UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE FÍSICA

EDNALVA ALVES DE ALENCAR SALES

Um estudo sobre estados emaranhados e suas aplicações

ARAGUAÍNA-TO
2019

EDNALVA ALVES DE ALENCAR SALES

Um estudo sobre estados emaranhados e suas aplicações

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário de Araguaína para obtenção do título de graduada em Física, sob a orientação do Prof. Dr. Matheus Pereira Lobo.

ARAGUAÍNA-TO

2019

EDNALVA ALVES DE ALENCAR SALES

Um estudo sobre estados emaranhados e suas aplicações

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário de Araguaína para obtenção do título de graduada em Física, sob a orientação do Prof. Dr. Matheus Pereira Lobo.

Orientador: Prof. Dr. Matheus Pereira Lobo.

Aprovada em: _____/ _____/______.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Matheus Pereira Lobo (Orientador)

____
Prof (a). Dra. Regina Lelis de Sousa

____
Prof (a). Dra. Sheyse Martins de Carvalho

Dedico este trabalho ao meu querido orientador que está comigo nessa jornada pelo conhecimento desde o primeiro período, à minha mãe que sempre esteve presente na minha vida, ao meu marido que sempre me apoiou e me incentivou a seguir em frente sempre e aos amigos que conheci no meio do caminho e fizeram a jornada mais divertida...

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer à Deus que guiou meu caminho até aqui e ao contrário do que muitos pensam, o conhecimento nos aproxima dEle, hoje sei um pouco sobre como o mundo que Ele criou funciona e sei o quão lindo é. Gostaria de agradecer grandemente ao meu orientador que sempre me ajudou tanto a escolher os temas de pesquisa quanto a continuar com o curso e me inspirou a seguir nessa carreira tão linda. Gostaria de agradecer à minha mãe, dona Maria que sempre esteve presente na minha vida e me ajudou a me tornar quem eu sou como pessoa. Ao meu querido marido que conheci um pouco antes de começar o curso e tornou a jornada bem mais divertida e emocionante. Devo agradecer à todo corpo docente do curso de física que nos inspiraram a seguir em frente e serviram de exemplos para todos os discentes, um agradecimento especial às professoras Regina e Sheyse que fizeram parte da banca examinadora deste trabalho. Agradeço também às amizades geradas dentro da universidade, Bárbara Martins (Babi), Xaieny Franco (Xai), Jacó, João Marcos, Josilene (Josy), Phablo, Jonas e muitos outros, obrigada amigos. Gostaria de agradecer aos meus professores do ensino médio que me inspiraram a começar essa jornada, em especial ao professor Antônio Eduardo (Professor X, o que me ajudou a escolher o curso de física), Gilberto e Carmen que mesmo não sendo da área da física, mas me inspiraram à um dia ser professora e espero um dia ser uma profissional tão boa quanto eles. Agradeço à Capes que através do PIBID me ajudou financeiramente por cerca de dois anos e meio e forneceu meios para o meu desenvolvimento docente e científico. Eu não poderia deixar de agradecer ao CNPq que por meio do PIBIC patrocinou a pesquisa minha e do professor Matheus nos últimos dois anos. Agradeço também à UFT por ter permitido que o sonho de um dia me tornar uma Física educadora se tornasse real.

“Quanto mais aprendemos, mais estranho fica o universo quântico”. (Joanne Baker, 2016, p. 7).

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é a divulgação de uma parte importante da física que está sendo desenvolvida, bem como a compreensão das diferenças entre estados emaranhados mistos e puros, além de algumas de suas aplicações. Para isso, fizemos uma pesquisa utilizando uma metodologia denominada “Pesquisa Baseada em Listas” acerca do tema. Como aplicação do emaranhamento, apresentamos o estado de singleto, o teleporte quântico, o jogo de Bell, assim como algumas estratégias para ganhar nesse jogo. Mas para compreender essas aplicações precisamos falar um pouco sobre a definição de colapso de uma partícula, o que são e para que servem as bases de Bell, correlações local e não local e os tipos de emaranhamento. Após a pesquisa viu-se a importância do estudo do emaranhamento e como suas aplicações podem ajudar no desenvolvimento científico e tecnológico. O emaranhamento pode tornar possível o desenvolvimento da criptografia quântica, uma criptografia que é extremamente difícil de ser quebrada, pois é baseada no estado de um conjunto de partículas em superposição de estados emaranhados, dentre outras aplicações.

Palavras-chave: Emaranhamento Quântico. Física Quântica. Informação Quântica.

ABSTRACT

The main purpose of this work is the scientific dissemination of an important part of the physics that is being developed, as well as the understanding of the differences between mixed and pure entangled states, as well as some of their applications. For this, we made a research using a methodology called “List-Based reearch”, about the topic. As an application of entanglement, we present the singlet state, quantum teleportation, the Bell game as well as some strategies for winning in this game. In order to understand these applications, we need to talk a little bit about defining a particle's collapse, which are and what are Bell’s bas is, local and nonlocal correlations, and entanglement types. After the research, we saw the importance of the study of entanglement and how its applications can help in the scientific and technological development. Entanglement can make the development of quantum cryptography possible, a cryptography that is extremely difficult to break because it is based on the state of a set of particles overlapping entangled states, among other applications.

Keywords: Quantum Entanglement. Quantum physics. Quantum information.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Podemos definir emaranhamento como sendo uma ligação entre duas ou mais partículas que vai independer da distância que as partículas se encontram. O emaranhamento foi proposto por volta de 1935 [1] por diversos cientistas, dentre eles Erwin Schrödinger, e desde então vem trazendo revelações surpreendentes e cada vez mais tirando o sono de físicos ao redor do mundo. O emaranhamento sempre existiu na natureza, mas para que ele pudesse ser estudado a fundo, como é hoje em dia, precisava-se de diversos aparatos e métodos matemáticos que só foram possíveis com o avanço da ciência e da tecnologia.

Os resultados das medições do emaranhamento são determinados por propriedades (spin, cor, momento, etc.) que as partículas carregam antes do seu colapso, ou seja, antes do momento em que sabemos o seu estado, e dependem da medida utilizada para verificar tais propriedades. Os resultados obtidos em um local dependem de ações realizadas em outro lugar do espaço (não-localidade) [2]. Ao interferirmos com uma partícula que está aqui em Araguaína, por exemplo, a partícula que está emaranhada com esta, mesmo estando em qualquer outro lugar do universo irá responder à medição imediatamente, mais adiante falaremos mais detalhadamente sobre o assunto.

Isso nos leva a outro ponto, o emaranhamento está na natureza e como tudo que tem nela, o homem quer usar ao seu favor, com esse fenômeno não é diferente. Uma das muitas aplicações dele é no armazenamento e no processamento de informações [1], o que nos levará aos tão sonhados computadores quânticos (supercomputadores capazes de processar muito mais informações em menos tempo, em relação aos atuais computadores), e ao teleporte de partículas quânticas, que vem tendo grandes avanços. Para ajudar a entender o emaranhamento vamos conhecer um pouco sobre as correlações, aqui vamos usar as correlações não local, pois é a que mais se assemelha ao emaranhamento.

O teleporte quântico é dito como sendo a transferência da informação da partícula de um lugar para o outro. O primeiro teleporte ocorreu experimentalmente em 1997 com apenas um fóton [3]. Há pouco tempo, um estado quântico foi teleportado até um satélite a uma distância de 1.400 km [4], na mesma época foi feita a primeira transmissão quântica intercontinental via satélite [5], possibilitando uma comunicação usando a mecânica quântica. Além disso, temos o estado singleto de spin, um novo e interessante estado que vem deixando alguns cientistas empolgados, nele temos a maioria das partículas emaranhadas de tal forma, que seu momento linear líquido (total) é igual a zero. Outra característica desse estado é que um grande número de partículas se encontram emaranhadas [6]. Em princípio, esse estado foi produzido com elétrons, mas já é possível produzi-lo com átomos. Uma aplicação para o uso do singleto de spin é para a detecção de campos magnéticos, pois os átomos são muito sensíveis à manipulação de campos magnéticos [6]. Tudo isso só foi possível graças aos conhecimentos adquiridos sobre o emaranhamento quântico.

O principal foco deste trabalho está nos Fundamentos da Mecânica Quântica, pois quando se fala em física, logo se lembra dos feitos de Isaac Newton, Galileu Galilei, James Maxwell, dentre outros físicos que foram responsáveis por fazer a base da física que conhecemos hoje em dia, mas a física não para por aí, ela vai além e hoje em dia os físicos ainda fazem descobertas incríveis sobre o mundo quântico.

