

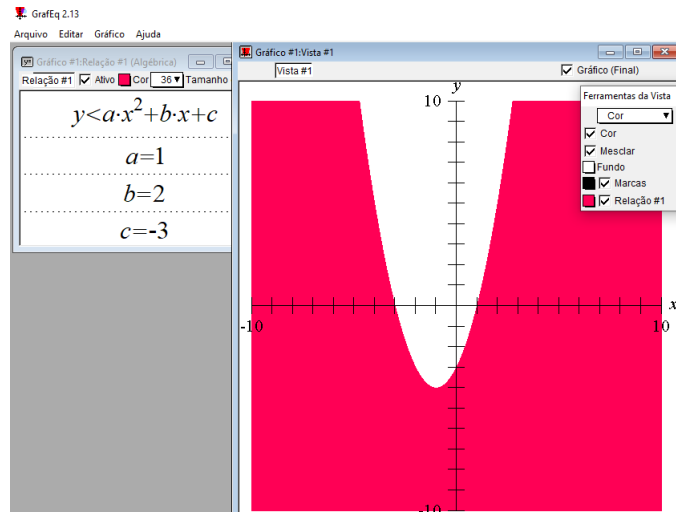


Fonte: Elaborada pelo próprio Autor

Quando $a > 0$ e $y > ax^2 + bx + c$, temos a região constituída pelo conjunto de todos os pontos do plano $(x, y) \in \mathbb{R}$ que são internos à parábola $y = ax^2 + bx + c$. A inclusão dos pontos pertencentes à parábola seria possível caso substituíssemos “ $>$ ” por “ \geq ”.

(II) Agora, plotemos a inequação $y < ax^2 + bx + c$ considerando $a > 0$ (por exemplo, $a = 1$), $b = 2$ e $c = -3$. A Figura 58 a seguir mostra o resultado.

Figura 58 – Representação da região gerada pela inequação $y < x^2 + 2x - 3$.



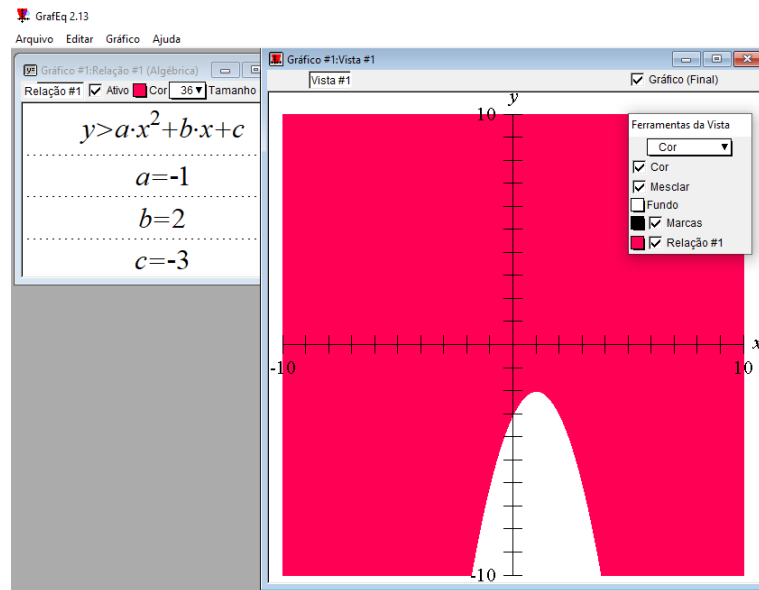
Fonte: Autor

Para $a > 0$ e $y < ax^2 + bx + c$, temos a região constituída pelo conjunto de todos os pontos do plano $(x, y) \in \mathbb{R}$ que são externos à parábola $y = ax^2 + bx + c$. A inclusão dos pontos pertencentes à parábola seria possível caso substituíssemos “ $<$ ” por “ \leq ”.

(f) Realizar análises de $y > ax^2 + bx + c$ e $y < ax^2 + bx + c$, quando $a < 0$. Que é possível concluir?

(I) No GrafEq, plotemos a função $y > ax^2 + bx + c$, considerando $a < 0$ (por exemplo, $a = -1$), $b = 2$ e $c = -3$. A Figura 59 a seguir mostra o resultado.

Figura 59 – Representação da região gerada pela inequação $y > -x^2 + 2x - 3$.

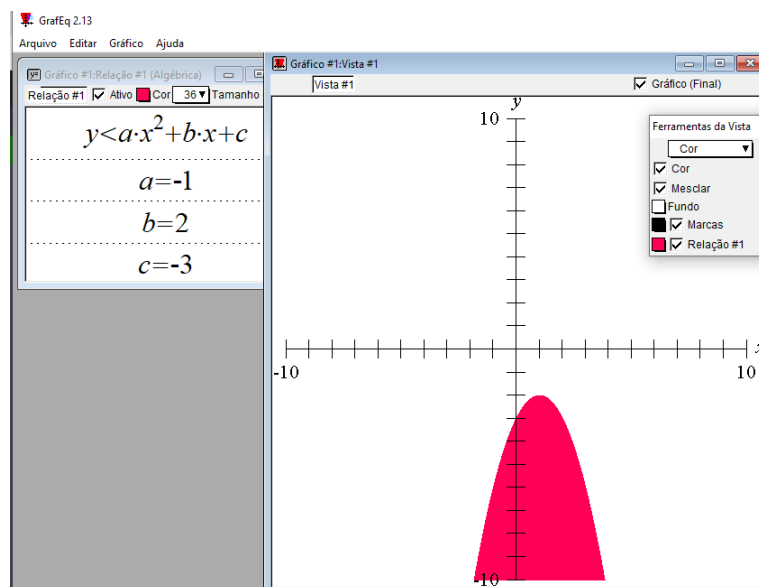


Fonte: Autor

Observe que, quando $a < 0$ e $y > ax^2 + bx + c$, essa inequação corresponderá à região constituída pelo conjunto de todos os pontos do plano $(x, y) \in \mathbb{R}$ que são externos à parábola $y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$. Temos que a substituição de “>” por “≥” inclui também os pontos pertencentes à parábola $y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$.

(II) Vamos digitar a função $y < ax^2 + bx + c$ no GrafEq e considerar $a < 0$ (por exemplo, $a = -1$), $b = 2$ e $c = -3$. A Figura 60 a seguir mostra o resultado.

Figura 60 – Representação da região gerada pela desigualdade $y < -x^2 + 2x - 3$.



Fonte: Autor

Observe, agora, que quando $a < 0$ e $y < ax^2 + bx + c$, a área correspondente a essa inequação é a região constituída pelo conjunto de todos os pontos do plano $(x, y) \in \mathbb{R}$ que são internos à parábola $y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$. Quando substituímos “ $<$ ” por “ \leq ”, os pontos pertencentes à parábola $y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$ são também incluídos.

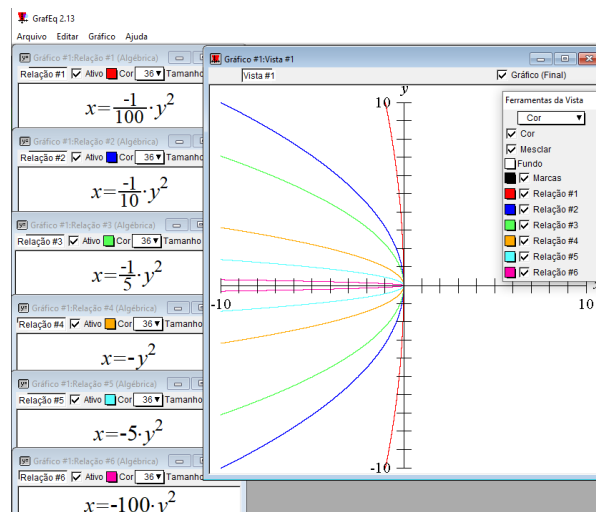
(g) Realizar uma análise da curva $x = ay^2$ variando “ a ”, $a \neq 0$. Que é possível concluir?

Resolução.

Queremos fazer uma ressalva de que a expressão $x = ay^2 + by + c$ não pode representar uma função, apesar de apresentar uma determinada curva, pois a variável dependente está sendo y e não x , mas se quiséssemos melhor avaliar este tipo de curva bastaria avaliarmos a função inversa de $y = ax^2 + bx + c$. Mas o estudo da curva $x = ay^2 + by + c$ é importante para enriquecer o conhecimento sobre diferentes curvas, e visto também que há pouco material didático que trata sobre o estudo da equação $x = ay^2 + by + c$. Seguimos a diante a resolução.

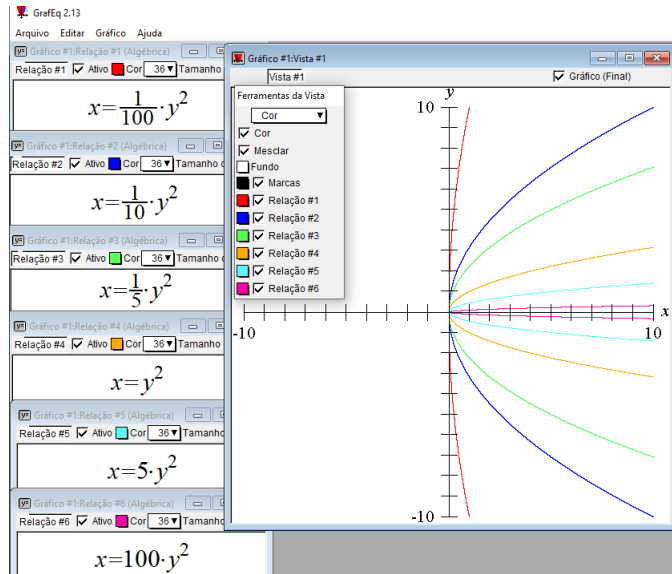
Plotando no GrafEq duas equações $x = ay^2$, uma com a restrição para $a < 0$ (por exemplo, $a \in \{-100, -5, -1; -0,5; -0,1; -0,01\}$), e outra com a restrição para $a > 0$ (por exemplo, $a \in \{0,01; 0,1; 0,5; 1,5, 100\}$), observamos que tal curva é uma parábola horizontal em relação ao eixo x , tal que as possíveis raízes (quando existirem) pertencem ao eixo das ordenadas. Sobre o coeficiente a , podemos verificar que quando $a < 0$, as concavidades dessas parábolas são voltadas para a esquerda, e quando $a > 0$, as concavidades são voltadas para a direita. O coeficiente a também ainda tem a propriedade de abrir cada vez mais a parábola quando a tende a zero, e fechar cada vez mais quando a ($a > 0$) tende a $+\infty$, ou quando a ($a < 0$) tende a $-\infty$. Vejamos os resultados nas Figuras 61 e 62 a seguir.

Figura 61 – Curva $x = ay^2 + by + c$ com $a < 0$, tais que $a \in \{-100, -5, -1, \frac{-5}{10}, \frac{-1}{10}, \frac{-1}{100}\}$.



Fonte: Autor

Figura 62 – Curva $x = ay^2 + by + c$ com $a > 0$, tais que $a \in \{\frac{1}{100}, \frac{1}{10}, \frac{5}{10}, \frac{15}{10}, 100\}$.



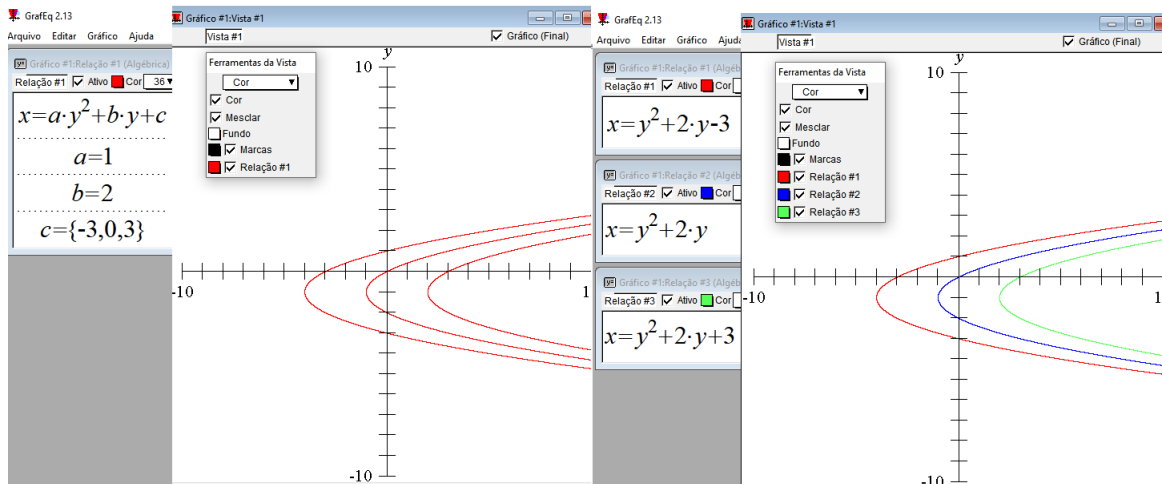
Fonte: Elaborada pelo próprio Autor

(h) Realizar uma análise da curva $x = ay^2 + by + c$ variando “ c ” e fixando valores para a e b . Que é possível concluir?

Resolução:

Vamos plotar no GrafEq a função $x = ay^2 + by + c$ variando os valores do coeficiente c (por exemplo, $c \in \{-3, 0, 3\}$), e fixando os valores $a = 1$ e $b = 2$. Podemos concluir que o coeficiente c representa o ponto de interseção da curva com o eixo x . Pelos exemplos anteriores, vimos que isso acontece independentemente dos sinais dos coeficientes. Observemos a Figura 63 a seguir.

Figura 63 – Representações das curvas $x = ay^2 + by + c$, tais que $a = 1$, $b = 2$, e $c \in \{-3, 0, 3\}$.



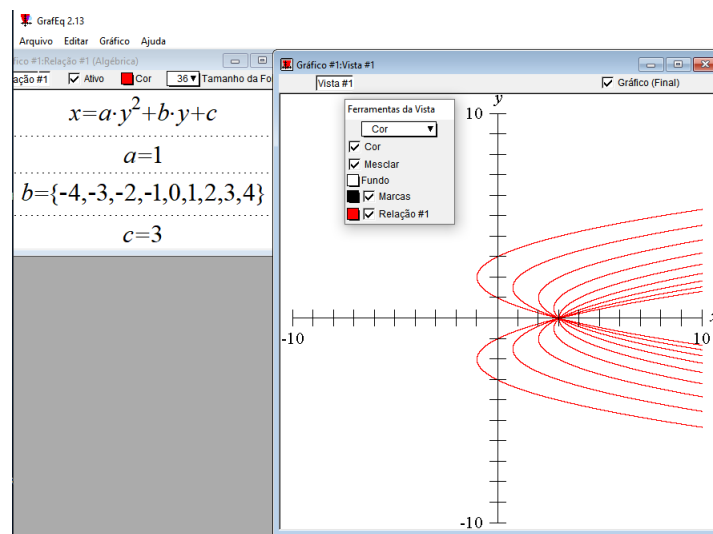
Fonte: Autor

- (i) Realizar uma análise da curva $x = ay^2 + by + c$, fixando a e c e variando o coeficiente b . Que é possível concluir?

Resolução.

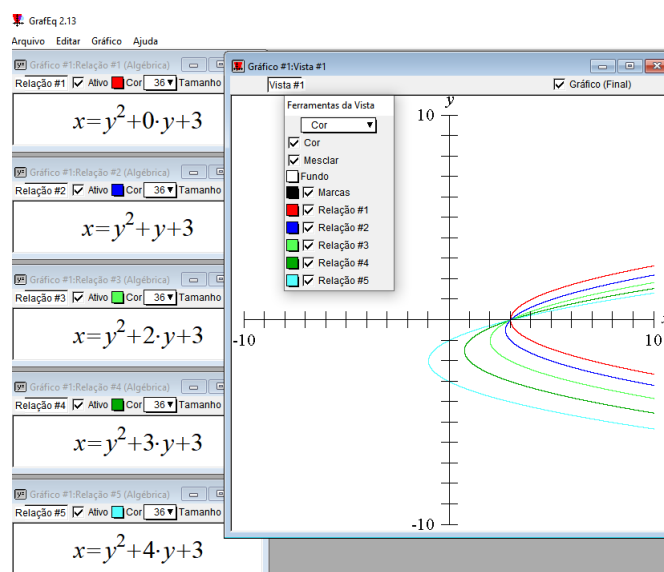
Plotemos no GrafEq a equação $x = ay^2 + by + c$, e no quadro de restrições (escolhendo $a > 0$, por exemplo $a = 1$), digitemos os valores fixos $c = 3$, e a variação $b \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Plotemos também as equações separadas, para uma melhor visualização. Os resultados obtemos logo a seguir (Figuras 64-66).

Figura 64 – Representações das curvas geradas pela equação $x = ay^2 + by + c$, tal que $a > 0$, a e c fixos.



