UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

NELLY ALMEIDA DA SILVA

SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS: UMA INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS E UM BREVE ESTUDO DE MODELOS POPULACIONAIS

ARAGUAÍNA-TO
2019

NELLY ALMEIDA DA SILVA

SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS: UMA INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS E UM BREVE ESTUDO DE MODELOS POPULACIONAIS

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hancco.

ARAGUAÍNA-TO
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S586s Silva, Nelly Almeida da.

Sistemas Dinâmicos Discretos: Uma Introdução às Equações de Diferenças e um Breve Estudos de Modelos Populacionais . / Nelly Almeida da Silva. – Araguaína, TO, 2019.

107 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2019.

Orientador: Alvaro Julio Yucra Hancco

1. Sistemas Dinâmicos Discretos. 2. Equações de Diferenças. 3. Estabilidade. 4. Modelos Populacionais . I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

NELLY ALMEIDA DA SILVA

SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS: UMA INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS E UM BREVE ESTUDO DE MODELOS POPULACIONAIS

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hancco.

Aprovada em: 11 / 12 / 2019.

BANCA EXAMINADORA

Alvaro V

Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hancco (orientador)

Samara L. Matos

Prof.Dr. Samara Leandro Matos da Silva

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior

Dedico este trabalho aos meus familiares e a todos que buscam o conhecimento.

AGRADECIMENTOS

Agradeço acima de tudo a Deus, pois pela sua imensa graça, me deu forças e condições para chegar até aqui. Agradeço aos meus pais, Ivanice Maria e José de Arimatéia, por todo apoio, carinho e paciência, me proporcionando sempre o melhor, dentro das nossas condições. Agradeço aos meus irmãos Isaías, Neemias e Inês que mesmo distante alegraram meus dias e me ajudaram a lutar pelo meu objetivo. Também agradeço ao Paulo, que teve um papel fundamental durante minha formação acadêmica, estando ao meu lado, sempre me incentivou e me apoiou em todos os momentos.

Dedico a minha gratidão também a todos os meus colegas da universidade, especialmente aos meus colegas de turma, que foram grandes parceiros durante esse tempo que estivemos juntos, levarei comigo todas as nossas boas lembranças. Aos meus colegas do grupo Euklidea (Jusciel, Maria Cristina e Matheus), agradeço imensamente a vocês, também ao Victor, meu grande amigo, obrigada por estarem comigo e por impulsionarem minha vida acadêmica.

Agradeço também aos programas e projetos, nos quais participei, sendo eles: PIBID, PADI, PIVIC, Seminário de Coisas Legais e Residência Pedagógica, neles tive a oportunidade de aprender novas metodologias e de crescer profissionalmente.

Meu agradecimento também ao colegiado de Matemática, pelo apoio de todos os professores, em especial, aos professores: José Carlos, Samara, Sinval e Deive, que me apoiaram e incentivaram em todos os projetos, sempre prontos e dispostos a ajudar, os tenho como referência na profissão. Meus agradecimentos também ao professor Matheus que mesmo não sendo do colegiado de Matemática, me apoiou na pesquisa e de diversas maneiras no decorrer do curso. Agradeço ao corpo administrativo da universidade, que direta ou indiretamente contribuiu para a minha formação.

Por fim, agradeço imensamente ao meu orientador, prof. Dr. Álvaro Yucra, que aceitou trabalhar comigo nesse projeto, agradeço pois em todos os momentos esteve disposto e pacientemente me auxilou, sempre incentivando a lutar pelos meus objetivos, sou grata por todo apoio e incentivo.

A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.

Galileu Galilei

RESUMO

Este trabalho apresenta uma introdução aos Sistemas Dinâmicos Discretos, área que tem grande destaque em modelar fenômenos e prever acontecimentos futuros com base em acontecimentos passados. No estudo desses sistemas, as equações de diferenças têm grande destaque, sendo essas uma versão discreta das equações diferenciais. Desse modo, apresentaremos alguns conceitos que auxiliam na resolução dessas equações, tais como, os conceitos de equações de diferenças lineares homogêneas e não homogêneas, analogamente, realizamos o mesmo processo para sistemas lineares autônomos e não autônomos, com enfoque nos bidimensionais, ou seja, envolvendo duas equações. Quando estudamos fenômenos que evoluem conforme o tempo aumenta, se faz necessário entender o comportamento do modelo em questão. Para isso, estudaremos alguns conceitos de estabilidade, e serão apresentados seus respectivos exemplos, buscando ter uma base para estudos mais avançados no futuro. Também, serão exibidas algumas aplicações de modelos populacionais, como o modelo de reprodução de coelhos (Fibonacci), o cálculo da taxa de mortalidade infantil no Brasil, uma projeção de usuários de internet no Brasil nos anos de 2011 a 2018 e, finalmente, um sistema que modela a quantidade de Bisontes na América do Norte.

Palavras-chave: Equações de Diferenças. Modelos Populacionais. Sistemas Dinâmicos Discretos. Estabilidade.

ABSTRACT

This work presents an introduction to Discrete Dynamic Systems, an area that has great prominence in modeling phenomena and predicting future events based on past events. In the study of these systems, the difference equations have great prominence, being these a discrete version of the differential equations. Thus, we will present some concepts that help in solving these equations, such as the concepts of homogeneous and non-homogeneous linear difference equations, similarly, we perform the same process for autonomous and non-autonomous linear systems, focusing on two-dimensional, that is, involving two equations. When we study phenomena that evolve over time, it is necessary to understand the behavior of the model in question. For this, we will study some concepts of stability and will be presented with their respective examples, seeking to have a base for more advanced studies in the future. Also, some applications of population models will be displayed, such as the rabbit reproduction model (Fibonacci), the calculation of the infant mortality rate in Brazil, a projection of internet users in Brazil from 2011 to 2018, and, finally a system that models the amount of Bisons in North America.

Keywords: Differences equations. Population models. Discrete Dynamic Systems. Stability.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Os estudos e aplicações de Sistemas Dinâmicos Discretos estão presentes em diferentes áreas, seja na Economia, Biologia, Matemática Financeira e outras. Se fazendo necessário para compreender diferentes problemas, em alguns casos modelando situações que podem chegar a ser irregulares e imprevisíveis, se apresentando em pequenas ou grandes escalas a depender da linearidade do sistema. Como exemplo disso, temos o caos, que pode ser observado no fato de que uma pequena alteração causada em um determinado processo pode trazer resultados alarmantes, no sentido de que processos que estavam próximos, podem divergir exponencialmente.

Temos também outros modelos que permitem tirar conclusões um pouco mais próximas do real, que são provenientes dos sistemas dinâmicos discretos, onde através de processos iterativos e que dependem de uma variável discreta que denominamos de tempo, consigamos compreender o comportamento de um determinado fenômeno. As equações de diferenças desempenham um papel fundamental para se obter a solução e auxiliar na compreensão desses modelos. como exemplo desses sistemas temos os modelos populacionais que são utilizados para determinar o processo de evolução ou de extinção de uma determinada população de seres vivos, podendo ser de bactérias, flores, abelhas, população humana, entre outros.

Apresentaremos condições que tornam possível essa análise. Buscamos apresentar conceitos que são fundamentais para a compreensão de modelos dinâmicos. Falando sobre as equações de diferenças lineares e sistemas lineares. Abordaremos uma parte da teoria de equações de diferenças lineares, tanto homogênea como não homogênea, apresentando algumas exemplificações, sempre que possível, com o objetivo de que a linguagem fique acessível e que sirva como base para se iniciarem os estudos nesse ramo. A partir desse estudo teórico, são apresentados algumas aplicações das equações de diferenças, analisando alguns modelos, como por exemplo, modelo de Malthus e Verhulst, modelo de reprodução de coelhos (Fibonacci), uma projeção da mortalidade infantil e crescimento na quantidade de usuários de internet no Brasil.

Mesmo que consigamos trazer essa abordagem mais clara, se faz necessário que o leitor tenha um conhecimento prévio de Análise Real, Álgebra Linear e o básico de Equações Diferenciais, conteúdos esses que podem ser encontrados em [3, 7, 16].

Visando tais objetivos, estruturamos o trabalho em cinco capítulos que estão distribuídos da seguinte forma:

No capítulo 2, apresentamos as equações de diferenças lineares de primeira ordem e ordem superior, explicitando condições necessárias e suficientes para se determinar a solução geral dessas equações, demonstramos alguns resultados e trazemos alguns exemplos. Falamos também sobre a estabilidade das equações lineares de primeira ordem, bem como o conceito de mapa, ponto de equilíbrio e apresentamos um resultado muito importante na área de sistemas dinâmicos, que é o Diagrama de Cobweb ou Diagrama Teia de Aranha, apresentamos exemplos para esse diagrama com equações de primeira ordem.

No capítulo 3, falamos sobre os sistemas de equações lineares homogêneos, envolvendo duas ou mais variáveis. Inicialmente falamos sobre os sistemas lineares não autônomos, e em seguida dos sistemas lineares não autônomos, apresentamos alguns critérios de estabilidade desses sistemas, fazendo previsões a partir dos autovalores da matriz gerada pelo sistema. Estudamos alguns modelos gráficos para ilustrar possíveis comportamentos para um sistema, assim como alguns exemplos, tanto para autovalores reais, como para autovalores complexos.