2 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo teórico sobre correlações quânticas, jogo e bases de Bell, emaranhamento quântico, os tipos de emaranhamento e algumas de suas aplicações.

Os objetivos específicos incluem:

- Estudar os princípios do emaranhamento quântico;
- Realizar uma transposição didática sobre outras correlações não-locais, como jogo e bases de Bell;
- Compreender parte do artigo de revisão de estudos sobre emaranhamento “Quantum entanglement” [2];
- Caracterizar as diferenças entre estados emaranhados puros e mistos;
- Compreender matematicamente o protocolo do teleporte quântico de estados maximamente emaranhados para teleportar uma partícula.

3 MATERIAL E MÉTODOS

Este é um trabalho de física teórica, baseado em uma revisão de estudos sobre o que é emaranhamento, os tipos de emaranhamento e algumas de suas aplicações, tais como o teleporte quântico, jogo de Bell e o singleto de spin. A revisão foi feita em livros, artigos, monografia, teses e dissertações.

Os artigos foram pesquisados nos periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e as dissertações em bancos de dados de universidades públicas. Os materiais didáticos foram elaborados e disponibilizados pelo professor orientador, para que a acadêmica pudesse compreender melhor os pré-requisitos do assunto.

Utilizamos uma metodologia nova, apresentada pelo orientador que denominamos "Pesquisa Baseada em Listas", ou seja, à medida que a pesquisa se desenvolvia, listas foram elaboradas, para que a acadêmica pudesse mostrar ao professor como a pesquisa estava sendo desenvolvida e assim obter melhores resultados.

As listas foram desenvolvidas da seguinte forma: à medida que a acadêmica efetuava os estudos dos textos, ela retirava as partes mais importantes e as introduzia nas listas, sempre enumerando os argumentos para melhor organização. Elas são compostas por comentários, questionamentos e as respostas para esses questionamentos que foram adquiridos pela acadêmica, sendo que todos os itens são pequenos e objetivos para ser prático e facilitar a compreensão do assunto. Ao término da pesquisa, tivemos como resultado uma quantidade significativa de listas enumeradas, contendo argumentos e ideias relacionadas ao tema. Todas as listas foram conferidas pelo orientador que ajudava à completa-las.

Parte dos cálculos presentes nos artigos foram reproduzidos pela acadêmica para melhor compreender o assunto. A teoria foi estudada e analisada a fundo por meio de resumos e questionamentos para fomentar a pesquisa e a compreensão do tema. Para isso, foi fundamental ter domínio dos fundamentos da Mecânica Quântica, em específico as propriedades do emaranhamento quântico, tanto conceitual como matemático.

4 Emaranhamento

O mundo quântico por si já é bem peculiar e quando chegamos ao assunto emaranhamento tudo fica um pouco mais excêntrico. Basicamente, o emaranhamento acontece quando duas, ou mais partículas ficam interligadas de forma que qualquer interferência que aconteça em uma partícula afeta a outra instantaneamente, mesmo que elas estejam separadas espacialmente. Quando vamos para a parte matemática desse tema fica mais rebuscado, no entanto as vantagens do uso desta propriedade quântica são enormes e todo o trabalho é recompensado.

Como exemplos de aplicação do emaranhamento temos os supercomputadores, o teleporte quântico, a transmissão de energia, o singleto de spin, a criptografia quântica dentre outros efeitos. O emaranhamento é dividido em dois tipos principais, o emaranhamento misto e o emaranhamento puro. Definiremos melhor cada um nas seções seguintes.

4.1 Emaranhamento misto

Estados emaranhados mistos são os estados mais fáceis de serem encontrados, mas também os mais difíceis de serem trabalhados, normalmente os pesquisadores precisam transformá-los em estados emaranhados puros. Um dos motivos para isso ocorrer é devido à dificuldade de isolar um sistema do restante do ambiente em que ele se encontra. Quando o sistema que compõe o estado a ser estudado não é totalmente isolado do ambiente a sua volta, o estado é dito misto.

Um exemplo de estado misto emaranhado é aquele em que o sistema é um subsistema de outros sistemas maiores e emaranhados. É possível considerar, por exemplo, um sistema de quatro spins ($\hat{s} = 1,2,3,4$) como dois sistemas bipartites (que são sistemas compostos por duas partículas), sendo que o primeiro sistema é composto pelos spins 1 e 2, $\{\hat{s}(1), \hat{s}(2)\}$, e o segundo pelos spins 3 e 4, $\{\hat{s}(3), \hat{s}(4)\}$ [7].

4.2 Emaranhamento puro

Emaranhamento puro é aquele que não se encontra espontaneamente na natureza, pois para isso é necessário isolar totalmente o sistema do ambiente e isso só é possível em laboratório [1]. Porém, este é o estado de emaranhamento mais fácil de ser estudado e é o utilizado no teleporte que será explicado detalhadamente nas seções seguintes. Esse emaranhamento pode ocorrer com duas, três ou mais partículas, contanto que todas as partículas que fazem parte do sistema estejam emaranhadas.

O emaranhamento puro ocorre via operações locais, ou operações locais e comunicação clássica, que é um método na teoria da informação quântica onde uma operação local é executada em parte do sistema, o resultado dessa operação é transferido classicamente para outra parte, onde geralmente a operação é executada em outro local.

Matematicamente, um dos critérios para caracterizar o estado de emaranhamento puro de um sistema físico é o fato de ele não poder ser escrito como o produto tensorial de estados que caracterizariam cada subsistema que os compõe.

De modo geral, um estado $|\psi\rangle$ é dito emaranhado, se e somente se, não existir estados $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, de modo que $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. Um estado puro representa a quantidade máxima de conhecimento que Bob pode ter de um sistema quântico [4].

De acordo com as regras da mecânica clássica, podemos calcular as órbitas das partículas se soubermos os valores de suas posições (x_1 e x_2) e seus momentos (p_1 e p_2) em um determinado instante. O estado do sistema é assim especificado por quatro números: x_1, x_2, p_1 e p_2. Se conhecermos esses quatro números, temos uma descrição tão completa do sistema de duas partículas quanto possível: não há mais para saber. Podemos chamar isso de um estado clássico puro.

4.3 Matrizes de densidade

Na mecânica clássica, normalmente podemos fazer previsões de um sistema, pois sabemos de todas as condições de contorno, que são as condições iniciais e com base nisso podemos prever o que acontecerá no nosso sistema no futuro. Na mecânica quântica tudo isso cai por Terra, pois não é possível saber de todas as condições iniciais do sistema. Voltando ao sistema de Alice e Bob, Alice prepara a partícula, entrega para Bob e diz para ele algumas informações da partícula, mas não todas. Bob pode raciocinar da seguinte maneira: se Alice preparou a partícula no estado $|\psi\rangle$, então o valor esperado de qualquer observável L é:

$$Tr|\psi\rangle\langle\psi|\,\boldsymbol{L} = \langle\psi|L|\psi\rangle.$$

Tr é o traço, isto é, a soma dos elementos da diagonal principal da matriz. Se Alice preparar a partícula no estado $|\phi\rangle$, então o valor esperado de qualquer observável L é:

$$Tr|\phi\rangle\langle\phi|\,\boldsymbol{L} = \langle\phi|L|\phi\rangle.$$

Assim, podemos combinar esses dois termos em uma única expressão, definindo uma matriz de densidade ρ que codifica o conhecimento de Bob, ou seja, nessa matriz pode ser encontrada todas as informações que Bob sabe sobre o sistema. Nesse caso, a matriz de densidade é metade do operador de projeção para $|\phi\rangle$, mais a metade do operador de projeção para $|\psi\rangle$,

$$\rho = \frac{1}{2}|\psi\rangle\langle\psi| + \frac{1}{2}|\phi\rangle\langle\phi|.$$

5 Singleto de spin

O intuito desta seção é apresentar um breve panorama sobre uma das aplicações do emaranhamento quântico. Singleto de spin é definido como um estado da matéria em que todas ou a maioria das partículas estão emaranhadas [8]. Esse emaranhamento é em relação ao momento angular líquido (total) que sempre será zero, mas os *spins* das partículas devem ser diferentes de 0, por exemplo, 1/2 ou 1 [9]. O momento angular líquido (total) zero significa que o sistema está neutro, nem carregado positivamente e nem carregado negativamente, e isso facilitará na detecção de possíveis campos elétricos no ambiente em que for colocado.

O estado de singleto mais simples é o que se refere ao momento angular de um conjunto de duas partículas com rotação ½, ou seja, dois férmions, sendo um elétron e o outro um pósitron (a antipartícula do elétron), por exemplo, que estão orientados de modo que seus sentidos no eixo de rotação ("para esquerda" e "para direita") se opõem uma à outra, isto é, eles são antiparalelos. A Fig. 1 representa esse sistema.

