



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS CIMBA ARAGUAÍNA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA



Davi Santana de Oliveira Silva

Teorema da existência e unicidade de soluções de equações
diferenciais ordinárias no contexto de espaços métricos

Araguaína-TO
2021

Davi Santana de Oliveira Silva

Teorema da existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias no contexto de espaços métricos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação stricto sensu em Matemática, câmpus Araguaína, da UFT, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Matheus Pereira Lobo

Araguaína-TO
2021

Davi Santana de Oliveira Silva

Teorema da existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias no contexto de espaços métricos/ Davi Santana de Oliveira Silva. – Araguaína-TO, 2021-

72 p. : il.(algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Matheus Pereira Lobo

Dissertação (Mestrado) – , 2021.

1. Espaços Métricos. 2. Aproximações Sucessivas. 3. Existência e unicidade. I. Matheus Pereira Lobo II. Universidade Federal do Tocantins - UFT. III. Teorema da existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias no contexto de espaços métricos

CDU 02:141:005.7

Davi Santana de Oliveira Silva

Teorema da existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias no contexto de espaços métricos


Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação stricto sensu em Matemática, câmpus Araguaína, da UFT, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado em: 7 de dezembro de 2021

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Matheus Pereira Lobo
UFT-ARAGUAÍNA
Orientador

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior
UFT-ARAGUAÍNA
Examinador


Prof.ª Dra. Giovana Alves
UEMASUL-IMPERATRIZ
Examinadora

Araguaína-TO
2021

Dedico este trabalho aos meus pais, Miguel Oliveira da Silva e Simone Santana de Oliveira Silva, a quem devo todos os ensinamentos que trago comigo.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela minha vida, pela saúde, sabedoria, pois sem Ele, sequer eu chegaria até aqui.

Agradeço à minha família, por sempre estar me incentivando, por mostrar-me que independente de tudo sempre estarão comigo. Em especial, agradeço a minha mãe Simone Santana de O. Silva e ao meu pai Miguel O. da Silva, que me apoiaram em cada etapa da minha vida estudantil.

Agradeço à minha esposa, Lucivânia Silva Souza de Oliveira, que mesmo em meio à gravidez da nossa filha, sempre me apoiou, mostrando-me que Deus estava no controle de tudo, e por isso cheguei até aqui.

Agradeço ao meu amigo e professor Guimarães Vieira da Silva, que desde a graduação, com seu entusiasmo pela matemática, mostrou-me o quanto é bonita, com problemas intrigantes de Cálculo, e que me incentivou a aprender mais ainda sobre a Rainha das Ciências e cursar um mestrado.

Agradeço aos meus professores do PROFMAT-ARAGUAÍNA, Fernanda, Samara, Matheus, Álvaro, José Carlos, que desde a matrícula até o final do curso, nos incentivaram a não desistir, mesmo com as dificuldades. Agradeço também aos colegas da 1^o turma do PROFMAT-ARAGUAÍNA, pela união para juntos chegarmos até aqui.

Agradeço ao meu amigo e orientador Matheus Lobo, pelos ensinamentos, paciência, que desde sempre com entusiasmo e maestria, mostrando que sempre podemos aprender cada vez mais dentro da Matemática.

Treine enquanto eles dormem, estude enquanto eles se divertem, persista enquanto eles descansam, e então, viva o que eles sonham.

(Provébio Japonês)

Resumo

O presente trabalho busca apresentar o Teorema da Existência e Unicidade de soluções para uma problema de valor inicial (PVI) dentro do contexto de espaços métricos. Para isso, começamos revendo alguns conteúdos de análise real que auxiliam no entendimento dos conceitos de espaços métricos. Iniciamos com um pouco de topologia em espaços métricos, entre eles, a sequência de Cauchy, que é de extrema importância para a compreensão da definição de espaços métricos completos. Apresentamos o método de aproximações sucessivas devido a Émile Picard, que a partir de um caminho contínuo, nos permite aproximar a solução de um PVI e, além disso, verificar se esta solução encontrada é única a partir da convergência das iteradas. Em seguida, apresentamos o Teorema de Contração Uniforme, também conhecido como Teorema do Ponto Fixo de Banach, que formaliza as aproximações sucessivas. Por fim, discutimos sobre o Teorema da Existência e Unicidade, sua demonstração, bem como aplicações para algumas equações diferenciais ordinárias.

Palavras-chaves: Espaços Métricos; Aproximações Sucessivas; Existência e Unicidade.

Abstract

The present work seeks to present the Existence and Uniqueness Theorem of solutions for an initial value problem (IPV) within the context of metric spaces. For this, we start by reviewing some real analysis contents that help in understanding the concepts of metric spaces. We present a bit of topology in metric spaces, among them, the Cauchy sequence, which is extremely important for understanding the definition of complete metric spaces. We discuss the method of successive approximations due to Émile Picard, which, from a continuous path, allows us to approximate the solution to a PVI and, furthermore, to verify whether this solution found is unique from convergence of the iterated ones. Then, we present the Uniform Contraction Theorem, also known as Banach's Fixed Point Theorem, which formalizes the successive approximations. Finally, we discuss the Existence and Uniqueness Theorem, its proof, as well as applications to some ordinary differential equations.

Keywords: Metric Spaces; Successive Approximations; Existence and Uniqueness

Lista de ilustrações

Figura 1 – Campos de Direções de uma solução para a Equação 1.2. Fonte: (BOYCE; DIPRIMA, 1985).	12
Figura 2 – Projeção de y sobre a reta que contém x . Fonte: autor.	16
Figura 3 – Disco e esfera unitário(a) em \mathbb{R}^2 em cada norma. Fonte: autor.	18
Figura 4 – Bola de centro p e raio r . Fonte: autor.	20
Figura 5 – Interior e fronteira de X . Fonte: (LIMA, 1983).	26
Figura 6 – Aplicação contínua no ponto a . Fonte: (LIMA, 1970).	35
Figura 7 – Métrica da convergência uniforme ou métrica do supremo. Fonte: (LIMA, 1983).	37
Figura 8 – Pontos fixos das funções $g(x)$ e $h(x)$. Fonte: autor.	43
Figura 9 – Charles-Émile Picard (1856-1941). Fonte: (ROBERTSON, 2001).	48
Figura 10 – Stefan Banach (1892-1945). Fonte: (WIKIPEDIA, 2020).	49
Figura 11 – Curva da Catenária. Fonte: (FIGUEIREDO; NEVES, 1979), p. 40.	62
Figura 12 – Manômetro. Fonte: (GILAT; SUBRAMANIAM, 2009).	66

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES	14
2.1	Topologia no espaço euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n	14
2.2	Bolas e conjuntos limitados	18
3	TOPOLOGIA EM ESPAÇOS MÉTRICOS	22
3.1	Espaços métricos	22
3.2	Sequência de Cauchy	32
3.3	Funções contínuas	34
3.4	Espaço métrico de funções	37
4	TEOREMA DA EXISTÊNCIA E UNICIDADE	40
4.1	Método das aproximações sucessivas de Picard e o teorema da contração uniforme	40
4.1.1	Aproximações sucessivas	40
4.1.2	Teorema da contração uniforme	42
4.1.3	Charles-Émile Picard (1854-1941)	47
4.1.4	Stefan Banach (1892-1945)	49
4.2	Teorema da existência e unicidade da solução de equações diferen- ciais ordinárias	50
4.2.1	Intervalo maximal de definição da solução	66
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	70
	REFERÊNCIAS	71

1 Introdução

As equações diferenciais estão intimamente ligadas ao desenvolvimento geral da Matemática no século XVII com Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) no processo de criação do cálculo, motivados por problemas físicos. Segundo (FIGUEIREDO; NEVES, 1979), a preocupação dominante até meados do século XIX é a obtenção de uma solução explícita para as equações que modelavam esses problemas. Mas o leitor pode se perguntar, e para que estudar equações diferenciais? De acordo com (BOYCE; DIPRIMA, 1985), “muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem”. Quando essas relações são traduzidas matematicamente, obtemos equações e suas taxas de variações são derivadas. Dessa forma, “para compreender e investigar problemas envolvendo o movimento de fluido, o fluxo de corrente elétrica em circuitos, a dissipação de calor em objetos sólidos, a propagação de ondas sísmicas, ou o aumento ou diminuição de populações, é necessário saber alguma coisa de equações diferenciais.”

Para ficar mais claro ao leitor, desde o início de 2020 estamos em uma pandemia de um vírus contagioso e com grau de mortalidade alta, e entender o comportamento da disseminação desse vírus é imprescindível para que as autoridades possam tomar decisões mais assertivas. Dessa forma, criar um modelo matemático que possa simular e prever o comportamento do vírus é necessário, e para isso, o primeiro passo é determinar uma equação diferencial que modele o problema da forma mais apropriada. A utilização de métodos matemáticos para estudar a disseminação de doenças contagiosas vem desde a década de 1760, quando Daniel Bernoulli fez um trabalho sobre a varíola, cujo objetivo era avaliar o quão efetivo estava sendo o programa de vacinação.

Com o desenvolvimento da Análise e da Topologia, o estudo das equações diferenciais entra na sua fase moderna com os Teoremas da Existência e Unicidade e se concretiza com Henry Poincaré (1854-1912) com o estudo qualitativo das equações diferenciais ordinárias. Estes teoremas têm sua importância, pois garantir que existe uma solução, através de processos informais pode ser justificada. Nessa fase, o foco deixa de ser a obtenção da solução explícita e passa a ser quais informações podemos extrair sobre a solução de uma equação diferencial sem mesmo conhecê-la. Por exemplo, imagine que um objeto de massa m está caindo na atmosfera, próximo ao nível do mar. Considerando v a velocidade de queda em função do tempo t e admitindo que a resistência do ar seja proporcional à velocidade de queda, isto é, que sua magnitude é dada por γv , obtemos uma equação diferencial que descreve o movimento do objeto em queda, dada por

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v, \quad (1.1)$$

onde $g = 9,8 m/s^2$ é a aceleração por causa da gravidade, próximo à superfície da Terra. Por ser uma equação simples, é fácil resolver, no entanto, podemos extrair informações a respeito das soluções sem a necessidade de encontrá-las explicitamente. Como m , g , γ são constantes, podemos atribuir valores para m e γ , suponha $m = 10 kg$ e $\gamma = 2 kg/s$. Dessa forma, a Equação 1.1 pode ser reescrita como

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5}. \quad (1.2)$$

Agora, suponha $v = 40 m/s$, daí obtemos $\frac{dv}{dt} = 1,8 m/s^2$, isso significa que a taxa de variação de uma solução $v = v(t)$ é igual a $1,8 m/s^2$ em qualquer ponto onde $v = 40 m/s$. Por outro lado, se $v = 50 m/s$, obtemos $\frac{dv}{dt} = -0,2 m/s^2$. Esboçando, em um sistema de eixos $t \times v(t)$, vários segmentos de retas com tais inclinações e também para outros valores de v , obtemos o que chamamos de campo de direções, conforme a Fig.1.

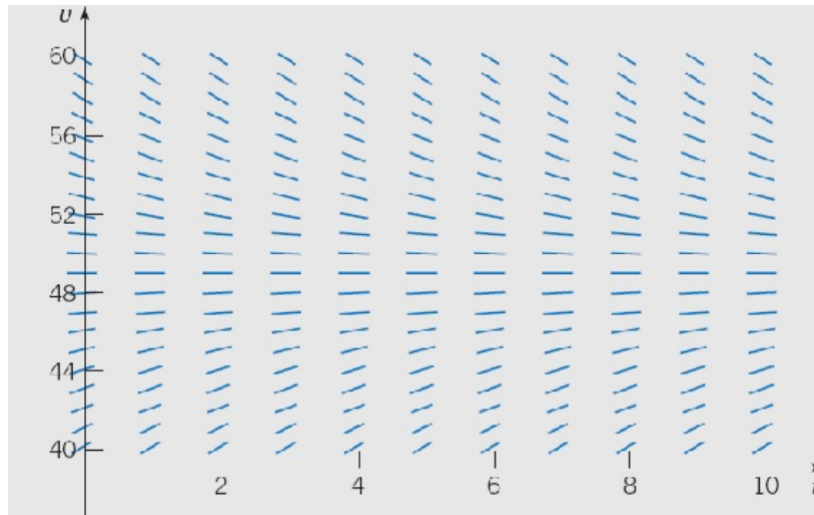


Figura 1 – Campos de Direções de uma solução para a Equação 1.2. Fonte: (BOYCE; DIPRIMA, 1985).

Com este exemplo, podemos perceber que nem sempre é necessário resolver explicitamente uma equação diferencial ordinária para se extrair informações da sua solução, que comportamento terá à medida que aumentamos ou diminuimos a variável independente. A partir da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, e com os Teoremas de Existência e Unicidade de soluções para estas equações, e com o desenvolvimento da Análise, começam a surgir novos métodos de resolução dessas equações diferenciais. Como resolver equações explicitamente se tornava cada vez menos possível dependendo da complexidade da equação, então através de métodos de aproximações, buscava-se aproximar a solução da equação diferencial, como por exemplo, os métodos numéricos. Pensando em aplicações dentro da Engenharia, Economia, Física, ter uma aproximação da solução é tão bom quanto a solução propriamente dita, já que em geral, o problema goza de certa estabilidade em relação à perturbação dos dados observados.

Dessa forma, motivado por tudo o que já foi mencionado acima e mais, que não cabe nesta breve introdução, e também por interesse particular nas equações diferenciais e Análise, é que este trabalho tem seu início a partir dos estudos de equações diferenciais e espaços métricos por meio dos livros (BOYCE; DIPRIMA, 1985) e (LIMA, 1983), respectivamente. Durante o estudo das técnicas de resolução de equações diferenciais ordinárias, percebe-se que nem sempre era possível encontrar uma solução ou mesmo dizer se a solução existe. Visto, também, que não existe uma regra geral para a resolução de equações diferenciais ordinárias, é necessário adotar uma abordagem mais profunda que possa garantir a existência de solução para as equações diferenciais ordinárias em geral. Dessa forma, analisando as funções que definem as equações diferenciais em que os conjuntos que definem essas funções são espaços métricos, podemos estabelecer condições suficientes para garantir não só a existência, mas também a unicidade da solução para as equações diferenciais. Nesse sentido, este trabalho busca apresentar de forma didática o Teorema da Existência e Unicidade no contexto de espaços métricos, isto é, a partir dos conceitos da Análise e topologia geral.

2 Preliminares

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos topológicos no espaço euclidiano n -dimensional, que serão ampliados no próximo capítulo, a fim de facilitar sua compreensão. Em particular, definiremos o espaço métrico euclidiano n -dimensional, bolas, conjuntos limitados, sequências em \mathbb{R}^n , conjuntos abertos, compactos e conjuntos conexos. Além disso, incluímos ao longo do texto, diversos exemplos, de modo que o leitor consiga entender melhor os conceitos definidos. Para uma aprofundamento, indicamos (LIMA, 2004).

2.1 Topologia no espaço euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n

Definição 2.1. *O espaço euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n é definido como o produto cartesiano de n fatores iguais a \mathbb{R} , isto é,*

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}.$$

Os elementos de \mathbb{R}^n são sequências ou listas de n termos reais do tipo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, o termo x_i é chamado de *i -ésima coordenada* de x .

Assim, dados $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, tem-se que $x = y$ se, e somente se, $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$, ou seja, a igualdade entre dois elementos de \mathbb{R}^n implica a igualdade das n coordenadas desses dois elementos.

Dados os elementos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, definimos as operações em \mathbb{R}^n a seguir.

1. **Adição:** $x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$
2. **Multiplicação por um número real:** Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\alpha \cdot x = \alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dessa forma, definidas as operações acima, temos então que \mathbb{R}^n é um espaço vetorial, sendo o elemento $x = (0, 0, \dots, 0)$ denominado *vetor nulo* ou *origem* de \mathbb{R}^n e para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, temos que o simétrico de x é dado por $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$. Portanto, sendo \mathbb{R}^n um espaço vetorial, seus elementos podem ser chamados de *pontos* ou *vetores*.

Os vetores $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ são denominados *vetores canônicos*, e constituem a *base canônica* de \mathbb{R}^n , ou seja, qualquer vetor

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito de forma única como combinação linear de e_1, e_2, \dots, e_n .

Definição 2.2 (Produto Interno). *Dados os vetores $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, definimos o produto interno de x e y , como o número real dado por*

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n.$$

Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$$

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle,$$

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle,$$

$$\langle x, x \rangle > 0 \text{ se } x \neq 0.$$

Quando $\langle x, y \rangle = 0$, dizemos que os vetores são ortogonais, e escrevemos $x \perp y$.

Exemplo 2.3. *Seja $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo. Para todo $y \in \mathbb{R}^n$, o vetor $z = y - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot x$ é ortogonal a x .*

Demonstração. Note que $\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \in \mathbb{R}$, daí temos que

$$\begin{aligned} \langle x, z \rangle &= \left\langle x, y - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot x \right\rangle \\ &= \langle x, y \rangle - \left\langle x, \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot x \right\rangle \\ &= \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot \langle x, x \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $x \perp z$. ■

Além disso, o vetor

$$\alpha \cdot x = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot x$$

é denominado projeção ortogonal de y sobre a reta que contém x , conforme a Fig.2.

Definição 2.4. *Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Definimos o número*

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

como a norma do vetor x .

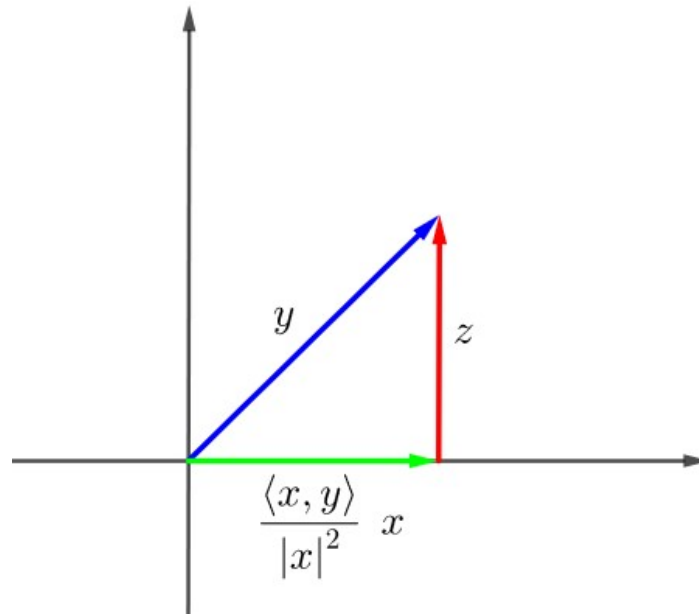


Figura 2 – Projeção de y sobre a reta que contém x . Fonte: autor.