Finalmente no capítulo 4, trazemos algumas aplicações de modelos populacionais, envolvendo equações de diferenças, apresentamos o modelo de Reprodução de coelhos de Fibonacci, duas aplicações para o modelo logístico populacional de Malthus o primeiro para calcular a mortalidade de crianças no Brasil de 2011 a 2018 e para fazer projeções da quantidade de usuários da internet nesse mesmo período, e nessa última aplicação apresentamos o modelo de Verhults, também utilizado para cálculos populacionais.

Capítulo 2

Equações de Diferenças

Neste capítulo, serão abordados alguns resultados e algumas definições e resultados que servirão como base para resolvermos certos modelos logísticos populacionais e epidemiológicos. Em Matemática é comum encontrarmos problemas que se modificam discretamente, em pontos bem definidos e não de forma contínua. Essas relações apresentam mudanças de variáveis discretas e, podemos determiná-las por um processo denominado de recorrência, onde características de um ponto anterior estarão relacionadas com o ponto seguinte, características essas que influenciarão em todo o sistema. Essas equações são chamadas de *Equações de Diferenças*.

Nesse sentido, os primeiros resultados apresentados dizem respeito às Equações de Diferenças, que são fundamentais e que dão suporte à resolução dos Sistemas Dinâmicos Discretos, a partir delas poderemos modelar e encontrar padrões existentes em diferentes fenômenos, que estarão definidos com base em acontecimentos (resultados) anteriores e que terão influências e dirão muito a respeito do futuro do fenômeno em questão. Elas podem ser classificadas de diferentes formas. Inicialmente trabalharemos com as Equações de Diferenças Lineares, mostrando suas especificidades, quando serão de primeira e segunda ordem e apontando para ordens superiores, são apresentadas noções de estabilidade para essas equações. Esse capítulo tem como referência [4, 10, 13].

2.1 Equação de Diferenças Lineares

Iniciamos esta seção definindo *equação de diferenças*, como uma relação que descreve, por exemplo, o comportamento de algum fenômeno num determinado período de tempo, onde as características do fenômeno no instante atual estão em função das características nos instantes anteriores.

Definição 2.1. Seja $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função. Uma equação de diferenças é uma equação definida por uma sequência $x : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, onde cada termo $x(n)$ está definido em função dos termos anteriores, é denotada da seguinte maneira:

$$x(n) = f\Big(x(n-1), x(n-2), \ \ldots \ , x(n-k)\Big) \ , n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.1}$$

Observação 2.2. De forma geral as equações de diferenças descrevem o comportamento de fenômenos ao longo do tempo, onde as características de um determinado fenômeno no instante $n+1$ estão em função das características do mesmo fenômeno no instante n.
Denotaremos essa relação pela equação de diferenças

$$x(n+1) = f(x(n)). \tag{2.2}$$

As equações de diferenças podem ser entendidas como uma versão discreta das equações diferenciais, visto que, analisamos sempre ponto a ponto para encontrar as soluções, que formarão o conjunto fundamental de soluções, o qual buscaremos mostrar nas próximas subseções.

Neste trabalho, as equações de diferenças serão resolvidas por meio de iterações, para tal é necessário conhecermos um valor inicial dado que denominaremos de x_0, e a seguir encontraremos as próximas iterações da seguinte forma

$$\begin{array}{ccc} & f(x_0) & \\ f^2(x_0) & = & f(f(x_0)) \\ f^3(x_0) & = & f(f(f(x_0))) \\ & \vdots & \\ & f^n(x_0). & \end{array}$$

Vejamos como funciona o processo de iteração que muito será utilizado neste trabalho.

$$\begin{aligned} x(0) &= f^0(x_0) = x_0 \\ x(1) &= f^1(x_0) = f(x_0) \\ x(2) &= f^2(x_0) = f(f(x_0)) \\ &\vdots \\ x(n) &= f^n(x_0) = f(f^{n-1}(x_0)) \\ x(n+1) &= f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) = f(x_n). \end{aligned}$$

Vejamos agora um exemplo onde aplicamos esse processo de iteração.

Exemplo 2.3. Seja $f(x) = x^2 + 1$ e $x_0 = 1$, iterando encontramos

$$\begin{array}{lllllll}
x(0) & = & f^0(1) & = & 1 & & \\
x(1) & = & f^1(1) & = & 2 & & \\
x(2) & = & f^2(1) & = & f(2) & = & 5 \\
x(3) & = & f^3(1) & = & f(5) & = & 26 \\
x(4) & = & f^4(1) & = & f(26) & = & 677 \\
 & & & \vdots & & &
\end{array}$$

Posteriormente, mostraremos como obter a solução geral de equações como a (2.2) e suas classificações.

Definição 2.4. Uma Equação de Diferenças é dita linear se for linear em todas as suas variáveis (x_{n-1}) até (x_{n-k}). Em outras palavras podemos dizer que uma equação de diferenças será linear se os coeficientes de $x(n-1), ..., x(n-k)$, dependem somente de n e não da variável x.

Exemplo 2.5. As seguintes equações são de diferenças lineares

$$\begin{array}{lll}
x_n & = & n^3 x_{n-1} \\
x_n & = & 7x_{n-2} + 9x_{n-3}.
\end{array}$$

Então podemos dizer que a equação será dita linear quando f for linear em suas variáveis.

Diremos que $x(n)$ é uma solução da equação de diferenças (2.1) se ela satisfaz essa equação para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Caso o sistema possua condições iniciais (como veremos posteriormente), teremos uma solução particular da equação.

2.1.1 Equações de diferenças lineares de primeira ordem

As equações de diferenças podem apresentar diferentes ordens, desde a ordem 1 até a ordem k, com $k \in \mathbb{Z}^+$, a depender do problema com o qual estaremos trabalhando, ou seja, se existirão diferentes variáveis que atuam sobre uma situação. Inicialmente falaremos das equações de diferenças de primeira ordem, que podem ser usadas para modelar o quantitativo de juros de um banco, para se determinar o crescimento populacional de uma determinada região, a quantidade de usuários que aumenta constantemente na internet, e outros. Essas equações estão definidas da seguinte forma

$$x(n+1) = a(n)x(n) + b(n) \;, \tag{2.3}$$

onde $a(n)$ e $b(n)$ são funções reais definidas em $\mathbb{Z}^+$ e $a(n) \neq 0$, $\forall n \geq n_0 \geq 0$.

Definição 2.6. Como $a(n)$ e $b(n)$ podem ser expressos em função de n, teremos que: uma equação de diferenças definida por (2.3) será *homogênea* se $b(n)$ for nulo para todo n, ou seja,

$$x(n+1) = a(n)x(n). \tag{2.4}$$

Caso contrário diremos que a equação (2.3) é *não-homogênea*.

Para obter as soluções das equações de diferenças lineares de primeira ordem, precisamos fazer algumas iterações e obtermos uma solução geral. Para tal, demonstraremos algumas fórmulas, analisadas a partir de [4] e [5] que nos auxiliarão na resolução dessas equações.

(I) Equações de diferenças lineares de primeira ordem homogêneas:

Consideramos inicialmente as equações lineares de primeira ordem homogêneas, para obtermos sua solução geral.

Seja a equação de diferenças na forma

$$x(n+1) = a(n)x(n). \tag{2.5}$$

A partir dela podemos considerar dois casos.

1º Caso: Tomamos $a(n)$ como um fator constante, isto é,

$$a(n) = a, \ \ \forall\, n \in Z^{+},$$

daqui,

$$\begin{cases} x(n+1) & = & ax(n) \\ \text{com } x(0) & = & x_0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Iterando, obtemos

$$\begin{array}{rcccl} x(1) & = & ax(0) & = & ax_0 \\ x(2) & = & ax(1) & = & a^2x_0 \\ x(3) & = & ax(2) & = & a^3x_0 \\ & & \vdots & & \end{array}$$

$$x(n) = a^n x_0. \tag{2.7}$$

Demonstraremos (2.7) por indução.

Como x_0 é válido por ser a condição inicial, supomos que (2.7) vale para $n = k$ (hipótese indutiva), ou seja,

$$x(k) = a^k x_0.$$

Usando a equação (2.6) e a hipótese indutiva, verifiquemos que (2.7) vale para $n = k+1$.

Então,

$$x(k+1) = ax(k) = aa^k x_0 = a^{k+1}x_0.$$

Daqui, resulta que (2.7) vale para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ e portanto é solução de (2.5).