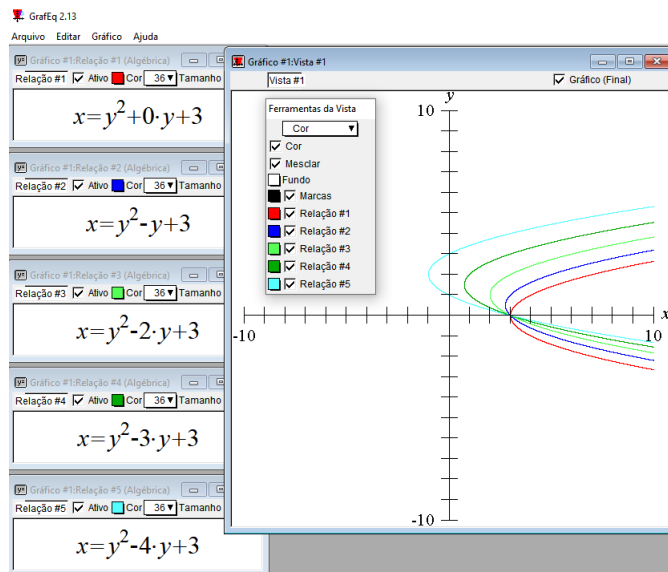
Fonte: Autor

Figura 65 – Representação individual das curvas geradas pela equação $x = ay^2 + by + c$, tal que $a > 0$, $b \geq 0$, a e c fixos.



Fonte: Autor

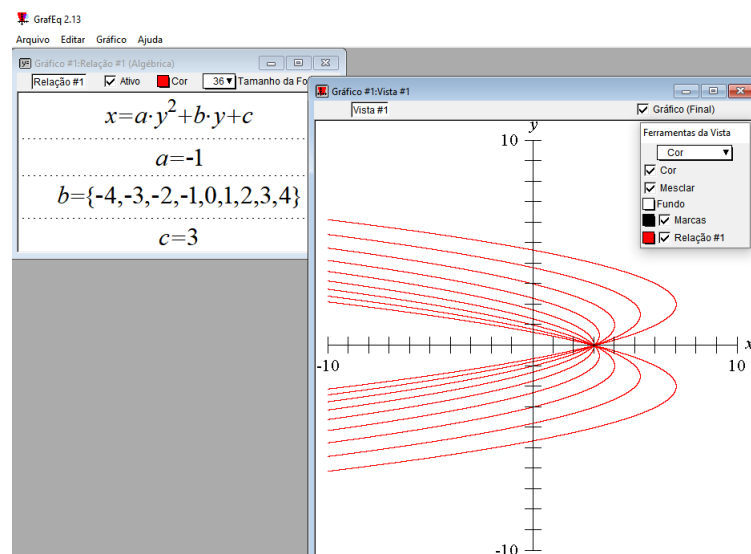
Figura 66 – Representação individual das curvas geradas pela equação $x = ay^2 + by + c$, tal que $a > 0$, $b \leq 0$, a e c fixos.



Fonte: Autor

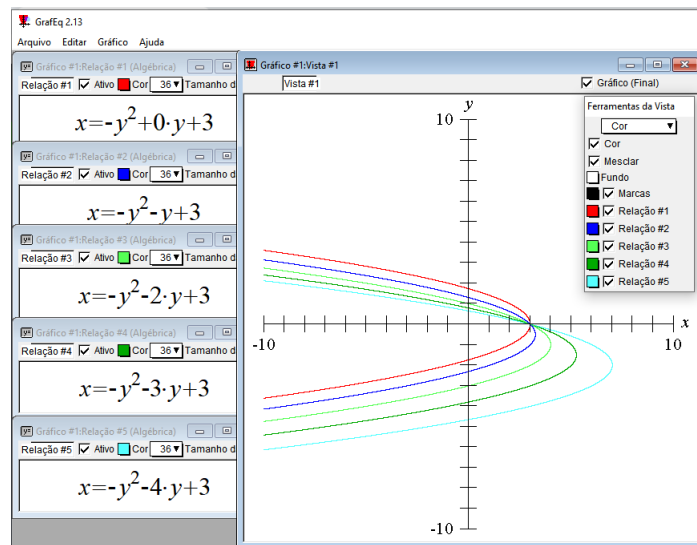
Plotemos, agora, no GrafEq a equação $x = ay^2 + by + c$, e no quadro de restrições (escolhendo $a < 0$), digitemos os valores fixos $a = -1$, $c = 3$, e a variação $b \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. As equações individuais deverão ser plotadas, para uma melhor investigação. As Figuras 67-69 a seguir mostram os resultados.

Figura 67 – Representação das curvas geradas pela equação $x = ay^2 + by + c$, tal que $a < 0$, a e c fixos.



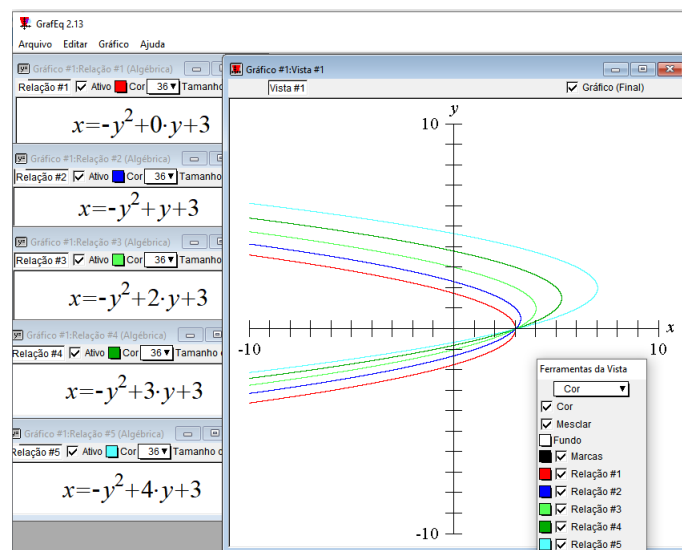
Fonte: Autor

Figura 68 – Representação individual das curvas geradas pela equação $x = ay^2 + by + c$, tal que $a < 0$, a e c fixos, e $b \leq 0$.



Fonte: Autor

Figura 69 – Representação individual das curvas geradas pela equação $x = ay^2 + by + c$, tal que $a < 0$, a e c fixos, e $b \geq 0$.



Fonte: Autor

Ao concluir essas análises, observamos que os valores dos coeficientes a e b são necessários para o julgamento quanto à posição do vértice em relação ao eixo das abscissas. Se a e b têm sinais iguais ($a > 0$ e $b > 0$, ou $a < 0$ e $b < 0$), então o vértice da parábola está abaixo do eixo x . Quando a e b têm sinais distintos ($a > 0$ e $b < 0$, ou $a < 0$ e $b > 0$), então o vértice da parábola está acima do eixo x . Com base na análise gráfica da curva $x = ay^2 + by + c$, deduzimos essa propriedade. No entanto, analisando-a algebricamente, é possível mostrar a veracidade de

acordo de tal dedução com os resultados de jogos de sinais dos coeficientes da expressão que nos fornece o valor da ordenada do vértice, ou seja, $Y_v = -\frac{b}{a}$:

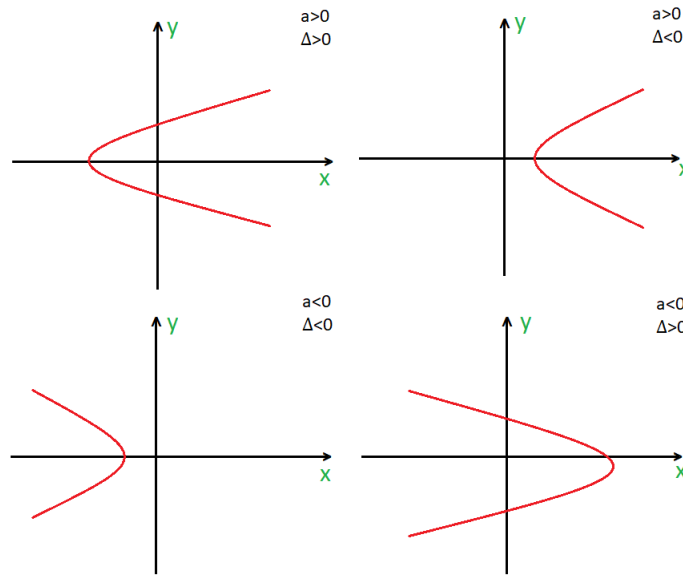
- observe que quando a e b são positivos ou negativos simultaneamente, então o resultado para Y_v é negativo, o que implica que o vértice da parábola estará abaixo do eixo x ;
- observe que quando a e b apresentam sinais distintos, então o resultado para Y_v é positivo. Logo, o vértice da parábola estará acima do eixo x ;
- se $b = 0$, então $Y_v = 0$, de modo que o vértice da parábola estará exatamente sobre o eixo x ;
- o módulo de Y_v representa a distância do ponto $V(Y_v, X_v)$ ao eixo x .

A abscissa X_v do vértice da parábola pode situar-se à direita do, à esquerda do, ou sobre o eixo y . Podemos localizá-la realizando uma análise algébrica dos sinais dos coeficientes da curva. Para isso, dado $X_v = -\frac{\Delta}{4a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$, observe que:

- se $a > 0$ e $b^2 > 4ac$, então X_v situa-se à esquerda do eixo y , pois X_v é negativo. Por outro lado, de fato, se $b^2 > 4ac$, então temos $\Delta > 0$. Assim, a parábola intersecta o eixo das ordenadas em dois pontos distintos, e sendo $a > 0$, a concavidade da parábola será para a direita em relação ao eixo y , nos garantindo ainda mais que o vértice está à esquerda do eixo y ;
- se $a < 0$ e $b^2 > 4ac$, então X_v situa-se à direita do eixo y . A relação $b^2 > 4ac$ implica $\Delta > 0$, garantindo que a parábola intersecta o eixo das ordenadas em dois pontos distintos, e sendo $a < 0$, a concavidade da parábola está à esquerda em relação ao eixo y , nos garantindo, agora, que o vértice estará à direita do eixo y ;
- se $b^2 < 4ac$, $b \neq 0$, então a parábola não intersecta o eixo y , e temos dois casos a considerar: quando $a > 0$, o vértice da parábola está à direita do eixo y , e quando $a < 0$, o vértice da parábola está à esquerda da ordenada y ;
- se $b^2 = 4ac$, então o vértice da parábola está exatamente sobre o eixo y , e há dois casos a considerar: se $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para a direita do eixo y ; se $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para a esquerda do eixo y .

De modo geral, pode-se discernir a localização da ordenada do vértice analisando os sinais de Δ e do coeficiente a na fórmula $X_v = -\frac{\Delta}{4a}$. Portanto, o vértice da parábola situa-se à esquerda da reta y quando Δ e a apresentam sinais iguais, ou então o vértice da parábola situa-se à direita do eixo y caso Δ e a apresentem sinais opostos. Observe a Figura 70 a seguir.

Figura 70 – Representações das curvas da equação $x = ay^2 + by + c$, variando os sinais de Δ e o coeficiente a .



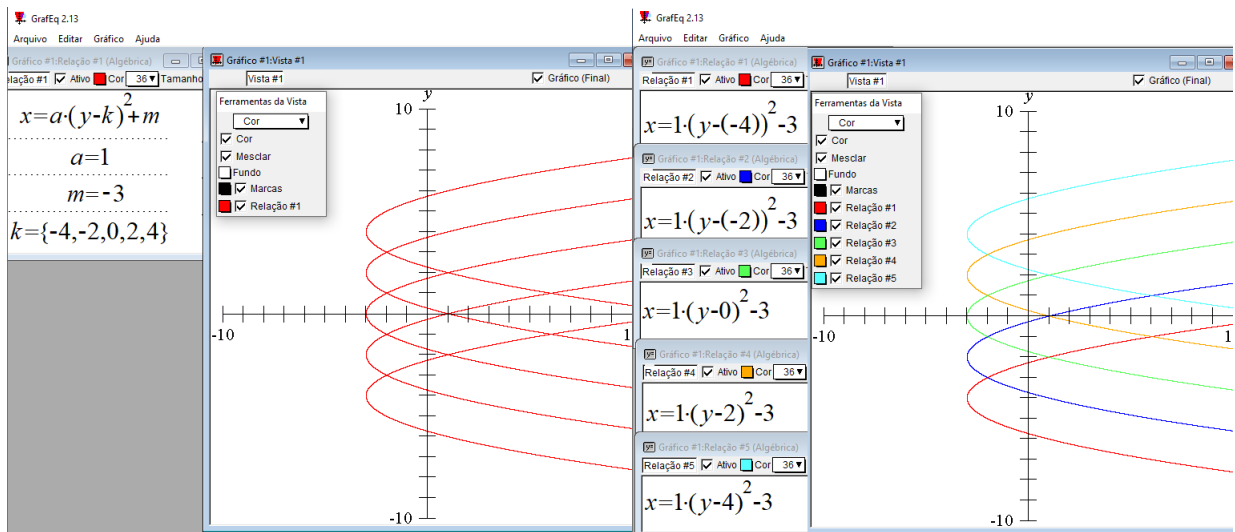
Fonte: Autor

(j) Realizar uma análise do gráfico da equação canônica $x = a(y - k)^2 + m$, avaliando os coeficientes k e m . Que é possível concluir?

Resolução.

Vamos, agora, avaliar a forma canônica da equação $x = ay^2 + by + c$, ou seja, avaliaremos as variáveis “ k ” e “ m ” da expressão $x = a(y - k)^2 + m$. Plotemos, no GrafEq, essa equação fixando os coeficientes $a = 1$ e $m = -3$, variando $k \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$. Observe que tal gráfico também é uma parábola horizontal em relação ao eixo “ x ”, tal que o valor do coeficiente k representa a ordenada $Y_v = -\frac{b}{2a}$ do vértice $V = (X_v, Y_v)$. Logo, k tem a incumbência de deslocar o vértice verticalmente em relação ao eixo y . Observe a Figura 71 a seguir.

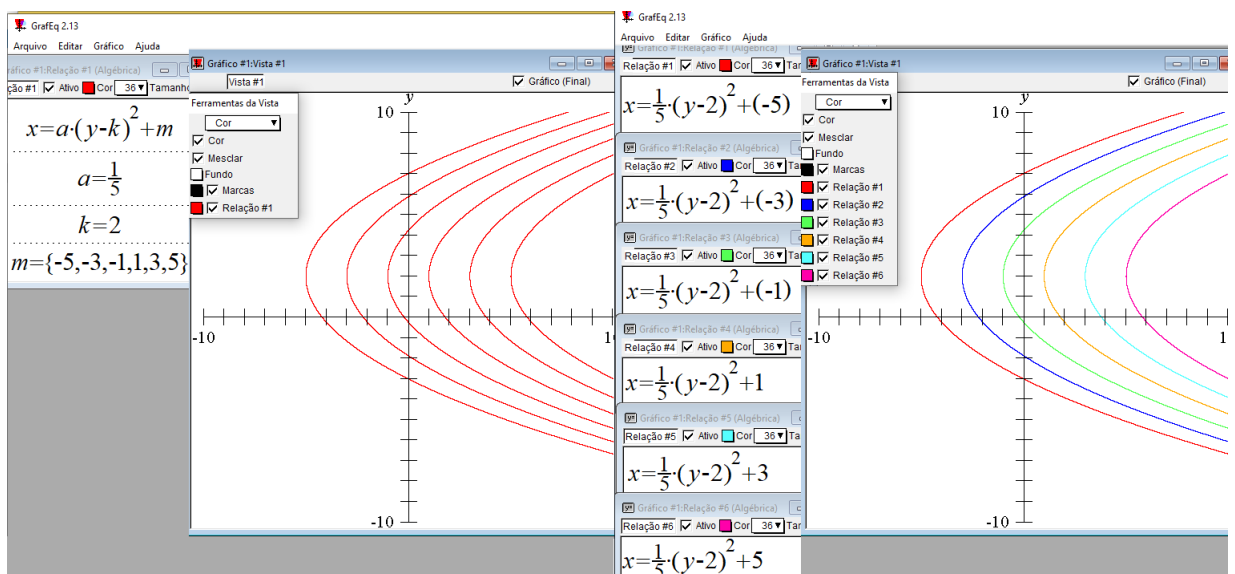
Figura 71 – Representações das curvas geradas pela equação canônica $x = a(y - k)^2 + m$, tal que $a = 1$, $m = -3$, e $k \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$.



Fonte: Autor

Agora, para avaliar o valor do coeficiente m na forma canônica $x = a(y - k)^2 + m$, plotemo-la no GrafEq fixando os coeficientes $a = 0, 2$ e $k = 3$, variando $m \in \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$. Observe que em tal gráfico o valor do coeficiente m representa a abscissa $X_v = -\frac{\Delta}{4a}$ do vértice $V = (X_v, Y_v)$. Logo, m tem a incumbência de deslocar o vértice horizontalmente para a esquerda ou para a direita em relação ao eixo x . Observe a Figura 72 a seguir.

Figura 72 – Representações das curvas geradas pela equação canônica $x = a(y - k)^2 + m$, tal que $a = 0, 2$, $k = 2$, e $m \in \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$.



Fonte: Autor

Ainda uma importância da forma canônica é a facilidade de verificar se o gráfico intersecta o eixo y ou não. Dada a forma canônica $x = a(y - k)^2 + m$, temos que $(y - k)^2 \geq 0$ e $a \neq 0$. Agora, façamos $x = 0$ para encontrarmos as raízes da equação quadrática na sua forma canônica:

$$\begin{aligned} x = a(y - k)^2 + m = 0 &\Rightarrow a(y - k)^2 = -m \Rightarrow (y - k)^2 = \frac{-m}{a} \Rightarrow y - k = \pm \sqrt{\frac{-m}{a}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{-m}{a}} + k. \end{aligned}$$

Logo, para que a parábola da $x = ay^2 + by + c$ na sua forma canônica intersecte o eixo y , temos dois casos a considerar:

- ou $\frac{-m}{a} = 0$, e isto ocorre somente quando $m = 0$;
- ou $\frac{-m}{a} > 0$, e isto só será possível caso a e m tenham sinais opostos.