É fácil ver que $|x| \geq 0$. Além disso, se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, então a norma de x é dada por

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Note que da definição acima, concluímos que

$$|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \langle x, x \rangle.$$

De modo geral, a norma euclidiana é qualquer função $|\cdot| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que leva todo $x \in \mathbb{R}^n$ ao número $|x|$, este satisfazendo as propriedades a seguir.

Proposição 1. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se as seguintes propriedades:*

1. $|x| \geq 0$, com $|x| = 0$, se, e somente, se $x = 0$,
2. $|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x|$,
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

A demonstração de (1) e (2) são imediatas. Faremos a prova da propriedade (3), mas antes, mostraremos um resultado muito importante, conhecido como Desigualdade de Schwarz.

Proposição 2. (Desigualdade de Schwarz) *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se $|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$, valendo a igualdade se, e somente se, um dos vetores é múltiplo do outro.*

Demonstração. Observe que, se $x = 0$, o resultado é óbvio. Suponha que $x \neq 0$, daí pelo Exemplo 2.3, podemos escrever $y = \alpha x + z$, com $z \perp x$ e $\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{|x|^2}$. Daí temos que

$$\begin{aligned} |y|^2 = |\alpha x + z|^2 &= \langle \alpha x + z, \alpha x + z \rangle \\ &= \langle \alpha x, \alpha x \rangle + \langle \alpha x, z \rangle + \langle z, \alpha x \rangle + \langle z, z \rangle \\ &= \alpha^2 |x|^2 + 2 \langle z, \alpha x \rangle + |z|^2 \\ &= \alpha^2 |x|^2 + |z|^2. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $|y|^2 \geq \alpha^2 |x|^2 \Leftrightarrow |y|^2 \geq |\alpha x|^2 \Leftrightarrow |y| \geq |\alpha x|$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $y = \alpha x$. Por outro lado, substituindo $\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{|x|^2}$, fica

$$|y|^2 \geq \alpha^2 |x|^2 = \frac{\langle x, y \rangle^2}{|x|^4} \cdot |x|^2 = \frac{\langle x, y \rangle^2}{|x|^2}.$$

Logo, temos

$$|y|^2 \geq \frac{\langle x, y \rangle^2}{|x|^2} \Leftrightarrow |x|^2 \cdot |y|^2 \geq \langle x, y \rangle^2 \Leftrightarrow |x| \cdot |y| \geq |\langle x, y \rangle|,$$

valendo a igualdade se, e somente se, $y = \alpha x$, ou seja, se y for múltiplo de x . ■

A seguir, apresentamos uma prova para a desigualdade (3).

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= |x|^2 + 2 \cdot \langle x, y \rangle + |y|^2 \\ &\leq |x|^2 + 2 \cdot |\langle x, y \rangle| + |y|^2. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Schwarz em $|\langle x, y \rangle|$,

$$|x + y|^2 \leq |x|^2 + 2 \cdot |x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Daí, concluímos que $|x + y| \leq |x| + |y|$. ■

Além da norma euclidiana, há mais duas outras normas em \mathbb{R}^n , a saber

1. $|x|_M = \text{máx} \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ (norma do máximo).
2. $|x|_S = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ (norma da soma).

2.2 Bolas e conjuntos limitados

Definição 2.5. Considere em \mathbb{R}^n a norma euclidiana. Dados um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r > 0$, chamamos de **bola aberta** de centro a e raio r o conjunto $B(a; r)$ dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $|x - a| < r$, isto é,

$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < r\}.$$

Definição 2.6. Dados um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r > 0$, chamamos de **bola fechada** de centro a e raio r , o conjunto $B[a; r]$ dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $|x - a| \leq r$, isto é,

$$B[a; r] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| \leq r\}.$$

Definição 2.7. Dados um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r > 0$, chamamos de **esfera** de centro a e raio r , o conjunto $S[a; r]$ dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $|x - a| = r$, isto é,

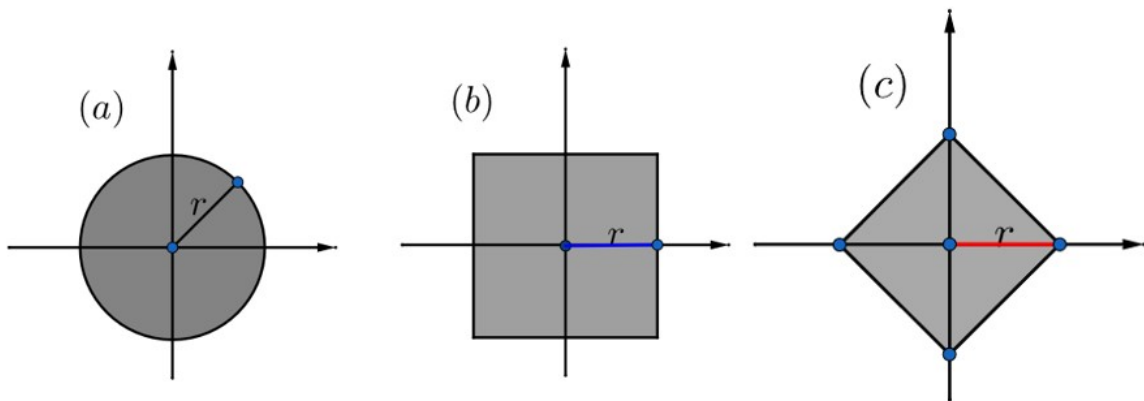
$$S[a; r] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| = r\}.$$

Das definições anteriores, concluímos que

$$B[a; r] = S[a; r] \cup B(a; r).$$

Além disso, observe que em cada definição, estamos considerando a norma euclidiana.

A representação gráfica das bolas e esferas em \mathbb{R}^n dependem exclusivamente da norma considerada em cada conjunto. Considere, por exemplo, a bola fechada $B[0; 1]$ em \mathbb{R}^2 , na norma euclidiana e na norma da soma, seria como em (Fig. 3a) e (Fig. 3c), respectivamente. A esfera unitária $S[0; 1]$ em \mathbb{R}^2 está representada em (Fig. 3b).



(a) $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$; (b) $|(x, y)|_M = \{|x|, |y|\} = 1$; (c) $|(x, y)|_S = |x| + |y| = 1$.

Figura 3 – Disco e esfera unitário(a) em \mathbb{R}^2 em cada norma. Fonte: autor.

A seguir, apresentamos algumas definições importantes sobre conjunto limitado e conjunto convexo.

Definição 2.8. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que X é um conjunto limitado quando X está contido em alguma bola $B[a; r]$, $r > 0$.*

Definição 2.9. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação em $X \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que f é limitada, quando sua imagem $f(X) \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto limitado, ou seja, existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in X$.*

Definição 2.10. (Reta) *Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, com $a \neq b$, o conjunto $ab = \{(1-t)a+tb, t \in \mathbb{R}\}$ é a reta que une os pontos a e b .*

Note que, quando $0 \leq t \leq 1$, diz-se que o conjunto $[a; b] = \{(1-t)a+tb, 0 \leq t \leq 1\}$ é o segmento de reta de extremidades a e b .

Definição 2.11. (Conjunto Convexo) *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que X é um conjunto convexo quando para quaisquer pontos $a, b \in X$, o segmento de reta $[a; b]$ está contido em X .*

Exemplo 2.12. *Mostre que toda bola (aberta ou fechada) é um conjunto convexo.*

Demonstração. Considere a bola fechada $B = B[x_0; r]$. Então, dados $a, b \in B$, tem-se

$$|a - x_0| \leq r,$$

$$|b - x_0| \leq r.$$

Assim, para algum $t \in [0, 1]$, temos

$$x_0 = (1-t)x_0 + tx_0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |(1-t)a + tb - x_0| &= |(1-t)a + tb - (1-t)x_0 - tx_0| \\ &\leq |(1-t)(a - x_0)| + |t(b - x_0)| \\ &\leq (1-t)|a - x_0| + t|b - x_0| = (1-t)r + tr = r. \end{aligned}$$

Assim, como $|c| \leq r, \forall c \in [a; b]$, então $[a; b] \subseteq B$. Para a bola $B = B(x_0; r)$, o procedimento é análogo. ■

Definição 2.13. (Ponto interior) *Seja $a \in X \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que a é um ponto interior de X quando, para algum $r > 0$, tem-se $B(a; r) \subset X$.*

Definição 2.14. (Interior de um conjunto) *O interior de um conjunto X é o conjunto $\text{int}(X)$, formado pelos pontos interiores a X .*

É fácil ver que, sendo $p = (a, b)$ um ponto, então:

- Se $p = (a, b) \in \text{int}(X)$, então $p \in X$.
- $p = (a, b) \in X$ não implica $p \in \text{int}(X)$.

Quando $a \in \text{int}(X)$, diz-se que X é uma vizinhança de a .

Exemplo 2.15. *Mostre que, sendo $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$, se $p \in \text{int}(X)$, então $p \in X$, mas a recíproca não é verdadeira.*

Demonstração. De fato, se $p = (a, b) \in \text{int}(X)$, então, por definição, $p \in X$. Por outro lado, os pontos da forma $p = (a, 0)$ pertencem a X mas não ao conjunto $\text{int}(X)$, pois, os pontos da forma $p = (a, 0)$ pertencem a bola $B[a, r]$ mas não a bola $B(a, r)$. Portanto, para todo $r > 0$, a bola $B(p; r) \not\subset X$. Assim, nem todo ponto de X é interior a X . ■

Graficamente, o que temos é a seguinte representação do conjunto X e da bola B (Fig. 4). Note que todos os pontos que estão na área hachurada não pertencem a X , pois têm coordenadas $y < 0$ e, por isso, $B(p; r) \not\subset X$.

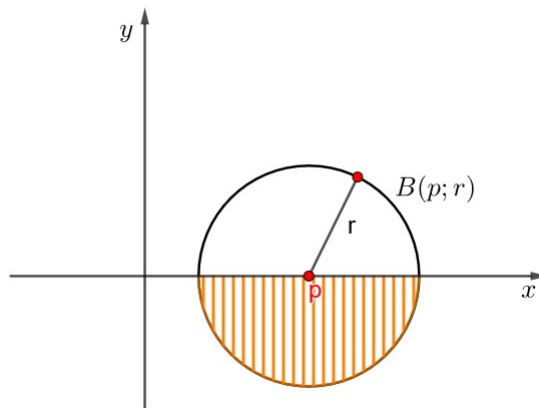


Figura 4 – Bola de centro p e raio r . Fonte: autor.

Definição 2.16. (**Conjunto aberto**) *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que X é um conjunto aberto se todos os seus pontos são pontos interiores, isto é, $\text{int}(X) = X$.*

Definição 2.17. (**Fronteira**) *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Chamamos de fronteira de X o conjunto $\text{fr}(X)$, formado pelos pontos de X que não pertencem ao interior de X juntamente com os pontos de $\mathbb{R}^n - X$ que não são interiores a $\mathbb{R}^n - X$.*

Exemplo 2.18. *Seja $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$. Mostre que a fronteira de X é o eixo dos x .*

Demonstração. Note que $\mathbb{R}^2 - X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$. Além disso, para todo ponto $a \in \mathbb{R}^2 - X$ e $r > 0$ existe uma bola aberta $B(a, r) \subset \mathbb{R}^2 - X$. Daí, todo ponto de $\mathbb{R}^2 - X$ é interior a $\mathbb{R}^2 - X$. Logo, $\mathbb{R}^2 - X$ é um conjunto aberto.

Daí, nenhum ponto de $\mathbb{R}^2 - X$ está na fronteira de X . Por outro lado, todo ponto $p = (a, 0) \in X$, mas não pertence ao interior de X . Portanto, a fronteira de X é o conjunto

$$fr(X) = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{eixo dos } x.$$

■

Teorema 2.19. (a) Se A_1 e A_2 são abertos em \mathbb{R}^n , então $A_1 \cap A_2$ é aberto.

(b) Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família arbitrária de conjuntos abertos $A_\lambda \subset \mathbb{R}^n$, então a reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

Demonstração. (a) Se $x \in A_1 \cap A_2$, então $x \in A_1$ e $x \in A_2$. Como A_1 e A_2 são abertos, existem $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tais que a bola $B_1(x; r_1) \subset A_1$ e $B_2(x; r_2) \subset A_2$. Agora, seja r o menor dos r_1 e r_2 , daí $B(x; r) \subset A_1$ e $B(x; r) \subset A_2$. Logo, $B(x; r) \subset A_1 \cap A_2$ e, portanto, todo ponto $x \in A_1 \cap A_2$ é ponto interior, ou seja, $A_1 \cap A_2$ é aberto. ■

Demonstração. (b) Note que, se $x \in A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, então existe um $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, então para algum $r > 0$, tem-se que a bola $B(x; r) \subset A_\lambda \subset A$. Logo, x é ponto interior de A e, portanto, $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto. ■

3 Topologia em Espaços Métricos

Neste capítulo serão implantados os conhecimentos de topologia em espaços métricos. Grosso modo, dizemos que um conjunto é um espaço métrico quando de alguma forma, podemos medir a distância entre seus elementos, e a esse modo de medir chamamos de *métrica*. Assim, já podemos garantir que o espaço euclidiano n -dimensional é um espaço métrico, o qual já foi apresentado no capítulo anterior. Dessa forma, vamos ampliar, neste capítulo, alguns conceitos que já foram mencionados no capítulo anterior, e adicionar outros conceitos sobre espaços métricos quaisquer, tais como bolas abertas, fechadas, sequências e sequências de Cauchy, conjuntos compactos, conjuntos conexos, entre outros, que servirão de alicerce para a demonstração do *Teorema da Existência e Unicidade de Solução de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO)*, bem como para o *Teorema da Contração Uniforme*. É importante lembrar que os elementos de um espaço métrico serão chamados de pontos, uma vez que eles podem ter natureza diversa, como por exemplo, podem ser uma matriz, um polinômio, um ponto, um conjunto, etc.

3.1 Espaços métricos

Definição 3.1. *Seja M um conjunto não vazio. Definimos a aplicação $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, denominado distância de x até y , como sendo a **métrica** entre x e y , de modo a satisfazer as quatro condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

1. $d(x, x) = 0$,
2. $d(x, y) > 0$, se $x \neq y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (*Simetria*),
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*Desigualdade triangular das métricas*).

Note que a métrica é uma generalização do conceito de distância, isto é, em geral sempre que falamos em distância pensamos em pontos do plano cartesiano com coordenadas (x, y) na qual distância é calculada sempre usando a métrica euclidiana, no entanto, em um espaço métrico qualquer basta que a forma de calcular a distância entre os seus pontos satisfaça as condições acima.

Definição 3.2. *Espaço Métrico é um par (M, d) , onde M é um conjunto e d é uma métrica definida em M .*

Isso significa que para termos um espaço métrico, ou melhor, para que um conjunto não vazio seja espaço métrico, deve existir uma maneira de medir a distância entre seus pontos, onde o responsável por isso é a métrica definida. A seguir, damos alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 3.3. (Métrica zero-um) *Todo conjunto $M \neq \emptyset$ munido da métrica $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $d(x, y) = 0$ se $x = y$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$ é um espaço métrico.*

Exemplo 3.4. *Se $M = \mathbb{R}^n$, então*

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

para quaisquer $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^n , é a métrica euclidiana.

Além da métrica utilizada no Exemplo 3.4, há mais duas outras maneiras de definir distância entre dois pontos em \mathbb{R}^n . São elas:

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$

$$d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\},$$

onde d' e d'' são denominadas, respectivamente, métrica da soma e do máximo de x e y , para todo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^n .

Proposição 3. *Sejam d , d' e d'' as métricas definidas acima. Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se*

$$d''(x, y) \leq d(x, y) \leq d'(x, y) \leq n \cdot d''(x, y). \quad (3.1)$$

Demonstração. Note que

$$d''(x, y) = \max\{|x_i - y_i|\} = |x_k - y_k|$$

para algum $1 \leq k \leq n$. Daí segue que

$$d''(x, y) = |x_k - y_k| = \sqrt{(x_k - y_k)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = d(x, y).$$

Logo, $d''(x, y) \leq d(x, y)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2} \\ &\leq \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2 + \sum_{i \neq j} |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j|} \\ &= \sqrt{(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|)^2} \\ &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| = d'(x, y). \end{aligned}$$

Logo, $d(x, y) \leq d'(x, y)$. Por fim, temos que

$$|x_i - y_i| \leq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

para $1 \leq i \leq n$. Assim,

$$\begin{aligned} d'(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| \\ &\leq \max\{|x_i - y_i|\} + \max\{|x_i - y_i|\} + \dots + \max\{|x_i - y_i|\} \\ &= n \cdot \max\{|x_i - y_i|\} = n \cdot d''(x, y). \end{aligned}$$

Daí, temos $d'(x, y) \leq n \cdot d''(x, y)$. Portanto,

$$d''(x, y) \leq d(x, y) \leq d'(x, y) \leq n \cdot d''(x, y).$$

■

Definição 3.5. (*Distância entre ponto e conjunto*) Seja x um ponto e A um subconjunto de um espaço métrico M . Definimos a distância do ponto x ao conjunto A como o número real

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a); a \in A\}$$

tal que

- (i) para todo $a \in A$, $d(x, A) \leq d(x, a)$,
- (ii) dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < d(x, A) + \epsilon$.

Proposição 4. Seja A um subconjunto não-vazio de um espaço métrico M . Quaisquer que sejam $x, y \in M$, tem-se

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y). \quad (3.2)$$

Demonstração. Para provar a desigualdade acima, observe que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \iff -d(x, y) \leq d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$$

Daí, obtemos duas desigualdades,

$$-d(x, y) \leq d(x, A) - d(y, A) \iff d(y, A) \leq d(y, x) + d(x, A), \quad (3.3)$$

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y) \iff d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A). \quad (3.4)$$

Como x, y são arbitrários, basta provarmos uma das desigualdades, a outra é totalmente análoga, e deixamos a cargo do leitor como exercício. Assim, pela Definição (3.5ii), para todo $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que

$$d(x, a) < d(x, A) + \epsilon.$$

Por outro lado, pela desigualdade triangular, segue que

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a).$$

Logo,

$$d(y, a) < d(y, x) + d(x, A) + \epsilon.$$

Assim, de (3.5i), $d(y, A) \leq d(y, a)$, e como ϵ é arbitrário, temos

$$d(y, A) \leq d(y, x) + d(x, A).$$

Portanto, tem-se $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$. ■

Corolário 3.6. *Quaisquer que sejam $x, y, z \in M$, tem-se $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.*

Demonstração. Note que

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \iff -d(x, y) \leq d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y).$$

Daí, obtemos as seguintes desigualdades

$$-d(x, y) \leq d(x, z) - d(y, z), \tag{3.5}$$

$$d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y). \tag{3.6}$$

Observe que pela desigualdade triangular para métricas, temos

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \iff d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y),$$

o que prova a desigualdade (3.6). Analogamente,

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \iff d(y, z) - d(x, z) \leq d(y, x) \iff -d(y, z) + d(x, z) \geq -d(y, x).$$

Logo, pela propriedade da simetria das métricas, tem-se

$$d(x, z) - d(y, z) \geq -d(x, y) \iff -d(x, y) \leq d(x, z) - d(y, z),$$

que demonstra a desigualdade (3.5). Portanto, tem-se $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$ para quaisquer $x, y, z \in M$. ■

Definição 3.7. *Um subespaço métrico é qualquer subconjunto N não vazio de um espaço métrico M com a métrica de M restrita aos pontos de N . Neste caso, a métrica de N chama-se **métrica induzida**.*

Definição 3.8. (Sequência) *Uma sequência em um conjunto M é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow M$, que associa a cada n natural um ponto do espaço métrico M , e denotamos por $\{x_n\}$.*

Definição 3.9. (Sequência convergente) Seja $\{x_n\}$ uma sequência de pontos no espaço métrico M . Dizemos que $\{x_n\}$ converge para um ponto $x \in M$ se dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ para cada $n \geq N$. O ponto $x \in M$ é chamado o limite da sequência e denotamos por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

A seguir, relembremos algumas definições apresentadas na seção 2.2.