2º Caso: Generalizando para uma equação de diferenças de primeira ordem homogênea qualquer, sem considerarmos $a(n)$ como constante, ou seja,

$$x(n+1) = a(n)x(n), \; x(0) = x_0 \text{ e } n \geq 0$$

realizando iterações, obtemos

$$\begin{aligned} x(1) &= a(0)x(0) = a(0)x(0) \\ x(2) &= a(1)x(1) = a(1)(a(0)x_0) \\ x(3) &= a(2)x(2) = a(2)(a(1)(a(0)x_0)) = a(2)a(1)a(0)x_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x(n) = a(n-1)a(n-2)...a(0)x_0. \tag{2.8}$$

Por indução, demonstraremos (2.8). Como $x(0) = x_0$ nossa condição inicial, supomos que (2.8) é verdadeira para $n = k$ (hipótese de indução), ou seja,

$$x(k) = a(k-1)a(k-2) \; ... \; a(0)x_0.$$

Usando a equação (2.5) e a hipótese indutiva, verificamos que (2.8) vale para $n = k+1$. Assim,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= a(k)x(k) \\ x(k+1) &= a(k)a(k-1)a(k-2) \; ... \; a(0)x_0. \end{aligned}$$

Logo, (2.8) vale $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, e portanto é solução de

$$x(n+1) = a(n)x(n), \quad \text{com} \quad x(0) = x_0 \text{ e } n \geq 0.$$

A solução desta equação também pode ser escrita como

$$x(n) = \prod_{i=0}^{n-1} a(i)x_0, \quad \text{onde} \quad x(0) = x_0. \tag{2.9}$$

Observação 2.7. Se tivermos a condição inicial $x(n_0) = x_0$ para algum $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, então podemos escrever a solução de (2.4) da seguinte forma

$$x(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)x_0.$$

(II) Equações de diferenças lineares de primeira ordem não-homogêneas:

Se considerarmos em (2.3) $b(n)$ não nulo, como vimos anteriormente, teremos uma *equação de diferenças linear não-homogênea*.
A equação é apresentada da seguinte maneira

$$x(n+1) \quad = \quad a(n)x(n) \quad + \quad b(n).$$

Para analisarmos essa equação, apresentamos dois casos:
1º Caso: Se $a(n)$ é constante, ou seja, $a(n) = a$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Então

$$x(n+1) = ax(n) + b(n), \quad \text{com} \quad x(0) = x_0.$$

Realizando as iterações, obtemos

$$\begin{aligned}
x(1) &= ax(0) + b(0)\\
&= ax_0 + b(0)\\
\\
x(2) &= ax(1) + b(1)\\
&= a(ax_0 + b(0)) + b(1)\\
&= a^2x_0 + ab(0) + b(1)\\
\\
x(3) &= ax(2) + b(2)\\
&= a(a^2x_0 + ab(0) + b(1)) + b(2)\\
&= a^3x_0 + a^2b(0) + ab(1)) + b(2))\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

$$x(n) = a^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-(i+1)} b(i). \tag{2.10}$$

Por indução, demonstraremos a validade de (2.10), $x(0) = x_0$ é válido pela condição inicial. Vamos supor que (2.10) é válida para $n = k$, ou seja,

$$x(k) \quad = \quad a^k x_0 \quad + \quad \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-(i+1)} b(i).$$

Admitindo a relação de recorrência e a hipótese de indução, verifiquemos que (2.10) vale para $n = k+1$.

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= ax(k)+b(k)\\
&= a\left(a^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1}b(i)\right) + b(k)\\
&= a^{k+1}x_0 + a\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1}b(i) + b(k)\\
&= a^{k+1}x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1+1}b(i) + b(k)\\
&= a^{k+1}x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i}b(i) + b(k) + a^{k-(k)}b(k) - a^{k-(k)}b(k)\\
&= a^{k+1}x_0 + \sum_{i=0}^{k} a^{k-i}b(i) - a^{k-k}b(k) + b(k)\\
&= a^{k+1}x_0 + \sum_{i=0}^{k} a^{k-i}b(i) - b(k) + b(k)\\
&= a^{k+1}x_0 + \sum_{i=0}^{k} a^{k-i}b(i).
\end{aligned}$$

2º Caso: Se ambos os fatores forem constantes, ou seja, $a(n) = a$ e $b(n) = b$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Então

$$x(n+1) = ax(n) + b,\ x(0) = x_0. \tag{2.11}$$

Iterando, temos

$$\begin{aligned}
x(1) &= ax(0)+b\\
&= ax_0 + b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(2) &= ax(1)+b\\
&= a(ax_0+b)+b\\
&= a^2x_0 + ab + b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(3) &= ax(2)+b\\
&= a(a^2x_0+ab+b)+b\\
&= a^3x_0 + a^2b + ab + b\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$x(n) = a^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a^i b. \tag{2.12}$$

Usando a fórmula para os n primeiros termos de uma sequência e substituindo pelo somatório, obteremos a seguinte equação

$$x(n) = a^n x_0 + b\left[\frac{a^n - 1}{a - 1}\right]. \tag{2.13}$$

Que valerá sempre que $a \neq 1$.

A seguir, demonstramos (2.13) por indução. Pela condição inicial $x(0) = x_0$ é válido, agora assumimos que (2.13) vale para $n = k$, será nossa hipótese indutiva.

Então,

$$x(k) \;=\; a^k x_0 + b\Big[\frac{a^k - 1}{a - 1}\Big].$$

Verificaremos agora que (2.13) vale também para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= ax(k) + b \\
&= a\left(a^k x_0 + b\left[\frac{a^k - 1}{a - 1}\right]\right) + b \\
&= a^{k+1} x_0 + ab\left[\frac{a^k - 1}{a - 1}\right] + b \\
&= a^{k+1} x_0 + \frac{ba^{k+1} - ab}{a - 1} + b \\
&= a^{k+1} x_0 + \frac{ba^{k+1} - ab + b(a-1)}{a - 1} \\
&= a^{k+1} x_0 + \frac{ba^{k+1} - ab + ba - b}{a - 1} \\
&= a^{k+1} x_0 + \frac{ba^{k+1} - b}{a - 1} \\
&= a^{k+1} x_0 + b\left[\frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}\right].
\end{aligned}$$

Assim, (2.13) vale para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ e portanto é solução de (2.11).

Observação 2.8. Analisando (2.12), notamos que se tomarmos $a = 1$, então

$$x(n) = x_0 + nb. \tag{2.14}$$

Se generalizarmos o resultado acima para uma equação de diferenças de primeira ordem linear e não homogênea da forma

$$x(n+1) = a(n)x(n) + b(n), \text{ com } x(0) = x_0, n \geq 0 \tag{2.15}$$

obtemos a fórmula geral para a resolução de equações desse tipo.

Consideremos a seguinte iteração

$$\begin{aligned}
x(1) &= a(0)x(0) + b(0) \\
&= a(0)x_0 + b(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(2) &= a(1)x(1) + b(1) \\
&= a(1)[a(0)x_0 + b(0)] + b(1) \\
&= a(1)a(0)x_0 + a(1)b(0) + b(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(3) &= a(2)x(2) + b(2) \\
&= a(2)[a(1)a(0)x_0 + a(1)b(0) + b(1) + b(2)] \\
&= a(2)a(1)a(0)x_0 + a(2)a(1)b(0) + a(2)b(1) + b(2) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

A partir dessas iterações, podemos perceber que (2.16) é a solução das equações lineares de primeira ordem e não homogênea.

$$x(n) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left[\prod_{r+1}^{n-1} a(i)\right] b(r). \tag{2.16}$$

Assim como nas equações anteriores, demonstraremos (2.16) por indução.
Como $x(0) = x_0$ é válido pela condição inicial, supomos que a equação acima vale para $n = k$, e será a nossa hipótese indutiva, daqui

$$x(k) = \left[\prod_{i=0}^{k-1} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=0}^{k-1} \left[\prod_{r+1}^{k-1} a(i)\right] b(r). \tag{2.17}$$

Admitindo a relação de recorrência dada em (2.15) e a hipótese indutiva, verificamos que (2.16) vale para $n = k+1$. Mas antes, adotaremos a igualdade a seguir

$$\prod_{i=k+1}^{k} a(i) = 1.$$

Para maiores referências [5] $p.21$.

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= a(k)x(k)+b(k)\\
&= a(k)\prod_{i=0}^{k-1}a(i)x_0+\sum_{r=0}^{k-1}\left[a(k)\prod_{i=r+1}^{k-1}a(i)\right]b(r)+b(k)\\
&= \prod_{i=0}^{k}a(i)x_0+\sum_{r=0}^{k-1}\left[\prod_{i=r+1}^{k-1}a(i)\right]b(r)+b(k)\\
&= \prod_{i=0}^{k}a(i)x_0+\sum_{r=0}^{k}\left[\prod_{i=r+1}^{k}a(i)\right]b(r)-b(k)+b(k)\\
&= \prod_{i=0}^{k}a(i)x_0+\sum_{r=0}^{k}\left[\prod_{i=r+1}^{k}a(i)\right]b(r).
\end{aligned}$$

Assim, (2.17) vale para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, e portanto é solução de (2.15).

Apresentamos agora as soluções dos tipos de equações que foram analisadas nessa seção, para que facilite a busca das soluções.

Tabela 2.1: Soluções das Equações de Diferenças Lineares de Primeira Ordem Homogêneas

Equação Linear de Primeira Ordem Homogêneas	**Solução Geral**
Coeficiente a constante, $a(n) = a$.	$x(n) = a^n x_0$
Para qualquer $a(n)$.	$x(n) = a(n-1)a(n-2)\dots a(0)x_0$ ou $x(n) = \prod_{i=0}^{n-1} a(i)x_0$

Fonte: Arquivo pessoal.

Veremos agora dois exemplos de equações de diferenças de primeira ordem, que serão resolvidos com base nas equações demonstradas anteriormente.

O exemplo abaixo foi retirado de [13] p. 41.

Exemplo 2.9. Vamos resolver equação $2x(n+1) - x(n) = 2$, com $x_0 = 4$.

Temos uma equação de diferenças de primeira ordem com coeficientes constantes e diferentes de um e para solucionarmos devemos relembrar de (2.13).