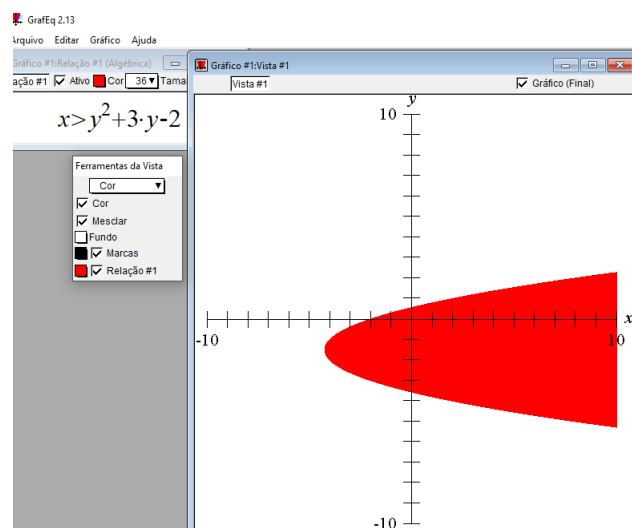
Já a intersecção da parábola da função $x = ay^2 + by + c$ com o eixo das abscissas ocorre sempre no ponto $(c, 0)$. Como consideramos o coeficiente c um número real, logo essa parábola sempre cortará o eixo x .

(k) Realizar análises de $x > ay^2 + by + c$ e $x < ay^2 + by + c$ quando $a > 0$. Que é possível concluir?

Resolução.

(I) Plotemos a desigualdade $x > ay^2 + by + c$ considerando $a > 0$ (por exemplo, $a = 1$), $b = 3$ e $c = -2$. A Figura 73 a seguir mostra o resultado.

Figura 73 – Representação da região gerada pela inequação $x > y^2 + 3y - 2$.

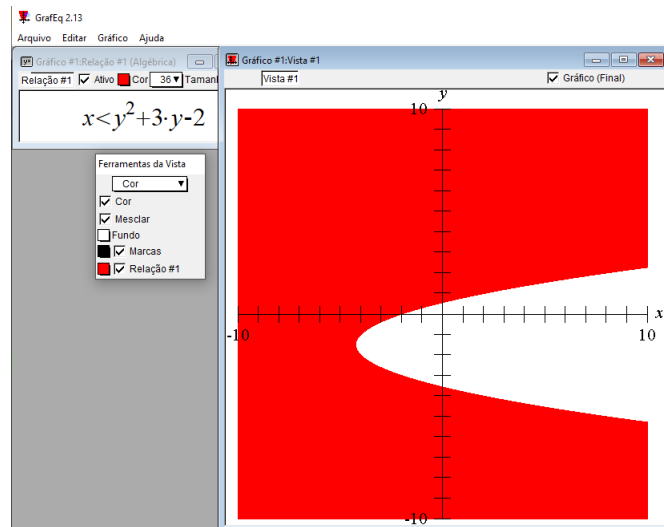


Fonte: Autor

Quando $a > 0$ e $x > ay^2 + by + c$, essa expressão representa a região constituída pelo conjunto de todos os pontos do plano $(x, y) \in \mathbb{R}$ que são internos à parábola $x = ay^2 + by + c$. A inclusão dos pontos pertencentes a essa parábola seria possível caso trocássemos “>” por “ \geq ”.

(II) Agora, plotemos a desigualdade $x < ay^2 + by + c$ considerando $a > 0$ (por exemplo, $a = 1$), $b = 3$ e $c = -2$. Logo a seguir, temos o resultado (Figura 74).

Figura 74 – Representação da região gerada pela inequação $x < y^2 + 3y - 2$.



Fonte: Autor

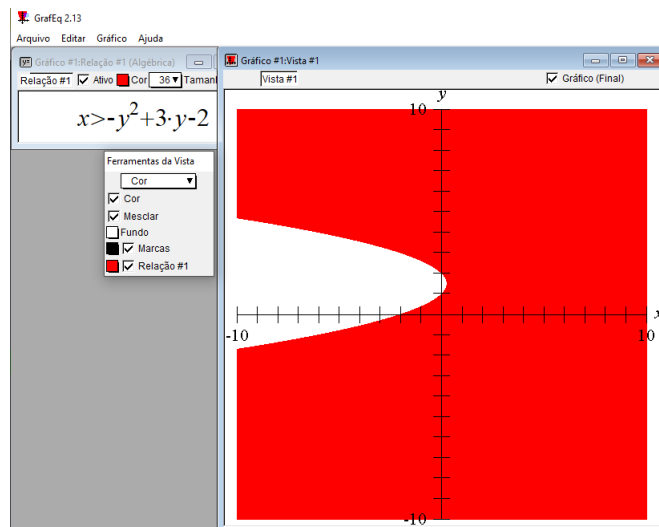
Para $a > 0$ e $x < ay^2 + by + c$, temos uma região constituída pelo conjunto de todos os pontos do plano $(x, y) \in \mathbb{R}$ que são externos à parábola $x = ay^2 + by + c$. A inclusão dos pontos pertencentes a essa parábola seria possível caso trocássemos “<” por “ \leq ”.

(I) Realizar análises de $x > ay^2 + by + c$ e $x < ay^2 + by + c$ quando $a < 0$. Que é possível concluir?

Resolução.

(I) No GrafEq, plotemos a desigualdade $x > ay^2 + by + c$ considerando $a < 0$ (por exemplo, $a = -1$), $b = 3$ e $c = -2$. Logo a seguir (Figura 75), temos o resultado.

Figura 75 – Representação da região gerada pela inequação $x > -y^2 + 3y - 2$.



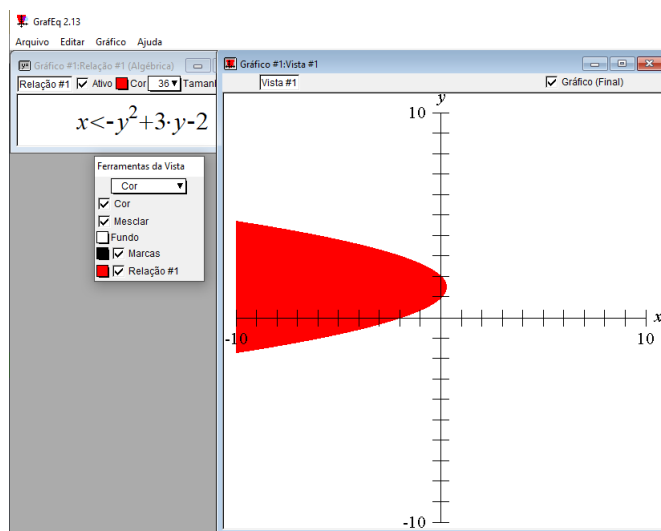
Fonte: Autor

Observe que quando $a < 0$ e $x > ay^2 + by + c$, essa expressão representa a região constituída pelo conjunto de todos os pontos do plano $(x, y) \in \mathbb{R}$ que são externos à parábola $x = ay^2 + by + c$, $a < 0$. Temos que a troca de “>” por “≥” inclui também os pontos pertencentes à parábola $x = ay^2 + by + c$, $a < 0$.

(II) Vamos plotar a desigualdade $x < ay^2 + by + c$ no GrafEq e considerar $a < 0$ (por exemplo, $a = -1$), $b = 3$ e $c = -2$. A Figura 76 a seguir nos mostra os resultado.

Observe, agora, que quando $a < 0$ e $x < ay^2 + by + c$, essa expressão representa a região constituída pelo conjunto de todos os pontos do plano $(x, y) \in \mathbb{R}$ que são internos à parábola $x = ay^2 + by + c$, $a < 0$. Quando trocamos “<” por “≤”, os pontos pertencentes à parábola $x = ay^2 + by + c$, $a < 0$, são também incluídos.

Figura 76 – Representação da região gerada pela inequação $x < -y^2 + 3y - 2$.



Fonte: Autor

(m) Realizar uma análise da curva da inversa de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$. Que é possível concluir?

Resolução.

Já tratamos da inversa de uma função qualquer, e mais especificamente, da inversa da função linear, na Seção 4.2 item “e”. Verificaremos, agora, a forma da curva da função inversa da função quadrática. Consideremos uma função qualquer $y = ax^2 + bx + c$. Para obtermos a inversa dessa função, não podemos simplesmente permutar as variáveis x e y . Devemos tomar algumas precauções sobre o domínio dessa função, pois, para existir a inversa de f , a função deve ser estritamente crescente ou decrescente, ou seja, $f(x)$ deve ser bijetiva sobre a sua imagem.

Uma técnica muito utilizada para obter a inversa de uma função quadrática é a seguinte: dada a função quadrática qualquer $f(x) = ax^2 + bx + c$, efetuemos a troca de $f(x)$ por y , e, em seguida, isolamos toda a expressão, igualando-a a zero, como segue.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow y = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow ax^2 + bx + (c - y) = 0.$$

Assim,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a}.$$

Finalmente, obtemos a inversa da função quadrática trocando x por $f^{-1}(x)$ e y por x nessa última expressão, o que nos fornece o seguinte resultado:

$$f^{-1}(x) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - x)}}{2a}.$$

Dependendo das lei do domínio e da imagem expressas em um dado problema, podemos escolher qual das soluções x_1 e x_2 convém, sendo

$$x_1 = f^{-1}(x) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = f^{-1}(x) = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a}.$$

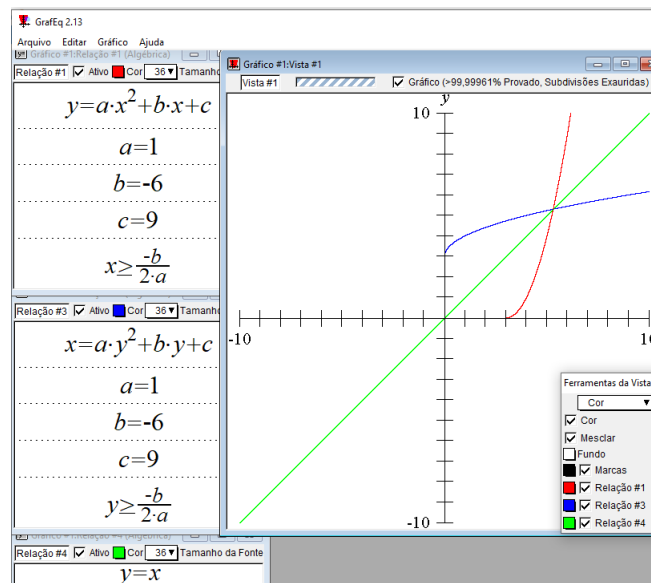
Vamos, agora, considerar como exemplo a análise da curva da função inversa de $f(x) = x^2 - 6x + 9$, e plotemo-la no GrafEq. Como já sabemos, o gráfico da função quadrática tem um eixo de simetria, a reta $y = X_v$, sendo precisamente o vértice $V(X_v, Y_v)$ que define a mudança de comportamento da parábola de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, pois, sendo $a > 0$, temos que $f(x)$ é crescente quando $x \geq -\frac{b}{2a}$, e $f(x)$ é decrescente quando $x \leq -\frac{b}{2a}$. Se $a < 0$, então $f(x)$ é crescente quando $x \leq X_v$, e $f(x)$ é decrescente quando $x \geq X_v$. De modo geral, a função quadrática pode admitir inversa regida por um único domínio $D = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{b}{2a} \right\}$ ou $D = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{b}{2a} \right\}$.

Plotemos no GrafEq a função quadrática arbitrária $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) e, em seguida, digitemos as seguintes restrições $x \geq -\frac{b}{2a}$, $a = 1$, $b = -6$ e $c = 9$. Como $a > 0$, esses parâmetros, plotados no GrafEq, nos fornecerão a curva crescente necessária para obtermos a curva simétrica em relação ao eixo de simetria $y = x$. Observe que, para esse exemplo, em que desejamos que a curva seja crescente, o domínio da função é $D = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{b}{2a} \right\}$.

Agora, para obtemos a curva da função inversa em que $a > 0$, utilizemos os mesmos parâmetros anteriores, trocando x por y , ou seja, plotemos $x = ay^2 + by + c$, com as restrições $y \geq -\frac{b}{2a}$, $a = 1$, $b = -6$ e $c = 9$. Observe que, para esse exemplo, em que desejamos que a curva seja crescente, o domínio da função $f^{-1}(x)$ é $D = \left\{ y \in \mathbb{R} : y \geq -\frac{b}{2a} \right\}$.

A Figura 77 a seguir mostra essas curvas (em vermelho e em azul, respectivamente).

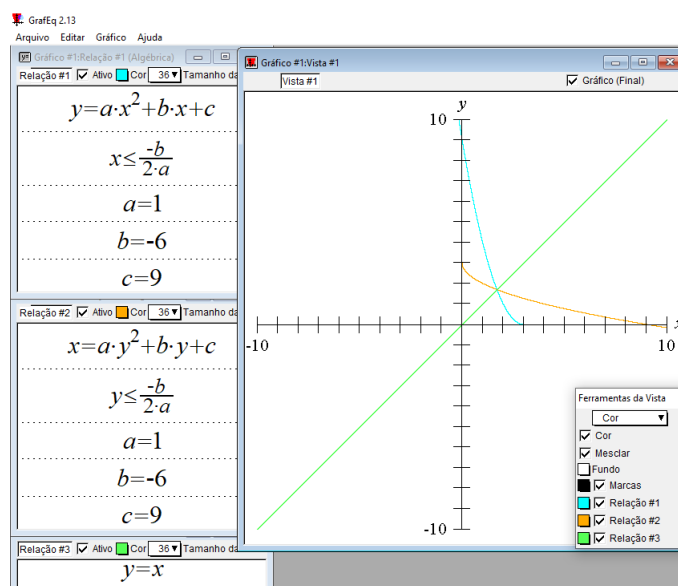
Figura 77 – Curva crescente da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e sua inversa relativa ao eixo de simetria $y = x$.



Fonte: Autor

Considerando a mesma função $f(x) = x^2 - 6x + 9$, porém com domínio $D = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{b}{2a} \right\}$, tal que $f(x)$ se comporta como uma função decrescente, obtemos a curva em azul claro na Figura 78 a seguir. A curva de $f^{-1}(x)$ correspondente em relação ao eixo de simetria está em amarelo, a qual também é decrescente, cujo domínio é $D = \left\{ y \in \mathbb{R} : y \leq -\frac{b}{2a} \right\}$.

Figura 78 – Curva decrescente da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e sua inversa relativa ao eixo de simetria $y = x$.



Fonte: Autor

Agora, obteremos, algebricamente, as funções responsáveis pelas curvas crescentes,

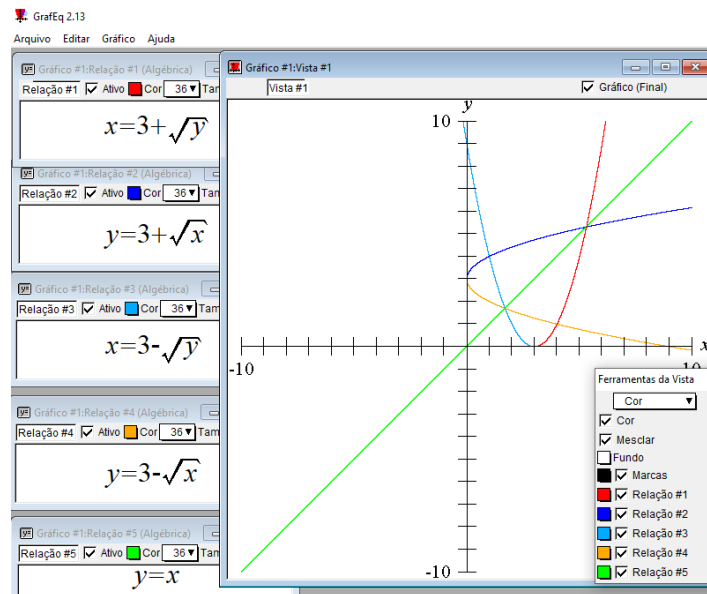
decrecentes e suas respectivas inversas, com base no exemplo dado (a função $f(x) = x^2 - 6x + 9$).

Substituindo os coeficientes $a = 1$, $b = -6$ e $c = 9$ de $f(x)$ em $f^{-1}(x) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a}$, obtemos

$$f^{-1}(x) = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(9-x)}}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = 3 \pm \sqrt{x}.$$

Logo, temos a inversa crescente $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x}$, a inversa decrescente $f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x}$ e suas respectivas curvas simétricas $x = 3 + \sqrt{y}$ e $x = 3 - \sqrt{y}$. Veja a Figura 79 a seguir.

Figura 79 – Representações gráficas das curvas crescente $x = 3 + \sqrt{y}$, decrescente $x = 3 - \sqrt{y}$, e suas respectivas inversas $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x}$ e $f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x}$, em relação ao eixo de simetria $y = x$.



Fonte: Autor

4.4 Análise dos gráfico da equação da circunferência $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, tal que $a, b, R \in \mathbb{R}$, $R > 0$, e das funções que descrevem as regiões internas e externas a ela, com auxílio do software GrafEq

(a) Realizar uma análise da curva $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$, considerando $a = b = 0$ e números quadrados perfeitos para k . Que é possível concluir?