Definição 3.10. (Bola Fechada) Dados um ponto $x \in M$ e um número real $r > 0$, o conjunto $\bar{B}(x, r) = \{y \in M \mid d(y, x) \leq r\}$ é chamado de bola fechada de centro x e raio r .

Definição 3.11. (Bola Aberta) Dados um ponto $x \in M$ e um número real $r > 0$, o conjunto $B(x, r) = \{y \in M \mid d(y, x) < r\}$ é chamado de bola aberta de centro x e raio r .

Definição 3.12. (Esfera) Dados um ponto $x \in M$ e um número real $r > 0$, o conjunto $S(x, r) = \{y \in M \mid d(y, x) = r\}$ é chamado de esfera de centro x e raio r .

Definição 3.13. (Ponto interior) Seja $X \subset M$ um subconjunto do espaço métrico M . Dizemos que $a \in X$ é ponto interior de X se a é o centro de uma bola aberta contida em X , ou seja, existe um $r > 0$ tal que $d(x, a) < r \implies x \in X$.

Definição 3.14. (Interior de um conjunto) Seja $X \subset M$ um subconjunto do espaço métrico M . O interior de X , denotado por $\text{int}(X)$, é o conjunto de todos os pontos interiores a X .

É fácil ver que, se $b \in X$, mas não é interior a X , então qualquer bola aberta de centro b contém algum ponto que não pertence a X . A (Fig. 5) resume de forma simples as Definições 3.13, 3.14 e 3.20, onde a é ponto interior a X e b é ponto de fronteira de X .

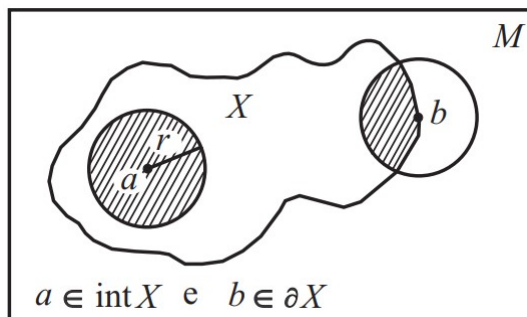


Figura 5 – Interior e fronteira de X . Fonte: (LIMA, 1983).

Definição 3.15. (Conjunto aberto) Seja $X \subset M$ um subespaço métrico de M . Dizemos que X é um conjunto aberto quando todos os seus pontos são interiores.

Definição 3.16. (Ponto aderente) Seja $C \subset M$. Dizemos que $x \in M$ é ponto aderente a C quando $d(x, C) = 0$.

Definição 3.17. (Conjunto Fechado) Seja $X \subset M$. Dizemos que X é um subconjunto fechado de M se, e somente se, contém todos os seus pontos aderentes.

Definição 3.18. (Fecho de um conjunto) Seja $C \subseteq M$ um subconjunto do espaço métrico M . O fecho de C e denotado por \overline{C} é o conjunto de todos os pontos de M que são aderentes a C .

Proposição 5. Um subconjunto X de M é fechado se, e somente se, seu complementar $M - X$ é aberto.

Demonstração. Consideremos $X \neq \emptyset$. Dado $x \in M - X$, como X é um conjunto fechado e $x \notin X$, temos que x não é ponto aderente a X , ou seja, existe uma bola $B(x, r)$ tal que $B(x, r) \cap X = \emptyset$. Logo, temos que $B(x, r) \subset M - X$. Portanto, $M - X$ é aberto. Agora, sendo $M - X$ aberto, temos que todo ponto $x \in M - X$ é centro de uma bola aberta disjunta de X . Logo, nenhum ponto de $M - X$ é ponto aderente de X . Então, X contém todos os seus pontos aderentes. Portanto, X é um conjunto fechado. ■

Exemplo 3.19. Seja $M = \mathbb{R}$ com a métrica $d(x, y) = |x - y|$. O conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-1, 0)\}$ não é fechado. Tome, por exemplo, a sequência $x_n = \frac{1}{n} - 1$. Temos que a sequência converge para -1 , mas $-1 \notin X$. Logo, como existe uma sequência em que seu limite não pertence a X , então X não é fechado.

Proposição 6. Seja M um espaço métrico. Toda bola fechada é um conjunto fechado. Toda bola aberta é um conjunto aberto.

Demonstração. Seja $B = B(a, r)$ a bola aberta de centro a e raio $r > 0$. Queremos mostrar que B é um conjunto aberto. De fato, seja $x \in B$. Então $|x - a| < r$, logo $s = r - |x - a| > 0$. Afirmamos que $B(x, s) \subset B$. De fato, $y \in B(x, s) \implies |y - x| < s = r - |x - a|$. Logo, $y \in B(x, s) \implies |y - x| \leq |y - x| + |x - a| < r - |x - a| + |x - a| = r$. Daí concluímos que $y \in B(a, r)$ é ponto interior de B . Como y é arbitrário, segue portanto, que $B(a, r)$ é um conjunto aberto. Agora, seja $\overline{B}[a, r]$ a bola fechada de centro a e raio $r > 0$, vamos mostrar que $\overline{B}[a, r]$ é um conjunto fechado. Considere $\overline{B}[a, r]$ e $x \in M - \overline{B}[a, r]$. Assim, temos que $d(x, a) > r \implies s = d(x, a) - r > 0$. Considere agora a bola aberta $B(x, s)$. Se $y \in B(x, s)$, então pela desigualdade triangular $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ daí como $y \in B(x, s) \implies d(x, y) < s$, logo $d(x, a) < s + d(y, a) = d(x, a) - r + d(y, a) \implies d(y, a) > r$. Logo, $B(x, s) \subset M - \overline{B}[a, r]$. Portanto, $M - \overline{B}[a, r]$ é um conjunto aberto e, pela proposição 5 $\overline{B}[a, r]$ é fechado. ■

Definição 3.20. (Fronteira) A fronteira de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto $\text{fr}.X$ formado pelos pontos de X que não são interiores a X , juntamente com os pontos de $\mathbb{R}^n - X$ que não são interiores a $\mathbb{R}^n - X$.

Exemplo 3.21. Mostre que $\text{int}(X) \cup \text{fr}.X \cup \text{int}(M - X) = M$ é uma reunião disjunta.

Demonstração. Note que $\text{int}(X)$ e $\text{int}(M - X)$ são abertos, por definição. Logo, se $x \in X \implies x \notin M - X$. Daí $\text{int}(X) \cap \text{int}(M - X) = \emptyset$. Além disso, $\text{fr}.X$ é o conjunto dos pontos de fronteira de X . Assim, se $x \in \text{fr}.X \implies x \notin \text{int}(X)$ e $x \notin \text{int}(M - X)$. Daí, segue que $\text{fr}.X \cap \text{int}(X) = \text{fr}.X \cap \text{int}(M - X) = \emptyset$. Dessa forma, os conjuntos $\text{int}(X)$, $\text{fr}.X$ e $\text{int}(M - X)$ são disjuntos. Então, para qualquer ponto $x \in M$ só há três possibilidades, $x \in \text{int}(X)$, ou $x \in \text{fr}.X$, ou $x \in \text{int}(M - X)$. Portanto, $M = \text{int}(X) \cup \text{fr}.X \cup \text{int}(M - X)$ é uma reunião disjunta. ■

Exemplo 3.22. Tome $M = \mathbb{R}$. Qualquer conjunto aberto $(a, b) \in \mathbb{R}$ tem como fecho, o conjunto fechado $[a, b] \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.23. Seja $M = \mathbb{R}^2$. Tome o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. Então, o fecho de X é o conjunto fechado $\overline{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$.

Definição 3.24. (Ponto isolado) Seja M um espaço métrico. Um ponto $a \in M$ é dito isolado quando existe um $r > 0$ tal que $B(a, r) = \{a\}$, ou seja, quando a é a bola aberta em M .

Definição 3.25. (Espaço métrico discreto) Um espaço métrico M chama-se discreto se todo ponto de M é isolado.

Definição 3.26. (Cisão de um espaço métrico) Uma cisão de um espaço métrico M é uma decomposição $M = A \cup B$ de M como uma reunião de dois subconjuntos abertos disjuntos A e B .

Note que os conjuntos A e B são abertos, mas também são fechados, pois pela proposição 5, são complementares de um aberto, Observe os exemplos a seguir.

Exemplo 3.27. Seja o espaço métrico $M = \mathbb{R} - \{0\}$. A reunião $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ é uma cisão de M .

Exemplo 3.28. Seja X um espaço métrico discreto. Todo subconjunto $A \subset X$ determina em X uma cisão.

Definição 3.29. A cisão $M = A \cup B$ diz-se trivial, quando um dos abertos A ou B é vazio e, portanto, o outro é M .

Definição 3.30. (Conjunto conexo) Um espaço métrico M chama-se conexo quando a única cisão possível de M é a trivial. Caso contrário, M é desconexo.

Exemplo 3.31. *Todo espaço métrico discreto com mais de um ponto é desconexo.*

Note que a conexidade de um conjunto é um conceito intrínseco ao conjunto, isto é, ao contrário dos conceitos de conjuntos fechados, abertos, etc, ser conexo não depende do espaço ambiente. Assim, $X \subseteq N \subseteq M$ é um conjunto conexo do espaço métrico N se, e somente se, é também conjunto conexo do espaço métrico M com a métrica induzida.

Proposição 7. *A reta \mathbb{R} é um espaço conexo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista uma cisão não-trivial, isto é, $\mathbb{R} = A \cup B$, com A e B abertos disjuntos. Sejam $a \in A$ e $b \in B$, com $a < b$. Seja, também, $X = \{x \in A \mid x < b\}$. Como $a \in X$, então $X \neq \emptyset$. Além disso, b é uma cota superior de X . Logo, existe um c tal que $c = \sup X$, ou seja, $c \leq b$. Daí, pela definição de supremo, para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ (por conseguinte $x \in A$) tal que $c - \epsilon < x \leq c$. Logo, $c \in \bar{A}$. Assim, se A é fechado, concluímos que $c \in A$. Como $b \in B$, concluímos que $c \neq b$, onde $c < b$, pois $c \in A$. Por outro lado, como A é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $c + \epsilon < b$ e $(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset A$. Então todos os pontos do intervalo $(c, c + \epsilon)$ pertencem a X , o que é um absurdo, pois $c = \sup X$. Portanto, \mathbb{R} é um espaço conexo. ■

Definição 3.32. (Componente Conexa) *Seja $C \subseteq M$. Diz-se que C é uma componente conexa, se C é um conjunto conexo máximo de M , isto é, para todo conjunto conexo L de M , temos $L \subseteq C$ tal que $L \cap C \neq \emptyset$.*

Um resultado imediato desta definição é a proposição a seguir.

Proposição 8. *Um espaço métrico M é conexo se, e somente se, possui uma única componente conexa.*

Demonstração. Seja M conexo. Assim, suponha que C_1 e C_2 sejam componentes conexas de M . Vamos mostrar que $C_1 = C_2$. De fato, como C_1 é uma componente conexa de M , então, pela Definição 3.32, temos que $C_2 \subset C_1$. Analogamente, C_2 é componente conexa, logo $C_1 \subset C_2$. Portanto, temos $C_1 = C_2$. Agora, seja C a única componente conexa de M . Como para todo subconjunto $L \subset M$, tem-se $L \subseteq C$, então a única cisão de M é a trivial e, portanto, M é conexo. ■

Definição 3.33. (Cobertura) *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M . Uma cobertura S de X é uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de M tais que $S = \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$.*

Definição 3.34. (Subcobertura) *Uma subcobertura de \mathcal{C} é uma subfamília $\mathcal{C}' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$, se existe um subconjunto $L' \subset L$ tal que, para cada $x \in X$, ainda pode se obter $\lambda \in L'$ com $x \in C_\lambda$, isto é, $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$.*

Definição 3.35. Uma cobertura $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ é aberta quando cada conjunto A_λ , $\lambda \in L$ é aberto em M .

Definição 3.36. Uma cobertura $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ é dita finita quando L é um conjunto finito, ou seja, $L = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

Definição 3.37. (Espaços Compactos) Um espaço métrico M chama-se compacto quando toda cobertura aberta possui uma subcobertura finita.

Proposição 9. Se $K, L \subset M$ são subconjuntos compactos, então a união $K \cup L$ é compacta.

Demonstração. De fato, se $K \cup L \subset M$, então $K \cup L \subset \bigcup A_\lambda$, onde A_λ é uma família de conjuntos tal que $M = \bigcup A_\lambda$. Daí, segue que $K \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$ e $L \subset A_{\lambda_{n+1}} \cup \dots \cup A_{\lambda_p}$. Portanto, $K \cup L \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n} \cup A_{\lambda_{n+1}} \cup \dots \cup A_{\lambda_p}$. ■

Isso mostra que a reunião de um número finito de compactos também é compacto. Por outro lado, a reunião infinita de compactos pode não ser compacta. Indicamos ao leitor, a leitura de (LIMA, 1983) para um aprofundamento.

Exemplo 3.38. Mostre que todo subconjunto compacto de um espaço métrico é sempre fechado e que todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é sempre compacto.

Demonstração. Seja $C \subset M$ um subconjunto compacto de um espaço métrico M . Vamos mostrar que C é fechado. Para isso, seja $\{x_n\}$ uma sequência em C que converge para um ponto a de M . Precisamos mostrar que $a \in C$. Ora, como C é compacto, tem-se que toda subsequência $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ converge para um ponto $x \in M$. Como o limite de $\{x_n\}$ existe e é igual ao limite de todas as subsequências, temos que $x = a$. Mas como $\{x_n\}$ foi escolhida arbitrariamente e converge para $a \in M$, então C contém todos os pontos de aderência e, portanto, é fechado. Agora, se C é fechado, e M é compacto, queremos mostrar que C é compacto. De fato, se C é fechado, então C contém o limite de toda sequência convergente em C . Daí, seja $\{x_n\} \subset C$ uma sequência qualquer. Como $\{x_n\} \subset M$ e M é compacto, temos que existe uma subsequência $\{x_{n_k}\} \subset M$ que converge para a . Como $\{x_{n_k}\} \subset C$ e C é fechado, necessariamente $a \in C$. Portanto, C é compacto. ■

Definição 3.39. (Conjunto Limitado) Um subconjunto X de um espaço métrico M é dito limitado, se ele cabe numa bola de M com raio conveniente.

Outro resultado sobre espaços compactos é o que segue na proposição 10.

Proposição 10. Todo conjunto compacto é limitado.

Demonstração. Seja M um espaço métrico compacto. Assim, para cada ponto $x \in M$, seja $A_x = B(x, 1)$, as bolas abertas de centro x e raio unitário. Logo, o conjunto $(A_x)_{x \in M}$ forma uma cobertura aberta de M , pois $M \subset \bigcup_{x \in M} A_x$. Como M é compacto, podemos obter uma subcobertura finita de M tal que $M \subset A_{x_1} \cup A_{x_2} \cup \dots \cup A_{x_n}$. Como cada A_{x_i} com $1 \leq i \leq n$ é limitado, a reunião finita $A_{x_1} \cup A_{x_2} \cup \dots \cup A_{x_n}$ também é limitada. Portanto, M é limitado. ■

Exemplo 3.40. *Mostre que é um conjunto compacto de \mathbb{R}^{k+1} a esfera k -dimensional $S^k = \{x \in \mathbb{R}^{k+1} : |x| = 1\}$.*

Demonstração. S^k é fechado, pois é a fronteira de $B(0, 1)$, isto é, $S^k = \overline{B(0, 1)} \cap \overline{B(0, 1)^c}$. Seja $\{x_n\} \subset S^k$ uma sequência qualquer. Logo, $d(0, x_n) = |x_n| = 1$. Temos então que $\{x_n\}$ é uma sequência limitada em \mathbb{R} . Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência convergente $\{|x_{n_k}|\} \subset \{|x_n|\} \subset \mathbb{R}$ tal que $|x_{n_k}| \rightarrow |x|$ em \mathbb{R} . Queremos mostrar agora que $x \in S^k$. Para isso, note que, como $|x_{n_k}|$ converge para $|x|$, isso significa que

$$||x_{n_k}| - |x|| \leq \epsilon.$$

Como $|x_{n_k}| = 1$, segue que

$$|1 - |x|| \leq \epsilon \implies 1 - \epsilon \leq |x| \leq 1 + \epsilon, \forall \epsilon > 0.$$

Daí, obtemos que $|x| = 1$, logo $x \in S^k$. Portanto, S^k é compacto. ■

Definição 3.41. (Sequência Limitada) *Uma sequência $\{x_n\}$ é limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existe um $c > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leq c$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 3.42. *Seja $M = \mathbb{R}$ e $x_n = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que $\{x_n\}$ é uma sequência de pontos limitada, cujos valores oscilam entre -1 e 1 .*

Exemplo 3.43. *Mostre que toda sequência convergente é limitada, mas a recíproca não é verdadeira.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de pontos convergente em um espaço métrico M cujo $\lim x_n = a$. Logo, tomando $\epsilon = 1$, obtemos um $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ tem-se $x_n \in B(a, 1)$. Portanto, o conjunto dos valores da sequência está contido na reunião $\{x_1, x_2, \dots, x_N\} \cup B(a, 1)$ de dois conjuntos limitados, logo é limitado. Para a recíproca, basta tomar $\{x_n\}$ como no Exemplo 3.42. ■

3.2 Sequência de Cauchy

Definição 3.44. (*Sequência de Cauchy*) Uma sequência de pontos de um espaço métrico M é dita sequência de Cauchy se, e somente se, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, existe um $N > 0$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para quaisquer que sejam $n, m \geq N$, ou equivalentemente, $d(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$ para quaisquer $n \geq N$ e $p \in \mathbb{N}$.