Podemos reescrever a equação dada da seguinte forma,

$$x(n+1) = \frac{1}{2}x(n)+1.$$

Daí temos os dados necessários para substituirmos na solução apresentada na Tabela 2.2, para equação não-homogênea e constante. Assim,

Tabela 2.2: Soluções Equações de Diferenças Lineares de Primeira Ordem não-Homogêneas

Equação Linear de Primeira Ordem Não-Homogêneas	**Solução Geral**
Coeficiente a constante, $a(n) = a$.	$x(n) = a^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-(i+1)} b(i)$
Coeficientes $a \neq 1$ e b constante.	$x(n) = a^n x_0 + b\left[\frac{a^n - 1}{a-1}\right]$
Com $a(n) = 1$.	$x(n) = x_0 + nb$
Para a e b não constantes.	$x(n) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] b(r)$

Fonte: Arquivo pessoal.

$$
\begin{aligned}
x(n) &= (\tfrac{1}{2})^n.4 + 1.\left[\frac{(\frac{1}{2})^n - 1}{(\frac{1}{2}) - 1}\right] \\
&= \frac{4}{2^n} + \frac{\dfrac{1}{2^n} - 1}{\frac{-1}{2}} \\
&= \frac{2 + 2^{n+1}}{2^n}.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, encontramos a solução para a equação dada no exemplo.

Exemplo 2.10. Determinemos a solução da equação

$$x(n+1) = (n+1)x(n) + 4^n(n+1)!\ , \quad \text{com } x_0 = 1.$$

Observemos que temos uma equação linear de primeira ordem não-homogênea. Olhando para a Tabela 2.2, utilizamos a solução das equações não-homogêneas para a e b não constantes. Dessa forma

$$\begin{aligned}
x(n) &= \left[\prod_{i=0}^{n-1}(i+1)\right]x_0 + \sum_{r=0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1}(i+1)\right]4^r(r+1)! \\
&= [1.2.3\ldots(n-1)n].1 + \sum_{r=0}^{n-1}[(r+2)\ldots(n-1).n]4^r(r+1)! \\
&= n! + 1.2\ldots(n-1)n.4^0.1! + 2.3\ldots(n-1)n.4^1.2! + \ldots + n!.4^{n-1} \\
&= n! + n!(4 + 4^2 + 4^3 + \ldots 4^{n-1})
\end{aligned}$$

Lembremos que para qualquer soma finita de potências, com base $a \in \mathbb{N}$, temos

$$(a-1)(1+a+\ldots+a^n) = (a^{n+1}-1), \quad \text{onde} \quad a,n \in \mathbb{N}.$$

Continuamos com a solução e obtemos

$$\begin{aligned}
x(n) &= n! + n!4(4^{n-1}) \\
&= n! + n!4.4^{n-1} - 4 \\
&= n! + n!4^n - 4n! \\
&= n!(1 + 4^n - 4) \\
&= n!(4^n - 3).
\end{aligned}$$

É importante ressaltar que sempre que tivermos um dado inicial x_0, é possível obtermos a solução particular da equação, mas se não tivermos a condição inicial, a solução dependerá das constantes arbitrárias para assim encontrarmos uma solução geral, a depender de sua ordem. Falaremos a respeito na próxima seção.

Observação 2.11. É importante destacarmos que existe outro método para a resolução dessas equações, através de Operadores. Para saber mais consultar [5].

2.1.2 Estabilidade das equações de diferenças lineares de primeira ordem

Quando pensamos em sistemas dinâmicos discretos, estamos preocupados com o comportamento de um sistema após um determinado tempo n. Em diferentes áreas onde se estudam as equações de diferenças para a compreensão de modelos dinâmicos, como na Física, Biologia, Engenharia e entre outras áreas, quase sempre o maior interesse é que os estados do sistema, ou seja, as suas soluções, tendam ao ponto de equilíbrio, ou pelo menos se aproximem dele, e é a partir desse ponto de equilíbrio que iremos analisar a estabilidade do modelo. Como pode haver uma oscilação no ponto de equilíbrio, nem sempre a análise analítica será suficiente. Uma maneira bastante usual e eficiente na análise dessas soluções, são os métodos computacionais que nos permite traçar gráficos/mapas das equações com uma grande quantidade de iterações, o que facilita a análise da estabilidade das equações de diferenças.

Introduzimos agora algumas definições importantes para a análise de estabilidade das equações de diferenças lineares de primeira ordem. Veremos como obter a órbita de uma equação de diferenças, definiremos o conceito de ponto de equilíbrio (ponto fixo de uma órbita, ponto permanente ou estado de equilíbrio) e faremos alguns estudos baseado em suas definições, que tem uma grande relevância em modelos expressos por equações de diferenças.

A partir da Definição 2.1, onde falamos das iterações de uma equação de diferenças, definimos uma órbita para essas equações.

Definição 2.12. Chamamos órbita de x_0 ao conjunto de todas as iteradas da função f no ponto x_0. Onde a iterada da função f é definida como

$$O(x_0) = \{f^n(x_0)\,;\ \forall\, n\ \in \mathbb{Z}\},$$

sendo essas, todas as iteradas de f.

Exemplo 2.13. Consideramos a equação

$$x(n) = 3x(n-1) - 5 \tag{2.18}$$

e tomamos $x_0 = 1$, então a órbita $O(1)$ dessa equação será

$$1, -2, -11, -26, -57, -119, \ldots.$$

Para cada valor inicial que atribuirmos à equação (2.18), teremos uma órbita diferente. A tabela a seguir mostra três exemplos de órbitas para essa equação.

Tabela 2.3: Exemplos de Órbita da Equação (2.18)

x_0	Órbita	Alguns termos					
2	$O(2)$	2	1	-2	-11	-38	...
3	$O(3)$	3	4	7	16	43	...
2,5	$O(2{,}5)$	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	...

Fonte: Arquivo Pessoal.

Através da órbita de uma equação podemos tirar conclusões sobre o seu comportamento, se é crescente, decrescente ou constante. Destacamos que, iterarmos várias vezes a equação pode ser cansativo, daí a importância da análise gráfica, que geralmente se torna mais eficiente e precisa.

Então das iterações que já definimos, vamos considerar os pontos $(n{,}x_n)$ da equação e a partir deles definir o conceito de mapas (gráficos) e construí-los.

Definição 2.14. Denomina-se mapa ao conjunto de todos os pontos $(n{,}x_n)$, $n \in \mathbb{Z}^+$ em que x_n é n-ésimo termo da órbita $O(x_0)$ da equação de diferença.

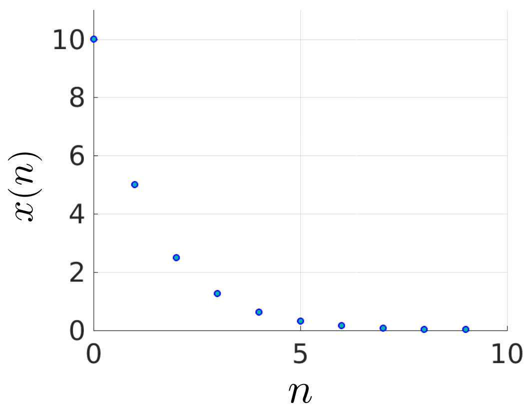
Vamos ilustrar o conceito de mapas e órbitas de uma equação linear de primeira ordem em alguns exemplos.

Exemplo 2.15. Consideraremos algumas equações e a partir de algumas iterações representaremos o seu comportamento graficamente.

Seja a equação

$$x(n) = 0{,}5x(n-1), \quad x_0 = 10.$$

Figura 2.1: Mapa de $x(n) = 0.5x(n-1), \quad x_0 = 10$



Fonte: Arquivo Pessoal.

O mapa da equação está representado em Figura (2.1). Nele cada ponto representa uma iteração da equação, a componente vertical indica o valor de $x(n)$ e a horizontal é representada pelo valor de n. Iniciando no ponto $x(n,x(n)) = (0{,}10)$, a partir de algumas iterações, podemos perceber que a equação para $x_0 = 10$, é decrescente e conforme n aumenta, ela se aproxima cada vez mais de zero.

Agora consideramos a equação

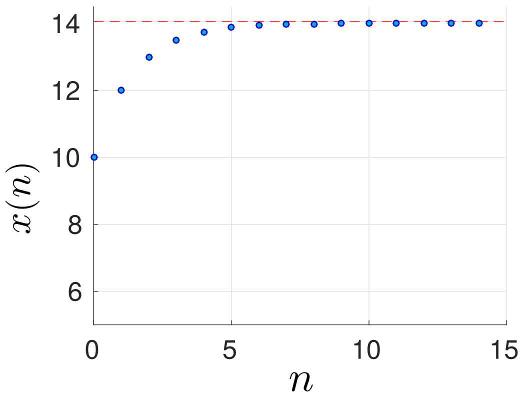
$$x(n) = 0{,}5x(n-1) + 7, \quad x_0 = 10.$$

O mapa desta equação está representado em Figura (2.2). Iniciando no ponto $x(n,x(n)) = (0{,}10)$, análogo ao caso anterior. Fazemos algumas iterações e percebemos que a equação para $x_0 = 10$, é crescente e tende a 14, conforme n aumenta, ela se aproxima cada vez mais do número 14 para $x(n)$.