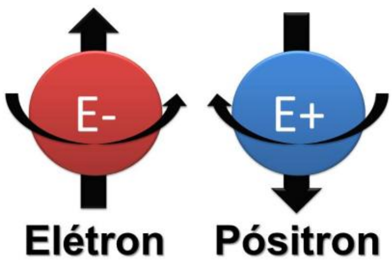

Figura 1. Representação das rotações de um elétron (bolinha vermelha, E-) e um pósitron (bolinha azul, E+), respectivamente. As setas para cima e para baixo (na vertical) indicam o sentido do campo magnético gerado pelo spin da partícula (as setas no eixo horizontal é a representação do spin das partículas).

É importante dizer que as partículas nos estados singletos não precisam estar localmente relacionados umas às outras, assim como ocorre com as partículas que estão emaranhadas.

Em 2014, foi criado um estado de singleto de spin macroscópico com cerca de 500 mil átomos, todos emaranhados [6]. Os átomos usados foram de rubídio, o qual tem spin constante igual a 1. Ainda há muitos mistérios envolvendo esse estado de emaranhamento. Para efetuar o experimento e emaranhar esses átomos, os cientistas usaram uma amostra de aproximadamente um milhão de átomos. Mas como é muito difícil fazer medidas em amostras com objetos quânticos sem interferir no estado dos átomos, eles não souberam dizer com certeza quantos átomos foram emaranhados.

O processo de emaranhamento se deu da seguinte forma: os pesquisadores resfriaram os átomos a 20 milionésimos de Kelvin, para que eles ficassem quase parados, de modo que suas vibrações não interferissem nas medições.

Em seguida, para determinar o spin total dos átomos foi realizada uma medida quântica não demolidora (um tipo especial de medida que não afeta o sistema de forma significativa) para que o estado original dos átomos não fosse alterado. Para essa medida foi utilizado um pulso de aproximadamente 100 milhões de fótons (partículas que compõe a luz) que passou pela nuvem de átomos. Esses fótons tinham energias mínimas precisamente calculadas para que não excitassem os átomos, mas apenas passassem através deles. Mas os próprios fótons foram afetados pela interação, os átomos agiram como ímãs para girar a polarização da luz.

Ao medir o quanto a polarização dos fótons havia mudado após passar pela nuvem, os pesquisadores puderam determinar o spin total da nuvem de átomos. Ainda que a medida não tenha mudado o estado do spin das partículas (tanto dos fótons quanto dos átomos de rubídio), a interação foi capaz de emaranhar uma grande quantidade de átomos, assim como mostra a Figura 2.

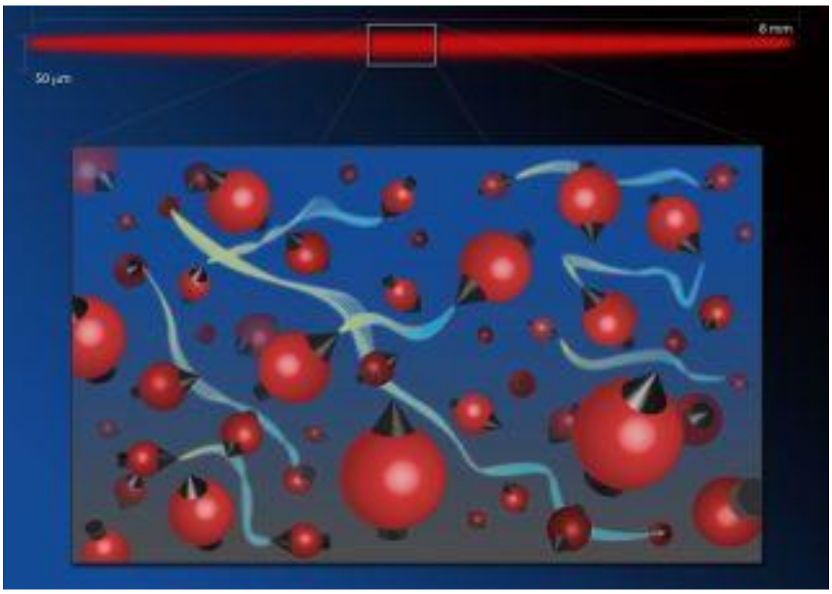

Figura 2. Representação do estado total do sistema após a passagem dos fótons, os spins (setas pretas) dos átomos (esferas vermelhas) foram emaranhados (listras azuis) [6].

Alguns dos mistérios que ainda envolvem esse novo estado da matéria são representados pelos seguintes questionamentos. Quais são os átomos que estão emaranhados? Cada emaranhamento ocorre com quantos átomos? Os átomos que se emaranham são os que estão próximos um do outro ou os que estão longe também podem se emaranhar? [6]

Este é apenas um dos muitos exemplos do que já está acontecendo na comunidade científica como aplicações do emaranhamento quântico.

6 CORRELAÇÕES NÃO-LOCAIS

Apresentamos, aqui, uma transposição didática do capítulo 2 do livro “Quantum Chance: Nonlocality, Teleportation and Other Quantum Marvels” (Nicolas Gisin) [10]. Este é um livro bastante interessante que fala sobre temas bem atuais da Física Quântica, tais como: correlações locais e não locais, emaranhamento quântico, jogo de Bell, dentre outros.

Não localidade significa que um ponto do espaço pode influenciar outro ponto instantaneamente, independente da distância entre eles. Mas, para entender o que são correlações não locais, precisamos primeiro saber a definição de correlações.

Em termos simples, correlação significa uma semelhança ou relação entre dois ou mais objetos, pessoas, ideias, locais etc. Neste trabalho, estudaremos correlações entre eventos aleatórios. Na física quântica, as correlações são caracterizadas como correlações locais e não-locais, aqui daremos um foco à correlação não local.

Para entendermos as correlações não locais, vamos conhecer um pouco do emaranhamento clássico. Nessa experiência, vamos precisar da ajuda de Alice (A), Bob (B) e Charlie (C). Charlie tem duas moedas nas mãos, uma de cinco centavos e outra de dez centavos. Ele mistura e as esconde, uma em cada mão, depois entrega uma para Alice e outra para Bob. Ninguém olha para as moedas e ninguém sabe quem tem cada uma delas. Então, Alice embarca em uma nave e vai para Alpha Centauri, enquanto Bob fica em Araguaína.

Antes da grande viagem, Alice e Bob sincronizaram seus relógios, eles conhecem a relatividade e a dilatação do tempo, entre outros efeitos físicos. Eles concordam que Alice vai olhar para a moeda dela apenas um segundo, ou dois, antes de Bob olhar para a sua, no referencial de Araguaína.

Quando Alice chega a Alpha Centauri, ela olha para sua moeda. Surpreendentemente, no instante em que olha para sua moeda, ela sabe exatamente qual moeda Bob tem, mesmo antes de ele olhar. Alice e Bob conseguiram quebrar a regra mais fundamental da relatividade, que afirma que a informação não pode ir mais rápido que a velocidade da luz? Claro que não! Tanto Alice quanto Bob possuem as moedas que Charlie deu.

Mas isso não implica que esse experimento viole a relatividade? Nessa situação, a relatividade só seria violada caso Alice contasse imediatamente a Bob o que esperar. Alice pode saber que moeda Bob vai ver, mas não tem como contar a ele, não sem enviar um sinal clássico de Alpha Centauri, e isso levaria pouco mais que quatro anos para que a luz fizesse a viagem.

Vamos fazer esse experimento várias vezes, com muitos pares de Alice-Bob. Para ser quantitativo, Charlie pinta um "$\sigma = +1$" em uma das moedas e um "$\sigma = -1$" na outra moeda. Se assumirmos que Charlie é realmente aleatório no modo como ele embaralha as moedas, então teremos as situações descritas a seguir.

- Em média, tanto A como B receberão o mesmo número de moedas. Chamando os valores das observações de A, σA, e as observações de B, σB, podemos expressar este fato matematicamente como os seguintes valores esperados:

$$\langle \sigma A \rangle = 0,$$

$$\langle \sigma B \rangle = 0. \qquad (1)$$

- Se A e B registram suas observações e depois se reúnem em Araguaína para compará-las, eles encontrarão uma forte correlação. Para cada tentativa, se A observou $\sigma A = +1$, então B terá observado $\sigma B = -1$ e vice-versa. Em outras palavras, o produto $\sigma A \sigma B$ sempre é igual a −1: $\langle \sigma A \sigma B \rangle = -1$.