Intuitivamente, uma sequência é de Cauchy se a partir de $n \geq N$, à medida que n cresce, a distância entre os pontos da sequência diminui. Isso mostra, portanto, que ser de Cauchy é uma propriedade intrínseca da sequência, ou seja, depende apenas dos seus próprios pontos e não de outro ponto do espaço métrico M . Por exemplo, para que uma sequência seja convergente, deve existir um ponto do espaço métrico M para o qual esta sequência convirja, ou seja, ser convergente não é uma propriedade intrínseca da sequência. Assim, uma consequência da Definição 3.44 é a seguinte.

Proposição 11. *Toda sequência convergente é também de Cauchy.*

Demonstração. De fato, seja $\{x_n\}$ uma sequência de pontos convergente de um espaço métrico M tal que $\lim x_n = a$. Assim, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $N > 0$ tal que para todo $n > N$ implica $d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Daí, tomando $m, n > N$, temos pela desigualdade triangular para métricas que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(x_m, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy. ■

Intuitivamente, o que significa é que à medida que os pontos de uma sequência $\{x_n\}$ se aproximam de um ponto $a \in M$ (limite de x_n), seus pontos vão necessariamente aproximando-se uns aos outros. Uma pergunta que surge naturalmente a partir dessa proposição é: a recíproca é verdadeira?, isto é, toda sequência de Cauchy é convergente? A resposta é não. Tome, por exemplo, a sequência $\{x_n\}$ dada por $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, ela não é convergente no espaço métrico $(0, 1)$ com a métrica euclidiana, mas é de Cauchy.

Proposição 12. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy no espaço métrico M . Tomando $\epsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > N$, tem-se $d(x_n, x_m) < 1$. Daí, como os pontos de $\{x_n\}$ aproximam-se quando $n, m > N$ cresce, então o conjunto $\{x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\}$ é limitado, isto é, existe uma bola centrada em algum x_{N+p} e raio $r = \frac{1}{2}$ tal que $\{x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\} \subset B\left(x_{N+p}, \frac{1}{2}\right)$. Portanto, como o conjunto de pontos de $\{x_n\}$ é limitado, então $\{x_n\}$ é limitada. ■

A recíproca desta proposição não é verdadeira. Tome, por exemplo, a sequência $(-1)^n = (1, -1, 1, -1, \dots)$, apesar de ser limitada, não é de Cauchy, pois $d(x_n, x_{n+1}) = 2$ para todo n .

Proposição 13. *Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente (e tem o mesmo limite que a subsequência).*

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy no espaço métrico M e $\{x_{n_k}\}$ uma subsequência que converge para o ponto $a \in M$. Queremos mostrar que $\lim x_n = a$. Para isso, note que dado $\epsilon > 0$, existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > p \implies d(x_{n_k}, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Por outro lado, existe um $q \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > q \implies d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$. Daí, seja então $N = \max\{p, q\}$. Assim, para todo $n > N$, existe $n_k > N$ e, portanto,

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo, $\lim x_n = a$. ■

Exemplo 3.45. *A sequência de números reais $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ não é de Cauchy porque não é limitada.*

Note que a sequência do exemplo acima é, na verdade, as somas parciais da série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que sabemos que não converge.

Definição 3.46. (Espaços métricos completos) *Seja M um espaço métrico. Diz-se que M é completo quando toda sequência de Cauchy é convergente para um ponto de M .*

Exemplo 3.47. *O espaço métrico \mathbb{Q} dos números racionais não é completo.*

Demonstração. Para provar, basta encontrarmos um contraexemplo. Para isso, consideremos $\{x_n\}$ uma sequência de números racionais para o qual converge para algum irracional a , como por exemplo em $x_1 = 1, x_2 = 1,7, x_3 = 1,73, x_4 = 1,732, \dots, \lim x_n = \sqrt{3}$. Note que x_n é uma sequência de Cauchy em \mathbb{Q} pela Proposição 11, mas $\{x_n\}$ não converge em \mathbb{Q} . Portanto, o espaço \mathbb{Q} não é completo. ■

Para provar o próximo exemplo, vamos assumir a seguinte proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em (LIMA, 1970).

Proposição 14. *Para que uma sequência $\{x_n\}$, em um espaço métrico M , possua uma subsequência convergente para um ponto $a \in M$, é necessário e suficiente que toda vizinhança de a contenha termos de x_n com índices n arbitrariamente grandes.*

Exemplo 3.48. *A reta real é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy em \mathbb{R} . Para cada n , considere $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ e $a_n = \inf X_n$. Como $\{x_n\}$ é limitada e $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \dots$, obtemos assim uma sequência crescente limitada de números reais $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$. Seja $\lim a_n = a$. Queremos mostrar que $a = \lim x_n$. Pela Proposição 13, basta mostrar que existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ tal que $\lim x_{n_k} = a$. Assim, pela Proposição 14, é suficiente provar que todo intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, com $\epsilon > 0$, contém pontos de $\{x_n\}$ com n arbitrariamente grande. Logo, dado qualquer n_1 , existe $m > n_1$, com $a - \epsilon < a_m < a + \epsilon$. Sendo $a_m = \inf X_m$, $a_m < a + \epsilon$ implica que existe $n > m > n_1$ tal que $a_m \leq x_n < a + \epsilon$, ou seja, $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. ■

A seguir, apresentamos alguns resultados dos espaços métricos completos, cujas demonstrações podem ser encontradas em (LIMA, 1983).

Proposição 15. *O produto cartesiano $M \times N$ é completo se, e somente se, M, N são completos.*

Corolário 3.49. *$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ é completo se, e somente se, M_1, M_2, \dots, M_n são completos.*

Corolário 3.50. *O espaço métrico euclidiano \mathbb{R}^n é completo.*

3.3 Funções contínuas

Definição 3.51. (*Função contínua*) *Sejam M e N espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando para todo $\epsilon > 0$ é possível obter um $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \epsilon$. Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é contínua quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$.*

Exemplo 3.52. *Seja $M \subset \mathbb{R}$. Uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, contínua em um ponto $a \in M$, significa que dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$.*

Note que a partir da definição, é intuitivo perceber que o conceito de continuidade em um ponto é local, ou seja, depende apenas do comportamento da função em torno do ponto. Em outras palavras, dizer que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é contínua em $a \in M$ significa que, dada uma bola $B' = (f(a), \epsilon)$, existe uma bola $B = (a, \delta)$ tal que o conjunto das imagens de $x \in B$ pela aplicação f está contido em B' , ou seja, $f(B) \subset B'$. Mais precisamente, se a função $f|_B$, aplicada apenas aos pontos de $B = (x, a)$, for contínua em a , então $f : M \rightarrow N$ é contínua em a . A Fig. 6 mostra isso de forma simples.

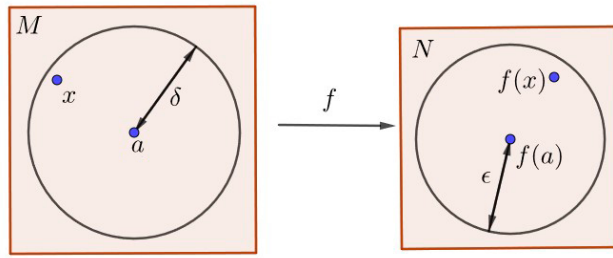


Figura 6 – Aplicação contínua no ponto a . Fonte: (LIMA, 1970).

Exemplo 3.53. Seja (X, d) um espaço métrico e $x_0 \in X$. A função distância $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = d(x, x_0)$$

é contínua.

Demonstração. Sabemos que uma função é contínua em um ponto $a \in X$ se, para toda sequência $x_n \subset X$ tal que $x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a)$. Note, também, que o espaço métrico imagem (\mathbb{R}, d) é o conjunto dos números reais com a métrica usual, isto é, $(\mathbb{R}, d) \implies d(f(x), f(a)) = |f(x) - f(a)|$. Assim, seja $\{x_n\}$ uma sequência tal que $x_n \rightarrow a$. Então, por definição, segue que $d(x_n, a) < \epsilon$, onde $\epsilon > 0$, para $n > N$. Daí, segue que $d(f(x_n), f(a)) = |f(x_n) - f(a)| = |d(x_n, x_0) - d(a, x_0)| \leq d(x_n, a) < \epsilon$. Logo, basta tomar $\delta = \epsilon$ para garantirmos a continuidade de f em a . Portanto, como $a \in X$ foi escolhido arbitrariamente, então f é contínua. ■

Exemplo 3.54. Dada $f : M \rightarrow N$, suponha que exista uma constante $c > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in M$, tem-se $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$. Mostre que f é contínua em cada ponto $a \in M$. Dizemos, então, que f é uma aplicação lipschitziana e c é chamada constante de Lipschitz.

Demonstração. Seja a um ponto qualquer de M . Então, dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\epsilon}{c}$. Assim, temos

$$d(x, a) < \delta \implies d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x, a) < c \cdot \delta = \epsilon.$$

Logo, f é contínua em a . Portanto, como a é arbitrário, segue que f é contínua para todo $a \in M$. ■

Definição 3.55. (Continuidade uniforme) Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é uniformemente contínua quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in M$, $d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Note que ser uniformemente contínua implica ser contínua por ser um caso particular. Por outro lado, a recíproca não é verdadeira, ou seja, ser contínua não necessariamente é

uniformemente contínua, pois a continuidade é um fenômeno local, mas a continuidade uniforme é um fenômeno global, isto é, independente do ponto que está sendo analisado, sempre é possível encontrar um $\delta > 0$, que não depende do ponto, dado um $\epsilon > 0$.

Exemplo 3.56. *Toda aplicação lipschitziana 3.54 é uniformemente contínua.*

Exemplo 3.57. *A métrica $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ de um espaço métrico é uma aplicação uniformemente contínua.*

Demonstração. De fato, pelo Corolário 3.6, quaisquer que sejam os pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M \times M$, tem-se $|d(x_2, y) - d(x_1, y)| \leq d(x_2, x_1)$ e $|d(x, y_2) - d(x, y_1)| \leq d(y_2, y_1)$. Daí, usando a desigualdade triangular, segue que

$$\begin{aligned} |d(x_2, y_2) - d(x_1, y_1)| &\leq |d(x_2, y_2) - d(x_1, y_2)| + |d(x_1, y_2) - d(x_1, y_1)| \\ &\leq d(x_2, x_1) + d(y_1, y_2) \\ &= d((x_1, y_1), (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

Assim, como os pontos são arbitrários, basta tomar $\delta = \epsilon$ que garantimos a continuidade uniforme de d . ■

Exemplo 3.58. *A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ é uniformemente contínua para cada subconjunto limitado $X \subset \mathbb{R}$. Mas não é uniformemente contínua em um subconjunto ilimitado $X \subset \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $y = x + \frac{1}{x}$. Logo, se $X \subset \mathbb{R}$ é ilimitado, e tomando $\epsilon = 1$, então, para qualquer que seja $\delta > 0$, existe um $x \in X$ tal que $|x| > \frac{1}{\delta}$. Daí, segue que

$$|y - x| = \left| x + \frac{1}{x} - x \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \delta.$$

Por outro lado,

$$|f(y) - f(x)| = \left| \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - x^2 \right| = \left| x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - x^2 \right| = 2 + \frac{1}{x^2} > 2 > \epsilon.$$

Logo, f não é uniformemente contínua em X ilimitado. Portanto, f é uniformemente contínua em $X \subset \mathbb{R}$ se, e só se, X é limitado, porque daí podemos garantir que para algum $\epsilon > 0$, sempre podemos obter $\delta > 0$, tal que a condição da continuidade uniforme seja satisfeita. ■

A seguir, vamos definir a conexidade de um conjunto a partir de um conceito mais intuitivo e simples do que o conceito geral de conexidade.

Definição 3.59. (Caminho) *Seja M um espaço métrico. Um caminho em M é uma aplicação contínua $f : [0, 1] \rightarrow M$, onde $f(0) = a$ é o ponto inicial ou origem e, $f(1) = b$ é o ponto final ou fim do caminho f .*

O caminho f liga os pontos a e b em M . Quando $a = b$, dizemos que f é um caminho fechado em M .

Definição 3.60. (*Conexidade por caminho*) Seja M um espaço métrico. Diz-se que M é conexo por caminho, quando dois pontos quaisquer de M podem ser ligados por um caminho contido em M .

Observe que é mais intuitivo notar a conexidade de M através do conceito de caminho, pois o leitor vai lembrar da definição de convexidade de uma região, a qual o caminho é retilíneo.

Exemplo 3.61. Considere $M = \mathbb{R}$. Toda bola $B(a; r) \subset \mathbb{R}$ é conexa por caminho. Observe que dois pontos quaisquer de B podem ser ligados por um segmento de reta (caminho), que é contínuo.

Exemplo 3.62. Seja $M = \mathbb{R}$ um espaço métrico. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, a aplicação $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = (1 - x)a + bx$ é chamada de caminho retilíneo de extremos a e b .

3.4 Espaço métrico de funções

Definição 3.63. (*Espaço de funções*) Dados os subconjuntos $E \subseteq \mathbb{R}^k$ e $F \subseteq \mathbb{R}^m$ quaisquer, munidos das respectivas métricas euclidianas induzidas. Denotamos por $B_0(E, F)$ o conjunto de todas as aplicações $f : E \rightarrow F$ limitadas. O espaço métrico $B_0(E, F)$ munido da métrica do sup (ou da convergência uniforme) abaixo é denominado espaço métrico de funções.

Definição 3.64. (*Métrica da convergência uniforme*) Sejam E e F espaços métricos, f e g aplicações de E em F . Definimos a métrica da convergência, por

$$d(f, g) = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|$$

Geometricamente, a métrica uniforme significa o comprimento da maior corda vertical entre o gráfico das funções f e g , conforme a Fig. 7. Deixamos a cargo do leitor verificar as condições que fazem de 3.64 uma métrica.

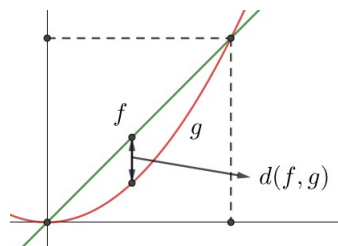


Figura 7 – Métrica da convergência uniforme ou métrica do supremo. Fonte: (LIMA, 1983).

O que nos interessa neste espaço é a sua completude, e para isso, é importante estudar a convergência de uma sequência de funções. Assim, sejam $\{f_n\} \subset B_0(E, F)$ uma sequência de funções e $B_0(E, F)$ munido da métrica da convergência uniforme. Se $\{f_n\}$ converge uniformemente, então $\{f_n\}$ é de Cauchy. Se existir uma aplicação $f : E \rightarrow F$ limitada tal que $\lim d(f_n, f) = 0$, então $\{f_n\}$ converge uniformemente para f . Por outro lado, dizemos que $\{f_n\}$ converge simplesmente para f se $\lim f_n(x) = f(x)$ em F e $x \in E$. Note que esta última também ocorre na convergência uniforme, porém, como esta é um fenômeno global, o critério da existência de $n > n_0$, dado um $\epsilon > 0$, depende apenas de ϵ , e não do ponto o qual se analisa a convergência. Dessa forma, estudar a convergência uniforme de aplicações limitadas significa estudar a convergência de pontos de um espaço métrico munido da métrica da convergência uniforme.

Proposição 16. *Se $F \subseteq \mathbb{R}^m$ é um espaço métrico completo, então para qualquer $E \subseteq \mathbb{R}^k$, o espaço métrico $B_0(E, F)$ é completo com a métrica uniforme.*

Demonstração. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de Cauchy em $B_0(E, F)$. Assim, para todo $x \in E$ fixado, a sequência $x_n = f_n(x)$ em F é também de Cauchy, pelo fato de que

$$|f_n(x) - f_m(x)| = d(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon.$$

Como F é um espaço métrico completo, então existe um $y \in F$ tal que $y = \lim f_n(x)$, ou seja, podemos definir uma aplicação $f : E \rightarrow F$ tal que $f(x) = y$. Daí, podemos afirmar que a sequência $\{f_n\}$ converge simplesmente para f como visto anteriormente.

Queremos provar que $f \in B_0(E, F)$ e que f_n converge uniformemente para f no espaço métrico $B_0(E, F)$.

Pela Proposição 12, a sequência $\{f_n\}$ é limitada em $B_0(E, F)$. Logo, existem uma aplicação $g : E \rightarrow F$ limitada e $r > 0$ tais que

$$d(f_n, g) \leq r, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daí,

$$|f(x) - g(x)| = \lim |f_n(x) - g(x)| = \lim d(f_n, g) \leq r.$$

Logo, $d(f, g) \leq r$ e, portanto, $f \in B_0(E, F)$, pois g é limitada.

Agora, para o que falta, dado $\epsilon > 0$, tomemos um n_0 tal que $d(f_k, f_n) < \frac{\epsilon}{2}$ para quaisquer que sejam $k, n \geq n_0$. Assim, fixando $x \in E$ e $n \geq n_0$, obtemos

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f_k(x) - f_n(x)| \leq \lim d(f_k, f_n) \leq \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon.$$

Logo $d(f, f_n) < \epsilon$ para cada $n \geq n_0$, ou seja, $\lim d(f, f_n) = 0$, o que prova que $\{f_n\}$ converge uniformemente para f no espaço métrico $B_0(E, F)$. ■

Definição 3.65. *Dados os subconjuntos $E \subseteq \mathbb{R}^k$ e $F \subseteq \mathbb{R}^m$, definimos por $C_0(E, F)$ o conjunto de todas as aplicações $f : E \rightarrow F$ que são contínuas e limitadas.*

Note que, se $E = X \subseteq \mathbb{R}^k$ forem compactos, então $C_0(E, F) = C(X, F)$ coincide com o conjunto de todas as aplicações contínuas de X em F . Analogamente, $C_0(E, X) = C(E, X)$ é o conjunto de todas as aplicações contínuas de E em X se $F = X \subseteq \mathbb{R}^m$ é compacto. Além disso, o conjunto $C_0(E, F)$ é um subespaço métrico de $B_0(E, F)$ com a métrica uniforme induzida, por definição. Como $C_0(E, F)$ é fechado e todo subconjunto fechado de um completo é também completo, o corolário a seguir é uma consequência imediata da Proposição (16).