Efetuamos o mesmo processo para a equação

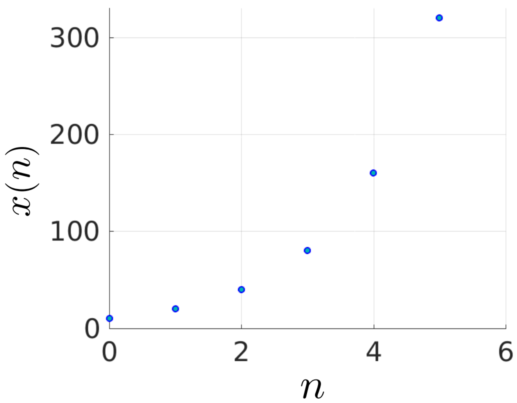
$$x(n) = 2x(n-1), \quad x_0 = 10.$$

Figura 2.2: Mapa de $x(n) = 0{,}5x(n-1) + 7, \quad x_0 = 10$



Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 2.3: Mapa de $x(n) = 2x(n-1), \quad x_0 = 10$



Fonte: Arquivo Pessoal.

O mapa dessa equação representado na Figura 2.3, depois de iterarmos a partir de $x_0 = 10$, cresce rapidamente e parece não se aproximar de nenhum ponto em questão. Nesse caso dizemos que a órbita dessa equação para o ponto inicial $x_0 = 10$ é crescente e ilimitada.

Definição 2.16. Um ponto x^* pertencente ao domínio de f diz-se ponto de equilíbrio ou ponto fixo da equação de diferenças, quando a partir dele não ocorrem mais variações do estágio n para o estágio $n+1$, isto é, quando

$$x(n+1) = x(n) = x^* \text{, para todo } n \in \mathbb{Z}^+.$$

Teorema 2.17. *Um número x^* é um ponto de equilíbrio de*

$$x(n+1) = f(x(n)) \tag{2.19}$$

se, e somente se, $x^* = f(x^*)$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Por hipótese x^* é um ponto de equilíbrio, então vale

$$x(n+1) = x(n) = x^*$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, essa será a solução da equação (2.19). Então,

$$x^* = x(n+1) = f(x(n)) = f(x^*).$$

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $x(0) = x^*$, vamos provar que a sequência constante $(x^*, x^*, x^*, \ldots)$ é uma solução do sistema.

Como $x(0) = x^*$, obtemos por hipótese

$$\begin{aligned} x(1) = f(x(0)) &= f(x^*) = x^*, \\ x(2) = f(x(1)) &= f(x^*) = x^*, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Se continuarmos iterando, obtemos

$$x(n) = f(x(n-1)) = f(x^*) = x^*.$$

Logo, a solução $x(n)$ é a sequência constante $(x^*, x^*, x^*, \ldots)$ e portanto x^* é um ponto de equilíbrio de (2.19). □

Podemos dizer então que x^* é a solução constante da equação (2.2), ou seja, x^* é um ponto que quando iterado permanece, sem variação.

Graficamente um ponto de equilíbrio é a abcissa do ponto onde o gráfico de f intersecta a reta $y = x$, e consideramos no plano $x(n)$ no eixo das abscissas e $x(n+1)$ no eixo das ordenadas.

Vejamos um exemplo simples, para obtenção do ponto de equilíbrio.

Exemplo 2.18. Seja a equação

$$x(n) = 2x(n-1).$$

Para se obter o valor do ponto de equilíbrio da equação, basta tomarmos

$$f(x^*) = x^*.$$

Da equação temos $f(x) = 2x$, então

$$\begin{aligned} x^* &= 2x^* \\ x^* &= 0. \end{aligned}$$

Então o ponto fixo da equação será $x^* = 0$.

Observação 2.19. Pode acontecer que um ponto pertencente ao domínio de f não seja um ponto de equilíbrio, mas que a partir de um número finito de iterações ele poderá se tornar um. Isso nos leva próxima definição.

Definição 2.20. Se x é um ponto pertencente ao domínio de f, e x^* é um ponto de equilíbrio da equação e existe um inteiro positivo k tal que $f^k(x) = x^*$ e $f^{k-1}(x) \neq x^*$, então diz-se que x é um ponto eventual de equilíbrio.

Observação 2.21. A definição de ponto de equilíbrio 2.16, vale apenas para equações de ordem 1, pois

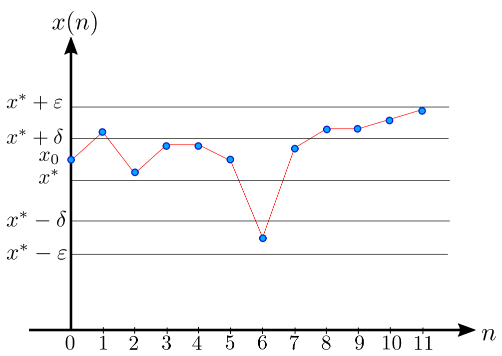
$$x(n) = f(x(n-1), x(n-2), \ldots, x(n-k)),$$

é uma função em que os valores de entrada e de saída pertencem a dimensões diferentes, ou seja, $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

Um dos principais objetivos no estudo de sistemas dinâmicos é compreender o comportamento das soluções de uma determinada equação nas proximidades dos seus pontos de equilíbrio, como nem sempre é possível obter uma solução explícita para a equação, faremos uma análise dos pontos de equilíbrio baseado em suas respectivas vizinhanças. Definiremos alguns conceitos importantes para a Teoria de Estabilidade de sistemas dinâmicos.

Definição 2.22. Um ponto fixo é denominado *estável* se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x_0 - x^*| < \delta$ implica $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$ para todo $n > 0$, com $n \in \mathbb{Z}^+$ (Figura 2.4). Um ponto fixo é denominado instável se não é estável (Figura 2.5).

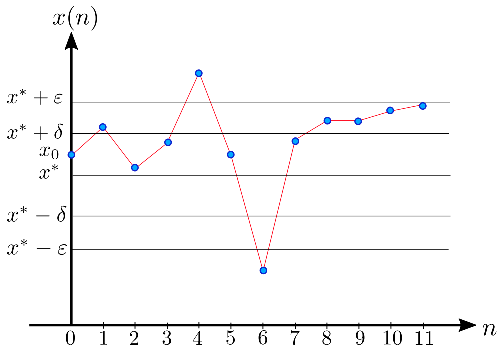
Figura 2.4: Ponto de Equilíbrio Estável



Fonte: Arquivo Pessoal.

Isso significa que há uma vizinhança de raio δ em torno do ponto de equilíbrio, de forma que para uma condição inicial x_0 pertencente a essa vizinhança, a órbita $x(n)$ correspondente a essa condição nunca se afasta de x^* mais do que uma distância ε, ou seja, se tomarmos x_0 um valor muito próximo de x^*, então as próximas iteradas se manterão próximas de x^*.

Figura 2.5: Ponto de Equilíbrio Instável



Fonte: Arquivo Pessoal.

Por outro lado, se existe x_0 tal que independente de quão próximo esteja de x^*, a órbita correspondente sai da vizinhança de ε em um tempo finito, nesse caso o ponto será instável.

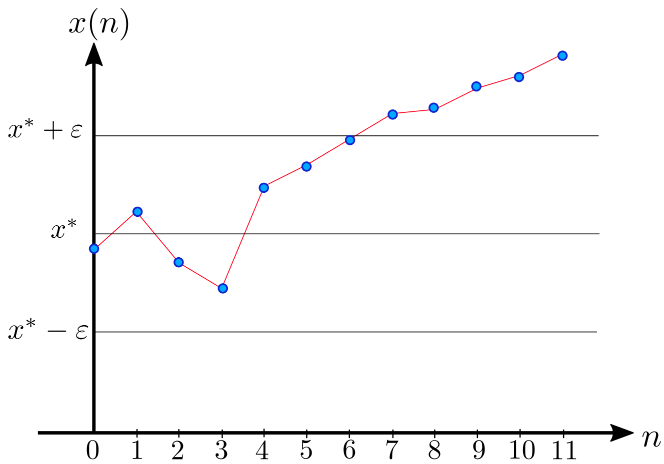
Definição 2.23. Um ponto fixo x^* é denominado *atrator* se existe $L > 0$ tal que se,

$$|x_0 - x^*| < L \quad \text{implica} \quad \lim_{n\to\infty} x(n) = x^*.$$

- Se $L = \infty$, então x^* é chamado de atrator global.
- Quando L é qualquer valor positivo dizemos que x^* tem estabilidade assintótica global.

Definição 2.24. Um ponto fixo é chamado *repulsor* se existem $\varepsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$, tais que, para todo $n \geq N$ e $0 < |x_0 - x^*| < \varepsilon$ implica que $|x(n) - x^*| > |x_0 - x^*|$ (Figura 2.6).

Figura 2.6: Ponto Fixo Repulsor



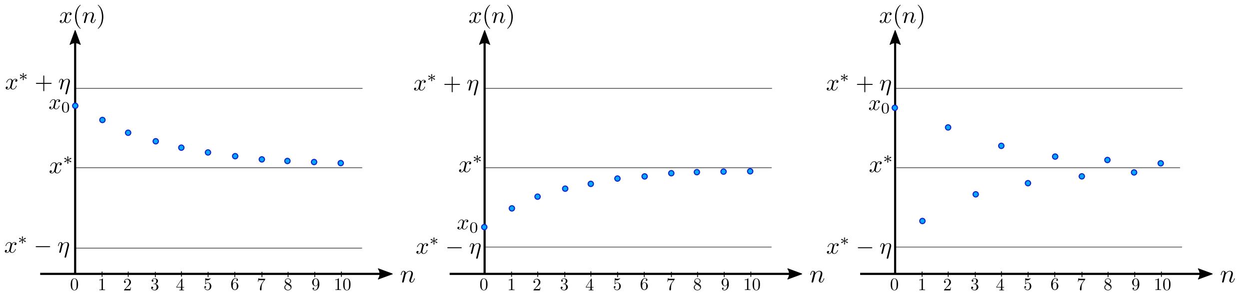
Fonte: Arquivo pessoal.