Observe que a média dos produtos (de σA e σB) não é igual ao produto das médias, as equações 1 nos dizem que $\langle \sigma A \rangle \langle \sigma B \rangle$ é zero. Em notação matemática, escrevemos:

$$\langle \sigma A \rangle \langle \sigma B \rangle \neq \langle \sigma A \sigma B \rangle,$$

$$\langle \sigma A \sigma B \rangle - \langle \sigma A \rangle \langle \sigma B \rangle \neq 0. \qquad (2)$$

Isso indica que as observações de Alice e Bob estão correlacionadas. De fato, a quantidade.

$$\langle \sigma A \sigma B \rangle - \langle \sigma A \rangle \langle \sigma B \rangle$$

é chamada de correlação estatística entre as observações de Alice e Bob. A fonte dessa correlação é o fato de que originalmente Alice e Bob estavam no mesmo local e Charlie tinha uma moeda de cada tipo. A correlação se conservou quando Alice viajou para Alpha Centauri devido ao fato de as moedas não mudarem durante a viagem.

Suponha que você tenha uma distribuição de probabilidades $P\,(a, b)$ para duas variáveis a e b. Se as variáveis são completamente não correlacionadas, então a probabilidade será fatorada:

$$P\,(a,b) = P\,(a)\,P\,(b), \qquad (3)$$

onde $P\,(a)$ e $P\,(b)$ são as probabilidades individuais para a e b. É fácil ver que, se a probabilidade fatora dessa maneira, não há correlação; em outras palavras, a média do produto é o produto das médias.

Vamos ver um exemplo para ilustrar o tipo de situação que leva às probabilidades fatoradas. Suponha que, em vez de um único Charlie, existam dois Charles (Charlie-A e Charlie-B) que nunca se comunicaram. Charlie-B mistura suas duas moedas e dá uma para Bob, a outra é descartada.

Charlie-A faz exatamente a mesma coisa, exceto que ele dá uma moeda para Alice. Esse é o tipo de situação que leva as probabilidades fatoradas de produtos sem correlação.

Na física clássica, usamos a estatística e a teoria das probabilidades quando ignoramos algo que, em princípio, pode ser conhecido. Por exemplo, depois de misturar as moedas no primeiro experimento, Charlie poderia ter feito uma observação sutil (uma olhada rápida) e depois deixar Alice e Bob pegarem suas moedas. Isso não teria feito diferença no resultado. Na mecânica clássica, a distribuição de probabilidades $P\,(a,b)$ representa uma especificação incompleta do estado do sistema.

O conhecimento completo de um sistema na física clássica implica o conhecimento completo de todas as partes do sistema. Não faria sentido dizer que Charlie sabia tudo o que poderia ser conhecido sobre o sistema de duas moedas, apenas estava faltando informações sobre as moedas individuais.

Com isso podemos ver algo semelhante ao emaranhamento com uma experiência mais próxima da nossa realidade.

6.1 Jogo de Bell

Agora que já sabemos um pouco sobre correlações, podemos jogar um jogo bastante interessante denominado jogo de Bell, criado por John Bell em 1964, o mesmo nos ajudará a entender melhor as correlações, partindo de uma visão mais ligada à Física Quântica. Para esse jogo, precisamos de duas pessoas (honestas), sendo que ambas devem trabalhar em conjunto usando correlações para obter uma pontuação máxima.

Primeiro, precisamos de duas caixas aparentemente idênticas, conforme ilustra a Fig. 3. Cada caixa contém um painel que deve mostrar, aleatoriamente, 0 ou 1 à medida que a alavanca presente na parte de cima da caixa é deslocada para a direita ou para a esquerda. Uma caixa fica com Alice e a outra fica com Bob. O jogo consiste em Alice e Bob fazerem medições ao mesmo tempo e em locais separados. As alavancas devem ser movidas para a esquerda ou para a direita, isso será chamado de medição. As medições devem ser repetidas a cada 1 minuto, Alice e Bob devem anotar os resultados à medida que eles aparecem, assim como a direção que a alavanca foi movida. Lembrando que tanto os movimentos das alavancas como seus resultados são aleatórios.

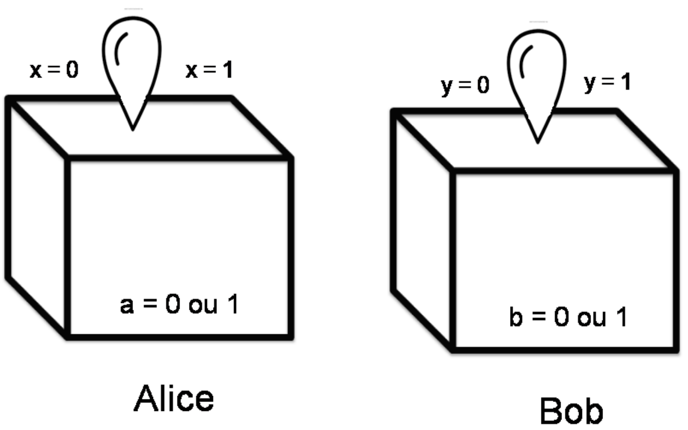

Figura 3: Representação de duas caixas necessárias para o jogo de Bell. Figura desenvolvida pela autora do trabalho.

Uma peça fundamental para o jogo funcionar é que as escolhas dos participantes devem ser totalmente livres de influência do outro participante. Alice só conhecerá as escolhas de Bob após o término do jogo, assim como Bob só saberá das escolhas de Alice quando o jogo terminar.

O jogo continua, por exemplo, até que sejam criados 600 dados (para cada um dos participantes), com cerca de 150 opções de direita-direita, direita-esquerda, esquerda-direita e esquerda-esquerda. No término de todas as medições, os dois se juntam para calcular a pontuação seguindo as regras que são descritas a seguir.

1. Toda vez que Alice empurra sua alavanca para a esquerda ou Bob empurra a sua para a esquerda, ou quando ambos empurram suas alavancas para a esquerda, eles ganham um ponto se os resultados forem os mesmos, $a = b$.

2. Quando ambos moverem a alavanca para a direita e os resultados da máquina forem diferentes, ou seja, $a \neq b$, ambos ganham um ponto.

Para cada uma das quatro combinações: direita-direita, direita-esquerda, esquerda-direita e esquerda-esquerda, eles calculam a taxa de sucesso, que é o número de pontos dividido pelo número total de tentativas, depois somam os sucessos, sendo assim, a pontuação máxima deve ser quatro, porque há quatro combinações de escolha e cada resultado de sucesso deve ser no máximo igual a 1, que corresponde a 100%. Para uma pontuação S, diremos que Alice e Bob venceram o jogo de Bell 4 vezes no máximo. Sabendo que a pontuação é uma média, sendo assim pode ter qualquer valor entre 0 e 4. Por exemplo, uma pontuação de 3,15 significa que Alice e Bob venceram em média 3,15 vezes de 4, ou 315 vezes de 400. De acordo com as regras do jogo de Bell para podermos dizer que eles ganham o jogo, eles devem ganhar com uma frequência maior que 3.

Podemos fazer uma pequena alteração no jogo para facilitar a familiarização: pedir que Alice e Bob não anotem os resultados e ao invés disso, eles apenas anotem os números que vierem à mente deles, produzindo assim resultados ao acaso, de forma totalmente independente um do outro.

Neste caso, as taxas de sucesso serão todas 1/2. Na verdade, na metade do tempo, Alice e Bob escrevem o mesmo resultado, e na outra metade resultados opostos, quaisquer que sejam suas escolhas para a alavanca. Isso significa que a pontuação do jogo de Bell será $4 \times \frac{1}{2} = 2$. Então, para obter uma pontuação de 2, Alice e Bob devem ter caixas que não podem ser totalmente independentes uma da outra, mas devem ser coordenadas de modo a produzir resultados correlacionados.

Podemos considerar outro caso, em que as duas caixas produzem o mesmo resultado: 0, qualquer que seja o lado para o qual a alavanca foi movida. Sendo assim, as escolhas de Alice e Bob não influenciam o resultado.

6.2 Cálculo não local

Agora vamos aprender um pouco sobre o cálculo não local. Seja x a escolha de Alice (com relação à alavanca) e a o resultado da medição. Por exemplo, quando dizemos $x = 0$ significa que Alice empurrou a alavanca para a esquerda e $x = 1$ quer dizer que Alice empurrou a alavanca para a direita. Para Bob faremos da mesma forma, vamos definir y para sua escolha e b o resultado da medida. Podemos resumir essas informações e as regras do jogo de Bell na Tabela 1, que mostra todas as possibilidades de Alice e Bob conseguirem uma pontuação.