Corolário 3.66. *Se $F \subseteq \mathbb{R}^m$ é um espaço métrico completo, então para qualquer $E \subseteq \mathbb{R}^k$, o espaço métrico $C_0(E, F)$ é completo com a métrica uniforme.*

4 Teorema da Existência e Unicidade

Nesta seção, iremos demonstrar o resultado principal deste trabalho. Para isso, faremos uso do *Método das Aproximações Sucessivas de Picard*, que usando uma função de iteração, podemos obter uma sequência que converge para a solução do Problema de Valor Inicial (PVI) de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO). Mostraremos, também, o Teorema da Contração Uniforme, também conhecido como *Teorema do Ponto Fixo de Banach*, que garante sob certas condições, que toda contração tem um, e somente um, ponto fixo. Além disso, apresentamos um pouco da história de Banach e Picard, encontradas em (WIKIPEDIA, 2020), (COIMBRA, 2011) e (ROBERTSON, 2001).

4.1 Método das aproximações sucessivas de Picard e o teorema da contração uniforme

4.1.1 Aproximações sucessivas

O método das aproximações sucessivas é devido ao segundo mais importante matemático francês do século XIX, Charles-Émile Picard (1856-1914), pois apesar do matemático Joseph Liouville (1809-1882) ter publicado antes um caso particular das aproximações sucessivas, foi Picard que estabeleceu a generalidade e de forma amplamente aplicável em uma série de artigos, começando em 1890.

Hoje, sabe-se que as aproximações sucessivas têm aplicações na Geometria, Análise, Cálculo Numérico, entre outras. Neste último, é conhecido como método de iteração do ponto fixo, utilizado para aproximar raízes de aplicações em um certo intervalo do domínio. Dessa forma, suponha que se deseja encontrar as soluções x de uma equação $f(x) = b$ onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua em uma parte fechada de \mathbb{R}^n . Escrevendo $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ como $\varphi(x) = f(x) + x - b$, vemos que φ é contínua, daí resolver a equação original, equivale a encontrar x tal que $\varphi(x) = x$.

Assim, para resolver a equação $\varphi(x) = x$, vamos construir uma sequência de pontos

$\{x_n\}$, recursivamente, como segue:

$$\begin{aligned} x_0 &\rightarrow \text{ponto inicial} \\ x_1 &= \varphi(x_0) \\ x_2 &= \varphi(x_1) \\ x_3 &= \varphi(x_2) \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= \varphi(x_n). \end{aligned}$$

A esta sequência de pontos damos o nome de aproximações sucessivas da solução que procuramos. Se esta sequência convergir para algum ponto a do domínio de φ , isto é,

$$a = \lim x_n,$$

então, pela continuidade de φ , tem-se

$$a = \lim x_n = \lim x_{n+1} = \lim \varphi(x_n) = \varphi(\lim x_n) = \varphi(a).$$

Logo, a é uma raiz da equação $\varphi(x) = x$ e, portanto, é uma solução de $f(x) = b$. A aplicação φ é chamada função de iteração. Vejamos um exemplo prático.

Exemplo 4.1. *Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + x - 6$. Encontre as raízes de f .*

É claro que, algebricamente, é fácil calcular que as raízes são $x_1 = 2$ e $x_2 = -3$. No entanto, vamos usar as aproximações sucessivas para concluir que uma das raízes é $x_1 = 2$. Deixamos para o leitor aproximar a segunda raiz. Vejamos como fica.

Temos, então, a seguinte equação:

$$f(x) = x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 6 - x \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6 - x}. \quad (4.1)$$

Como a função de iteração é $\varphi(x) = x$, logo tomando x positivo fica

$$\varphi(x) = \sqrt{6 - x}. \quad (4.2)$$

Agora, considerando como ponto inicial $x_0 = 1$, obtemos a seguinte sequência

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varphi(x_0) = \sqrt{6-1} = \sqrt{5} = 2,236067 \\
x_2 &= \varphi(x_1) = \sqrt{6-2,236067} = \sqrt{3,763932} = 1,940085 \\
x_3 &= \varphi(x_2) = \sqrt{6-1,940085} = \sqrt{4,059914} = 2,014922 \\
x_4 &= \varphi(x_3) = \sqrt{6-2,014922} = \sqrt{3,985078} = 1,996266 \\
x_5 &= \varphi(x_4) = \sqrt{6-1,996266} = \sqrt{4,003733} = 2,000933 \\
x_6 &= \varphi(x_5) = \sqrt{6-2,000933} = \sqrt{3,999067} = 1,999766 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Note que a sequência das iterações de $\varphi(x)$ está intuitivamente convergindo para $x = 2$. Portanto, como $x = 2$ é raiz de $\varphi(x) = x$, então $x = 2$ é solução da equação $f(x) = x^2 + x - 6 = 0$. Por outro lado, se o leitor tentar encontrar a solução $x = 3$ utilizando esta mesma função de iteração, vai perceber que a sequência de pontos diverge, ou seja, uma aplicação pode ter várias funções de iteração, devendo, portanto, escolher a que seja melhor para cada aproximação. Para um aprofundamento maior do cálculo de aproximação, indicamos (RUGGIERO; LOPES, 1997). A formalização das aproximações sucessivas é dado pelo teorema da contração uniforme, a seguir.

4.1.2 Teorema da contração uniforme

Agora, apresentaremos a formalização do método das aproximações sucessivas. O *Teorema da Contração Uniforme* é devido ao grande matemático Austro-Húngaro Stefan Banach. Este teorema é um dos principais resultados em espaços métricos, pois garante, sob certas condições, a existência de pontos fixos de uma aplicação.

Definição 4.2. (Condição de Lipschitz) *Sejam M, N espaços métricos e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de M em N . Diz-se que f satisfaz a condição de Lipschitz quando existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y), \forall x, y \in M.$$

Exemplo 4.3. *Seja $M = \mathbb{R}$. Toda aplicação $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a derivada de f é limitada por algum $c > 0$, isto é, $|f'(x)| \leq c$, satisfaz a condição de Lipschitz e, portanto, é uniformemente contínua.*

Definição 4.4. (Contração) *Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ chama-se uma contração se existir uma constante $0 \leq c < 1$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y), \forall x, y \in M.$$

Exemplo 4.5. O conjunto das aplicações f do Exemplo 4.3, tais que

$$|f'(x)| \leq c < 1$$

para todo $x \in I \subseteq \mathbb{R}$, são contrações.

Vejam agora um exemplo de aplicação que não é uma contração.

Exemplo 4.6. Seja $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ uma aplicação definida por $f(x) = \frac{x^2}{2}$. Note que a derivada de f é $f'(x) = x$, o que implica

$$|f'(x)| = |x| = x < 1.$$

Mas não existe uma constante $0 < c < 1$ tal que $|f'(x)| \leq c < 1$ para todo $x \in (0, 1)$. Por exemplo, tome $c = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{3}{4} \in (0, 1)$, daí, tem-se

$$f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} > c = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $f(x) = \frac{x^2}{2}$ não é uma contração.

Definição 4.7. (Ponto fixo) Sejam M um espaço métrico e $f : M \rightarrow M$ uma aplicação de M em si mesmo. Chama-se ponto fixo da aplicação f um ponto $x \in M$ tal que $f(x) = x$.

Exemplo 4.8. Considere $M = \mathbb{R}$. A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, possui dois pontos fixos, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$.

Por outro lado, a aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 1$, não possui ponto fixo. Graficamente, o que se tem é o seguinte, conforme a Fig. 8.

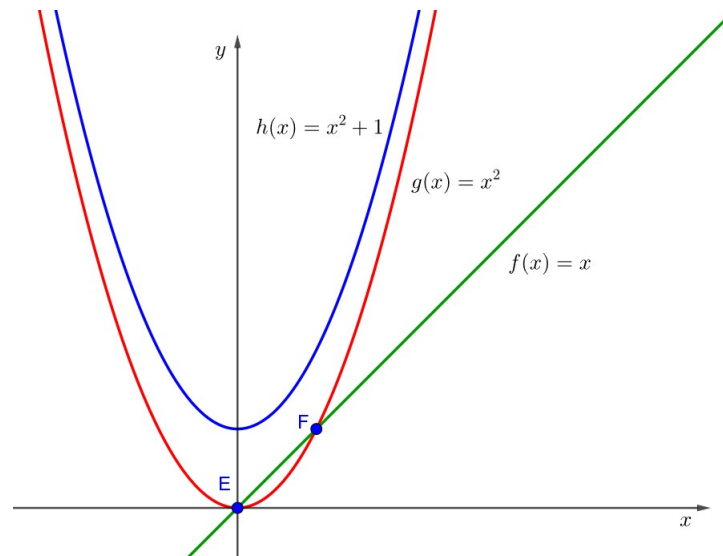


Figura 8 – Pontos fixos das funções $g(x)$ e $h(x)$. Fonte: autor.

Note que os pontos fixos de uma aplicação f são as abscissas dos pontos de interseção de f com a aplicação identidade $y = f(x) = x$. Assim, todo ponto fixo de uma aplicação $f : M \rightarrow M$ é ponto fixo relativo à aplicação identidade.

Antes de mostrarmos o *Teorema da Contração Uniforme*, apresentamos um resultado muito importante, que trata também de pontos fixos de aplicações, conhecido como Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, o qual é enunciado como segue.

Definição 4.9. *Seja M um espaço métrico. A aplicação $\varphi : M \rightarrow M$ tal que para todo $x \in M$ tem-se a seguinte sequência*

$$\begin{aligned} x_0 &= \varphi^0(x) = x \\ x_1 &= \varphi^1(x) = \varphi(x) \\ x_2 &= \varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x)) \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= \varphi(x_n) \end{aligned}$$

é chamada de aplicação de iteração do ponto x e a sequência (x_n) é a sequência de iteradas ou aproximações sucessivas do ponto $x \in M$.

Corolário 4.10. *Seja $\phi : M \rightarrow M$ uma aplicação de um espaço métrico completo nele mesmo e suponha que existe uma iterada de ϕ que é uma contração. Então, existe um único ponto fixo atrator de ϕ , ou seja, um único ponto $a \in M$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(x) = a \tag{4.3}$$

para qualquer $x \in M$.

A demonstração deste corolário pode ser encontrada em (DOERING; LOPES, 2008), na página 342.

Teorema 4.11. (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) *Se $B = B[0, 1]$ é a bola fechada unitária do espaço métrico \mathbb{R}^n , então toda aplicação contínua $f : B \rightarrow B$ possui pelo menos um ponto fixo $x \in B$.*

Como a demonstração deste teorema utiliza técnicas não abordadas neste trabalho, não faremos a demonstração. Mas o leitor pode encontrá-la em (CASTELLI, 2016). Faremos a prova de um caso particular, como segue.

Teorema 4.12. (caso particular $n = 1$) *Dada uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.*

Demonstração. De fato, se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$ não há nada a fazer. Agora, se $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$, então podemos escrever

$$a < f(a) < b \text{ e } a < f(b) < b.$$

Agora, considere a função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x - f(x)$. Note que g é contínua e que $g(a) = a - f(a) \implies g(a) < 0$, pois $f(a) > a$. Analogamente, tem-se $g(b) = b - f(b) \implies g(b) > 0$, pois $b > f(b)$. Daí, segue que $g(a) < 0 < g(b)$ e pelo teorema do valor intermediário, existe um $c \in [a, b]$ tal que

$$g(c) = 0 \implies c - f(c) = 0 \implies f(c) = c.$$

■

Para provar o teorema principal desta seção, vamos utilizar o seguinte resultado.

Lema 4.13. *A sequência de iteradas de um ponto qualquer por uma contração de um espaço métrico nele mesmo satisfaz*

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n \cdot d(x_0, x_1), \forall n \in \mathbb{N}, \quad (4.4)$$

onde $0 < c < 1$ é uma constante de Lipschitz.

Demonstração. Seja $\varphi : M \rightarrow M$ uma aplicação lipschitziana e $x_0 \in M$ um ponto arbitrário de M . Seja $\{x\}$ a sequência de iterações do ponto x_0 . Note que, como φ é lipschitziana, então

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq c \cdot d(x, y), \forall x, y \in M. \quad (4.5)$$

Assim, sendo x, y os pontos da sequência de iteradas de x_0 , segue então que

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\varphi(x_n), \varphi(x_{n-1})) \leq c \cdot d(x_n, x_{n-1}).$$

Mas como $c \cdot d(x_n, x_{n-1}) = c \cdot d(\varphi(x_{n-1}), \varphi(x_{n-2}))$, podemos escrever

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq c^2 \cdot d(x_{n-1}, x_{n-2}).$$

Analogamente, temos $c^2 \cdot d(x_{n-1}, x_{n-2}) = c^2 \cdot d(\varphi(x_{n-2}), \varphi(x_{n-3}))$ e

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq c^3 \cdot d(x_{n-2}, x_{n-3}). \quad (4.6)$$

Aplicando o procedimento n vezes, obtemos (4.4), como segue,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq c^n \cdot d(x_1, x_0) \quad (4.7)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o que conclui a demonstração. ■

Teorema 4.14. (Teorema da Contração Uniforme) Se M é um espaço métrico completo, e $f : M \rightarrow M$ uma contração de M em si mesmo, então:

1. Existe um único $\bar{x} \in M$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.
2. A sequência de iterações de um ponto x_0 arbitrário é uma sequência de Cauchy.
3. Qualquer que seja $x_0 \in M$, a sequência definida como em (4.9) converge para \bar{x} .

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente que de fato \bar{x} é único. Para isso, suponha que existam x_1 e x_2 distintos e que sejam pontos fixos da contração f . Logo, tem-se

$$d(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2). \quad (4.8)$$

Por outro lado, por f ser uma contração, existe uma constante $0 < c < 1$ tal que

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq c \cdot d(x_1, x_2). \quad (4.9)$$

Assim, de (4.8) e (4.9) segue que

$$d(x_1, x_2) \leq c \cdot d(x_1, x_2) \Leftrightarrow d(x_1, x_2) - c \cdot d(x_1, x_2) \leq 0 \Leftrightarrow (1 - c) \cdot d(x_1, x_2) \leq 0.$$

Como $(1 - c) > 0$ e a distância entre dois pontos é sempre maior ou igual a zero, concluímos então que $d(x_1, x_2) = 0$, ou seja, $x_1 = x_2$. Portanto, f possui um único ponto fixo. Agora, resta provar que a sequência (x_n) é uma sequência de Cauchy em M . De fato, pelo Lema 4.13, sabemos que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n \cdot d(x_1, x_0), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma, para $n, p \in \mathbb{N}$ arbitrários, e pela desigualdade triangular em espaços métricos, tem-se

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}). \quad (4.10)$$

Agora, note que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n \cdot d(x_0, x_1). \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(\varphi(x_n), \varphi(x_{n+1})) \\ &\leq c \cdot d(x_n, x_{n+1}) \leq c \cdot [c^n \cdot d(x_0, x_1)] = c^{n+1} \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x_{n+2}, x_{n+3}) &= d(\varphi(x_{n+1}), \varphi(x_{n+2})) \\ &\leq c \cdot d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq c \cdot [c^{n+1} \cdot d(x_0, x_1)] = c^{n+2} \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x_{n+3}, x_{n+4}) &= d(\varphi(x_{n+2}), \varphi(x_{n+3})) \\ &\leq c \cdot d(x_{n+2}, x_{n+3}) \leq c \cdot [c^{n+2} \cdot d(x_0, x_1)] = c^{n+3} \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) &= d(\varphi(x_{n+p-2}), \varphi(x_{n+p-1})) \\ &\leq c \cdot d(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}) \leq c \cdot [c^{n+p-2} \cdot d(x_0, x_1)] = c^{n+p-1} \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Logo, usando os resultados imediatamente acima, e pondo $c^n \cdot d(x_0, x_1)$ em evidência, obtemos

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq c^n \cdot d(x_0, x_1) \cdot (1 + c + c^2 + \dots + c^{p-1}). \quad (4.12)$$

Note que a expressão $(1 + c + c^2 + \dots + c^{p-1})$ é uma série geométrica de razão $0 < c < 1$. Assim, podemos reescrever

$$(1 + c^n + c^{n+1} + \dots + c^{p-1}) = \sum_{i=0}^{p-1} c^i \leq \sum_{i=0}^{+\infty} c^i = \frac{1}{1-c}. \quad (4.13)$$

Logo, tem-se

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq c^n \cdot d(x_0, x_1) \cdot \frac{1}{1-c} = \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_0, x_1). \quad (4.14)$$

Agora, como $0 < c < 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$, o que mostra que a sequência $\{x_n\}$ é de Cauchy. Por fim, basta mostrar que $\{x_n\}$ converge para \bar{x} . Sendo M um espaço métrico completo, suponha que $\lim x_n = x$, isto é, que a sequência $\{x_n\}$ convirja para um ponto $x \in M$. Vamos mostrar que $x = \bar{x}$. Assim, pelo fato de f ser uma contração e pela desigualdade triangular, decorre

$$\begin{aligned} d(x, f(x)) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, f(x)) \\ &= d(x, x_n) + d(f(x_{n-1}), f(x)) \\ &\leq d(x, x_n) + c \cdot d(x_{n-1}, x). \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $x_n \rightarrow x$, podemos tornar esta última soma tão pequena quanto quisermos e, portanto, menor que qualquer $\epsilon > 0$ fixado. Isso significa que $d(x, f(x)) = 0 \Leftrightarrow x = f(x)$, ou seja, x é um ponto fixo de f , e como já mostramos, este x é único, então $x = \bar{x}$, o que conclui a demonstração. ■

4.1.3 Charles-Émile Picard (1854-1941)

Charles-Émile Picard foi um matemático francês, nascido em 24 de julho de 1856, é considerado, exceto por Henri Poincaré (1854-1912), o matemático francês mais importante de sua geração, cujas teorias foram importantes para o avanço da pesquisa em análise, geometria algébrica e mecânica.

Após concluir os estudos secundários, Picard leu um livro de álgebra e ficou fascinado pela matemática, daí então resolveu fazer os exames de admissão para a École



Figura 9 – Charles-Émile Picard (1856-1941). Fonte: (ROBERTSON, 2001).

Polytechnique e École Normale Supérieure, tendo conquistado o segundo e primeiro lugares, respectivamente, nos exames, mas frequentou a *École Normale Supérieure*.

Tornou-se Conferencista na Universidade de Paris em 1878 e professor da Universidade de Toulouse, no ano seguinte. Entre 1881 e 1898 ocupou vários cargos na Universidade de Toulouse e na *École Normale Supérieure* e em 1898 foi nomeado professor na Universidade de Paris, mas seu nome ficou conhecido quando, em 1879, provou que uma função inteira (uma função que é definida e diferenciável para todos os números complexos) assume todos os valores finitos, com uma possível exceção. Então, apoiando-se nos ombros dos matemáticos Niels Henrik Abel (1802-1829) da Noruega e por Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) da Alemanha, Picard generalizou o trabalho de Riemann para funções complexas de duas variáveis. O seu estudo das integrais associado às superfícies algébricas e as questões topológicas relacionadas evoluíram em uma parte importante da geometria algébrica, com aplicações variadas em topologia e análise funcional.