Definição 2.25. O ponto de equilíbrio x^* é *assintoticamente estável* se é estável e atrator (Figura 2.7).

Neste caso, conforme o tempo passa a órbita que parte de x_0 se aproxima cada vez mais do ponto de equilíbrio x^*.

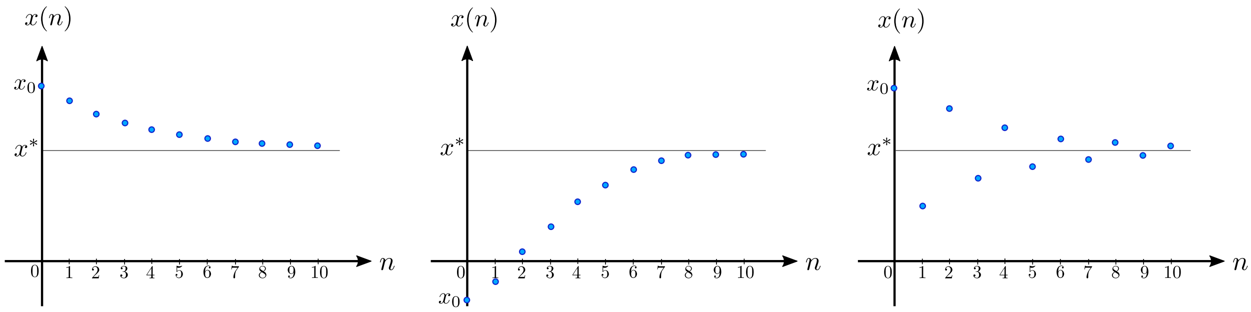
Se $L = \infty$, então x^* é chamado de globalmente assintoticamente estável (Figura 2.8).

Figura 2.7: Ponto de Equilíbrio Assintoticamente Estável



Fonte: Arquivo Pessoal.

Figura 2.8: Ponto de Equilíbrio Globalmente Assintoticamente Estável



Fonte: Arquivo Pessoal.

Vamos considerar um sistema dinâmico afim não homogêneo e de primeira ordem,

$$A(n+1) = rA(n) + b, \tag{2.20}$$

onde $r \neq 1$.

Para o sistema (2.20) temos pelo Teorema 2.17 que o seu ponto de equilíbrio é dado por

$$\begin{aligned} rx^* + b &= x^* \\ x^* - rx^* &= b \\ x^*(1-r) &= b \\ x^* &= \frac{b}{1-r}. \end{aligned}$$

A seguir, apresentamos um resultado que auxilia na determinação da estabilidade do ponto de equilíbrio de uma equação.

Teorema 2.26. *O ponto de equilíbrio* $x^* = \dfrac{b}{1-r}$ *para o sistema dinâmico afim*

$$A(n+1) = rA(n) + b, \quad \textit{com} \quad r \neq 1,$$

é assintoticamente estável se $|r| < 1$, ou seja,

$$\lim_{k\to\infty} A(k) = x^*,$$

para todo valor inicial $A(0)$. Se $|r| > 1$, então x^* é instável e $|A(k)| \to \infty$ para qualquer valor de $A(0) \neq x^*$. Quando $r = -1$, será chamado de $2 - ciclo$.

Não apresentaremos as definições dos sistemas periódicos e de ciclos. Tais definições podem ser encontradas em [4], assim como a demonstração do Teorema 2.26.

Vejamos agora um exemplo.

Exemplo 2.27. Consideramos o sistema dinâmico afim

$$A(n+1) = 2A(n) - 4.$$

O ponto de equilíbrio determinado por

$$f(x^*) = 2x^* - 4$$

será $x^* = 4$.

Tomemos dois valores como iniciais para essa equação, um que seja ligeiramente maior ao ponto de equilíbrio e outro que seja ligeiramente menor, para depois analisarmos os valores obtidos a partir de algumas iterações sobre essas condições iniciais.

Tomamos inicialmente $x_0 = 4{,}1$ aumentamos $0{,}1$ ao valor do ponto de equilíbrio. Assim, obteremos

$$\begin{aligned} A(0) &= 4{,}1 \\ A(1) &= 2A(0) - 4 = 4{,}2 \\ A(2) &= 2A(1) - 4 = 4{,}2 \\ A(3) &= 2A(2) - 4 = 4{,}4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Agora assumimos $x_0 = 3{,}9$ diminuímos $0{,}1$ do ponto de equilíbrio. Iteramos a partir dessa condição inicial e obtemos

$$\begin{aligned} A(0) &= 3{,}9 \\ A(1) &= 2A(0) - 4 = 3{,}8 \\ A(2) &= 2A(1) - 4 = 3{,}6 \\ A(3) &= 2A(2) - 4 = 3{,}2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

A partir dessas poucas iterações podemos observar que para as duas condições iniciais que assumimos, a cada iterada o sistema se afasta cada vez mais do ponto de equilíbrio. Assim, o ponto de equilíbrio x^* parece ser instável, e podemos comprovar pelo Teorema 2.26, já que $|r| = 2 > 1$.

2.1.3 Diagrama Cobweb ou diagrama Teia de Aranha

Em geral, não é fácil determinar a partir da definição a estabilidade de um ponto de equilíbrio, em alguns casos chega a ser impossível, pois não é possível encontrar uma solução explícita da equação.

Estudaremos agora um método que nos auxilia na compreensão do comportamento das soluções na vizinhança de seus pontos de equilíbrio. O diagrama Teia de Aranha ou diagrama de Cobweb é uma técnica de análise gráfica que auxilia na compreensão do comportamento das soluções na vizinhança dos pontos de equilíbrio da equação.

Esse método consiste no seguinte. Consideramos

$$x(n+1) = f(x(n)),$$

então podemos desenhar o gráfico de f em $(x(n),x(n+1))$. O diagrama será obtido através de iterações dos pontos. Inicialmente traçamos no plano o gráfico de f que depende da equação dada, em seguida a bissetriz $y = x$. Feito isso, desenhamos uma reta vertical a partir do ponto x_0, que estará marcado no eixo das abscissas. Analiticamente, obtemos $x(n)$ a partir de $x(n-1)$, onde

$$x(1) = f(x_0), \;\; x(2) = f(x(1)), \;\; x(3) = f(x(2)) \ldots$$

No gráfico esses valores podem ser obtidos traçando uma linha horizontal do ponto $(x_0, f(x_0))$, até a função $y = x$, e depois novamente uma linha vertical até a função f. Aplicando esse processo sucessivamente pode-se determinar a órbita $x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \ldots,$ a depender da condição inicial.

Esse processo ficará mais claro no exemplo apresentado a seguir.

Exemplo 2.28. Seja a equação de diferenças

$$x(n+1) = -bx(n) + b \;, \quad x_0 = 0{,}7.$$

A equação satisfaz diferentes valores para b, assumiremos dois para analisar. Da equação, temos que

$$f(x) = -bx + b.$$

$i)$ Consideramos inicialmente $b = \frac{4}{5} = 0{,}8$. Pelo Teorema 2.19, o ponto de equilíbrio é dado por

$$f(x^*) = -\frac{4}{5}x^* + \frac{4}{5} = x^*,$$

e

$$x^* = \frac{4}{9}.$$

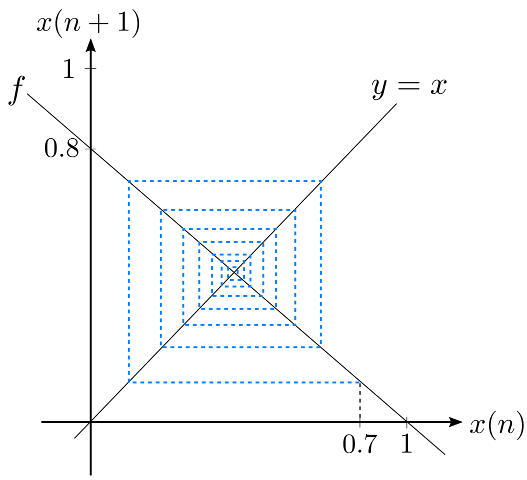
A Figura 2.9 representa a teia do Exemplo 2.28, para $b = \frac{4}{5}$, nela podemos observar que a cada nova iteração, ela se aproxima cada vez mais do ponto de equilíbrio x^*. Assim, temos graficamente que x^* parece ser assintoticamente estável.

Essa afirmação, pode ser comprovada pelo Teorema 2.26, visto que

$$|r| = \left| -\frac{4}{5} \right| < 1.$$

Logo, $x^* = \frac{4}{9}$ é assintoticamente estável e além disso se aproxima de x^* para qualquer valor inicial.

Figura 2.9: Diagrama Teia de Aranha Estável



Fonte: Arquivo pessoal

$ii)$ Consideramos agora $b = \frac{3}{2}$.