	$x = 0$	$x = 1$
$y = 0$	$a = b$	$a = b$
$y = 1$	$a = b$	$a \neq b$

Tabela 1: Representação das regras do jogo de Bell para fazer o cálculo não local.

Podemos sintetizar o jogo de Bell, com Alice e Bob separados espacialmente, cada um fará suas escolhas de forma livre e anotando os seus respectivos resultados, na forma da seguinte equação:

$$a + b = x \times y. \tag{4}$$

Se $x = y = 1$ e $a \neq b$ o resultado será 1, sendo assim só existem dois resultados possíveis nesse caso, $a = 1$ e $b = 0$ ou $a = 0$ e $b = 1$. Alice e Bob ganham um ponto de acordo com as regras do jogo de Bell. Nos outros acontecimentos, o resultado será 0.

Agora vamos estudar os outros três casos: $(x, y) = (0,0)$, $(0,1)$ e $(1,0)$; em todos esses casos, $x \times y = 0$, e por consequência, $a + b = 0$. Uma das soluções é $a = b = 0$, a outra opção é $a = b = 1$, nesse segundo caso o resultado é 0, pois estamos falando de soma modular, isto é, soma de módulo 2 em que $1 + 1 = 0$ (mod 2). Quando falamos de soma modular devemos levar em consideração qual é o resto da divisão dos termos que estão sendo somados, ou seja, se estamos somando $6 + 11$ em soma de mod 12 o resultado é 5.

$$6 + 11 = 5$$

Um bom exemplo de soma modular presente no dia-a-dia é o relógio de parede, que também é uma soma de mod 12.

A Equação 4 expressa a não localidade. Para Alice e Bob ganharem o jogo de Bell, as caixas devem calcular o produto $x \times y$. Mas, isso só será possível se Alice e Bob souberem os valores de x e y, caso contrário a única coisa que eles podem fazer são suposições. E para obter o melhor resultado possível eles devem supor que $x \times y = 0$ sendo assim, eles estarão certos em 3 vezes de um total de 4. No entanto, para obter uma média com resultado maior que 3, é necessário um cálculo não local de $x \times y$, pois os fatores que compõem a equação existem em dois ou mais locais que estão em regiões distintas do espaço.

Com isso vemos as possibilidades que Alice e Bob têm para ganhar ponto no jogo de Bell de formas diferente, em forma de equação, em forma de tabela e em forma de texto.

6.3 Estratégias locais para o jogo Bell

Avançaremos no entendimento do experimento (o jogo de Bell) buscando formas de ter um melhor resultado. Alice e Bob ainda estão separados espacialmente, de forma que eles não possam se comunicar e dizer os seus resultados um para o outro.

Agora iremos aprender a obter a pontuação máxima no jogo. Começaremos com a situação em que as duas alavancas são empurradas para a esquerda. Se $a = b$, Alice e Bob ganham um ponto.

Partindo da situação em que Alice e Bob possuem caixas, definimos que dentro de cada uma das caixas existe um computador que armazena todos os resultados, as medidas e os horários em que elas ocorrem. Devemos escolher bem o caso que será usado para que as escolhas sejam aleatórias. Como os resultados devem ser binários, limitamos a 4 possíveis casos para as caixas, sendo que eles devem escolher dentre as escolhas possíveis. Na caixa de Alice, os quatro casos possíveis estão descritos a seguir:

1. O resultado é sempre $a = 0$, qualquer que seja a escolha de x.
2. O resultado é sempre $a = 1$, qualquer que seja a escolha de x.
3. O resultado é idêntico à escolha, ou seja, $a = x$.
4. O resultado sempre difere da escolha, ou seja, $a = 1 - x$.

Como a caixa de Bob funciona de forma semelhante, assim teremos 16 combinações possíveis para Alice e Bob, já que os casos podem e vão mudar a cada minuto, tanto na caixa de Bob quanto na de Alice.

Para obtermos um resultado satisfatório no jogo de Bell, devemos analisar cuidadosamente cada uma das 16 combinações possíveis e verificar as prováveis pontuações. Podemos começar examinando o primeiro caso, tanto para Alice quanto para Bob. Nesse caso, teremos que $a = b = 0$, assim, Alice e Bob ganham 3 vezes de 4 (toda vez que o resultado for esquerda-esquerda, esquerda-direita e direita-esquerda).

Iremos fazer uma combinação de casos, optamos por selecionar o primeiro caso para Alice ($a = 0$) e o caso selecionado para Bob será o terceiro ($b = y$). Agora, vamos verificar o resultado da pontuação, que nesse caso será 3 (toda vez que Alice e Bob escolherem respectivamente direita-direita, esquerda-esquerda e esquerda-direita eles ganharão um ponto).

Se continuarmos fazendo os cálculos, o resultado é que das 16 combinações possíveis, em 8 dessas combinações o valor da pontuação é 3 e para as outras 8 combinações a pontuação é 1, ou seja, nesse jogo ninguém adquire 0 e ninguém consegue 4 pontos.

6.4 Ganhando no jogo de Bell por meio do emaranhamento quântico

Agora que já sabemos o que são correlações não locais, conhecemos o jogo de Bell e como calcular a pontuação, vamos pensar se existe alguma forma de tirar uma pontuação maior do que 3 em 4. Devemos deixar bem claro que Alice e Bob não combinaram nada previamente e nem trapaceiam, assim como suas respectivas caixas não estão interligadas fisicamente. Sendo assim, Alice e Bob não podem se comunicar por nenhum mecanismo conhecido atualmente, pois todas as formas de comunicação conhecidas se propagam ponto a ponto no espaço. Isso nos leva a nossa primeira conclusão: se existe alguma correlação nesse experimento, essa correlação é não local.

Podemos, então, dar continuidade aos nossos estudos. Vamos imaginar que Alice e Bob possam se comunicar usando apenas suas caixas. Levando em consideração que essa comunicação seja possível todas as vezes que eles movem a alavanca, como há apenas duas opções possíveis de respostas, vamos assumir que será “sim” ou “não”. Outro ponto a ser levado em consideração é que Alice e Bob só saberão as respostas para as perguntas um do outro quando o jogo acabar e eles se reunirem para verificar as pontuações.

É válido saber que o jogo de Bell começou sendo um experimento mental, porém está sendo bastante estudado em laboratório atualmente. Suponha que nas caixas tenha: laser vermelho, laser verde, laser amarelo, criostato (refrigerador, dentro do criostato tem um cristal piezoelétrico[1]), interferômetro de fibra óptica, dois detectores de fótons e um relógio [10]. Ainda, todas as vezes que a alavanca é movida para alguns dos lados, ela dispara uma série de pulsos de laser na direção do cristal piezoelétrico, que está presente dentro do criostato. Sempre que isso ocorre, o cristal se move levemente na mesma direção, só depois disso o resultado aparece na tela.

Depois dessa explicação, podemos definir que os elementos principais das caixas e do experimento são os cristais. As caixas de Alice e Bob são idênticas, mas o segredo para ganhar no jogo de Bell está no emaranhamento dos cristais no interior das caixas. A

[1] Piezoelétricidade é a capacidade de alguns cristais gerarem tensão elétrica por uma pressão mecânica. [11]

única forma de ter uma pontuação maior do que 3 em 4 é no caso de os cristais estarem emaranhados. Assim, Alice e Bob conseguem de certa forma prever alguns resultados, só precisaremos saber em qual base de Bell emaranhamos os cristais.

7 Bases de Bell

Para ter êxito na compreensão do tema, é necessário explicarmos algumas notações matemáticas e termos científicos que nem sempre são vistos na graduação de Física. Um desses assuntos são as bases de Bell e sua aplicação no teleporte de partículas quânticas [12]. As bases de Bell são mostradas nas equações de 5 a 8.

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \tag{5}$$

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \tag{6}$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \tag{7}$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \tag{8}$$

$|0\rangle$ e $|1\rangle$ representam os estados quânticos de suas respectivas partículas. Em $|01\rangle$, por exemplo, o primeiro valor dentro do ket corresponde ao estado da primeira partícula e o segundo número corresponde ao estado da segunda partícula. O termo $\frac{1}{\sqrt{2}}$ é uma constante de normalização da função de onda. $|\psi^-\rangle$, $|\psi^+\rangle$, $|\Phi^-\rangle$, e $|\Phi^+\rangle$ são os possíveis estados emaranhados das partículas 1 e 2, note que são estados de superposição quântica.