Além disso, Picard também se debruçou a trabalhar em funções fuchsianas e funções abelianas e nas teorias de grupos contínuos e descontínuos de uma transformação, cuja pesquisa apareceu em um tratado que ele publicou juntamente com Georges Simart (1846-1921) intitulado *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Vol. 2 (1897, 1906) (*Teoria das Funções Algébricas de duas Variáveis Independentes*, Vol. 2). Um de seus grandes feitos foi a generalização do Método das Aproximações Sucessivas para provar a existência de soluções para equações diferenciais de forma amplamente aplicável, mesmo que um caso particular já tivesse sido proposto por Liouville em 1838, o crédito é dado a Picard, por generalizá-lo.

Foi laureado com o *Poncelet Prize* em 1886 e com o *Grand Prix des Sciences Mathématiques* em 1888. Além de Doutor *Honoris Causa* de cinco universidades e membro honorário de trinta e sete sociedades científicas, recebeu o Grande *Croix de la Légion d'Honneur*, em 1932, e a *Mittag-Leffler Gold Medal* em 1937. Picard morreu em 11 de Dezembro de 1941, na França.

4.1.4 Stefan Banach (1892-1945)

Stefan Banach nasceu em 30 de março de 1892, ainda no território do Império Austro-Húngaro. Em 1902, após ter concluído o ensino primário, fez o ensino secundário em *Henry Sienkiewicz Gymnasium*. Segundo a história, Banach teve sorte, pois em sua classe estudava Wiltold Wilkosz, que anos depois tornara-se professor de Matemática. Após terminar a escola, Banach foi para Lviv (atual Ucrânia) e ingressou na faculdade de engenharia da Universidade Técnica. Em 1914, concluiu a faculdade, e por causa da Primeira Guerra Mundial, teve que sair de Lviv.

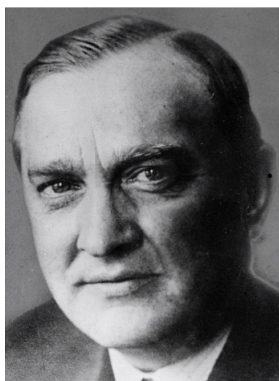


Figura 10 – Stefan Banach (1892-1945). Fonte: (WIKIPEDIA, 2020).

Após a faculdade de engenharia, Banach passou um tempo construindo estradas e lecionando. Frequentou também palestras na Universidade de Jaguelônica em Cracóvia, e acredita-se que também frequentou palestras de Stanislaw Zaremba. Em 1916, conheceu Hugo Steinhaus, quando este ouviu Banach e Otto Nikodym conversando sobre medida de Lebesgue, então mantiveram contato regularmente e acabaram fundando a Sociedade Matemática por iniciativa de Steinhaus, que mais tarde viria se chamar Sociedade Matemática da Polônia. Banach e Steinhaus apresentaram um trabalho para Zaremba para publicação, mas por conta da guerra, acabou atrasando, e a primeira vez que Banach apareceu no boletim da Academia de Cracóvia foi em 1918.

Após estabelecer a Sociedade Matemática de Cracóvia, Banach fez palestras nessa sociedade e continuou a produzir matemática e, em 1920, recebeu uma oferta para ser assistente de Antoni Lomnicki na Universidade de Lviv, onde fez palestras e tentou submeter sua tese de doutorado. E em 1922 recebeu sua habilitação, grau semelhante ao de livre docente no Brasil, por seu trabalho sobre teoria da medida. Em 1924, tornou-se professor titular, e no entreguerras, continuou a escrever livros didáticos sobre álgebra, geometria e aritmética, até que em 1929 lançou o jornal *Studia Mathematica* juntamente com Steinhaus, cujo foco era análise funcional. O primeiro livro da série *Théorie des*

Opérations Linéaires (Teoria das Operações Lineares) foi escrito por Banach e apareceu em 1932.

Entre vários trabalhos de Banach, sua maior contribuição foi na Análise Funcional. O *Théorie des Opérations Linéaires* (Teoria das Operações Lineares) é o mais importante. Na tentativa de generalizar as equações integrais, Banach introduziu o conceito de espaços vetoriais normados, bem como provou vários teoremas nessa área. Entre estes teoremas, encontram-se o Teorema de Hahn-Banach, o Teorema do ponto fixo de Banach, o Teorema das Categorias de Banach, o Paradoxo de Banach-Tarski, entre outros.

Em 1939, Banach tornou-se presidente da Sociedade Matemática da Polônia, e por suas boas relações com os matemáticos da União Soviética, quando estourou a Segunda Guerra Mundial, conseguiu manter-se no cargo e foi bem tratado durante a nova administração, além de tornar-se responsável máximo na Faculdade de Ciências da Universidade Ivan Franko. Porém, após a invasão da Alemanha Nazista, Antoni Lomnicki foi morto no massacre de 3 de julho de 1941. Banach foi preso, mas um tempo depois foi solto. No entanto, após o fim da ocupação nazista em 1944, no ano seguinte Stefan Banach viria a falecer de câncer de pulmão em Lviv.

4.2 Teorema da existência e unicidade da solução de equações diferenciais ordinárias

Neste capítulo, vamos apresentar o resultado principal deste trabalho, o Teorema da Existência e Unicidade de Solução de Equações Diferenciais Ordinárias no contexto de espaços métricos. Para tal, utilizaremos o Teorema da Contração Uniforme. Além disso, apresentamos o método das aproximações sucessivas, aplicado na resolução de alguns problemas para provar a existência e unicidade da solução a partir da convergência de uma sequência de iterações. Para este capítulo, utilizamos (JÚNIOR, 2009), (DOERING; LOPES, 2008) e (BOYCE; DIPRIMA, 1985).

Definição 4.15. (*Problema de valor inicial*) Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Chama-se de problema de valor inicial PVI de uma equação diferencial ordinária a expressão dada por

$$\begin{aligned}x'(t) &= f(t, x), \\x(t_0) &= x_0,\end{aligned}\tag{4.15}$$

onde $x(t_0) = x_0$ é uma condição inicial da equação.

Nosso objetivo é explorar a equação (4.15), a fim de mostrar a existência de uma solução, bem como provar que se existe, esta solução é única. Para isso, vamos reescrever a equação (4.15) como uma equação integral garantida pelo lema a seguir.

Lema 4.16. *Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Então, uma aplicação diferenciável $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução do problema de valor inicial (4.15) se, e somente se, for uma solução da equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in I. \quad (4.16)$$

Demonstração. Para provarmos o Lema 4.16, considere a aplicação $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, derivável, que seja solução do PVI (4.15), isto é,

$$\varphi(t_0) = x_0 \quad e \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

Então, como φ é derivável em I , podemos integrar $x'(t) = f(t, x(t))$ em I de um ponto inicial t_0 até um certo t arbitrário. Daí, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, encontrado em (NETO, 2015), obtemos

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds,$$

ou seja, φ é também solução da equação (4.16).

Por outro lado, se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua em I e é solução de (4.16), então, novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo, φ é derivável e, portanto,

$$\varphi(t_0) = x_0 \quad e \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \quad (4.17)$$

ou seja, φ também é solução do PVI em (4.15). ■

O resultado do Lema 4.16 nos diz que as equações (4.15) e (4.16) são equivalentes no sentido de que as soluções de uma equação também são soluções da outra. Assim, para resolver o PVI em (4.15) é mais conveniente resolver a equação integral em (4.16).

Assim, tomando qualquer caminho contínuo $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, podemos definir uma aplicação $\mathcal{L}(x) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathcal{L}(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad (4.18)$$

para todo $t \in I$. Note que $\mathcal{L}(x) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um caminho contínuo e derivável, e além disso, x é um ponto fixo de \mathcal{L} . Assim, munido do Teorema da Contração Uniforme 4.14, podemos utilizar o método das aproximações sucessivas para encontrar soluções de um PVI, observando a convergência da sequência de iteradas, isto é, a sequência de funções obtidas é dada por

$$\mathcal{L}^{n+1}(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \mathcal{L}^n(s)) ds, \quad \forall n \geq 1. \quad (4.19)$$

Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 4.17. Considere o problema de valor inicial dado por

$$\begin{aligned}x'(t) &= 2t(1 + x(t)), t \in \mathbb{R} \\x(0) &= 0.\end{aligned}\tag{4.20}$$

Vamos resolvê-lo utilizando o método de aproximações sucessivas.

Solução: Pela equação (4.19), tem-se que

$$\mathcal{L}(x)(t) = \int_0^t 2s(1 + \mathcal{L}(s))ds.\tag{4.21}$$

Logo, tomando o caminho $x_0 = x(0) = 0$ para iniciar, segue as iteradas de $\mathcal{L}(x)$,

$$\mathcal{L}^1(x)(t) = \int_0^t 2s(1 + \mathcal{L}^0(s))ds = \int_0^t 2sds = t^2,\tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^2(x)(t) &= \int_0^t 2s(1 + \mathcal{L}^1(s))ds = \int_0^t 2s(1 + s^2)ds \\&= \int_0^t (2s + 2s^3)ds \\&= t^2 + \frac{t^4}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^3(x)(t) &= \int_0^t 2s(1 + \mathcal{L}^2(s))ds = \int_0^t 2s(1 + s^2 + \frac{s^4}{2})ds \\&= \int_0^t (2s + 2s^3 + s^5)ds \\&= t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{2 \cdot 3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^4(x)(t) &= \int_0^t 2s(1 + \mathcal{L}^3(s))ds = \int_0^t 2s(1 + s^2 + \frac{s^4}{2} + \frac{s^6}{6})ds \\&= \int_0^t (2s + 2s^3 + s^5 + \frac{s^7}{3})ds \\&= t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6} + \frac{t^8}{2 \cdot 3 \cdot 4}.\end{aligned}$$

Note que a sequência de iteradas sugere que a solução do problema de valor inicial (4.20) seja

$$\mathcal{L}^n(x)(t) = t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} + \dots + \frac{t^{2n}}{n!}\tag{4.23}$$

para cada $n \geq 1$. Assim, podemos provar este resultado por indução matemática. Logo, é fácil ver que para $n = 1$ a equação (4.23) é verdadeira, isto é, sendo $x(t) = t^2$, por (4.22). Agora, suponha que para algum $n \geq 1$, a equação (4.23) seja verdadeira, queremos mostrar

que a validade de n implica a validade de $n + 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{n+1}(x)(t) &= \int_0^t 2s(1 + \mathcal{L}^n(s))ds \\
 &= \int_0^t 2s \left(1 + s^2 + \frac{s^4}{2!} + \frac{s^6}{3!} + \frac{s^8}{4!} + \dots + \frac{s^{2n}}{n!} \right) \\
 &= 2 \cdot \int_0^t \left(s + s^3 + \frac{s^5}{2!} + \frac{s^7}{3!} + \frac{s^9}{4!} + \dots + \frac{2s^{2n+1}}{n!} \right) \\
 &= 2 \cdot \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{12} + \dots + \frac{t^{2n+2}}{(2n+2) \cdot n!} \right) \\
 &= t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \dots + \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!},
 \end{aligned}$$

o que mostra a validade de (4.23), e, portanto, a demonstração está completa. Perceba, ainda, que a equação (4.23) é a n -ésima soma parcial da série

$$\mathcal{L}(x)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!},$$

cujos limite existe se, e somente se, a série é convergente. Para verificar, vamos aplicar o teste da razão na série. Assim, fica

$$\left| \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{t^{2n}} \right| = \frac{t^2}{n+1}.$$

Daí, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t^2}{n+1} = 0,$$

o que mostra que a série é convergente, e, portanto, o limite da série é exatamente igual ao limite da sequência dada por $(\mathcal{L}_n(x)(t))$. Assim, como a série é uma série de Taylor, sabemos que é diferenciável e integrável em cada termo para todo t , e, portanto, a série é uma solução para o problema de valor inicial dado. Para verificar, sugerimos ao leitor substituir $x(t)$ por $\mathcal{L}(x)(t)$ em (4.20).

Agora, para tratarmos da unicidade da solução do PVI, considere que (4.20) tenha duas soluções, \mathcal{L} e λ . Assim, pelo lema (4.16), ambas as soluções satisfazem a equação integral (4.21), ou seja,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(x)(t) &= \int_0^t 2s(1 + \mathcal{L}(s))ds, \\
 \lambda(x)(t) &= \int_0^t 2s(1 + \lambda(s))ds.
 \end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\mathcal{L}(x)(t) - \lambda(x)(t) = \int_0^t 2s[\mathcal{L}(s) - \lambda(s)]ds.$$

Assim, considerando $t > 0$ e pela desigualdade das integrais, segue que

$$|\mathcal{L}(x)(t) - \lambda(x)(t)| = \left| \int_0^t 2s[\mathcal{L}(s) - \lambda(s)]ds \right| \leq \int_0^t |2s[\mathcal{L}(s) - \lambda(s)]| ds.$$

Agora, tomando $t \in \left[0, \frac{A}{2}\right]$, onde A é arbitrário, temos que

$$|\mathcal{L}(x)(t) - \lambda(x)(t)| \leq A \int_0^t |\mathcal{L}(s) - \lambda(s)| ds. \quad (4.24)$$

Assim, definindo a função Z por

$$Z = \int_0^t |\mathcal{L}(s) - \lambda(s)| ds,$$

segue que para todo $t \geq 0$, tem-se

$$Z(0) = 0, \quad (4.25)$$

$$Z(t) \geq 0. \quad (4.26)$$

Note que, como $Z(t)$ é diferenciável e $Z'(t) = |\mathcal{L}(t) - \lambda(t)|$, então pela equação (4.24), tem-se

$$Z'(t) - AZ(t) \leq 0, \quad \forall t \in \left[0, \frac{A}{2}\right].$$

Daí, multiplicando este resultado por e^{-At} , temos

$$[Z'(t) - AZ(t)] \cdot e^{-At} = e^{-At} Z'(t) - Ae^{-At} Z(t) = [e^{-At} Z(t)]' \leq 0, \forall t \in \left[0, \frac{A}{2}\right].$$

Portanto, integrando $[e^{-At} Z(t)]'$, obtemos

$$e^{-At} Z(t) \leq 0. \quad (4.27)$$

Daí, como $e^{-At} > 0$, temos $Z(t) \leq 0$ para todo $t \in \left[0, \frac{A}{2}\right]$. Portanto, de (4.26) e (4.27), segue que $Z'(t) = 0$ e $\mathcal{L}(t) = \lambda(t)$, logo temos uma contradição, pois por hipótese, $\mathcal{L}(t)$ e $\lambda(t)$ são soluções do PVI. Portanto, nos resta afirmar que a solução

$$\mathcal{L}(x)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}$$

é única. Note que não é necessário explicitar $\mathcal{L}(x)(t)$ por funções elementares para atestar a existência e unicidade da solução do PVI pelas aproximações sucessivas.

Exemplo 4.18. *Considere o PVI*

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t), \\ x(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Mostre que a solução é $x(t) = x_0 e^{at}$.

Demonstração. Para demonstrar, vamos utilizar o método das aproximações sucessivas para encontrar a solução. Assim, as iteradas de $\mathcal{L}(x)$ são dadas pela equação (4.19). Como

visto anteriormente, podemos iniciar as iteradas a partir de qualquer caminho contínuo. Logo, por simplicidade, vamos tomar o caminho constante $x(0) = x_0 = k$, daí temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^1(x)(t) &= x_0 + \int_0^t a\mathcal{L}^0(s)ds = k + \int_0^t akds = k(1 + at), \\
\mathcal{L}^2(x)(t) &= x_0 + \int_0^t a\mathcal{L}^1(s)ds = k + \int_0^t ak(1 + as)ds = k\left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2}\right), \\
\mathcal{L}^3(x)(t) &= x_0 + \int_0^t a\mathcal{L}^2(s)ds = k + \int_0^t ak\left(1 + as + \frac{as^2}{2}\right)ds \\
&= k\left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!}\right), \\
\mathcal{L}^4(x)(t) &= x_0 + \int_0^t a\mathcal{L}^3(s)ds = k + \int_0^t k\left(1 + as + \frac{a^2s^2}{2!} + \frac{a^3s^3}{3!}\right)ds \\
&= k\left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \frac{a^4t^4}{4!}\right), \\
&\quad \vdots \\
\mathcal{L}^n(x)(t) &= x_0 + \int_0^t a\mathcal{L}^{n-1}(s)ds = k\left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \frac{a^4t^4}{4!} + \dots + \frac{a^nt^n}{n!}\right)
\end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$.

Note que a última equação foi obtida por indução das iteradas. Além disso, a série

$$k\left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \frac{a^4t^4}{4!}\right)$$

é uma série de Taylor e converge para e^{at} . Portanto, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_n(x)(t) = k \cdot e^{at} = x_0 \cdot e^{at}. \quad (4.29)$$

Observe que a equação (4.29) é diferenciável e integrável para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, (4.29) é uma solução do PVI. ■

Trabalhando com funções simples, como é o caso do exemplo (4.18), as aproximações convergem naturalmente para a solução, como evidenciado. Por outro lado, isso nem sempre acontece, pois, para uma aplicação $x'(t) = f(t, x)$ qualquer, a convergência das aproximações pode não ocorrer como em (4.18), por isso, é necessário antes, garantir a convergência do método. É aí que o teorema de existência e unicidade é tão importante e útil para, antes de começar a procurar uma solução, verificar se ela existe, e ainda por cima, garantir que é única, dadas algumas condições.

Definição 4.19. *Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é lipschitziana na variável espacial x em $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ se existe $K > 0$ tal que*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K \cdot |x - y|$$

para quaisquer que sejam os pontos $(t, x), (t, y) \in U$, desde que tenham a mesma coordenada t .

Lema 4.20. *Seja $C(I, \mathbb{R}^n)$ o conjunto de todos os caminhos contínuos de I em \mathbb{R}^n . Se $K > 0$ é uma constante de Lipschitz de f em $I \times \mathbb{R}^n$, então*

$$|\mathcal{L}^n(\mu)(t) - \mathcal{L}^n(\nu)(t)| \leq \frac{K^n}{n!} d(\mu, \nu) |t - t_0|^n \quad (4.30)$$

para quaisquer $\mu, \nu \in C(I, \mathbb{R}^n)$ e $t \in I$.

Demonstração. Vamos provar o lema por indução. Para tanto, façamos para três casos, $n = \{0, 1, 2\}$ para facilitar a visualização da convergência.