Análogo ao caso anterior, encontramos o ponto de equilíbrio, então

$$f(x^*) = -\frac{3}{2}x^* + \frac{3}{2} = x^*.$$

Assim,

$$x^* = \frac{3}{5}.$$

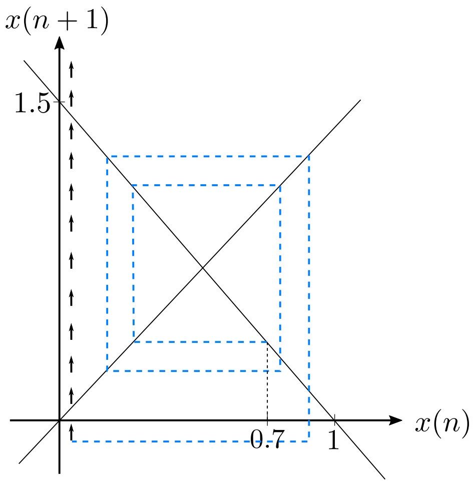
A Figura 2.10 representa a teia para $b = \frac{3}{2}$, nela podemos observar que a cada nova iteração a teia se afasta cada vez mais do ponto de equilíbrio, x^*, aparentando ser instável.

Comprovamos a afirmação pelo Teorema 2.26 em que

$$|r| = \left| -\frac{3}{2} \right| > 1.$$

Logo, $x^* = \frac{3}{5}$ é instável.

Figura 2.10: Diagrama Teia de Aranha Instável



Fonte:Arquivo pessoal

Observação 2.29. Se x_0 for um ponto inicial suficientemente próximo de um ponto de equilíbrio x^*, a órbita de x_0 dá uma indicação clara da estabilidade de x^*, visto que mostra como evolui x_0 quando há um pequeno desvio de x^*.

Destacamos que no diagrama usamos uma aproximação da função discreta a partir de uma função contínua e é possível fazer essa análise para equações de diferenças não lineares, não apresentamos essas equações neste trabalho, mas esses conceitos são apresentados em [13].

2.2 Equação de Diferenças Linear de Ordem Superior

Na seção anterior apresentamos métodos para se resolver equações de diferenças de ordem um ou primeira ordem, agora veremos como encontrar a solução para equações de ordem superiores, observe as seguintes equações

$$\begin{aligned} x(n+2) &= a_1(n)x(n) + a_2(n)x(n+1) \\ x(n+3) &= a_1(n)x(n) + a_2(n)x(n+1) + a_3x(n+2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Acima temos equações de diferenças lineares de segunda e terceira ordem respectivamente, observe que quanto maior a ordem, mais você dependerá de termos anteriores para

solucionar a equação e mais coeficientes serão necessários determinar.
Generalizando as equações apresentadas, podemos definir as equações de diferenças lineares de ordem k.

Definição 2.30. Uma Equação de Diferenças Linear de Ordem k será da forma

$$x(n+k) + a_k(n)x(n+k-1) + \ldots + a_1(n)x(n) = g(n), \tag{2.21}$$

onde a_i e $x(n)$ são funções reais para todo $n \geq n_0$ e $a_k(n) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$.

Observação 2.31. Usaremos como notação para o dado inicial n_0 que será equivalente ao x_0 usado na seção anterior.

Análogo ao processo de primeira ordem se $g(n)$ for zero, a equação é dita **homogênea**, caso contrário, $g(n) \neq 0$ então a equação será **não-homogênea**, O mesmo vale para a **Linearidade**.

Apresentaremos um método de resolução para esse tipo de equação e para isso precisaremos estudar a *Teoria Geral das Equações de Diferenças*.

2.2.1 Teoria geral das equações de diferenças

A Teoria Geral das Equações de Diferenças abrangem diferentes definições e teoremas que a definem, que apresentaremos a seguir. Um importante ponto a se destacar diz respeito às soluções da equação que será proposta. Nem sempre conseguiremos obter uma solução particular da equação, isso irá depender dos dados fornecidos inicialmente.

Definição 2.32. A solução particular de uma equação de diferenças de ordem k, é a solução que obedece as condições impostas no problema. Se essas condições referem-se aos k valores iniciais de uma equação, chamamos essas condições de condições inicias.

Observação 2.33. Dada uma equação de ordem k, se conhecemos $x(z)$ para $1 \leqslant z \leqslant k$, então podemos encontrar todos os valores de $x(n)$ para $n \geqslant k$. Como vemos no exemplo a seguir.

Exemplo 2.34. A equação de diferenças

$$x(n+3) = \frac{5n+2}{n}x(n+2) + 3x(n+1) - 4nx(n) + n^2 + 1,$$

onde $x(1) = 2$, $x(2) = -1$ e $x(3) = 0$.

Perceba que temos uma equação de diferenças linear de ordem 3 e não homogênea, temos então $a_1 = -4n, a_2 = 3, a_3 = \frac{5n+2}{n}$ e $g(n) = n^2 + 1$.

Como dito na definição 2.32 e na observação 2.33, podemos encontrar a solução particular dessa equação para todo $n \geqslant 3$ que é a ordem da equação em questão. Se quisermos encontrar $x(5)$ dessa equação, basta substituirmos n por 2.

$$\begin{aligned} x(n+3) &= \frac{5n+2}{n}x(n+2) + 3x(n+1) - 4nx(n) + n^2 + 1 \\ x(2+3) &= 6x(4) + 3x(3) - 8x(2) + 5. \end{aligned}$$

Substituindo pelos $x(n)_s$ que conhecemos, temos

$$x(5) = 6x(4) + 13.$$

Precisamos encontrar $x(4)$, então tomamos $n = 1$,

$$\begin{aligned} x(1+3) &= 7x(3) + 3x(2) - 4x(2) + 2 \\ x(4) &= -9. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} x(5) &= 6.(-9) + 13 \\ x(5) &= -41. \end{aligned}$$

Observemos que podemos especificar os valores iniciais para a nossa equação geral, da seguinte forma

$$\begin{cases} x(n+k) = a_1(n)x(n) + \ldots + a_{k-1}(n)x(n+k-1) + g(n) & (2.22) \\ x(n_0) = a_0, x(n_0+1) = a_1, \ldots, x(n_0+k-1) = a_{k-1}, & (2.23) \end{cases}$$

onde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ são números reais. Somos levados para o problema de valor inicial.

Teorema 2.35. *O problema de valor inicial em* (2.22) *e* (2.23) *tem uma única solução* $x(n)$.

Demonstração: De (2.22) temos que

$$x(n+k) = f\big(n, x(n), x(n+1), \ldots, x(n+k-1)\big).$$

Para $n = n_0, n_0+1, n_0+2\ldots$, iterando temos que

$$\begin{aligned} x(k+n_0) &= f\big(n_0, x(n_0), x(n_0+1), \ldots, x(n_0+k-1)\big) \\ x(k+(n_0+1)) &= f\big(n_0+1, x(n_0+1), x(n_0+2), \ldots, x(n_0+k)\big) \\ x(k+(n_0+2)) &= f\big(n_0+2, x(n_0+2), x(n_0+3), \ldots, x(n_0+k+1)\big) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Os valores dados em (2.23) nos fornecem os valores necessários para encontrarmos $x(k+n_0)$, que por sua vez nos fornece o valor para $x(k+(n_0+1))$ e assim sucessivamente de forma única, cada valor nos fornece outro. Assim se tomarmos $x(n)$ e $y(n)$ como sendo duas soluções para (2.22) e (2.23) e se os primeiros k valores são os mesmos, ou seja, $x_0 = y_0, x_1 = y_1, \ldots x_{k-1} = y_{k-1}$, então $x_n = y_n$. □

Observação 2.36. Importante ressaltar que no caso de termos as condições impostas no problema de forma não consecutivas, o processo de determinação será o mesmo, mas será necessário um número maior de iterações, já que será preciso determinar os valores intermediários.

Como foi dito anteriormente nesta seção vamos falar sobre a **Teoria Geral das Equações de Diferenças Lineares e Homogêneas**, ou seja, trabalharemos com equações do tipo

$$x(n+k) + a_k(n)x(n+k-1) + \ldots + a_1(n)x(n) = 0. \tag{2.24}$$

Para solucionarmos equações desse tipo precisaremos de algumas definições, que apresentamos a seguir.

Inicialmente, consideremos as funções reais

$$f_i : \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\} \rightarrow \mathbb{R},\ i = 1,2,\ldots,k.$$

Vamos analisar quando as funções f_i são linearmente dependentes e quando linearmente independentes.

Definição 2.37. As funções $f_i(n), i = 1,2,\ldots,k$ são linearmente dependentes para todo $n \geq n_0$ se existem constantes a_i que sejam não nulas, ou seja, nem todas serão nulas, de tal forma que

$$\sum_{i=1}^{k} a_i f_i(n) = 0\ ,\ n \geq n_0. \tag{2.25}$$

Podemos observar então que para ser dependente necessitamos de um $a_j \neq 0$. Se dividirmos (2.25) por a_j, teremos

$$\begin{aligned} f_j(n) &= \frac{a_i}{a_j} f_1(n) + \frac{a_2}{a_j} f_2(n) + \ldots + \frac{a_k}{a_j} f_k(n) \\ &= \sum_{i \neq j} \frac{a_i}{a_j} f_i(n). \end{aligned}$$

Daqui temos que cada f_j com coeficiente diferente de zero é uma combinação linear dos outros $f_i^{'}s$. Assim, duas funções $f_1(n)$ e $f_2(n)$ serão linearmente dependentes, se uma é múltipla da outra, ou seja, $f_1(n) = \alpha f_2(n)$, para alguma constante $\alpha \in \mathbb{R}$. Caso isso não aconteça, teremos um independência linear.