8 TRANSFERÊNCIA DE EMARANHAMENTO

O experimento mental “*Delayed-choice experiment*”, (Experimento de escolha retardada) foi proposto por John Archibald Wheeler em 1978. Por meio dele é possível fazer alguns experimentos mentais, dentre eles a transferência de emaranhamento [13].

Para efetuarmos a transferência de emaranhamento, precisaremos da contribuição de Victor, Bob e Alice, mais quatro partículas, aqui usaremos fótons. No início, os fótons 1 e 2 serão emaranhados, assim como os fótons 3 e 4. Dando continuidade ao processo, os fótons 2 e 3 são enviados a Victor, o fóton 1 para Bob e o fóton 4 para Alice. Caso Victor decida emaranhar os dois fótons que estão com ele, os fótons de Alice e Bob serão emaranhados automaticamente. Com isso teremos efetuado a transferência de emaranhamento, lembrando que o fóton que está com Alice nunca interagiu com o fóton de Bob e mesmo assim os dois estão emaranhados [13]. Para ajudar na compreensão, a Figura 4 representa bem esse fenômeno:

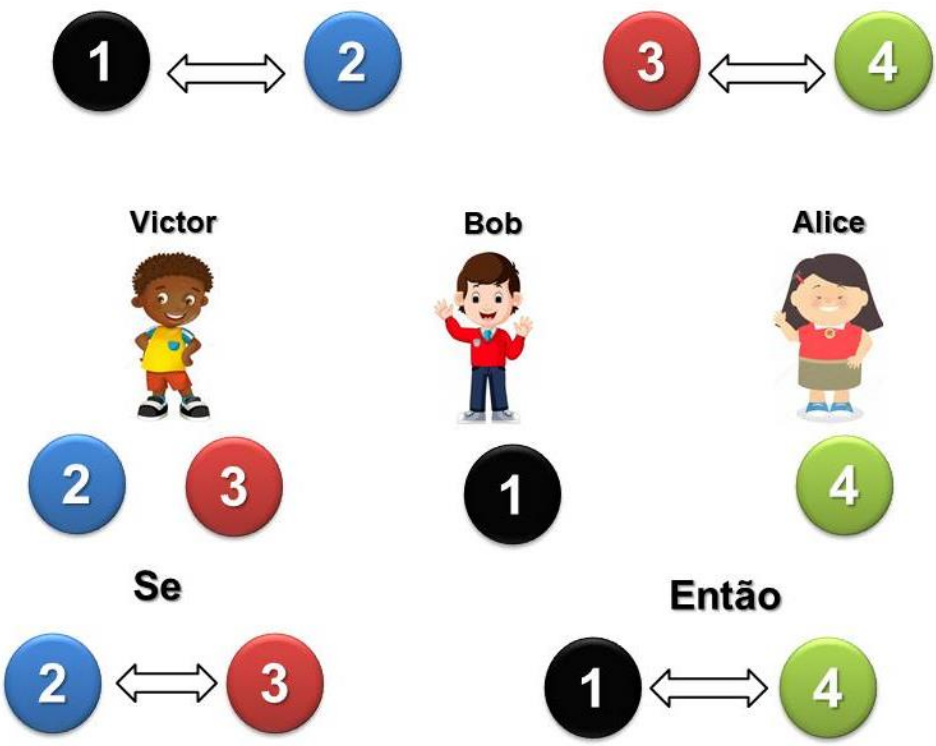

Figura 4: Figura produzida pela autora para representar a transferência de emaranhamento.

Como principal aplicação da transferência de emaranhamento temo o teleporte de partículas que será descrito em breve.

9 Teleporte quântico

O teleporte quântico é uma das principais aplicações do emaranhamento e a que está sendo pesquisada há mais tempo, ele pode ser utilizado na computação quântica, assim como na internet quântica, uma internet rápida e super-segura, pois o emaranhamento entre as partículas garante que nenhuma informação se perca, nem que seja indevidamente interceptada.

9. 1 Teleporte de uma partícula

O teleporte de uma partícula é o protocolo mais simples, ocorre quando transferimos a informação de uma partícula de um lugar a outro, a informação da partícula vai de uma região A para uma região B por meio de um canal clássico de comunicação.

Para efetuar tal protocolo, precisamos utilizar as bases de Bell (equações 5−8) e três partículas, uma que terá suas informações teleportadas, outra que viajará entre as partículas e outra para receber a informação da primeira, respectivamente. As partículas 1 e 2 ficam com Alice (que representam o sistema A) e a partícula 3 é enviada para Bob (sistema B).

A partícula 1 se encontra no estado $|\emptyset\rangle_1 = a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1$, esta soma é normalizada $(|a|^2 + |b|^2 = 1)$. As partículas 2 e 3 estão em uma das bases de Bell, como por exemplo, $|\psi^-\rangle_{23}$. Sendo assim, nosso sistema inicial é representado por $|\emptyset\rangle_1|\psi^-\rangle_{23}$, para isso vamos multiplicar o estado da partícula 1 pelo estado das partículas 2 e 3,

$$|\emptyset\rangle_1|\psi^-\rangle_{23} = (a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{23} - |10\rangle_{23})\right) =$$

$$|\emptyset\rangle_1|\psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a|001\rangle_{123} - a|010\rangle_{123} + b|101\rangle_{123} - b|011\rangle_{123}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\{|01\rangle_{12}(-a)|0\rangle_3 + |10\rangle_{12}b|1\rangle_3 + |00\rangle_{12}a|1\rangle_3 + |11\rangle_{12}(-b)|0\rangle_3\}. \qquad (9)$$

Precisamos converter o sistema $|\emptyset\rangle_1|\psi^-\rangle_{23}$ em uma combinação linear de $|\psi^+\rangle_{12}$, $|\psi^-\rangle_{12}$, $|\Phi^+\rangle_{12}$ e $|\Phi^-\rangle_{12}$. Para isso, escrevemos:

$$|\emptyset\rangle_1|\psi^-\rangle_{23} = |\psi^-\rangle_{12}|\alpha\rangle_3 + |\psi^+\rangle_{12}|\beta\rangle_3 + |\Phi^-\rangle_{12}|\gamma\rangle_3 + |\Phi^+\rangle_{12}|\delta\rangle_3. \qquad (10)$$

A equação (10) equivale a transferir o emaranhamento das partículas 2 e 3 para as partículas 1 e 2. Agora, vamos usar manipulações matemáticas para descobrir quem são os estados $|\alpha\rangle_3$, $|\beta\rangle_3$, $|\gamma\rangle_3$ e $|\delta\rangle_3$.

Ao substituirmos as equações (5) e (8) na equação (10), obtemos:

$$|\emptyset\rangle_1|\psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|01\rangle(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |10\rangle(-|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |00\rangle(|\gamma\rangle + |\delta\rangle) + |11\rangle(-|\gamma\rangle + +|\delta\rangle)\}. \qquad (11)$$

Igualando as equações (9) e (11), encontramos:

$$|\alpha\rangle = -\frac{1}{2}(a|0\rangle + b|1\rangle),$$

$$|\beta\rangle = \frac{1}{2}(-a|0\rangle + b|1\rangle),$$

$$|\gamma\rangle = \frac{1}{2}(a|1\rangle + b|0\rangle),$$

$$|\delta\rangle = \frac{1}{2}(a|1\rangle - b|0\rangle).$$

Reescrevendo a equação (11), temos:

$$|\emptyset\rangle_1|\psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{2}\{|\psi^-\rangle_{12}(-a|0\rangle_3 - b|1\rangle_3) + |\psi^+\rangle_{12}(-a|0\rangle_3 + b|1\rangle_3) + |\Phi^-\rangle_{12}(a|1\rangle_3 + b|0\rangle_3) + |\Phi^+\rangle_{12}(a|1\rangle_3 - b|0\rangle_3)\}. \qquad (12)$$

A equação (12) representa um sistema composto pelas partículas 1, 2 e 3, sendo que as partículas emaranhadas 2 e 3 (lado esquerdo da equação) podem ser transformadas em um sistema, na qual as partículas 1 e 2 estão em uma superposição de estados emaranhados na base de Bell, ou seja, transferimos o emaranhamento das partículas 2 e 3 para as partículas 1 e 2.