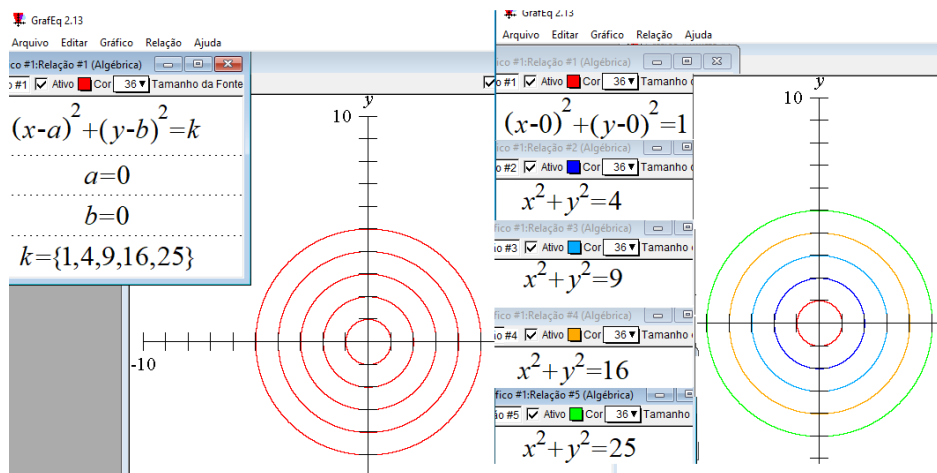
Resolução.

Plotemos no GrafEq a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ e as restrições $a = b = 0$. Como desejamos quadrados perfeitos para k , então consideremos, por exemplo, $k \in \{1, 4, 9, 16, 25\}$. Analisando a Figura 80 a seguir, observamos que os comandos descrevem cinco circunferências de centro na origem $O(0, 0)$, cujos raios são $R = 1$, $R = 2$, $R = 3$, $R = 4$ e $R = 5$, respectivamente.

Esses raios foram obtidos por meio de $R = \sqrt{k}$. Logo, concluímos que a expressão $x^2 + y^2 = R^2$ corresponde, graficamente, uma circunferência de centro na origem e raio R .

O software GrafEq reconhece uma circunferência de raio qualquer e centro na origem apenas plotando a expressão denotada por $R = r$, com $r > 0$. Temos, nesse exemplo, que $R \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ess comando nos fornece no GrafEq as cinco circunferências de centro em $O(0,0)$, e os raios sugeridos, $r \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Figura 80 – Representações gráficas da equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$, tal que $a = b = 0$ e $k \in \{1, 4, 9, 16, 25\}$.



Fonte: Autor

(b) Realizar uma análise de $x^2 + y^2 > R^2$, $x^2 + y^2 < R^2$, atribuindo valores para R . Que é possível concluir?

Resolução.

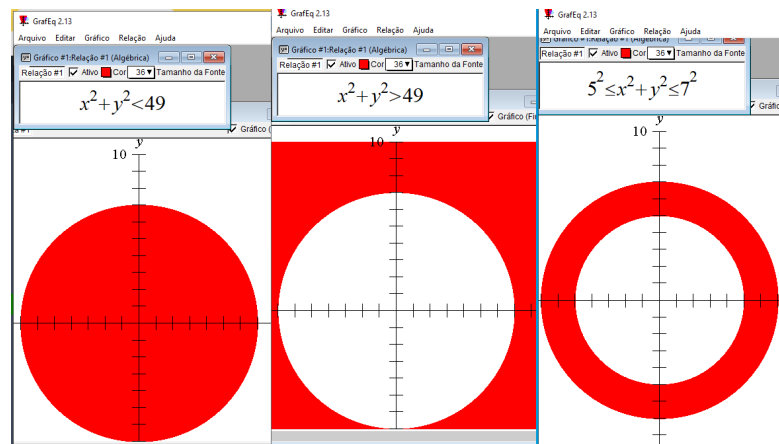
Plotemos no GrafEq os exemplos $x^2 + y^2 < 7^2$ e $x^2 + y^2 > 7^2$, conforme a Figura 81 a seguir.

Para a expressão $x^2 + y^2 = R^2$, já sabemos que ela representa uma circunferência de centro na origem $O(0,0)$ e raio R . Agora, trocando “=” por “<”, a expressão $x^2 + y^2 < R^2$ representará a região interna à circunferência $x^2 + y^2 = R^2$. Nesse caso, a inclusão dos pontos pertencentes à circunferência ocorre se utilizamos “≤”.

Já a expressão $x^2 + y^2 > R^2$ corresponde à região externa à circunferência $x^2 + y^2 = R^2$, e quando utilizamos “≥”, os pontos pertencentes à circunferência são incluídos.

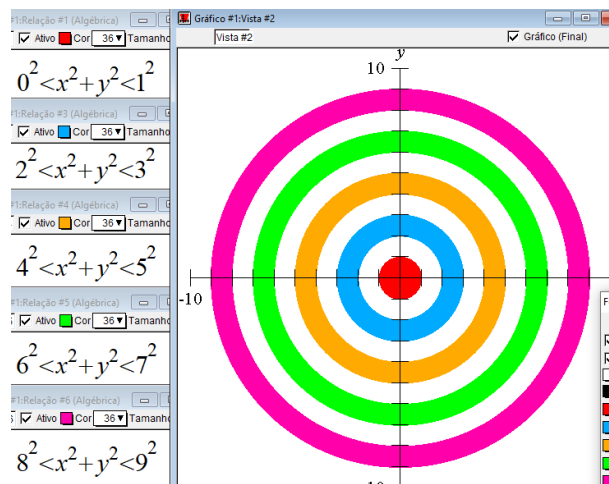
Agora, é possível criar um desenho muito utilizado plotando os parâmetros $R_m^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_n^2$, tais que $R_m < R_n$. Trata-se da coroa circular. Veja exemplos nas Figuras 81 e 82, a seguir.

Figura 81 – Representações gráficas das regiões geradas pelas inequações $x^2 + y^2 < R^2$ e $x^2 + y^2 > R^2$.



Fonte: Autor

Figura 82 – Representações gráficas de setores circulares gerados pelas inequações $R_m^2 < x^2 + y^2 < R_n^2$, tais que $R_m \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $R_n \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.



Fonte: Autor

(c) Realizar uma análise da curva da função $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, fixando dois dos coeficientes a , b e R , e variando o outro. Que é possível concluir?

Resolução.

Para realizarmos tal análise, a dividiremos nos seguintes três casos.

1º caso: “ a ” e “ R ” fixos.

Plotemos no GrafE a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, em que $a = R = 2$ fixos e variando o parâmetro $b \in \{2, 4, 6, 8\}$. Concluimos que o parâmetro “ b ” tem a finalidade de deslocar o centro da circunferência verticalmente em relação ao eixo y , podendo também deslocar verticalmente a própria circunferência, caso os parâmetros “ a ” e “ R ” sejam fixados. Colocamos, propositalmente,

o parâmetro $a = R$, para mostrar que, quando ocorre $|a| = R$, a circunferência sempre tangenciará o eixo das ordenadas.

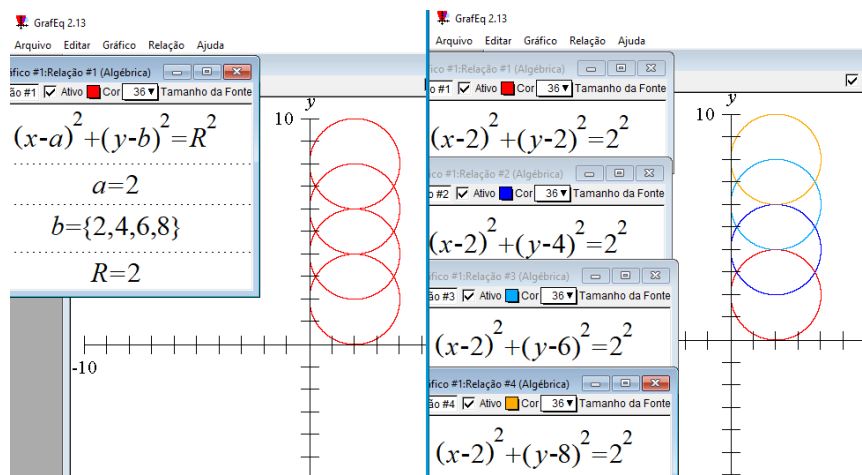
2º caso: “ b ” e “ R ” fixos.

Plotemos novamente no GrafEq a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, mas agora, $b = R = 3$ fixos e variando o parâmetro $a \in \{-4, -2, 0, 2\}$. A conclusão é que o parâmetro “ a ” é responsável pelo deslocamento horizontal do centro da circunferência em relação ao eixo x , podendo também deslocar horizontalmente a própria circunferência, caso os parâmetros “ b ” e “ R ” estejam fixos. Colocamos, propositalmente, o parâmetro $b = R$, para mostrar que, quando ocorre $|b| = R$, a circunferência sempre tangenciará o eixo das abscissas.

3º caso: centro fixo.

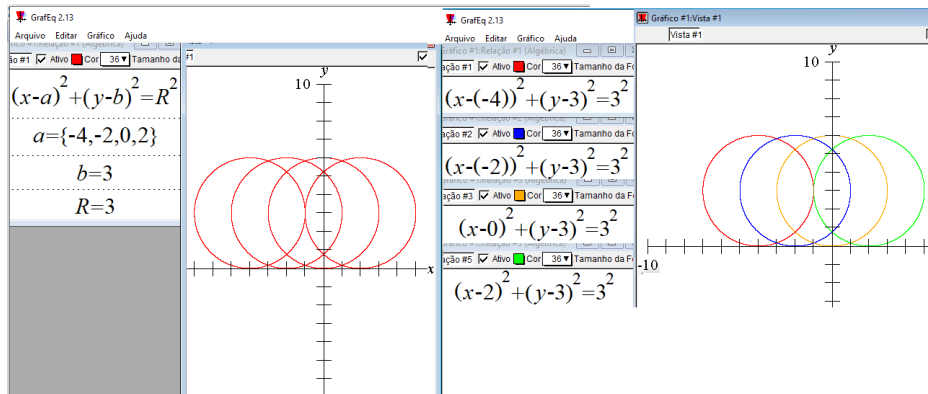
Já vimos que o ponto $O(a, b)$ manobra o centro da circunferência e também tem a finalidade de manobrar a circunferência de raio “ a ” fixo. O parâmetro “ a ” define o comprimento do raio e, conseqüentemente, o comprimento da circunferência. Na Figura 85 a seguir, fixamos o centro da circunferência e variamos o raio, considerando, como exemplo, $O(4, 3)$ e $R \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Figura 83 – Representações gráficas geradas pela equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, tal que $a = R = 2$ e $b \in \{2, 4, 6, 8\}$.



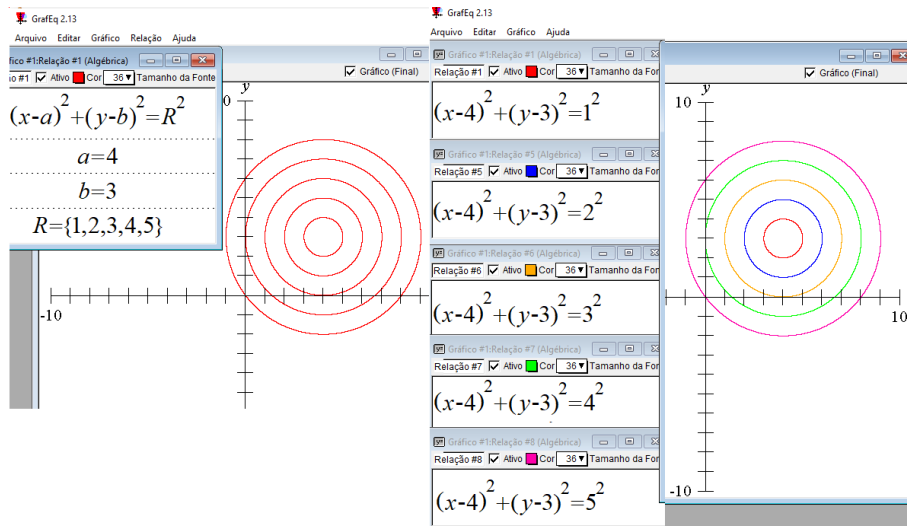
Fonte: Autor

Figura 84 – Representações gráficas geradas pela equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, tal que $b = R = 3$, e $a \in \{-4, -2, 0, 2\}$.



Fonte: Autor

Figura 85 – Representações gráficas geradas pela equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, tal que $a = 4$, $b = 3$, e $R \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.



Fonte: Autor

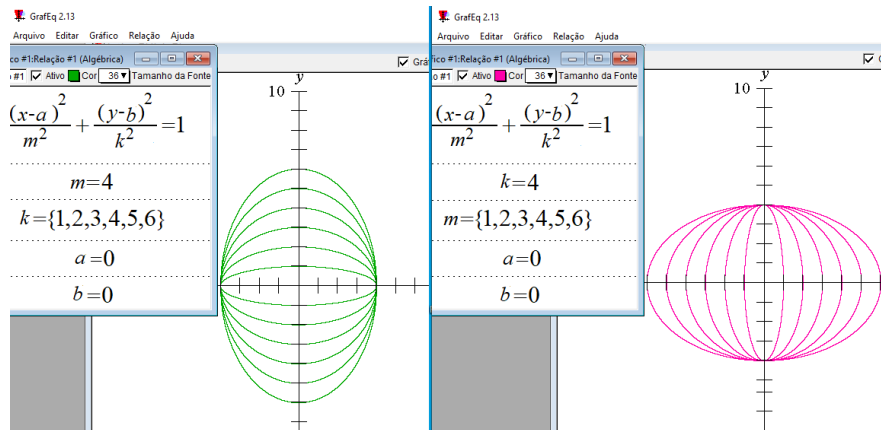
(d) Realizar uma análise da curva da equação $\frac{(x - a)^2}{m^2} + \frac{(y - b)^2}{k^2} = 1$, fixando $a = b = 0$, e variando m e k , tal que $m \neq 0$, $k \neq 0$. Que é possível concluir?

Resolução (1º caso).

Plotemos no GrafEq a equação $\frac{(x - a)^2}{m^2} + \frac{(y - b)^2}{k^2} = 1$, aplicando as restrições $a = b = 0$, $m = 4$ e $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Observe que a equação representa elipses de centro (a, b) na origem. Vemos claramente os pontos de interseção da curva com os eixos coordenados, quando $a = b = 0$. O coeficiente k faz a curva se achatar ou se expandir sobre o eixo y . O valor de m está representando os pontos de interseções da curva com o eixo x , conforme é mostrado na Figura 86 a seguir, à esquerda. Podemos observar a finalidade do coeficiente m quando, em vez de fixar m , fixamos k . Por exemplo, mudando as restrições anteriores para $k = 4$ e $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

observamos que o coeficiente m faz a curva se achatar ou se expandir sobre o eixo x , conforme é mostrado na Figura 86 a seguir, à direita.

Figura 86 – Representações gráficas da equação $\frac{(x-a)^2}{m^2} + \frac{(y-b)^2}{k^2} = 1$ com centro (a,b) na origem.



Fonte: Autor

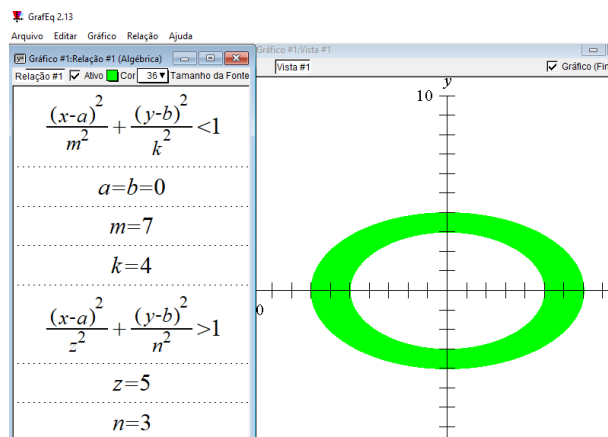
Observe que reduzimos a equação geral da circunferência à equação geral da elipse, do seguinte modo:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \Rightarrow \frac{(x-a)^2}{R^2} + \frac{(y-b)^2}{R^2} = \frac{R^2}{R^2} \Rightarrow \frac{(x-a)^2}{R^2} + \frac{(y-b)^2}{R^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-a)^2}{m^2} + \frac{(y-b)^2}{k^2} = 1.$$

Concluimos que, para qualquer curva, seja ela uma circunferência ou uma elipse, nesse contexto, m caracteriza o raio horizontal dessa curva, e k caracteriza o raio vertical da mesma curva, com qualquer centro (a,b) .

De modo análogo às projeções da coroa circular já plotadas, podemos também utilizar o mesmo raciocínio para construir a coroa elíptica. Um modo para realizar tal construção é plotar a inequação $\frac{(x-a)^2}{m^2} + \frac{(y-b)^2}{k^2} < 1$ e restrição $\frac{(x-a)^2}{z^2} + \frac{(y-b)^2}{n^2} > 1$, tal que $m \geq z$ e $k \geq n$. Plotemos as inequações citadas agora com as respectivas restrições $a = b = 0$, $m = 7$, $k = 4$, $z = 5$ e $n = 2$. O resultado é mostrado na Figura 87 a seguir.

Figura 87 – Representações gráficas da inequação $\frac{(x-a)^2}{m^2} + \frac{(y-b)^2}{k^2} < 1$ com restrição $\frac{(x-a)^2}{z^2} + \frac{(y-b)^2}{n^2} > 1$.



Fonte: Autor

4.5 Análise dos gráficos das funções $y = asin(bx) + c$ e $y = acos(bx) + c$, tal que $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, e análise das regiões delimitadas por essas funções com auxílio do software GrafEq

(a) Realizar análises de $y = asin(bx) + c$, fixando dois dos coeficientes a , b e c , e variando o outro. Que é possível concluir?