Para $n = 0$, o lema é evidente, pois se trata da própria definição da métrica do supremo ou da convergência uniforme, ou seja,

$$|\mathcal{L}^0(\mu)(t) - \mathcal{L}^0(\nu)(t)| \leq \frac{K^0}{0!} d(\mu, \nu) |t - t_0|^0 \Leftrightarrow |\mu(t) - \nu(t)| = d(\mu, \nu).$$

Assim, sejam $\mu, \nu \in C$, e pela definição (4.18), tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mu)(t) - \mathcal{L}(\nu)(t) &= \left(x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \mu(s)) ds \right) - \left(x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \nu(s)) ds \right) \\ &= \int_{t_0}^t [f(s, \mu(s)) - f(s, \nu(s))] ds. \end{aligned}$$

Para $n = 1$, segue

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}^1(\mu)(t) - \mathcal{L}^1(\nu)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, \mu(s)) - f(s, \nu(s))] ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \mu(s)) - f(s, \nu(s))| ds \right| \\ &\leq K \cdot \left| \int_{t_0}^t |\mu(s) - \nu(s)| ds \right| \\ &\leq K \cdot d(\mu, \nu) \cdot \left| \int_{t_0}^t ds \right| \\ &\leq K \cdot d(\mu, \nu) \cdot |t - t_0|. \end{aligned}$$

Portanto, o lema é válido para $n = 1$. Agora, vejamos para $n = 2$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}^2(\mu)(t) - \mathcal{L}^2(\nu)(t)| &= |\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mu))(t) - \mathcal{L}(\mathcal{L}(\nu))(t)| \\ &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, \mathcal{L}(\mu)(s)) - f(s, \mathcal{L}(\nu)(s))] ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \mathcal{L}(\mu)(s)) - f(s, \mathcal{L}(\nu)(s))| ds \right| \\ &\leq K \cdot \left| \int_{t_0}^t |\mathcal{L}(\mu)(s) - \mathcal{L}(\nu)(s)| ds \right| \\ &\leq K \cdot \left| \int_{t_0}^t K \cdot d(\mu, \nu) \cdot |s - t_0| ds \right| \\ &\leq K^2 \cdot d(\mu, \nu) \left| \int_{t_0}^t |s - t_0| ds \right| \leq K^2 \cdot d(\mu, \nu) \cdot \frac{1}{2} |t - t_0|^2. \end{aligned}$$

Isso mostra a validade do lema para o caso $n = 2$. Portanto, por indução, suponhamos que o lema seja válido para algum n arbitrário, isto é,

$$|\mathcal{L}^n(\mu)(t) - \mathcal{L}^n(\nu)(t)| \leq \frac{K^n}{n!} d(\mu, \nu) |t - t_0|^n.$$

Queremos mostrar a validade de $n \implies (n + 1)$. Assim, temos

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}^{n+1}(\mu)(t) - \mathcal{L}^{n+1}(\nu)(t)| &= |\mathcal{L}(\mathcal{L}^n(\mu))(t) - \mathcal{L}(\mathcal{L}^n(\nu))(t)| \\ &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, \mathcal{L}^n(\mu)(s)) - f(s, \mathcal{L}^n(\nu)(s))] ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \mathcal{L}^n(\mu)(s)) - f(s, \mathcal{L}^n(\nu)(s))| ds \right| \\ &\leq K \cdot \left| \int_{t_0}^t |\mathcal{L}^n(\mu)(s) - \mathcal{L}^n(\nu)(s)| ds \right|. \end{aligned}$$

Mas, por hipótese de indução, temos $|\mathcal{L}^n(\mu)(t) - \mathcal{L}^n(\nu)(t)| \leq \frac{K^n}{n!} d(\mu, \nu) |t - t_0|^n$. Logo, substituindo no integrando, segue

$$\begin{aligned} K \cdot \left| \int_{t_0}^t |\mathcal{L}^n(\mu)(s) - \mathcal{L}^n(\nu)(s)| ds \right| &\leq K \cdot \left| \int_{t_0}^t \frac{K^n}{n!} d(\mu, \nu) |s - t_0|^n ds \right| \\ &\leq \frac{K^{n+1}}{n!} d(\mu, \nu) \left| \int_{t_0}^t |s - t_0|^n ds \right|. \end{aligned}$$

Tomando $t_0 \leq t$ (para $t_0 > t$ é análogo), então $(t - t_0) \geq 0$. Daí, segue

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t |s - t_0|^n ds &= \int_{t_0}^t (s - t_0)^n ds \\ &= \int_0^{t-t_0} u^n du, \text{ onde } u = s - t_0 \implies du = ds, \\ &= \frac{u^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{t-t_0} = \frac{(t - t_0)^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}^{n+1}(\mu)(t) - \mathcal{L}^{n+1}(\nu)(t)| &= K \cdot \left| \int_{t_0}^t |\mathcal{L}^n(\mu)(s) - \mathcal{L}^n(\nu)(s)| ds \right| \\ &\leq \frac{K^{n+1}}{n!} \cdot d(\mu, \nu) \cdot \left| \int_{t_0}^t |s - t_0|^n ds \right| \\ &\leq \frac{K^{n+1}}{n!} \cdot d(\mu, \nu) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot |t - t_0|^{n+1} \\ &= \frac{K^{n+1}}{(n+1)!} \cdot d(\mu, \nu) \cdot |t - t_0|^{n+1}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do lema. ■

Podemos agora apresentar o primeiro resultado sobre a existência e unicidade de solução para o problema de valor inicial (4.15).

Teorema 4.21. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua em um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Se $[a, b] \times \mathbb{R}^n \subseteq U$ e f é lipschitziana em $[a, b] \times \mathbb{R}^n$, então para quaisquer $t_0 \in [a, b]$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução do problema de valor inicial (4.15) definida no intervalo $[a, b]$.*

Demonstração. Sejam $I = [a, b]$ e $l = b - a$ a amplitude do intervalo $[a, b]$. Como $t \in [a, b]$, então temos que

$$|t - t_0| \leq l \Leftrightarrow |t - t_0|^m \leq l^m \Leftrightarrow \frac{k^m}{m!} |t - t_0|^m \leq \frac{(kl)^m}{m!}, m \in \mathbb{N}. \quad (4.31)$$

Logo, como a ordem de crescimento do fatorial é maior que a ordem de crescimento da exponencial, (o leitor pode verificar em (STEWART, 2006), na página 735 que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ é convergente), então

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(Kl)^m}{m!} = 0. \quad (4.32)$$

Portanto, existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $t \in I = [a, b]$, temos

$$\frac{k^m}{m!} |t - t_0|^m \leq \frac{(kl)^m}{m!} = \eta < 1. \quad (4.33)$$

Assim, pelo Lema 4.20, tem-se

$$d(\mathcal{L}^m(\mu), \mathcal{L}^m(\nu)) = \sup |\mathcal{L}^m(\mu) - \mathcal{L}^m(\nu)| \quad (4.34)$$

$$\leq \frac{k^m}{m!} |t - t_0|^m \cdot d(\mu, \nu) \quad (4.35)$$

$$\leq \eta \cdot d(\mu, \nu). \quad (4.36)$$

Portanto, pela Definição 4.4, temos que \mathcal{L}^m é uma contração do espaço métrico completo $C(I, \mathbb{R}^m)$. Daí pelo Corolário 4.10, segue que \mathcal{L} possui um único ponto fixo x , onde $x \in C$ que é solução do PVI (4.15). ■

A seguir, apresentamos o teorema principal deste trabalho, o *Teorema da Existência e Unicidade*, que generaliza o Teorema 4.21.

Teorema 4.22. (Teorema da Existência e Unicidade de Picard) *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, uma aplicação contínua em E . Se f é lipschitziana em $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B(x_0, b)} \subseteq E$ em relação a segunda variável, então existe uma única solução do problema de valor inicial (4.15) definida no intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \in \mathbb{R}$, onde $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ e $M = \sup \{ |f(t, x)|, (t, x) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B(x_0, b)} \}$.*

Demonstração. Considere $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \in \mathbb{R}$ e $\overline{B(x_0, b)} \in \mathbb{R}^n$. Seja $C_0(I, E)$ o espaço métrico das aplicações contínuas e limitadas de I em E dotado da norma uniforme. Como já visto, C_0 é completo pelo Corolário 3.66. Agora, seja $C \subset C_0$ dado por $C := C_0(I, \overline{B(x_0, b)})$,

isto é, C é o conjunto das aplicações contínuas cujo domínio é I e a imagem está contida em $B(x_0, b)$. Assim, definimos (4.18) por $\mathcal{L} : C \rightarrow C$ tal que

$$\mathcal{L}(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (4.37)$$

Note que (4.37) está bem definida em C , pois dado um caminho $\mu \in C$, tem-se que $\mathcal{L}(\mu)$ é contínua se μ for contínua. Além disso,

$$\begin{aligned} \mu \in C \implies |\mathcal{L}(\mu(t)) - x_0| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \mu(s)) ds - x_0 \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \mu(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \mu(s))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t M ds \right| \\ &\leq M \left| \int_{t_0}^t ds \right| \\ &\leq M |t - t_0| \leq b, \end{aligned}$$

ou seja, a imagem de $\mathcal{L}(x)$ está contida em $B(x_0, b)$. Isso significa que \mathcal{L} leva aplicações de C em aplicações de C . Por outro lado, se K é uma constante de Lipschitz de f , então pelo Lema 4.20, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\mathcal{L}^n(\mu)(t) - \mathcal{L}^n(\nu)(t)| \leq \frac{K^n}{n!} \cdot |t - t_0|^n \cdot d(\mu, \nu), \quad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \forall \mu, \nu \in C. \quad (4.38)$$

Daí, como $|t - t_0| \leq \alpha$, tem-se

$$\begin{aligned} d(\mathcal{L}^n(\mu), \mathcal{L}^n(\nu)) = \sup |(\mathcal{L}^n(\mu) - \mathcal{L}^n(\nu))| &\leq \frac{K^n}{n!} \cdot |t - t_0|^n \cdot d(\mu, \nu) \\ &\leq \frac{K^n}{n!} \cdot \alpha^n \cdot d(\mu, \nu). \end{aligned}$$

Novamente, pelo fato do fatorial crescer muito mais rápido que a exponencial, para algum $0 < \eta < 1$ fixo, existe um n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, tem-se $\frac{K^n \cdot \alpha^n}{n!} < \eta$. Portanto, para todo $n \geq n_0$, \mathcal{L}^n é uma contração. Dessa forma, como C é completo na métrica uniforme e $\mathcal{L} : C \rightarrow C$, segue pelo Teorema da Contração Uniforme que \mathcal{L}^n possui um único ponto fixo. Logo, se p é o único ponto fixo de \mathcal{L}^n , então p também é ponto fixo de \mathcal{L} , pois

$$\mathcal{L}^n(p) = p \implies \mathcal{L}(\mathcal{L}^n(p)) = \mathcal{L}(p) \Leftrightarrow \mathcal{L}^n(\mathcal{L}(p)) = \mathcal{L}(p). \quad (4.39)$$

Daí, pela comutatividade das composições, temos que $\mathcal{L}(p)$ também é ponto fixo de \mathcal{L}^n e como este é único, devemos ter $\mathcal{L}(p) = p$. Como todo ponto fixo de \mathcal{L} é também ponto fixo de \mathcal{L}^n , então \mathcal{L} possui um único ponto fixo e, portanto, o PVI (4.15) possui uma única solução. ■

Para concluir, vejamos quatro exemplos onde usamos o teorema para garantir a existência e unicidade da solução do PVI.

Exemplo 4.23. *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{aligned}x' &= x^2, \\x(1) &= 1.\end{aligned}\tag{4.40}$$

Observe que a aplicação $f(t, x) = x^2$ é lipschitziana, pois dados $a, b \in [1 - \alpha, 1 + \alpha]$, tem-se

$$|f(a) - f(b)| = |a^2 - b^2| = |(a + b)(a - b)| \leq |a + b||a - b| \leq 2\alpha|a - b|.$$

Agora, basta tomar $c = 2\alpha$ e obtemos $|f(a) - f(b)| \leq c \cdot |a - b|$. Portanto, a aplicação do PVI é lipschitziana, e pelo teorema (4.22), o PVI possui uma única solução no intervalo $[1 - \alpha, 1 + \alpha]$. Resolvendo o PVI, temos uma equação de variável separável, daí segue que

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \Leftrightarrow \frac{dx}{x^2} = dt.$$

Integrando ambos os lados, temos

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dt \Leftrightarrow -x^{-1} = t + C \Leftrightarrow x = \frac{1}{-C - t}.$$

Substituindo pelo dado inicial, tem-se

$$1 = \frac{1}{-C - 1} \Leftrightarrow C = -2.$$

Portanto, a solução do PVI é $x(t) = \frac{1}{2 - t}$.

Exemplo 4.24. *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{aligned}x' &= |x|^{1/2}, \\x(0) &= 0.\end{aligned}\tag{4.41}$$

Sendo $f(x) = \sqrt{|x|}$, consideremos $x > 0$. Dessa forma, como $t_0 = 0$, então devemos encontrar uma cota superior para f no intervalo $[-\alpha, \alpha]$ para que o teorema (4.22) garanta a unicidade da solução. Por outro lado, sendo $x, y \in (0, +\infty)$ quaisquer e $x \neq y$, temos

$$\begin{aligned}\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} &= \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} \\&= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} \\&= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2} \\&= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\&= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.\end{aligned}$$

Como o quociente $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ não é limitado para valores de x e y próximos de zero, então f não admite cota superior para quaisquer intervalos $[0, \alpha]$ com $\alpha > 0$. Para o caso $x < 0$, é fácil ver que obteremos o mesmo resultado para f . Portanto, f não é lipschitziana em qualquer intervalo $[-\alpha, \alpha]$. Agora, observe que a aplicação $x(t) \equiv 0$ é uma solução do problema de valor inicial. Por outro lado, aplicando o método das variáveis separáveis, para $x > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}x'(t) &= \sqrt{|x|} = \sqrt{x} \\ \frac{dx}{dt} &= \sqrt{x} \\ \frac{dx}{dt} \frac{1}{\sqrt{x}} &= 1.\end{aligned}$$

Agora, integrando em relação a dx e dt , temos

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \int dt \\ \int x^{-1/2} dx &= t + K_1 \\ 2 \cdot x^{1/2} + K_2 &= t + K_1 \\ x^{1/2} &= \frac{1}{2}t + K \\ x &= \frac{1}{4}t^2 + tK + K^2.\end{aligned}$$

Como $t_0 = 0$ e $x(t_0) = 0$, segue que uma solução do PVI (4.41) é dada por

$$x(t) = \frac{1}{4}t^2, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.42)$$

Além disso, a aplicação

$$x(t) = -\frac{1}{4}t^2, \quad \forall t < 0 \quad (4.43)$$

é também solução do PVI (4.41), deixamos para o leitor verificar para o caso em que $x < 0$, pois é análogo ao mostrado acima. Portanto, retirando a condição de Lipschitz, o Teorema 4.22 garante a existência, mas não a unicidade da solução do PVI, como exposto no exemplo acima.

Exemplo 4.25. *Catenária é o nome dado à forma tomada por um cabo flexível, onde todas as tensões no cabo são sempre na direção da tangente, inextensível, suspenso em dois pontos A e B e sujeito ao seu próprio peso (Fig.11). O problema de determinar a forma da catenária foi proposto por Leonardo da Vinci, e resolvido por Johann Bernoulli. A função que modela a curva apresentada pelo cabo deve satisfazer a equação diferencial*

$$x'' = c\sqrt{1 + (x')^2}. \quad (4.44)$$

Vamos, aqui, analisar se a equação (4.44) satisfaz as condições do Teorema 4.22 garantindo, assim, a existência de solução, para então, encontrá-la. Em primeiro lugar, vamos introduzir a variável $p = x'$, daí obtemos $p' = c\sqrt{1+p^2}$. Agora, vamos mostrar que $f(p) = c\sqrt{1+p^2}$ é lipschitziana. Assim, para quaisquer $p, q \in \mathbb{R}$ e $p \neq q$, devemos encontrar um $k > 0$ tal que satisfaça a Definição 4.19. Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{|f(p) - f(q)|}{|p - q|} &= \frac{c|\sqrt{1+p^2} - \sqrt{1+q^2}|}{|p - q|} \cdot \frac{(\sqrt{1+p^2} + \sqrt{1+q^2})}{(\sqrt{1+p^2} + \sqrt{1+q^2})} \\ &= \frac{c(1+p^2 - 1 - q^2)}{(p - q)(\sqrt{1+p^2} + \sqrt{1+q^2})} \\ &= \frac{c(p^2 - q^2)}{(p - q)(\sqrt{1+p^2} + \sqrt{1+q^2})} \\ &= \frac{c(p + q)(p - q)}{(p - q)(\sqrt{1+p^2} + \sqrt{1+q^2})} \\ &= \frac{c(p + q)}{(\sqrt{1+p^2} + \sqrt{1+q^2})} \\ &= \frac{cp}{(\sqrt{1+p^2} + \sqrt{1+q^2})} + \frac{cq}{(\sqrt{1+p^2} + \sqrt{1+q^2})} \\ &\leq k_1 + k_2 \leq k. \end{aligned}$$

Assim, f é uma aplicação lipschitziana e limitada em algum intervalo $[a, b]$ onde $p, q \in [a, b]$. Portanto, para algum $t_0 \in [a, b]$ tal que $x(t_0) = x_0 = K$, o Teorema 4.22 garante que o PVI, $x'' = c\sqrt{1+(x')^2}$ e $x(t_0) = x_0 = K$, admite uma única solução para a equação (4.44). Agora, estamos interessados em encontrar uma solução para a equação (4.44). Para isso, vamos considerar que a curva seja como mostrado na Fig. 11.

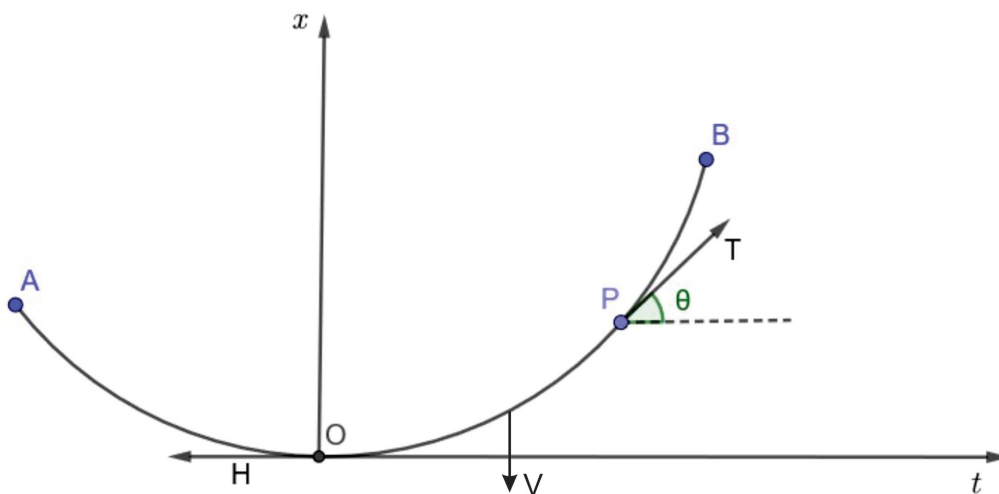


Figura 11 – Curva da Catenária. Fonte: (FIGUEIREDO; NEVES, 1979), p. 40.