Alice, ao fazer uma medição EPR (Einstein, Podolsky e Rosen) (medição em conjunto), das partículas 1 e 2, poderá ter apenas um dos resultados descritos a seguir:

- Se a partícula de Alice colapsar em $|\psi^-\rangle_{12}$, a partícula 3 de Bob colapsará em $(-a|0\rangle_3 - b|1\rangle_3)$,
- Se a partícula de Alice colapsar em $|\psi^+\rangle_{12}$, a partícula 3 de Bob colapsará em $(-a|0\rangle_3 + b|1\rangle_3)$,
- Se a partícula de Alice colapsar em $|\Phi^-\rangle_{12}$, a partícula 3 de Bob colapsará em $(a|1\rangle_3 + b|0\rangle_3)$,
- Se a partícula de Alice colapsar em $|\Phi^+\rangle_{12}$, a partícula 3 de Bob colapsará em $(a|1\rangle_3 - b|0\rangle_3)$,

Para que o teleporte se concretize, Alice precisa enviar uma mensagem clássica para Bob, dizendo qual foi o resultado da sua medida EPR nas partículas 1 e 2. Bob, ao receber a mensagem clássica, efetuará uma transformação na partícula 3 colapsada, de forma que a partícula 3 se comportará como a partícula 1. Para o nosso caso, a mensagem que Alice deve enviar para Bob deve conter o estado $|\psi^-\rangle_{12} = (a|0\rangle_3 + b|1\rangle_3)$.

Para cada um dos outros três resultados possíveis, Bob deverá executar um dos seguintes “bit flips”, ou seja, precisamos fazer uma transformação no estado da partícula, sendo que $x = 0{,}1$,

$$|x\rangle \rightarrow (-1)^{x+1}|x\oplus 1\rangle, \tag{13}$$

$$|x\rangle \rightarrow (-1)^{x}|x\rangle, \tag{14}$$

$$|x\rangle \rightarrow -|x\oplus 1\rangle. \tag{15}$$

Ao fazer a transformação da equação (13), podemos dizer que a partícula de Alice colapsou em $|\Phi^-\rangle_{12}$, assim, a partícula de Bob terá que colapsar em $(a|1\rangle_3 + b|0\rangle_3)$. Pode-se verificar isso a seguir,

$$|x\rangle \rightarrow (-1)^{x+1}|x\oplus 1\rangle,$$

$$|0\rangle \rightarrow (-1)^{0+1}|0\oplus 1\rangle = -|1\rangle, \tag{16}$$

$$|1\rangle \rightarrow (-1)^{1+1}|1\oplus 1\rangle = |0\rangle. \tag{17}$$

Vale ressaltar que o símbolo $\oplus$ representa a soma módulo 2, em que $1\oplus 1 = 0$ e $0\oplus 1 = 1$. Ao fazer a transformação da equação (14), podemos dizer que a partícula de

Alice colapsou em $|\psi^{+}\rangle_{12}$, ou seja, a partícula de Bob terá que colapsar em $(-a|0\rangle_3 + b|1\rangle_3)$. Pode-se verificar isso a seguir,

$$|x\rangle \rightarrow (-1)^{x}|x\rangle,$$

$$|0\rangle \rightarrow (-1)^{0}|0\rangle = |0\rangle, \tag{18}$$

$$|1\rangle \rightarrow (-1)^{1}|1\rangle = |1\rangle. \tag{19}$$

Ao fazer a transformação da equação (15), podemos dizer que a partícula de Alice colapsou em $|\Phi^{+}\rangle_{12}$, portanto, a partícula de Bob terá que colapsar em $(a|1\rangle_3 - b|0\rangle_3)$. Pode-se verificar isso a seguir,

$$|x\rangle \rightarrow -|x\oplus 1\rangle,$$

$$|1\rangle \rightarrow -|1\oplus 1\rangle = -|0\rangle, \tag{20}$$

$$|0\rangle \rightarrow -|0\oplus 1\rangle = -|1\rangle. \tag{21}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após esta pesquisa, tivemos a oportunidade de perceber a grande importância do emaranhamento e verificamos algumas de suas aplicações, tais como: o singleto de spin, o teleporte de partículas quânticas, a transferência de emaranhamento, dente outras.

A mecânica quântica é algo relativamente recente, levando em consideração o tempo que a mecânica clássica é estudada. Por isso, no momento, as pesquisas sobre o emaranhamento ainda estão no início, dessa forma, faz-se necessário mais alguns estudos para ampliar a distância que o teleporte pode ocorrer e com cada vez mais partículas, além do custo para efetuar o mesmo que ainda é elevado. No entanto, é notória a importância deste fenômeno e todos os benefícios que ele pode trazer para a humanidade.

Também tivemos a oportunidade de utilizar uma metodologia de pesquisa inovadora e produtiva, que foi fundamental para o bom andamento do trabalho. Pudemos verificar a diferença dos tipos de emaranhamento, misto e puro, bem como conhecer um pouco mais do estado de singleto, um tema novo e bastante inovador. Quando o homem conseguir compreender tal estado por completo será um avanço incrível para a ciência, bem como para a humanidade.

De todas as aplicações para o emaranhamento apresentadas neste trabalho, a que foi estudada mais a fundo foi o teleporte quântico. O teleporte aqui descrito é diferente do teleporte divulgado nos filmes de ficção científica, pois transporta apenas as informações das partículas individualmente, por isso ainda é cedo para dizer se os teleportadores vistos em tais filmes serão possíveis.

Porém, podemos dizer com toda certeza que o teleporte quântico, aqui estudado, é de fundamental importância para a produção dos computadores quânticos, pois o emaranhamento quântico fornece ferramentas para o processamento e armazenamento de dados ainda mais eficientes [1], além de ser de fundamental importância para o desenvolvimento da internet quântica, o que vai dar oportunidade para os pesquisadores de todas as áreas da ciência avançar na busca pelo conhecimento e na oportunidade de transmissões cada vez mais seguras, garantindo que não haja interferência, nem clonagem de dados.

REFERÊNCIAS

[1] SANTOS, Daniel Cavalcanti. **Em busca de um entendimento completo acerca do emaranhamento**. 2006. 95 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Belo Horizonte, 2006.

[2] HORODECKI, Ryszard et al. Quantum entanglement. **Reviews of Modern Physics,** Estados Unidos, v. 81, n. 02, p. 865-942, abr-jun 2009.

[3] BOUWMEESTER Dik et al. Experimental quantum teleportation. **Nature,** Estados Unidos, v. 390, p. 575-579, 1997.

[4] REN. Ji-Gang, et AL. Ground-to-satellite quantum teleportation. **Cornell University**, Nova York, 4 Jul 2017, arXiv:1707.00934**.**

[5] Primeira transmissão quântica intercontinental via satélite. **Inovação tecnológica,** Brasil, 23 jan 2018. Disponível em: <https://goo.gl/t2XJGg>. Acesso em 30 jan 2018.

[6] MOSKOWITZ, Clara. Emaranhamento quântico cria novo estado da matéria. **Scientific American,** Brasil, 22 set. 2014. Disponível em: <http://sciam.uol.com.br/emaranhamento-quantico-cria-novo-estado-da-materia/ >. Acesso em 09 jul. 2019

[7] PERES, Asher. Delayed choice for entanglement swapping. **Cornell University**, Nova York, 11 Abr. 1999, https://arxiv.org/pdf/quant-ph/9904042.pdf.

[8] ROCHA, Roberto da Silva. **O Gato de Schrödinger: o que é o TEMPO**, 27 Dez. 2011. Disponível em < http://professorrobertorocha.blogspot.com/2011/12/o-gato-de-schrodinger-o-que-e-o-tempo.html>. Acesso em 21 Ago. 2019

[9] Singlet state. **Wikipedia**, 27 Dez. 2018. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Singlet_state>. Acesso em 10 Mai. 2018.

[10] GISIN, Nicolas. **Quantum Chance:** Nonlocality, Teleportation and Other Quantum Marvels. Genebra: Springer, 2014.

[11] Piezoeletricidade. **Wikipedia.** 15 Mai. 2019. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Piezoeletricidade>. Acesso em 30 de Ago. 2019.

[12] LOBO, Matheus Pereir; GOMES, Sue Lam Rhâmidda Pereira; ALENCAR, Ednalva Alves de; Teleporte de uma partícula: Um protocolo no contexto do ensino Médio. **A Física na Escola <**http://www1.fisica.org.br/fne/phocadownload/Vol16-Num2/a04.pdf> v. 16, p. 18-21, 2018.

[13] MA, Xiao-song et al. Experimental delayed-choice entanglement swapping. **Nature**, Estados unidos, v. 8, p. 479-484, 2012.

[14] MIRANOWICZ, Adam; TAMAKI, Kiyoshi. An Introduction to Quantum Teleportation. **Mathematical Sciences (Suri-Kagaku),** v. 473, p. 28-34, 2002.

[15] GASTALDI, Georgia Priscila. **Estados Emaranhados e Teletransporte Quântico**. 2010. 35 f. Monografia (Graduada em Física) - Faculdade Integrada Espírita, Curitiba, 2010.