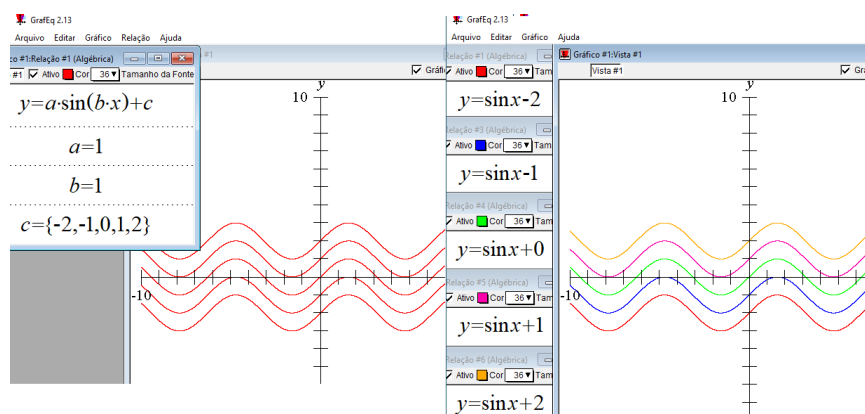
Resolução.

Para verificarmos o papel que cada um dos coeficientes a , b e c desempenha, dividiremos as análises nos três seguintes casos.

1º caso.

Plotemos no GrafEq a função $y = asin(bx) + c$, em uma única relação e também em cinco relações distintas, de modo que $a = 1$, $b = 1$ e $c \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, como mostra a Figura 88 a seguir.

Figura 88 – Curvas da função $y = a\sin(bx) + c$, tal que a e b são fixos, e c está variando.



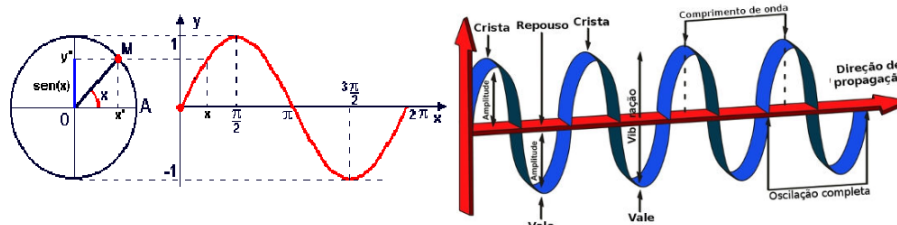
Fonte: Autor

Devemos nos lembrar de alguns conhecimentos sobre a função seno, quais sejam:

- o gráfico da função $y = a\sin(bx) + c$ é um senoide;
- seu domínio é $D = \mathbb{R}$;
- particularmente, se $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ ou $a = -1$, $b = -1$ e $c = 0$, então a imagem $Im = [-1, 1]$, e o período $p = 2\pi$.

Na Ondulatória (em Física), uma onda senoidal tem comportamentos parecidos com a senoide $f = \text{sen}(x)$, pois a “amplitude” da onda representa o módulo da distância entre o eixo das abscissas e o ponto máximo ou mínimo da imagem y , e a “oscilação completa” da onda representa o período p da função seno. A onda senoidal é muito importante para entendermos certos conceitos no estudo da Ondulatória, Eletricidade etc. A Figura 89 a seguir mostra a senoide $y = \text{sen}(x)$, à esquerda, e a onda senoidal, à direita.

Figura 89 – Senoide e onda senoidal.



Fonte: (TodaMatéria, 2019); (Brasil ESCOLA, 2019)

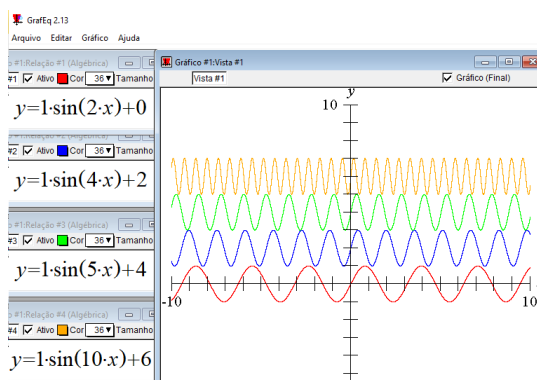
Voltando ao 1º caso plotado, os gráficos mostrados na Figura 89 a seguir indicam que com a variação do coeficiente $c \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, os gráficos moveram-se verticalmente, intersectando os pontos $P_1(0, -2)$, $P_2(0, -1)$, $P_3(0, 0)$, $P_4(0, 1)$ e $P_5(0, 2)$, respectivamente. Portanto,

concluimos que o coeficiente c tem a finalidade de deslocar a curva verticalmente. Ademais, representa a interseção da curva senoide com o eixo y , no ponto $P(0, c)$.

2º caso.

Plotemos no GrafEq a função $y = a\sin(bx) + c$ em quatro relações distintas, de modo que $a = 1$, $b \in \{2, 4, 5, 10\}$, e coloquemos $c \in \{0, 2, 4, 6\}$, para que os gráficos não se sobreponham em uma mesma faixa, a fim de facilitar a visualização individual, como mostra a Figura 90 a seguir. O foco, nesse 2º caso, é avaliar o coeficiente “ b ”. Observe que a amplitude de cada curva é a mesma para as quatro funções, mas o período em cada um dos gráficos é diferente. Logo, concluimos que o coeficiente “ b ” tem a finalidade de contrair e expandir o período da curva senoide, relativo à função $y = a\sin(bx) + c$.

Figura 90 – Curvas da função $y = a\sin(bx) + c$, com ênfase na variação do período

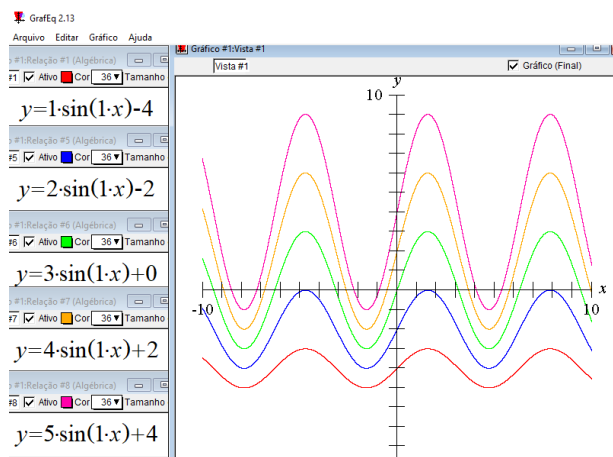


Fonte: Autor

3º caso.

Plotemos no GrafEq a função $y = a\sin(bx) + c$ e as restrições $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $b = 1$, e $c \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$. Novamente, a variação do coeficiente “ c ” não permite a sobreposição das cinco curvas em uma mesma faixa, a fim de obtermos uma melhor visualização. Nosso foco, portanto, é a variação do coeficiente “ a ”. Note que esse tem a finalidade de aumentar ou diminuir a amplitude da curva senoide, refletindo no ponto máximo e ponto mínimo da imagem, que pode ser representada, nesse caso, por $Im = [c - |a|, c + |a|]$, conforme Figura 91 a seguir.

Figura 91 – Curvas da função $y = a\sin(bx) + c$, com ênfase na variação de amplitude e imagem.

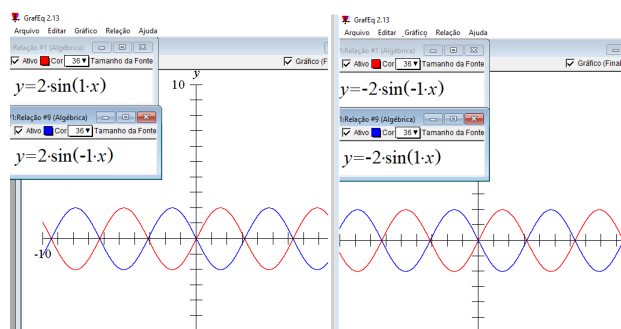


Fonte: Autor

Uma rápida observação quanto aos sinais dos coeficientes “ a ” e “ b ” é que, na expressão $y = a\sin(bx) + c$, se eles têm sinais iguais, então o trecho da curva que intersecta o eixo das ordenadas sempre será crescente, mas se têm sinais opostos, então esse mesmo trecho será sempre decrescente (veja a Figura 92 a seguir). Também quando $a = 1$, $b = 1$ e $c = 0$, temos que a função $y = \sin x$ é crescente nos 1º e 3º quadrantes, e decrescente nos 2º e 4º quadrantes.

Note que na função $y = a\sin(bx) + c$, a curva senoide também tem sua curva simétrica axial, e seu eixo de simetria é a reta $y = c$. Portanto, quando $y = \sin(x)$, ou seja, quando $a = 1$, $b = 1$ e $c = 0$, o eixo de simetria será o próprio eixo das abscissas, pois a curva senoide estará na posição de origem.

Figura 92 – Curvas da função $y = a\sin(bx) + c$, com ênfase na análise dos sinais de a e b .



Fonte: Autor

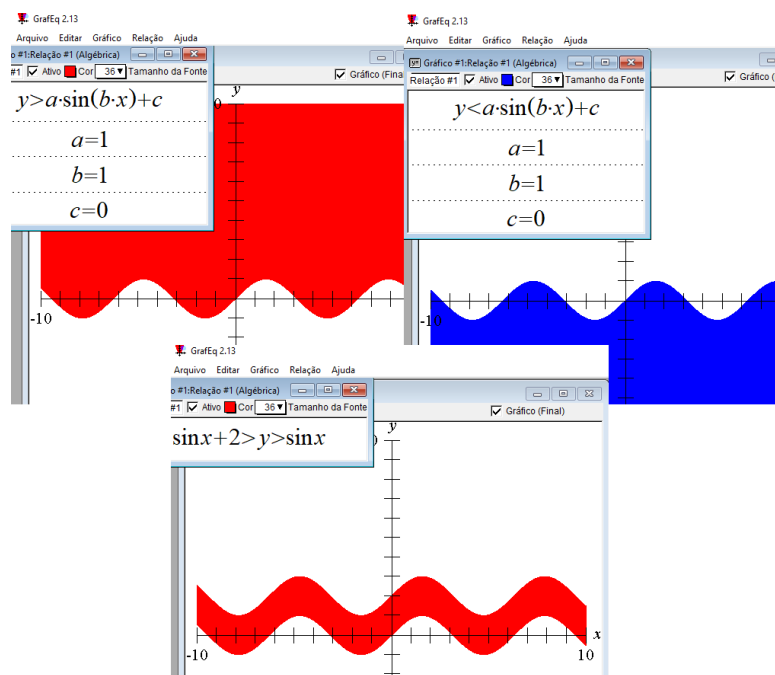
(b) Realizar análises de $y > a\sin(bx) + c$, $y < a\sin(bx) + c$ e $a\sin(bx) + c < y < a'\sin(b'x) + c'$. Que é possível concluir?

Resolução.

Plotemos no GrafEq a função $y > a\sin(bx) + c$, tal que $a = 1$, $b = 1$ e $c = 0$. Em outra relação, com os mesmos coeficientes, plotemos a função $y < a\sin(bx) + c$. Os resultados são mostrados na Figura 93 a seguir. Concluimos que a expressão $y > a\sin(bx) + c$ representa a região composta por todos os pontos $P(x,y)$ que estão acima da onda senoidal $y = a\sin(bx) + c$. Nesse caso, os pontos pertencentes à onda senoidal são incluídos caso substituamos “>” por “≥”. Já a expressão $y < a\sin(bx) + c$ representa a região composta por todos os pontos $P(x,y)$ que estão abaixo da onda senoidal $y = a\sin(bx) + c$. Caso troquemos “<” por “≤”, então os pontos do gráfico $y = a\sin(bx) + c$ também são incluídos.

Podemos, agora, construir uma região limitada por duas ondas senoidais. Por exemplo, plotemos no GrafEq a expressão $\sin(x) + 2 > y > \sin(x)$. Observe que, na parte inferior da Figura 93 a seguir, o resultado mostra que a expressão $a\sin(bx) + c > y > a'\sin(b'x) + c'$, tal que $c > c'$, representa a região constituída pelo conjunto de todos os pontos $P(x,y)$ que estão acima da curva $y = a'\sin(b'x) + c'$ e abaixo da curva $y = a\sin(bx) + c$. No entanto, a inclusão dos pontos pertencentes às curvas $a\sin(bx) + c$ e $a'\sin(b'x) + c'$ seria possível se utilizássemos os sinais “≥” ou “≤”, convenientemente.

Figura 93 – Representação da região expressa por $y > a\sin(bx) + c$, $y < a\sin(bx) + c$ e $a\sin(bx) + c > y > a'\sin(b'x) + c'$.



Fonte: Autor

(c) Realizar análises de $y = a\cos(bx) + c$ fixando dois dos coeficientes a , b e c e variando o outro. Que é possível concluir?

Resolução.

Para verificarmos o papel que cada um dos coeficientes a , b e c desempenha, dividiremos as análises nos três casos seguintes.

1º caso.

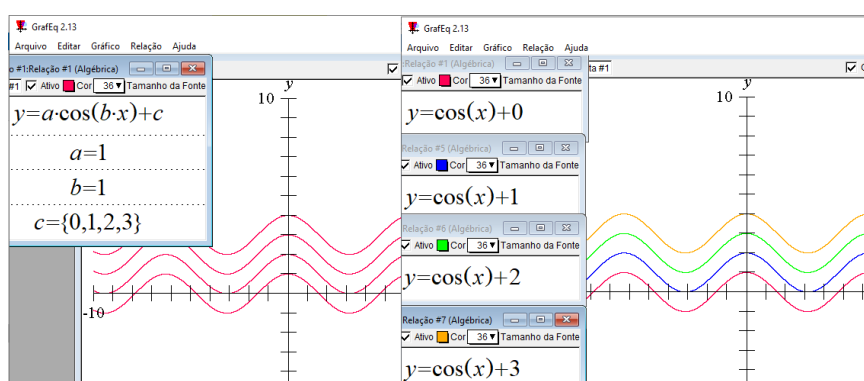
Plotemos no GrafEq a função $y = a\cos(bx) + c$, em uma única relação, e também em quatro relações distintas, de modo que $a = 1$, $b = 1$ e $c \in \{0, 1, 2, 3\}$, como mostra a Figura 94 a seguir.

Devemos nos lembrar de alguns conhecimentos sobre a função cosseno, quais sejam:

- o gráfico da função $y = a\cos(bx) + c$ é uma cosenoide;
- seu domínio é $D = \mathbb{R}$;
- particularmente, se $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ ou $a = -1$, $b = -1$ e $c = 0$, então a imagem $Im = [-1, 1]$, e o período $p = 2\pi$.

Os resultados dos parâmetros plotados nesse item, mostrados na Figura 92 a seguir, indicam que, com a variação do coeficiente $c = \{0, 1, 2, 3\}$, os gráficos movem-se verticalmente intersectando os pontos $P_1(0, 1)$, $P_2(0, 2)$, $P_3(0, 3)$ e $P_4(0, 4)$, respectivamente. Portanto, conclui-se que o coeficiente c é responsável pelo deslocamento vertical da curva senoide em relação ao eixo y .

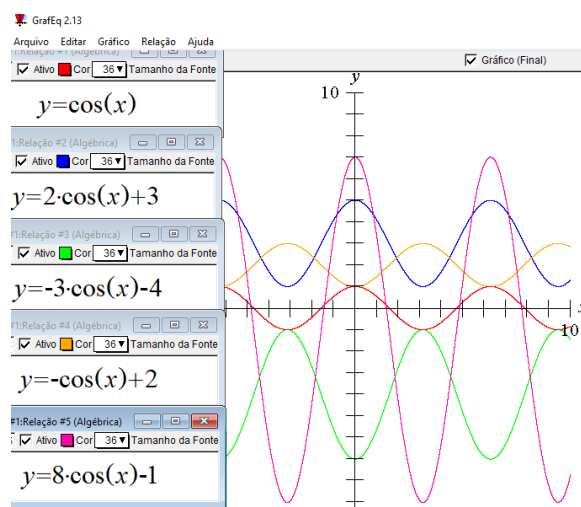
Figura 94 – Curvas da função $y = a\cos(bx) + c$, tal que a e b são fixos, e c está variando.



Fonte: Autor

Agora, plotemos os seguintes parâmetros: $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$; $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$; $a = -3$, $b = 1$, $c = -4$; $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$ e $a = 8$, $b = 1$, $c = -1$. Veja os resultados na Figura 95 a seguir.

Figura 95 – Curvas da função $y = a\cos(bx) + c$, tal que a e b são fixos, e c está variando.



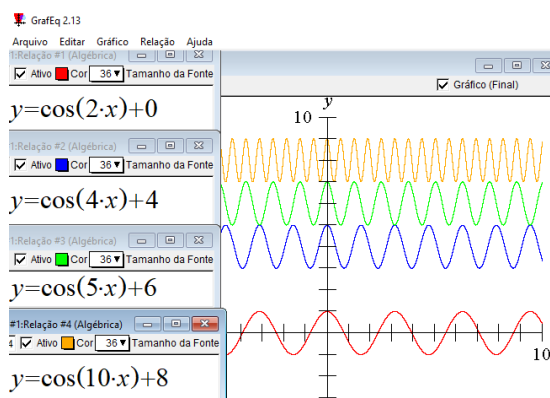
Fonte: Autor

Um fator importante evidenciado por esses gráficos é que a interseção da curva cossenoide com o eixo das ordenadas ocorre no ponto $P(0, a + c)$. Além disso, na curva cossenoide, o ponto máximo pode ser obtido por $c + |a|$, o ponto mínimo por $|c - |a||$, e a imagem pode ser representada por $Im = [c - |a|, c + |a|]$.