Considerando o trecho OP da curva, temos que

1. H é a tensão do cabo no ponto mais baixo, ou seja, no ponto $(0,0)$ do sistema de eixos.
2. T é a tensão do cabo no ponto $P(t,x)$.
3. V é o peso do cabo no trecho OP.
4. ω é o peso por unidade de comprimento do cabo.
5. s é o comprimento do cabo no trecho OP.
6. $V = \omega \cdot s$

Como o cabo está em equilíbrio e as componentes de T são $T_t = T \cos \theta$ e $T_x = T \sin \theta$, segue que

$$-H + T \cos \theta = 0 \Leftrightarrow T \cos \theta = H, \quad (4.45)$$

$$-V + T \sin \theta = 0 \Leftrightarrow T \sin \theta = V. \quad (4.46)$$

Dividindo (4.46) por (4.45), obtemos

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{V}{H} = \frac{\omega}{H} \cdot s. \quad (4.47)$$

Agora, note que pela interpretação geométrica de derivada, temos

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega}{H} \cdot s = x'. \quad (4.48)$$

Derivando (4.48), obtemos

$$x'' = \frac{\omega}{H} \cdot \frac{ds}{dt}. \quad (4.49)$$

Logo, a solução x deve satisfazer a equação (4.49). Como o quociente $\frac{\omega}{H} = c$ é constante e

$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$, podemos escrever (4.49) como

$$x'' = c \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}. \quad (4.50)$$

Fazendo $x' = p$, obtemos a equação separável de primeira ordem,

$$p' = c \sqrt{1 + p^2}. \quad (4.51)$$

Assim, a solução de (4.49) pode ser obtida pela equação (4.51). Assim,

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int c \cdot dt. \quad (4.52)$$

Fazendo a substituição $p = \cotg \theta$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 \theta}} (-\operatorname{cosec}^2 \theta) d\theta &= \int \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta}}} (-\operatorname{cosec}^2 \theta) d\theta \\
 &= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta}}} (-\operatorname{cosec}^2 \theta) d\theta \\
 &= \int \operatorname{sen} \theta (-\operatorname{cosec}^2 \theta) d\theta \\
 &= - \int \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} d\theta \\
 &= - \int \operatorname{cosec} \theta d\theta.
 \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo o integrando por $\cotg \theta + \operatorname{cosec} \theta$, e fazendo $u = \cotg \theta + \operatorname{cosec} \theta$ em que $du = -\operatorname{cosec}^2 \theta - \cotg \theta \operatorname{cosec} \theta d\theta$, obtemos

$$\begin{aligned}
 - \int \operatorname{cosec} \theta d\theta &= - \int \operatorname{cosec} \theta \frac{(\cotg \theta + \operatorname{cosec} \theta)}{(\cotg \theta + \operatorname{cosec} \theta)} d\theta \\
 &= \int \frac{-\operatorname{cosec} \theta \cotg \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta}{\cotg \theta + \operatorname{cosec} \theta} d\theta \\
 &= \int \frac{1}{u} du \\
 &= \ln(u) + C \\
 &= \ln(\cotg \theta + \operatorname{cosec} \theta) + C.
 \end{aligned}$$

Portanto, usando a identidade trigonométrica $\operatorname{cosec}^2 \theta - 1 = \cotg^2 \theta$, e fazendo a substituição $p = \cotg \theta$, obtemos

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int c \cdot dt$$

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + \cotg^2 \theta}} = \int c \cdot dt$$

$$\int \frac{dp}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \theta}} = \int c \cdot dt$$

$$\int \frac{dp}{\operatorname{cosec} \theta} = \int c \cdot dt$$

$$\ln(\cotg \theta + \operatorname{cosec} \theta) + C_1 = c \cdot t + C_2$$

$$\ln\left(\sqrt{p^2 + 1} + p\right) + C_1 = c \cdot t + C_2$$

$$\ln\left(\sqrt{p^2 + 1} + p\right) = c \cdot t + C.$$

Agora, tomando $t_0 = 0$, então $x(t_0) = 0$, obtemos que $C = 0$. Logo,

$$\ln\left(\sqrt{p^2 + 1} + p\right) = c \cdot t \Leftrightarrow \sqrt{p^2 + 1} + p = e^{ct}. \quad (4.53)$$

Resolvendo (4.53) em p , tem-se

$$\begin{aligned} \sqrt{p^2 + 1} + p &= e^{ct} \\ \sqrt{p^2 + 1} &= e^{ct} - p \\ p^2 + 1 &= (e^{ct} - p)^2 \\ p^2 + 1 &= e^{2ct} - 2pe^{ct} + p^2 \\ 1 &= e^{2ct} - 2pe^{ct} \\ p &= \frac{e^{ct} - e^{-ct}}{2}. \end{aligned}$$

Como $p = \frac{dx}{dt}$, segue

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^{ct} - e^{-ct}}{2}. \quad (4.54)$$

Integrando (4.54), obtemos as soluções para a equação (4.50),

$$x(t) = \int \frac{e^{ct} - e^{-ct}}{2} dt = \frac{e^{-ct} + e^{ct}}{2c} + K. \quad (4.55)$$

Portanto, as soluções de (4.50) são da forma

$$x(t) = \frac{e^{-ct} + e^{ct}}{2c} + K, \quad (4.56)$$

onde $K \in \mathbb{R}$ e $c = \frac{\omega}{H}$.

Para finalizar, apresentamos uma última aplicação dentro da Física, tratando de um problema mais prático do ponto de vista real.

Exemplo 4.26. *Um manômetro em formato de U (usado para medir pressão) está inicialmente cheio de água, mas é exposto a uma diferença de pressão tal que o nível d'água em seu lado esquerdo fica 0,05 m mais alto que o nível d'água em seu lado direito. Em $t = 0$, a diferença de pressão é repentinamente removida. Quando se despreza o atrito, a altura do nível d'água no lado esquerdo y , medida a partir do plano central entre os dois níveis d'água iniciais, é dada pela equação*

$$L \frac{d^2 y}{dx^2} = -2gy, \quad (4.57)$$

onde $L = 0,2$ m é o comprimento total do tubo em forma de U, e $g = 9,81$ m/s². Queremos usar o Teorema 4.22 para garantir a existência e a unicidade da solução deste problema.

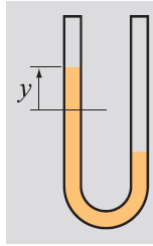


Figura 12 – Manômetro. Fonte: (GILAT; SUBRAMANIAM, 2009).

Fazendo as substituições das constantes, temos

$$0,2y'' = -2 \cdot 9,81 \cdot y. \quad (4.58)$$

Daí, simplificando a equação acima, temos

$$y'' = -98,1y. \quad (4.59)$$

Assim, a função $f(t, y) = -98,1y$ é linear em relação à variável espacial. Dessa forma, é fácil mostrar que f é lipschitziana em relação à variável espacial, como segue. Queremos encontrar uma constante $k > 0$ tal que para todo $(t, x), (t, y) \in \mathbb{R}^2$ devemos ter

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k \cdot |x - y|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &= |-98,1x - (-98,1y)| \\ &= |-98,1x + 98,1y| \\ &= |(-98,1)(x - y)| \\ &\leq |-98,1| \cdot |x - y| = 98,1|x - y|. \end{aligned}$$

Portanto, f é lipschitziana em relação a segunda variável. Dessa forma, tomando $t_0 = 0$, temos $y(t_0) = y(0) = 0$, pelo Teorema 4.22, o problema de valor inicial tem uma única solução em um intervalo $(-\alpha, \alpha)$ que contém t_0 . Para esta última aplicação, não faremos a solução explícita do PVI, visto que as soluções são funções complexas, logo o método mais prudente seria utilizar o método numérico para uma aproximação da solução do PVI.

4.2.1 Intervalo maximal de definição da solução

Vimos que o Teorema 4.22 garante a existência e unicidade local de um PVI, como no Exemplo 4.23, em um intervalo $(1 - \alpha, 1 + \alpha)$. Note que a solução do PVI

$$\begin{aligned} x' &= x^2 \\ x(1) &= 1 \end{aligned}$$

dado em (4.23) é $y = \frac{1}{2-t}$, o qual está definida para todo $t \neq 2$, ou seja, $t \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Contudo, o domínio de definição da solução de um PVI, conforme o teorema, é um intervalo, e não uma união de intervalos, que neste caso, o domínio de definição é apenas o intervalo $(-\infty, 2)$. Dessa forma, o leitor pode se perguntar: até onde podemos estender o intervalo de definição de uma solução de um PVI? Portanto, é isso que trataremos nesta seção.

Definição 4.27. *Dada um EDO $x' = f(t, x)$, uma aplicação $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita maximal se para toda solução $\psi : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $J \subset J_1$ e $\psi|_J = \phi$, tem-se $J_1 = J$. Neste caso, J é dito intervalo maximal de ϕ .*

Perceba que a Definição 4.27 permite a existência de duas ou mais soluções maximais de um mesmo problema de valor inicial (PVI), com domínios distintos, desde que elas não coincidam em algum ponto da interseção de seus domínios. No entanto, isto pode ocorrer quando a unicidade da solução do PVI não é garantida. O Teorema a seguir será usado para demonstrar a unicidade da solução máxima.

Teorema 4.28. *Se $f(t, x)$ e a derivada parcial espacial $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ são aplicações contínuas de (t, x) no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, então dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do problema de valor inicial 4.15 definida em um intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ centrado em t_0 para certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.*

Note que o Teorema 4.28 é equivalente ao Teorema 4.22 com a condição de Lipschitz substituída pela derivada parcial espacial da aplicação f . O leitor pode encontrar a demonstração em (DOERING; LOPES, 2008).

Lema 4.29. *Seja $x_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução do PVI 4.15 definida em um intervalo aberto $I_i \subseteq \mathbb{R}$, com $i = 1, 2$. Então $x_1(t) = x_2(t)$ em cada $t \in I_1 \cap I_2$.*

Demonstração. Denotemos $J = \{t \in I \mid x_1(t) = x_2(t)\} \subseteq I$, em que $I = I_1 \cap I_2$. Como $t_0 \in J$, o conjunto J é não vazio. Seja agora $t \in J$ dado arbitrariamente. Pela unicidade das soluções do problema de valor inicial 4.15, existe um intervalo aberto centrado em t no qual x_1 e x_2 coincidem, o que mostra que J é um subconjunto aberto de I . Por outro lado, J também é fechado em I , pois é a imagem inversa $(x_1 - x_2)^{-1}(\{0\})$ do fechado $\{0\}$ de \mathbb{R}^n pelo caminho contínuo $x_1 - x_2$ em I . ■

Proposição 17. *Se $f(t, x)$ e a derivada parcial espacial $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ são aplicações contínuas de (t, x) no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, então para cada $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução máxima do problema de valor inicial 4.15 necessariamente definida em um intervalo aberto.*

Demonstração. Seja $I = \cup J$ a união da coleção de todos os intervalos abertos J para os quais existe alguma solução $\tilde{x} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (4.15) definida em J . Pelo Teorema 4.28,

existe pelo menos um intervalo $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ nessa coleção e, pelo Lema 4.29, dados dois intervalos dessa coleção, as soluções coincidem na interseção desses intervalos. Assim, podemos definir $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ da seguinte forma: dado $t \in I$, tomamos algum intervalo aberto J da coleção tal que $t \in J$, com solução associada $\tilde{x} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ e definimos $x(t) = \tilde{x}(t)$. Pelo que acabamos de observar, $x|_J = \tilde{x}$ é uma solução de 4.15 e, por construção, x é a solução máxima de 4.15, definida no intervalo aberto I . ■

Para concluir, vejamos dois exemplos.

Exemplo 4.30. *Encontre o intervalo maximal de definição da solução do PVI*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{t}{2+x} \\ y(0) &= 0.\end{aligned}$$

Note que a equação do PVI acima é separável, logo temos

$$(2+x)dx = tdt.$$

Integrando em ambos os lados da equação, fica

$$2x + \frac{x^2}{2} = \frac{t^2}{2} + C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Daí, multiplicando esta última equação por 2, teremos

$$4x + x^2 = t^2 + C \Leftrightarrow 4x + x^2 - t^2 = 0,$$

aplicando a condição inicial do PVI, encontramos $C = 0$. Resolvendo a última equação como uma equação quadrática na variável x , obtemos

$$x = -2 \pm \sqrt{4+t^2}.$$

Observe que encontramos duas soluções para a equação do PVI, que está definida para todo \mathbb{R} . Mas pela condição inicial, a solução do PVI é dada por $x(t) = -2 + \sqrt{4+t^2}$. Note que o Teorema 4.22 garante que no intervalo $(-\alpha, +\alpha)$ centrado em $t_0 = 0$, existe uma única solução para o PVI, porém, podemos estender este intervalo para $-\infty$ ou $+\infty$, ou seja, o intervalo maximal de definição da solução é $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$. Por outro lado, vejamos o PVI a seguir, o que acontece quando mudamos a condição inicial.

Exemplo 4.31. *Encontre o intervalo maximal de definição da solução do PVI*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{t}{2+x} \\ y(-3) &= -3.\end{aligned}$$

Observe que a equação do PVI é a mesma do anterior, e portanto, a solução satisfaz

$$4x + x^2 = t^2 + C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Aplicando a condição inicial, obtemos $C = -12$. Daí, a solução do PVI, dada implicitamente, é

$$4x + x^2 - t^2 + 12 = 0.$$

Novamente, resolvendo esta última equação como uma equação quadrática na variável x , obtemos então a solução explícita

$$x(t) = -2 \pm \sqrt{t^2 - 8}.$$

Agora, note que a solução está definida para todo $t \in (-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, +\infty)$, porém este não é o intervalo maximal da solução. Devemos tomar o maior intervalo que contém $t_0 = -3$ e que x está definida, dessa forma, a solução do PVI será

$$x(t) = -2 - \sqrt{t^2 - 8},$$

definida para todo $t \in (-\infty, -2\sqrt{2})$, este portanto é o intervalo maximal.

5 Considerações Finais

Os Espaços Métricos nos dão suporte para procurar soluções para um problema de valor inicial, pois todas as definições de aplicações contínuas se baseiam no conceito de distância entre pontos de um conjunto, que é definido pela métrica do conjunto considerado. E note que isso é profundamente importante, pois para utilizarmos o Teorema da Existência e Unicidade, as aplicações devem ser uniformemente contínuas, e utilizamos a definição de sequências de Cauchy para demonstrar este fato.

Além disso, a definição de sequência de Cauchy é de extrema importância no estudo de sequências pois, como foi exposto neste trabalho, ser de Cauchy é uma propriedade intrínseca da sequência, ou seja, depende apenas dos pontos da sequência e não de um outro ponto do conjunto. Dessa forma, a definição de Espaços Métricos completos se dá quando toda sequência de Cauchy converge dentro do espaço considerado, ou seja, para garantirmos que um PVI tenha solução dentro de um conjunto, devemos garantir que este é completo. Utilizando o método das aproximações sucessivas, em que obtemos uma sequência de funções, basta mostrar que esta sequência é de Cauchy, que por sua vez é convergente e, portanto, o PVI tem solução.

Assim, partindo para o campo das aplicações das equações diferenciais, onde acontecem as modelagens de fenômenos da Física, Química, Astronomia, Engenharia, entre outras, em que se busca a solução para algum problema real a partir da função modelada, como, por exemplo, o resfriamento de um corpo, é mais prudente saber com antecedência, se aquela modelagem permite apenas uma solução ou mais de uma, por isso o Teorema da Existência e Unicidade se faz tão importante, pois ele mostra que, se o modelo satisfaz alguns critérios, a solução existe e é única, otimizando, assim, a pesquisa do problema em questão. Outro fator importante a notar é o Método das Aproximações Sucessivas de Picard, pois como exposto acima, de forma analítica, na modelagem de fenômenos reais, quase nunca se encontra a solução de um PVI de forma algébrica, devido às vezes, pela complexidade da equação, por isso os métodos numéricos de solução de Equações Diferenciais são úteis. Portanto, fica evidente a importância e a amplitude do Teorema da Existência e Unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias.

Por fim, este trabalho teve seu desenvolvimento baseado, sobretudo, no espaço métrico real, contudo, o último exemplo nos traz uma aplicação que possui solução, porém, não real. Assim, deixamos para uma abordagem futura, um estudo do teorema da existência e unicidade, dentro de espaços métricos complexos.

Referências

- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. [S.l.]: Guanabara Dois, 1985. Citado 5 vezes nas páginas 9, 11, 12, 13 e 50.
- CASTELLI, Marcos. **Teoremas de ponto fixo**. 2016. Disponível em: <http://www.pma.uem.br/discente/defesas-dissertacoes/marcos_castelli.pdf>. Acesso em: 21 jan. 2021. Citado na página 44.
- COIMBRA, Universidade de. **Charles Émile Picard**. 2011. Disponível em: <<https://www.uc.pt/fctuc/dmat/departamento/bibliomat/servicos/matematicos/PicardCE>>. Acesso em: 22 jan. 2021. Citado na página 40.
- DOERING, Claus Ivo; LOPES, Artur O. **Equações diferenciais ordinárias**. [S.l.: s.n.], 2008. Citado 3 vezes nas páginas 44, 50 e 67.
- FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações diferenciais aplicadas**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. Citado 3 vezes nas páginas 9, 11 e 62.
- GILAT, Amos; SUBRAMANIAM, Vish. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. [S.l.]: Bookman Editora, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 66.
- JÚNIOR, Augusto Armando de Castro. Curso de equações diferenciais ordinárias. **Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)**, 2009. Citado na página 50.
- LIMA, Elon Lages. **Elementos de topologia geral**. [S.l.]: Ao Livro Técnico, Editôra da Universidade de São Paulo, 1970. Citado 3 vezes nas páginas 9, 33 e 35.
- LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 1983. v. 4. Citado 6 vezes nas páginas 9, 13, 26, 30, 34 e 37.
- LIMA, Elon Lages. **Análise real**. [S.l.]: Impa Rio de Janeiro, 2004. v. 1. Citado na página 14.
- NETO, Antonio Caminha Muniz. Fundamentos de cálculo. **Rio de Janeiro: SBM**, 2015. Citado na página 51.
- ROBERTSON, Jj O'Connor e Ef. **Charles Émile Picard**. 2001. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Picard_Emile/>. Acesso em: 25 jan. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 9, 40 e 48.
- RUGGIERO, Márcia A Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1997. Citado na página 42.
- STEWART, James. Cálculo vol. 2, 5a edição. **Editora Thompson**, p. 36, 2006. Citado na página 58.

WIKIPEDIA. **Stefan Banach**. 2020. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/StefanBanach>>. Acesso em: 25 jan. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 9, 40 e 49.