[16] LU. Hong; GUO. Guang-can. Teleportation of a two-particle entangled state via entanglement swapping. **Physics Letters**, China, v. 209-212, 2000.

APÊNDICE

A seguir temos uma das listas de argumentos que foi construída durante a produção do trabalho:

1) Emaranhamento é quando interligamos duas ou mais partículas de modo que a medição em uma interfere na medição da outra e quando os estados são quanticamente inseparáveis em um tipo especial de ligação, embora possam ser separados espacialmente.

2) Usa-se as bases de Bell para representar os estados emaranhados de duas partículas.

3) Para que um estado seja dito emaranhado, ele será representado por uma das bases de Bell (durante nossos estudos foram as bases de Bell, mas já vi em outras referências que algumas pessoas representam o emaranhamento de outra forma). [6]

4) Após emaranhar duas ou mais partículas e colapsar uma delas, o estado da outra não poderá mudar e a segunda partícula é colapsada de forma instantânea.

4.1) Como se faz o emaranhamento de três partículas? (m)

4.2) O emaranhamento de três partículas é feito usando seis partículas e transferência de emaranhamento.

5) O emaranhamento pode ser usado na computação quântica, levando ao processamento e armazenamento de dados de forma mais eficiente. [1]

6) O emaranhamento é o principal recurso no processo de teletransporte, criptografia e computação quântica. [1]

7) Estados maximamente emaranhados são ditos puros. [1]

8) O procedimento padrão na descrição matemática de estados quânticos se faz por meio de operadores definidos em um espaço vetorial complexo conhecido como espaço de estados ou espaço de Hilbert. [1]

9) Somas convexas de estados quânticos são também estados quânticos. [1]

10) O que são somas convexas?

11) Estados puros são descritos da forma: $|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi_N\rangle$, ditos estados fatoráveis.

12) Estados mistos são ditos fatoráveis quando $\rho = \rho_A \otimes \rho_B \otimes \ldots \otimes \rho_N$. [1]

13) Estados mistos são ditos separáveis quando $\rho = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i \otimes \ldots \otimes \rho_N^i$. [1]

14) Estado que não permitem a representação (13) são estados mistos emaranhados.

15) Estados emaranhados não podem ser descritos por probabilidades clássicas, os estados separáveis podem. [1]

15.1) Como são descritos os estados emaranhados? Que tipo de estatística é utilizada? Estatística bayesiana?

16) Estados separáveis são aqueles que podem ser construídos por operações locais e comunicação clássica (LOCC), isto não sendo permitido para os estados emaranhados. [1]

17) Teorema de Schmidt: Dado um vetor geral $|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |ij\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, podemos sempre encontrar bases locais ortonormais para $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$, tais que $|\psi\rangle$ pode ser escrito da forma: $|\psi\rangle = \sum_i^m \lambda_i |ii\rangle$.

18) Caso haja 3 partículas envolvidas, cada uma descrita por um espaço d-dimensional, seu estado (puro) combinado, em um espaço d^3-dimensional, depende de $2(d^{3-1})$ parâmetros reais (já levando-se em conta que estados quânticos são definidos a menos de normalização e fase global).

19) ρ é o operador densidade de estados.

20) $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, que deve satisfazer as condições tr (ρ)= 1 e $\rho \geq 0$ (deve ser positivo). [2]

21) LOCC, operações locais e comunicação clássica , é um método na teoria da informação quântica onde uma operação local (produto) é realizada em parte do sistema e onde o resultado dessa operação é "comunicado" classicamente para outra parte em que geralmente outra operação local é realizada. [3]

22) Em um sistema constituído de três partes A, B e C, podemos procurar pelo emaranhamento entre as partições A|BC, B|CA, C|AB, assim como pelo emaranhamento genuíno tripartite entre A, B e C. [1]

23) Chama-se de k-separável, todo estado que pode ser escrito como uma combinação convexa de estados que produtos de k produtos tensoriais. [1]

24) Testemunhas de emaranhamento são a solução teórica para o problema de separabilidade: toda vez que tiver algum emaranhamento, há algum W para testemunhá-lo. [1]

25) Não há uma testemunha universal para todos os emaranhamentos. [1]

26) Uma testemunha é dita ótima se não existe nenhuma outra mais fina do que ela. [1]

27) A partir do momento em que o emaranhamento começou a ser visto como um recurso utilizável em protocolos de informação e computação, tornou-se natural a pergunta: quanto deste recurso é necessário para efetuar determinada tarefa? [1]

28) Sendo assim, um novo rumo dentro da teoria do emaranhamento começa a ser traçado: como quantificar apropriadamente esta grandeza? [1]

29) Existem quantificadores baseados em eficiência de protocolos de informação quântica, em aspectos geométricos, em convertibilidade de estados. [1]

30) As primeiras propostas na quantificação do emaranhamento foram baseadas em ideias de sua utilização e do esforço requerido para a produção de estados emaranhados. [1]

31) Para 2 qubits, exemplos de estados maximamente emaranhados são os pares EPR (são eles que violam maximamente as desigualdades de Bell, realizam teleportação de forma mais desejável etc). [1]

32) O custo de emaranhamento quantifica quantos pares EPR devem ser compartilhados entre duas partes, para que, através de operações LOCC, outro estado AB possa ser produzido. [1]

33) (32) nos dá o custo em ebits da produção de AB, posto que o emaranhamento de um par EPR é definido como valendo 1 ebit. [1]

34) ebits vem do inglês entanglement bit, ou bit de emaranhamento. [1]

35) Um estado "puro" é representado por um vetor de estado no espaço de Hilbert. [4]

36) vetor de estado $|\alpha\rangle \rightarrow$ ket, α é o rótulo identificador. [5]

37) Sendo assim, caso haja um protocolo LOCC, que leve m pares EPR em n pares do estado AB (no limite de m e n arbitrários) concluímos que o emaranhamento de AB é E(ρ_{AB}) = m/n ebits. [1]

38) O custo de emaranhamento $E_c(\rho_{AB})$ é definido como $E_c(\rho_{AB}) = \inf \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$. [1]

39) O emaranhamento destilável toma a rota inversa de EC: quer-se saber quantos pares EPR podem ser extraídos (destilados) de n pares de um estado ρ_{AB} (novamente no contexto assintótico), usando somente LOCC. [1]

40) Curiosamente há alguns estados que possuem o que foi chamado de emaranhamento preso, ou seja, que não pode ser destilado. [1]

41) O emaranhamento que pode ser destilado de ρ_{AB} é $E_D(\rho_{AB}) = \sup \lim_{m\to\infty} \frac{n}{m}$. [1]

42) Ainda no contexto de duas partes, o emaranhamento de formação, faz uso, como o próprio nome sugere, da ideia de como construir estados quânticos. [1]

43) É possível escrevermos qualquer estado quântico como uma soma convexa de estados puros, $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. [1]

44) $\{p_i\}$ é uma distribuição de probabilidades. [1]

45) O estado emaranhado puro mais simples é o de 2 bits, que pode analisar a polarização de 2 fótons ou os spins de 2 partículas. [6]

46) A representação de um estado emaranhado puro é $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. [6]

47) O emaranhamento testemunhado foi proposto recentemente por F. Brandão. [1]

48) Popescu e Rohrlich mostraram que, para sistemas puros bipartites, existe um único quantificador de emaranhamento que satisfaça todas as propriedades desejadas: a entropia de emaranhamento. [1]

49) Existe uma premissa básica de que não se pode aumentar o emaranhamento de um sistema manipulando-o apenas localmente. [1]

50) O argumento utilizado por Popescu e Rohrlich (ver argumento 48) usou apenas fatos termodinâmicos associados com resultados já conhecidos sobre a convertibilidade de estados emaranhados. Este resultado permitiu, além de outras coisas, uma aproximação da teoria do emaranhamento com a termodinâmica. [1]

51) De acordo com qualquer medida convexa de emaranhamento, existe pelo menos um estado puro maximamente emaranhado. [1]

52) O que é uma medida convexa?

53) No contexto de estados puros bipartites, emaranhamento está intimamente ligado à "bagunça" local. Ou seja, quanto maior a entropia do estado reduzido, mais emaranhamento é compartilhado entre as duas partes.[1]

54) Para um estado misto ser maximamente emaranhado é necessário que todos os componentes $|\psi_i\rangle$ de qualquer *ensemble* descrevendo ρ sejam também maximamente emaranhados e, ainda assim, a desigualdade a seguir (??) seja saturada. $E(\rho) = E(\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|) \leq \sum_i p_i E(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)$ [1]