2º caso.

Plotemos no GrafEq a função $y = a\cos(bx) + c$, em quatro relações distintas, de modo que $a = 1$, $b \in \{2, 4, 5, 10\}$, e coloquemos $c \in \{0, 2, 4, 6\}$, para que os gráficos não se sobreponham em uma mesma faixa, a fim de facilitar a visualização individual, como mostra a Figura 96 a seguir. Nesse 2º caso, avaliaremos o coeficiente “ b ”. Veja que a amplitude de cada curva é a mesma para as quatro funções, mas o período em cada um dos gráficos é diferente. Logo, concluímos que o coeficiente “ b ” tem a finalidade de contrair e expandir o período da curva cossenoide $y = a\cos(bx) + c$. Em particular, o período aumenta quando o módulo de “ b ” torna-se cada vez maior (Figura 96 a seguir).

Figura 96 – Curvas da função $y = a\sin(bx) + c$, com ênfase na variação do período.

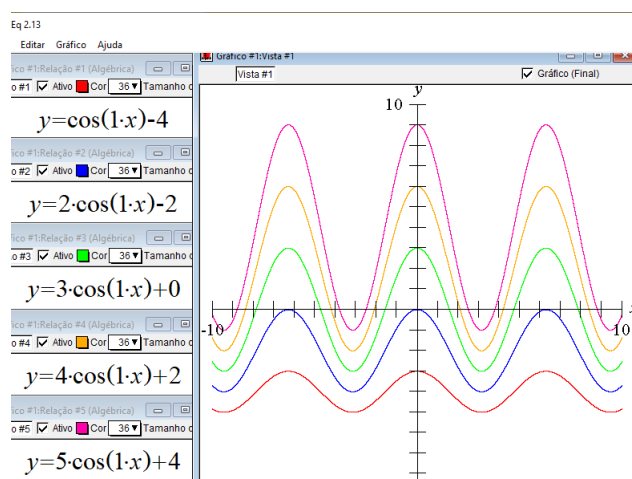


Fonte: Autor

3º caso.

Plotemos no GrafEq a função $y = a\cos(bx) + c$ e as restrições $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $b = 1$, e $c \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$. A variação do coeficiente “ c ” não permite sobreposição das cinco curvas em uma mesma faixa, a fim de obtermos uma melhor visualização. O objetivo agora é analisar a variação do coeficiente “ a ”. Observe que esse tem a finalidade de aumentar ou diminuir a amplitude da curva cossenoide refletindo no ponto máximo e ponto mínimo da imagem, representada por $Im = [c - |a|, c + |a|]$. Em particular, quanto maior o módulo de “ a ”, maior será a amplitude (Figura 97 a seguir).

Figura 97 – Curvas da função $y = a\sin(bx) + c$, com ênfase na variação da amplitude e da imagem.



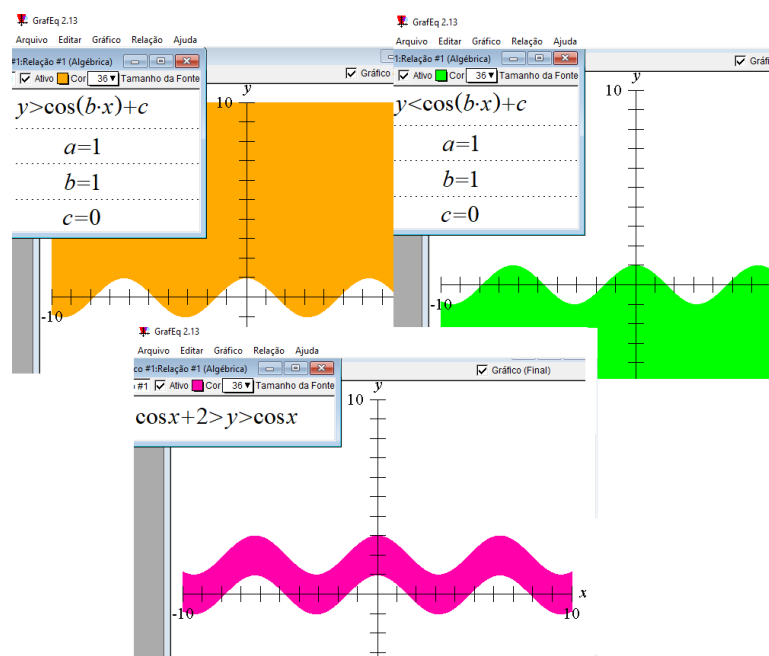
Fonte: Autor

(d) Realizar análises de $y > a\cos(bx) + c$, $y < a\cos(bx) + c$ e $a\cos(bx) + c < y < a'\cos(b'x) + c'$. Que é possível concluir?

Plotemos no GrafEq a função $y > a\cos(bx) + c$, tal que $a = 1$, $b = 1$ e $c = 0$. Em outra relação, plotemos a função $y < a'\cos(b'x) + c'$ com os mesmos valores. Pela visualização da Figura 98 a seguir, podemos concluir que a expressão $y > a\cos(bx) + c$ representa a região constituída pelo conjunto de todos os pontos $P(x,y)$ que estão acima da onda cossenoide $y = a\cos(bx) + c$, de modo que os pontos pertencentes a ela são incluídos caso substituamos “>” por “≥”. Por outro lado, a expressão $y < a'\cos(b'x) + c'$ representa a região constituída por todos os pontos $P(x,y)$ que estão abaixo da cossenoide $y = a'\cos(b'x) + c'$. Caso substituamos “<” por “≤”, então os pontos do gráfico $y = a'\cos(b'x) + c'$ também são incluídos.

Agora, é possível obter uma região limitada por duas ondas cossenoidais. Por exemplo, plotemos no GrafEq a expressão $\cos(x) + 2 > y > \cos(x)$. Veja que, na parte inferior da Figura 98 a seguir, o resultado mostra que a expressão $a\cos(bx) + c > y > a'\cos(b'x) + c'$, tal que $c > c'$, representa a região constituída pelo conjunto de todos os pontos $P(x,y)$ que estão acima da curva $y = a'\cos(b'x) + c'$ e abaixo da curva $y = a\cos(bx) + c$. No entanto, a inclusão dos pontos pertencentes às curvas $a\cos(bx) + c$ e $a'\cos(b'x) + c'$ seria possível se utilizássemos os sinais “≥” ou “≤”, convenientemente.

Figura 98 – Representação da região expressa por $y > a\cos(bx) + c$, $y < a\cos(bx) + c$ e $a\cos(bx) + c > y > a'\cos(b'x) + c'$.



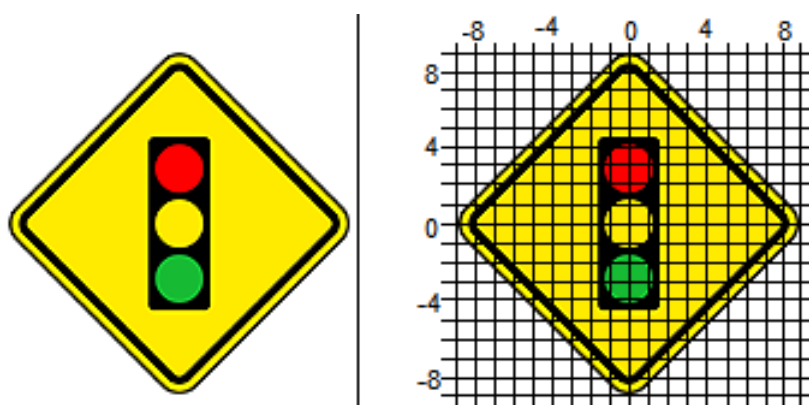
Fonte: Autor

4.6 Trabalhando desenho artístico no GrafEq

Vamos elaborar o desenho de uma placa de trânsito no GrafEq usando equações.

Primeiramente, escolhemos a figura de uma placa de trânsito, por exemplo, a placa cujo significado é Semáforo, a qual pode ser encontrada no site placasdetransito.net. Salvamos tal imagem e a editamos no Paint colocando nela as retas e coordenadas, representando, assim, um plano cartesiano, para nos orientarmos na produção de uma imagem com traços parecidos aos da figura utilizando equações no software GrafEq. Logo a seguir (Figura 99), temos a figura original e a figura modificada com coordenadas cartesianas bidimensionais.

Figura 99 – Traços do plano cartesiano sobre o desenho.



Fonte: (Placasdetransito.net , 2018)

Aplicando noções de Geometria Analítica, vamos traçar as equações e inequações necessárias para compor essa figura.

O contorno da placa se assemelha a um losango, tal que podemos adotar as coordenadas dos seus vértices sobre os pontos $A(0,9)$, $B(9,0)$, $C(0,-9)$ e $D(-9,0)$. As retas suportes desse losango são determinadas com base nos seguintes pares de pontos imaginários: $A(0,9)$ e $B(9,0)$; $B(9,0)$ e $C(0,-9)$; $C(0,-9)$ e $D(-9,0)$; $D(-9,0)$ e $A(0,9)$. Segundo (DANTE, 2014), podemos obter a equação da reta suporte de um segmento AB utilizando a noção de condição de alinhamento de três pontos. Assim, quando temos dois pontos $A(X_A, Y_A)$ e $B(X_B, Y_B)$ distintos, a reta suporte pode ser determinada calculando o determinante de uma matriz 3×3 apropriada e igualá-lo à zero, em que $P(X, Y)$ é um ponto genérico da reta suporte AB . Observe o cálculo resumido a seguir:

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \end{vmatrix} = XY_A + YX_B + X_A Y_B - X_B Y_A - Y_B X - X_A Y = 0.$$

Assim,

$$X(Y_A - Y_B) + Y(X_B - X_A) + X_A Y_B - X_B Y_A = 0.$$

Observe que a expressão $X_A Y_B - X_B Y_A$ corresponde ao determinante da matriz menor 2×2 formada pelos pontos $A(X_A, Y_A)$ e $B(X_B, Y_B)$, de modo que

$$D = \begin{vmatrix} X_A & Y_A \\ X_B & Y_B \end{vmatrix} = X_A Y_B - X_B Y_A.$$

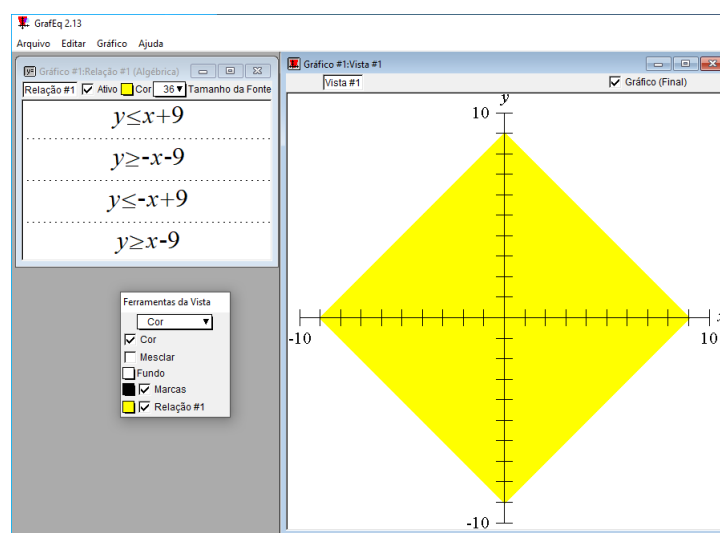
Logo, da equação $X(Y_A - Y_B) + Y(X_B - X_A) + X_A Y_B - X_B Y_A = 0$ obtemos a expressão $X(Y_A - Y_B) + Y(X_B - X_A) + D = 0$, a qual nos permite obter a equação geral da reta, muitas vezes apenas mentalmente quando são dados os dois pontos $A(X_A, Y_A)$ e $B(X_B, Y_B)$.

Agora, considerando $a = Y_A - Y_B$, $b = X_B - X_A$ e $c = X_A Y_B - X_B Y_A$, obtemos a equação geral da reta $aX + bY + c = 0$ com seus respectivos coeficientes a , b e c .

Aplicaremos o método de condição de alinhamento para determinar todas as retas suportes de que necessitaremos para a formação da figura sob análise.

Consideremos os pares de pontos que mencionamos, para construir a região interna amarela do losango que representa a placa, de modo que, após aplicar o método do determinante da matriz 3×3 em cada par de pontos, obteremos as inequações das retas, cujas formas reduzidas são $y \leq x + 9$; $y \geq -x - 9$; $y \leq -x + 9$ e $y \geq x - 9$. Plotando essas inequações no GrafEq em uma mesma relação, obtemos a imagem a seguir (Figura 100).

Figura 100 – Região losangular amarela da placa.

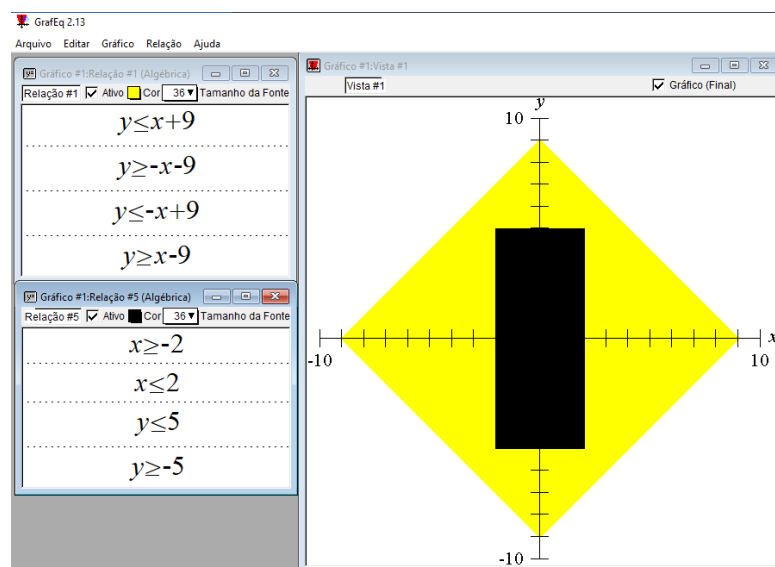


Fonte: Autor

Para compor o retângulo preto que receberá as luzes do semáforo, optamos por um tamanho um pouco maior que o proporcional da figura original, abrangendo uma área interna de cor preta delimitada pelo quarteto de retas que passam pelos pontos $E(-2, 5)$ e $F(2, 5)$, $F(2, 5)$ e $G(2, -5)$, $G(2, -5)$ e $H(-2, -5)$, $H(-2, -5)$ e $E(-2, 5)$, plotadas em uma mesma relação.

Portanto, para a formação da área retangular, precisamos recorrer às seguintes inequações: $x \geq -2$; $x \leq 2$; $y \leq 5$ e $y \geq -5$. A Figura 101 a seguir mostra o resultado.

Figura 101 – Inserção da região retangular preta da placa.



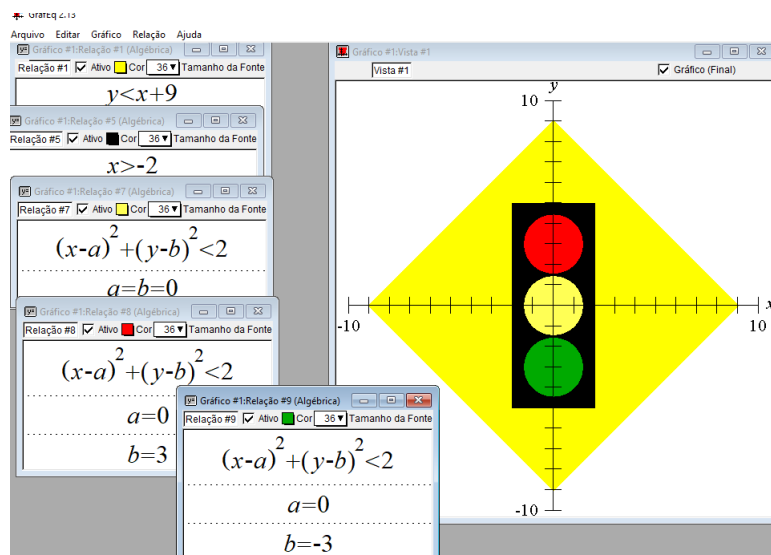
Fonte: Autor

Uma ótima opção para a plotagem de regiões retangulares centralizadas é a utilização da intersecção das duplas inequações modulares $|x| \leq m$ e $|y| \leq n$, tal que $m > 0$ e $n > 0$, em que m representa a distância máxima de cobertura para a direita e esquerda, partindo do eixo y , e n , a distância máxima de cobertura para cima e para baixo, partindo do eixo x . Assim, teríamos a mesma representação da região retangular $EFGH$, caso plotássemos as inequações $|x| \leq 2$ e $|y| \leq 5$ em uma mesma relação.

Agora, para a composição das lanternas, que são áreas circulares, recorreremos à inequação $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$, em que $C(a, b)$ são as coordenadas do centro da circunferência, e R é o raio. Devemos levar em consideração as coordenadas do centro dos círculos de cada cor na figura, mas o raio será o mesmo, pois os três círculos terão as mesmas dimensões. Para a lanterna de cor amarela, plotemos $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 2$, tal que $a = b = 0$. Para a lanterna de cor vermelha, plotemos $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 2$, tal que $a = 0$ e $b = 3$. E para a lanterna de cor verde, plotemos $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 2$, tal que $a = 0$ e $b = -3$. Observe que o raio aqui adotado é $R = \sqrt{2}$. Um modo de conhecermos o valor do raio R , nesse caso, é observar que um raio do círculo amarelo tem como extremidades os pontos $(1, 1)$ e $(0, 0)$. Analiticamente, calculamos a distância entre esses dois pontos (é mesma equação da circunferência), o que nos permite obter $R = \sqrt{2}$. Observe que é possível também calcular o valor de R sinteticamente aplicando o Teorema de Pitágoras, pois, observemos na malha que as coordenadas $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(1, 0)$

coincidem com os vértices de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é o raio R . Na Figura 102 a seguir, vemos as áreas circulares que representam as luzes do semáforo.

Figura 102 – Inserção dos círculos na região retangular preta da placa.

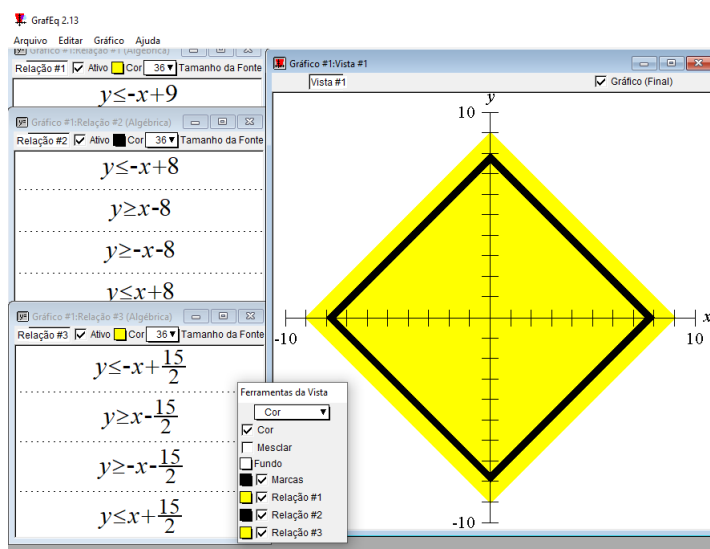


Fonte: Autor

Obtivemos a faixa preta em forma de losango que faz um contorno paralelo, internamente próximo das bordas da placa, com base nas duas regiões losangulares sobrepostas. Assim, para a primeira delas, na cor preta, os pares de coordenadas $A'(0, 8)$ e $B'(8, 0)$, $B'(8, 0)$ e $C'(0, -8)$, $C'(0, -8)$ e $D'(-8, 0)$, $A'(0, 8)$ e $D'(-8, 0)$ geram as seguintes inequações, quando se aplica a equação geral da reta e as propriedades do estudo do sinal das desigualdades: $y \leq -x + 8$; $y \geq x - 8$; $y \geq -x - 8$; $y \leq x + 8$.

Para a segunda região losangular de área menor, na cor amarela, os pares de coordenadas escolhidos para dar uma diferença notável na espessura do contorno da faixa, são os pares $A''(0, \frac{15}{2})$ e $B''(\frac{15}{2}, 0)$, $B''(\frac{15}{2}, 0)$ e $C''(0, -\frac{15}{2})$, $C''(0, -\frac{15}{2})$ e $D''(-\frac{15}{2}, 0)$, $A''(0, \frac{15}{2})$ e $D''(-\frac{15}{2}, 0)$. Quando a esses pares de pontos aplicamos o método para determinar a equação geral de cada reta e utilizamos as desigualdades, eles geram as respectivas inequações: $y \leq -x + \frac{15}{2}$; $y \geq x - \frac{15}{2}$; $y \geq -x - \frac{15}{2}$; $y \leq x + \frac{15}{2}$. Vejamos como ficou a faixa losangular próxima às bordas da placa, mostrada na Figura 103.

Figura 103 – Faixa preta losangular formada a partir de sobreposições.

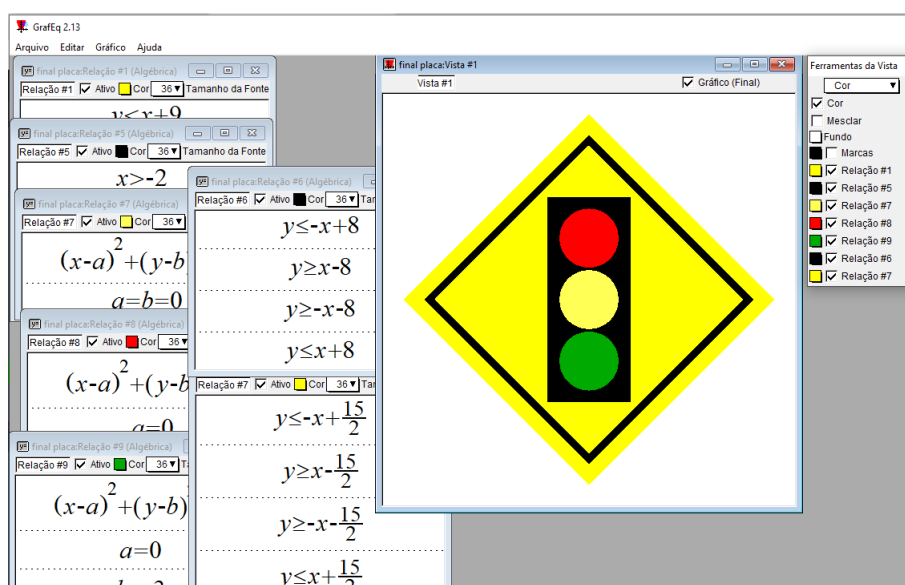


Fonte: Autor

Uma alternativa diferente para a construção da faixa losangular seria considerar a região formada pela interseção das funções modulares $y \leq -|x| + 8$ e $y \geq |x| - 8$ com a região formada pela interseção das funções modulares $y \leq -|x| + \frac{15}{2}$ e $y \geq |x| - \frac{15}{2}$, e sobrepô-las, essa última sobre a anterior.

Finalmente, temos a figura completa formada pelas regiões sobrepostas na devida ordem e plotadas em um mesmo gráfico sem as marcas dos eixos coordenados (Figura 104 a seguir).

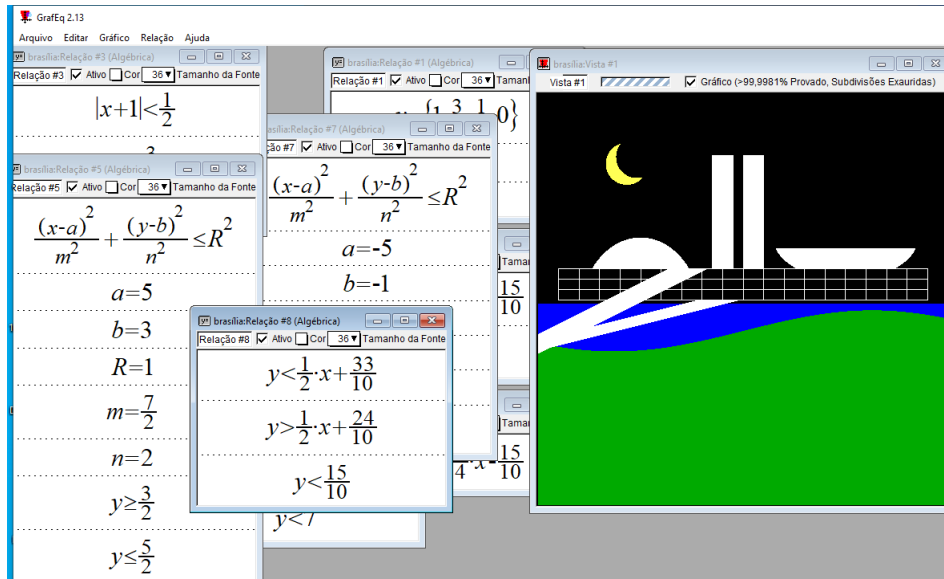
Figura 104 – Figura formada pela sobreposição das regiões no GrafEq.



Fonte: Autor

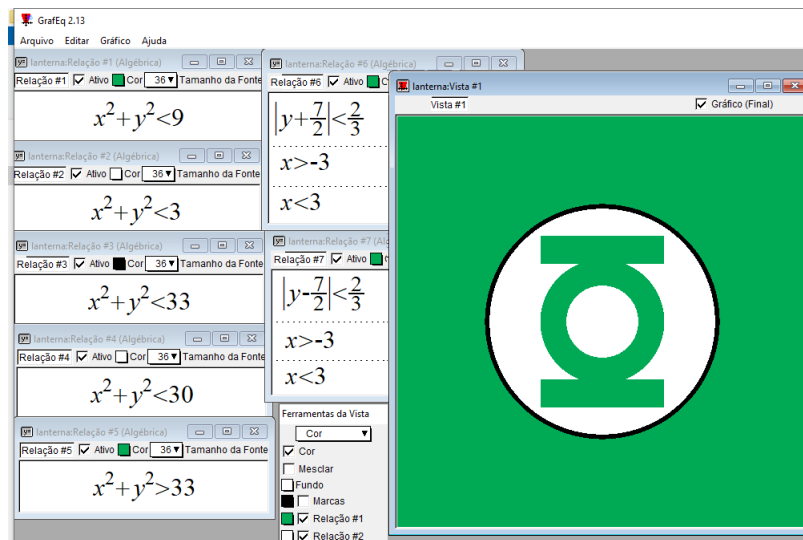
Veja a seguir outros projetos elaborados pelo autor (Figuras 105 e 106).

Figura 105 – Figura formada pela sobreposição regiões no GrafEq- Projeto 2.



Fonte: Autor

Figura 106 – Figura formada a partir das regiões sobrepostas no GrafEq- Projeto 3



Fonte: Autor

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No primeiro momento, a expectativa para o desenvolvimento deste trabalho seria com uma turma de alunos do 3º ano do Ensino Médio, aproveitando o laboratório de informática disponível na escola estadual no município de Senador La Rocque-MA. Porém, de modo imprevisto, surgiram a paralização das aulas e o fechamento das escolas, devido à pandemia do novo coronavírus (COVID19). Sem previsão do retorno das aulas para dar continuidade ao trabalho e pôr em prática esse projeto, optou-se, então, pela elaboração de uma proposta didática a partir da organização de uma coletânea de exercícios dinâmicos com enfoque nos elementos da álgebra geométrica e algumas noções de Engenharia Civil adotando discussões pertinentes a uma visão cognitiva do aluno.

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, procurou-se enfatizar alguns possíveis problemas que acarretariam na deficiência do ensino-aprendizagem da Matemática, com uma particularidade na aprendizagem nos elementos de Geometria Analítica no Ensino Médio, cujas falhas já perduram desde o Ensino Fundamental, realizando percursos até o Ensino Superior. Notou-se que, realmente, problemas na base do ensino de conteúdos algébricos e geométricos fazem parte do rol dos motivos que desencadeiam a evasão e as reprovações de alunos em cursos de engenharia e licenciaturas da área das ciências exatas. Estudou-se que uma saída para solucionar esses problemas, em parte, seria a dinamização das aulas com propósito de chamar a atenção do aluno, cativá-lo e ganhar a sua confiança. Unindo elementos de interesse do aluno aos conteúdos matemáticos ministrados é possível se chegar ao mesmo denominador comum, e, desse modo, explorar a capacidade de construção do conhecimento matemático do discente considerando a sua criatividade, competências e habilidades, alinhando àquilo que é proposto pela nova BNCC.

Viu-se que, com o avanço da tecnologia, softwares e aplicativos foram desenvolvidos para diversos fins, e, dentre esses softwares, está o GrafEq, que é um ótimo programa para auxiliar no ensino de Geometria Analítica, sendo muito eficiente para o estudo do sinal de equações, inequações e funções com suas visualizações gráficas em coordenadas cartesianas e em coordenadas polares. Essa última tem grande utilidade na modelagem de campos sonoros e modelagem de movimentos orbitais em estudos da Astronomia e viagens espaciais. Aproveitando

as características peculiares desse software, organizou-se uma proposta didática em uma linha investigativa com ajuda do GrafEq. Assim, por meio dele, o aluno poderá verificar, analisar, anotar, comparar e entender os resultados da manipulação dos coeficientes das expressões algébricas elementares, bem como da equação da reta e da equação quadrática em suas variadas formas de maneira simples, mas que são de total relevância para estudos posteriores.

Mediante o trabalho realizado, aumentou-se um anseio por um possível aprofundamento da pesquisa em trabalhos futuros com estudos de outros softwares e as mídias digitais na Educação Matemática. Percebeu-se o quão importante seria o compartilhamento deste trabalho com os docentes das áreas das ciências exatas das redes municipal e estadual do município. Com isso, almeja-se ainda, futuramente, aplicar este projeto nas escolas e também realizar um trabalho voluntário em parceria com os docentes, e a parte pedagógica das escolas do município na elaboração de outros projetos, aproveitando o conhecimento adquirido no Profmat. Esses projetos terão como estímulo o uso de softwares destinados à melhoria do ensino de Matemática e políticas educacionais direcionadas para o avanço do Ideb (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) do município, para a OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), e para o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio).

REFERÊNCIAS

- ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. Tradução de Claus Ivo Doering. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. v. 1.
- AVRITZER, D. **Geometria Analítica e Álgebra Linear: Uma visão geométrica**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2009. Tomo I.
- BARROS, A. da S. X. Vestibular e enem: um debate contemporâneo. **Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação, Rio de Janeiro**, v. 22, n. 85, p. 1057–1090, 2014.
- BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.
- Brasil ESCOLA. **EXERCÍCIOS SOBRE MÁXIMO E MÍNIMO**. 2012. Disponível em: <<https://exercicios.brasilecola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-maximo-minimo.htm>>. Acesso em: 04 nov. 2019.
- _____. **O que é onda?** 2019. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/o-que-e/fisica/o-que-e-onda.htm>>. Acesso em: 29 nov. 2019.
- BROLEZZI, A. C. Mudanças na matemática da escola básica para o ensino superior: reflexo no uso de história da matemática. In: VII EPEM - Encontro Paulista de Educação Matemática. **Anais do VII EPEM**. São Paulo, 2004.
- Canal ABC do Saber. **Ilusão Anamórfica - Parte 2**. 2014. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=cj2VQgJ26RE>>. Acesso em: 13 de dezembro de 2019.
- CANAL ARQUISEFAZ. **Cálculo de escada, fácil e simples! Passo a passo de como calcular as medidas da sua escada!** 2019. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=i__f6Qu73EY>. Acesso em: 20 de novembro de 2019.
- Canal DUVI . **Geometría Analítica - R3 - Cabri 3D - Planos, vectores y rectas**. 2011. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=fVtXmAOU6r4>>. Acesso em: 12 jan. 2020.
- Canal Markoni Heringer. **Como fazer uma planta baixa passo a passo?** 2018. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=jg6Idku4pDQ>>. Acesso em: 17 dez. 2019.
- CHRISTO, M. M. S.; RESENDE, L. M. M. de; KUHN, T. do C. G. Por que os alunos de engenharia desistem de seus cursos – um estudo de caso. **Nuaces: estudos sobre Educação**, v. 29, n. 01, p. 154 – 168, 2017.
- D’AMBROSIO, U. **Educação Matemática: Da teoria à prática**. 17. ed. Campinas SP: Papirus, 2009.
- DANTE, L. R. **Contexto e Aplicações**. São Paulo: Ática, 2014. v. 3.
- DESCARTES, R. A geometria- primeiro livro*. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, v. 19, n. 2, p. 221–249, 2009.

Educa Mais Brasil . **FUNÇÃO INVERSA**. 2019. Disponível em: <<https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/funcao-inversa>>. Acesso em: 11 nov. 2019.

Elson Fidelis. **Curso de SketchUp - Aula 01/20 - Módulo Básico - Autocriativo**. 2013. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=nmHorok2gD8>>. Acesso em: 22 de novembro de 2019.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011. 382 p.

Fabrizio Rossi. **Como Calcular Inclinação de Qualquer Telhado!** 2018. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=gFf2ugY_zk0>. Acesso em: 10 de novembro de 2019.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

Francis Iwamura. **Tutorial de desenho - Perspectivas - Cavaleira e Isométrica - Arquitetura**. 2016. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=yQZEX6R4rTg>>. Acesso em: 14 de dezembro de 2019.

FRANZONI, P.; PINO, J. C. D.; OLIVEIRA, E. C. Contribuições da economia para a alfabetização científica: Uma proposta para a educação básica. **CONTEXTO & EDUCAÇÃO**, Unijuí, n. 105, p. 119–141, 2018.

GAUKROGER, S. **Descartes: Uma biografia intelectual**. Tradução de Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Contraponto, 2002.

GHANI, A. **Derrubando o clichê “tem que investir em educação”**. 2019. Disponível em: <<https://www.infomoney.com.br/colunistas/economia-e-politica-direto-ao-ponto/derrubando-o-cliche-tem-que-investir-em-educacao/>>. Acesso em: 27 nov. 2019.

Gisele Vieira. **Aula 04 Coberturas - Arq. Prof. Gisele Vieira**. 2017. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=c9H02Q_QCk4>. Acesso em: 09 de novembro de 2019.

GONÇALVES, C. F. **Dificuldades Em Matemática Ao Ingressar No Ensino Superior**. Monografia (Graduação) — UNILASALLE, Centro Universitário La Salle, Canoas, 2007.

Iberê Thenório. **ILUSÃO ANAMÓRFICA: o desenho que se reconstrói**. 2015. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=LyCIKiv2phw>>. Acesso em: 13 de dezembro de 2019.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. de. **Matemática: ciência e aplicações: 3º ano: ensino médio**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 3.

Inep. **Saeb 2017 revela que apenas 1,6% dos estudantes brasileiros do Ensino Médio demonstraram níveis de aprendizagem considerados adequados em Língua Portuguesa**. 2018. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/saeb-2017-revela-que-apenas-1-6-dos-estudantes-brasileiros-do-ensino-medio-demonstraram-niveis-de-apr-21206>. Acesso em: 15 nov. 2019.

JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática: 9º ano: ensino fundamental: anos finais**. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

KENSKI, V. M. **Educação e Tecnologia: O novo ritmo da informação**. 2. ed. Campinas, SP: Papirus, 2007.

Kleber Kilhian. **A Geometria Analítica, Fermat e Descartes**. 2013. Disponível em: <<https://www.obaricentrodamente.com/2013/06/a-geometria-analitica-fermat-e-descartes.html>>. Acesso em: 30 nov. 2019.

LDB. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília, DF: Planalto.gov.br, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm>. Acesso em: 19 dez. 2019.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. v. 1.

_____. **Números e Funções Reais**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

_____. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; AUGUSTO, E. W.; MORGADO, C. **Temas e Problemas**. 12. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

Luciana Paixão. **O que é uma planta baixa?** 2013. Disponível em: <<https://www.aarquitectura.com.br/blog/planta-baixa-o-que-e/>>. Acesso em: 20 de novembro de 2019.

Luciano Vidal. **Desenhos 3D? - Anamorfismo Passo-a-passo**. 2017. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=mQgCsbcOR_U>. Acesso em: 13 de dezembro de 2019.

MAP PPGMAp. **SOFTWARES DE GEOMETRIA**. 2010. Disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/software/soft_geometria.php>. Acesso em: 04 nov. 2019.

Markoni Heringer. **Como fazer uma planta baixa passo a passo?** 2018. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=jg6Idku4pDQ>>. Acesso em: 15 de novembro de 2019.

MOL, R. S. **Introdução à História da Matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

PISA. **Relatório Nacional PISA 2015: Resultados brasileiros**. 2015. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015_completo_final_baixa.pdf>. Acesso em: 09 dez. 2019.

_____. **Relatório Nacional PISA 2018: Resultados brasileiros**. 2018. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf>. Acesso em: 09 dez. 2019.

Placasdetransito.net . **PLACA A-14**. 2018. Disponível em: <<https://www.placasdetransito.net.br/advertencia/A-14/>>. Acesso em: 13 nov. 2019.

Portal do MEC. **Prova Brasil - Apresentação**. 2011. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/prova-brasil>>. Acesso em: 20 nov. 2011.

RAMOS, J. P. dos S. **Método e Ciência em Descartes**. Tese (Doutorado em Filosofia) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, 2012.

Romero Schmidtke. **Función recíproca**. 2007. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Función_recíproca.png>. Acesso em: 11 nov. 2019.

Ronaldo Carreta. **APRENDA A DESENHAR UMA CASA POPULAR NO REVIT**. 2019. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=Qr3DoRhpbtU>>. Acesso em: 23 de novembro de 2019.

Soft Deluxe. **Cabri Geometry II 1.4.3**. 2010. Disponível em: <<https://softdeluxe.com/Cabri-Geometry-II-262008>>. Acesso em: 25 nov. 2019.

TodaMatéria. **FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS**. 2019. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/funcoes-trigonometricas/>>. Acesso em: 29 nov. 2019.

UFD Centro Universitário. **Alunos de Arquitetura e Urbanismo criam planta baixa com fitas adesivas. Veja!** 2017. Disponível em: <<https://www.udf.edu.br/noticias/alunos-de-arquitetura-e-urbanismo-criam-planta-baixa-com-fitas-adesivas-veja/>>. Acesso em: 25 nov. 2019.

VAZ, D. A. D. F. O método cartesiano aplicado à geometria. **Estudos, Goiânia**, v. 38, n. 3, p. 451 – 467, 2011.

Wanderson Madureira. **Aula de AutoCad casa 3d part 1 de 4**. 2013. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=ALJdToAlZII>>. Acesso em: 18 de novembro de 2019.

_____. **Aula de AutoCad casa 3d part 2 de 4**. 2013. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=JIVMFrWkNWQ>>. Acesso em: 18 de novembro de 2019.

_____. **Aula de AutoCad casa 3d part 3 de 4**. 2013. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=jwsLDn2T7_M>. Acesso em: 18 de novembro de 2019.

_____. **Aula de AutoCad casa 3D part 4 de 4**. 2013. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=rVKi7qKIKgw>>. Acesso em: 18 de novembro de 2019.

Wesley Almeida. **Curso de SketchUp - Aula 01/20 - Módulo Básico - Autocriativo**. 2016. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=jeQqJdzOTPU>>. Acesso em: 22 de novembro de 2019.

APÊNDICE A – COLETÂNEAS DE ATIVIDADES PROPOSTAS-PARTE I

(1) Atividades práticas aplicando conceitos de Geometria relacionados à Engenharia Civil

Objetivos:

1. familiarizar o aluno com algumas atividades vivenciadas no campo da Engenharia Civil;
2. mostrar a importância da Geometria Analítica para a Engenharia;
3. compreender as noções de perspectiva isométrica e de Cavalera e suas aplicações;
4. aprender a construção de plantas simples de casas manualmente e com a ajuda de softwares.

LISTA DE EXERCÍCIOS

Atividade 1. Construir uma planta baixa no piso com fitas adesivas, conforme o modelo da Figura 5 a seguir.

Atividade 2. Elaborar uma planta baixa no papel utilizando as dicas do Blog da (Luciana Paixão, 2013) e do canal (Markoni Heringer, 2018).

Atividade 3. Criar uma maquete de telhado com quedas d'água usando as regras de Engenharia nas inclinações, cujas dicas estão nos canais (Gisele Vieira, 2017) e (Fabrício Rossi, 2018).

Atividade 4. Elaborar um projeto de uma escada calculando as medidas ideais de degraus para sua construção, cujas dicas estão no (CANAL ARQUISEFAZ, 2019).

Atividade 5. Criar uma casa em 3D usando o software AutoCAD.

Dicas no canal FPCAD TEC:

Aula 1 (Wanderson Madureira, 2013a)

Aula 2 (Wanderson Madureira, 2013b)

Aula 3 (Wanderson Madureira, 2013c)

Aula 4 (Wanderson Madureira, 2013d)

Atividade 6. Criar uma planta de casa em 3D usando o Google Sketchup.

Dicas com (Wesley Almeida, 2016) no Canal Ailton Brito, e com (Elson Fidelis, 2013) no Canal cursosenquad.

Atividade 7. Criar uma casa popular no revit.

Dicas com (Ronaldo Carreta, 2019) no canal Gênios do CAD.

Atividade 8. Produzir um desenho ou pintura com propriedades de ilusão Anamórfica e Perspectiva Isométrica e de Cavalera.

Dicas:

(Luciano Vidal, 2017) disponível no Canal Luciano Vidal – Artes e Dicas.

(Canal ABC do Saber, 2014) disponível no Canal ABC do Saber.

(Iberê Thenório, 2015) disponível no Canal Manual do Mundo.

(Francis Iwamura, 2016) disponível no Canal Arquitêta - Arquitetura & Arte.

APÊNDICE A – COLETÂNEAS DE ATIVIDADES PROPOSTAS- PARTE II

(1) Análise do gráfico da função afim $y=ax+b$ com auxílio do software GrafEq

Objetivos:

1. analisar a curva da função afim;
2. conhecer a curva da função afim;
3. identificar a função por meio do seu gráfico;
4. identificar o gráfico por meio da função;
5. entender a dinâmica dos coeficientes;
6. entender as mudanças e diferenças ao utilizar os sinais $=$, $>$ ou $<$ na expressão.
7. conhecer o gráfico ao aplicar a forma inversa da função.

LISTA DE EXERCÍCIOS

(a) Analise, graficamente, $y = ax + b$, fixando um valor para “ a ” e variando “ b ”, em que $a, b \in \mathbb{R}$. Que é possível concluir?

(b) Analise, graficamente, a função $y = ax + b$, fixando um valor para “ b ” e variando “ a ”. Que é possível concluir?

(c) Analise, graficamente, $y > ax + b$, fixando um valor para $a > 0$, $a = 0$ e $a < 0$, variando “ b ”. Que é possível concluir?

(d) Analise, graficamente, $y < ax + b$, fixando um valor para $a > 0$, $a = 0$ e $a < 0$, variando “ b ”. Que é possível concluir?

(e) Analise, graficamente, $x = ay + b$, fixando um valor para “ a ” e variando “ b ”. Que é possível concluir?

(f) Analise, graficamente, $x > ay + b$. Que é possível concluir?

(g) Analise, graficamente, $x < ay + b$. Que é possível concluir?

(h) Analise, graficamente, $y = b$, $y > b$, $y < b$, $x = b$, $x > b$, $x < b$, variando “ b ”. Que é possível concluir?

(i) Analise, graficamente, $m > y > n$ e $m > x > n$, em que $m > n$, $m, n \in \mathbb{R}$. Que é possível concluir?

(2) Análise do gráfico da função quadrática ($y = ax^2 + bx + c$), em que $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, com auxílio do software GrafEq

Objetivos:

1. analisar a curva da função quadrática;
2. conhecer a curva da função quadrática;
3. identificar a função por meio do seu gráfico;
4. identificar o gráfico por meio da função;
5. entender a dinâmica dos coeficientes;
6. entender as variações gráficas ao utilizar os sinais $=$, $>$ ou $<$ na expressão;
7. conhecer o gráfico ao aplicar a forma inversa da função.

LISTA DE EXERCÍCIOS

(a) Realizar uma análise da curva $y = ax^2$, em que $a \neq 0$, variando “ a ”. Que é possível concluir?

(b) Realizar uma análise da curva da função $y = ax^2 + bx + c$, fixando a e b e variando o coeficiente c . Que é possível concluir?

(c) Realizar uma análise da curva da função $y = ax^2 + bx + c$, fixando a e c e variando o coeficiente b . Que é possível concluir?

(d) Dada a forma canônica da função quadrática $a(x - m)^2 + k$, realizar análises fixando dois dos três coeficientes a , m e k , e variando o terceiro. Que é possível concluir?

(e) Realizar análises de $y > ax^2 + bx + c$ e $y < ax^2 + bx + c$ quando $a > 0$. Que é possível concluir?

(f) Realizar análises de $y > ax^2 + bx + c$ e $y < ax^2 + bx + c$ quando $a < 0$. Que é possível concluir?

(g) Realizar uma análise da curva $x = ay^2$ variando “ a ”, $a \neq 0$. Que é possível concluir?

(h) Realizar uma análise da curva $x = ay^2 + by + c$ variando “ c ” fixando um valor para a e b . Que é possível concluir?

(i) Realizar uma análise da curva $x = ay^2 + by + c$, fixando a e c e variando o coeficiente b . Que é possível concluir?

(j) Realizar uma análise da curva da função canônica $y = ax^2 + bx + c$, avaliando os coeficientes k e m . Que é possível concluir?

(k) Realizar análises de $x > ay^2 + by + c$ e $x < ay^2 + by + c$ quando $a > 0$. Que é possível concluir?

(l) Realizar análises de $x > ay^2 + by + c$ e $x < ay^2 + by + c$ quando $a < 0$. Que é possível concluir?

(m) Realizar uma rápida análise sobre a curva da inversa de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$. Que é possível concluir?

(3) Análise dos gráfico da equação da circunferência $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, em que $a, b, R \in \mathbb{R}$, $R > 0$, e das funções que descrevem as regiões internas e externas a ela, com auxílio do software GrafEq

Objetivos:

1. reconhecer e analisar a curva da equação da circunferência e da elipse;
2. identificar a função por meio do seu gráfico;
3. identificar o gráfico por meio da função;
4. entender a dinâmica dos coeficientes;
5. entender as variações gráficas ao utilizar os sinais $=$, $>$ ou $<$ na expressão;
6. Relacionar a equação da circunferência com a fórmula para calcular a distância entre dois pontos.

LISTA DE EXERCÍCIOS

(a) Realizar uma análise da curva $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$, considerando $a = b = 0$ e valores quadrados perfeitos para k . Que é possível concluir?

(b) Realizar uma análise de $x^2 + y^2 > R^2$, $x^2 + y^2 < R^2$, atribuindo valores para R . Que é possível concluir?

(c) Realizar uma análise da curva da função $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, fixando dois dos coeficientes a , b e R , e variando o outro. Que é possível concluir?

(d) Realizar uma análise sobre curva da equação $\frac{(x - a)^2}{m^2} + \frac{(y - b)^2}{k^2} = 1$, fixando $a = b = 0$ fazendo variar m e k , com $m \neq 0$, $k \neq 0$. Que é possível concluir?

(4) Análise dos gráficos das funções $y = \text{asin}(bx) + c$ e $y = \text{acos}(bx) + c$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, $b \neq 0$, e análise das regiões delimitadas por essas funções com auxílio do software GrafEq

Objetivos:

1. reconhecer e analisar a curva da função seno e cosseno;
2. identificar a função por meio do seu gráfico;
3. identificar o gráfico por meio da função;
4. entender a dinâmica dos coeficientes;
5. entender as variações gráficas ao utilizar os sinais $=$, $>$ ou $<$ na expressão;

LISTA DE EXERCÍCIOS

(a) Realizar análises de $y = \text{asin}(bx) + c$, fixando dois dos coeficientes a , b e c , e variando o outro. Que é possível concluir?

(b) Realizar análises de $y > \text{asin}(bx) + c$, $y < \text{asin}(bx) + c$ e $\text{asin}(bx) + c < y < a' \text{sin}(b'x) + c'$. Que é possível concluir?

(c) Realizar análises de $y = \text{acos}(bx) + c$ fixando dois dos coeficientes a , b e c e variando o outro. Que é possível concluir?

(d) Realizar análises de $y > \text{acos}(bx) + c$, $y < a \cdot \text{cos}(bx) + c$ e $\text{acos}(bx) + c < y < a' \text{cos}(b'x) + c'$. Que é possível concluir?

(5) Trabalhando desenho artístico no GrafEq

Objetivos:

1. pôr em prática os conceitos aqui estudados;
2. instigar a tomada de decisão para resolver problemas algébricos geométricos;
3. comparar as curvas estudadas com traços de objetos visuais, obras de arte, gráficos estatísticos, etc;
4. Instigar o raciocínio lógico dos alunos, comparar os resultados e caminhos traçados por eles para encontrar a solução do problema.

EXERCÍCIO

(a) Elabore um desenho artístico utilizando sobreposições de linhas, curvas e regiões formadas a partir de variadas equações e inequações.

**ANEXO A – SUGESTÃO DE LINKS COMPLEMENTARES RELACIONADOS À
GEOMETRIA ANALÍTICA E ENGENHARIA CIVIL PARA AJUDAREM NO
DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES PROPOSTAS EM SALA DE AULA OU NO
LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA**

Links Complementares

- Guia de Profissões| Engenharia Civil
Canal: TV Unesp
<https://www.youtube.com/watch?v=Kvzn8LRTUjA>

- Quanto Ganha um Engenheiro Civil? Segundo o Mercado Atual | ALEX WETLER
Canal: Eng. Alex Wetler
<https://www.youtube.com/watch?v=OpTiwea3z2M>

- Como Conseguir Estágio na Engenharia Civil | ALEX WETLER
Canal: Eng. Alex Wetler
https://www.youtube.com/watch?v=8LFfK8Bt_FQ

- Uma aplicação da geometria analítica
Canal: Sandro Morais
<https://www.youtube.com/watch?v=dK8KJKV7EHw>

- Quais Softwares Usar Para Trabalhar com Engenharia Civil?
Canal: Filipe Boito - Engenharia na Real
<https://www.youtube.com/watch?v=2RUswS3FKoY>

- As diferenças entre o Revit e o AutoCAD
<https://ax4b.com/revit-vs-autocad-entenda-a-diferenca-entre-as-duas-solucoes/>

- AutoCad | Como fazer o Download e Instalar Versão Estudante 2017 2018 2019 2020 - [100% GRATUITO]

Canal: Arquiteto Leandro Amaral

<https://www.youtube.com/watch?v=s00dngSYo8U>

- AutoCad 2020: Como Baixar e Instalar

Canal: PractCAD

https://www.youtube.com/watch?v=WvYq-Kyw_Bk

- Curso básico do AutoCAD 2017 e 2019 para iniciantes

Canal: Engenharia e Tecnologia

AutoCAD 2017 - Aula 01/10: <https://www.youtube.com/watch?v=9gNcVi-LRZY>

AutoCAD 2017 - Aula 02/10: <https://www.youtube.com/watch?v=-EGGZBNIAjw>

AutoCAD 2019 - Aula 03/10: <https://www.youtube.com/watch?v=PjWTjIhqQk4>

AutoCAD 2019 - Aula 04/10: <https://www.youtube.com/watch?v=nOVaX2STzX4>

AutoCAD 2019 - Aula 05/10: <https://www.youtube.com/watch?v=4eq8rv3dI7c>

AutoCAD 2019 - Aula 06/10: <https://www.youtube.com/watch?v=03usnwaq2Xw>

AutoCAD 2019 - Aula 07/10: <https://www.youtube.com/watch?v=IJEa2VtExRw>

AutoCAD 2019 - Aula 08/10: <https://www.youtube.com/watch?v=yfdCYYto4wY>

AutoCAD 2019 - Aula 09/10: <https://www.youtube.com/watch?v=LRi5q9BrTfo>

AutoCAD 2019 - Aula 10/10: <https://www.youtube.com/watch?v=wPWRYp13WaI>