Definição 2.38. As funções $f_i(n), i = 1{,}2, \ldots ,k$ são linearmente independentes se

$$\sum_{i=1}^{k} a_i f_i(n) = 0,$$

para todo $n \geq n_0$. Implica que $a_i = 0$, para $i = 1{,}2{,}3, \ldots, k$.

Exemplo retirado de [5], p.90.

Exemplo 2.39. Mostraremos que as funções $5^n, n5^n$ e $n^2 5^n$ são linearmente independentes para $n \geq 1$.

Como queremos mostrar que são linearmente independentes, supomos que para as constantes a_1,a_2, a_3, existe algum a_i que seja não nulo.

$$a_1 5^n + a_2 n 5^n + a_3 n^2 5^n = 0, \quad \forall n \geq 1,$$

dividindo tudo por 5^n, temos

$$a_1 + a_2 n + a_3 n^2 = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

Esta equação pode ter um número infinito de raízes somente se $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, o que nos mostra a independência linear dessas funções.

O exemplo abaixo foi retirado de [4], p.90.

Exemplo 2.40. Mostraremos que as funções $5^n, 3.5^{n+2}$, e^n são linearmente dependentes.

Supomos que para as constantes c_1,c_2, c_3, obtemos

$$\begin{aligned}
c_1 5^n + c_2 3.5^{n+2} + c_3 e^n &= 0\\
c_1 5^n + c_2 3.5^n.5^2 + c_3 e^n &= 0\\
c_1 5^n + c_2 75.5^n + c_3 e^n &= 0\\
(c_1 + 75c_2)5^n + c_3 e^n &= 0.
\end{aligned}$$

Daqui se tomarmos $c_1 = -75c_2$ e $c_3 = 0$, então, podemos escolher c_2 diferente de zero para que aconteça

$$0.5^n + 0.e^n = 0.$$

Isso nos mostra a dependência linear das funções.

Definição 2.41. O conjunto de k soluções linearmente independentes de (2.24) é chamado de conjunto fundamental de soluções.

Nem sempre é fácil identificarmos o conjunto solução linearmente independente. Em muitos casos a solução não é imediata como a que mostramos nos exemplos. Por isso apresentamos o que chamamos de *Casoratian* $C(n)$, também conhecido como *Casorati*, que é um caso semelhante ao Wronskiano, visto em Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), mas sendo em sua versão discreta.

Definição 2.42. Sejam $y_1(n), y_2(n), \ldots, y_k(n)$ soluções de (2.24). A matriz de Casorati $M_c(n)$, de dimensão $k \times k$, da sequência de soluções, é dada por

$$M_c(n) = \begin{pmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \ldots & y_k(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \ldots & y_k(n+1) \\ \vdots & & & \\ y_1(n+k-1) & y_2(n+k-1) & \ldots & y_k(n+k-1) \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

O valor do determinante da matriz de Casorati, representado por

$$C(n) = \det \begin{pmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \ldots & y_k(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \ldots & y_k(n+1) \\ \vdots & & & \\ y_1(n+k-1) & y_2(n+k-1) & \ldots & y_k(n+k-1) \end{pmatrix}, \tag{2.27}$$

denominamos de Casoratian.

Vejamos um exemplo em que temos um conjunto de soluções dado. Verificaremos a partir do Casoratian se formam um conjunto de soluções linearmente independentes. O exemplo foi retirado de [4].

Exemplo 2.43. Verificaremos se a equação

$$x(n+3) - 3x(n+2) + 3x(n+1) - x(n) = 0. \tag{2.28}$$

Tem como conjunto solução a sequência $\{1, n, n^2\}$.

Verificamos se os termos da sequência dada são soluções da equação.

$$\begin{aligned}
\textit{(i)} \Rightarrow \quad & 1 - 3 + 3 + 1 \\
& = 0 \\
\textit{(ii)} \Rightarrow \quad & (n+3) - 3(n+2) + 3(n+1) - n \\
& = n + 3 - 3n - 6 + 3n + 3 - n \\
& = 0 \\
\textit{(iii)} \Rightarrow \quad & (n+3)^2 - 3(n+2)^2 + 3(n+1)^2 - n^2 \\
& = 6n + 9 - 3n^2 - 12n - 12 + 3n^2 + 6n + 3 \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Como os valores satisfazem a equação, encontramos o seu Casoratian. De (2.26) temos

$$C(n) = \det \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 \\ 1 & n+2 & (n+2)^2 \end{pmatrix},$$

considerando a primeira linha da matriz de Casorati, encontramos

$$C(n) = \begin{vmatrix} n+1 & (n+1)^2 \\ n+2 & (n+2)^2 \end{vmatrix} - n \begin{vmatrix} 1 & (n+1)^2 \\ 1 & (n+2)^2 \end{vmatrix} + n^2 \begin{vmatrix} 1 & (n+1) \\ 1 & (n+2) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (n+1)^2(n+2)^2 - (n+2)(n+1)^2 - n[(n+2)^2 - (n+1)^2] + n^2[(n+2) - (n+1)] \\
&= 2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Como o Casoratian é diferente de zero, podemos afirmar que o conjunto $\{1, n, n^2\}$ é linearmente independente, então temos que a sequência dada no enunciado do exemplo é um conjunto fundamental de soluções da equação (2.28).

Agora, vejamos que nem sempre uma sequência de soluções que satisfaz nossa equação, será um conjunto de soluções linearmente independentes, por isso, a verificação por meio do Casoratian é importante. Analisemos um exemplo em que isso acontece.

Exemplo 2.44. Verifiquemos se a sequência $\{3^n, (-2)^n, (-2)^{(n+3)}\}$ forma um conjunto fundamental de soluções da equação

$$x(n+3) + x(n+2) - 8x(n+1) - 12x(n) = 0. \tag{2.29}$$

Verificamos se os valores satisfazem a equação.

$$
\begin{aligned}
\textit{(i)} \Rightarrow \quad & 3^{n+3} + 3^{n+2} - 8(3^{n+1}) - 12(3^n) \\
& = 27.3^n + 9.3^n - 24.3^n - 12.3^n \\
& = 3^n.(27 + 9 - 24 - 12) \\
& = 0; \\
\textit{(ii)} \Rightarrow \quad & (-2)^{n+3} + (-2)^{n+2} - 8(-2)^{n+1} - 12(-2)^n \\
& = (-8)(-2)^n + 4(-2)^n + 16 - 12(-2)^n \\
& = (-2)^n(-8 + 4 + 16 - 12) \\
& = 0; \\
\textit{(iii)} \Rightarrow \quad & (-2)^{n+6} + (-2)^{n+5} - 8(-2)^{n+4} - 12(-2)^{n+3} \\
& = 64(-2)^n + (-32)(-2)^n - 128(-2)^n + 96(-2)^n \\
& = (-2)^n(64 - 32 - 128 + 96) \\
& = 0.
\end{aligned}
$$

Agora, sabendo que os valores satisfazem a equação, verificamos através do Casoratian, se de fato formam um conjunto fundamental de soluções. De (2.26) temos

$$
C(n) = \det \begin{pmatrix} 3^n & (-2)^n & (-2)^{n+3} \\ 3^{n+1} & (-2)^{n+1} & (-2)^{n+4} \\ 3^{n+2} & (-2)^{n+2} & (-2)^{n+5} \end{pmatrix}.
$$

Tomando a primeira linha da matriz de Casorati, encontramos

$$
C(n) = 3^n \begin{vmatrix} (-2)^{n+1} & (-2)^{n+4} \\ (-2)^{n+2} & (-2)^{n+5} \end{vmatrix} - (-2)^n \begin{vmatrix} 3^{n+1} & (-2)^{n+4} \\ 3^{n+2} & (-2)^{n+5} \end{vmatrix} + (-2)^{n+3} \begin{vmatrix} 3^{n+1} & (-2)^{n+1} \\ 3^{n+2} & (-2)^{n+2} \end{vmatrix}.
$$

Efetuando todas as operações, chegamos em
$C(n) = 240(-2)^{2n}3^n - 240(-2)^{2n}3^n = 0.$

Percebemos que o Casoratian é igual a zero, então esse conjunto solução será linearmente dependente e os valores da sequência não serão um conjunto fundamental de soluções da equação dada.

Para se determinar o Casoratian de uma sequência de soluções de uma equação linear, utilizaremos outra fórmula, que denominaremos como fórmula de Abel.

Teorema 2.45. *Seja $y_1(n), y_2(n), \ldots, y_k(n)$ soluções de (2.24) e $C(n)$ a matriz que fornece o seu Casoratian. Então, para $n \geq n_0$,*

$$
C(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a_1(i) \right) C(n_0). \tag{2.30}
$$

Demonstração:

Seja $y_1(n), y_2(n), \ldots, y_k(n)$ soluções independentes da equação de diferenças de ordem superior definida em (2.24). Pela definição da matriz de Casorati, temos

$$C(n+1) = \det \begin{pmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & \ldots & y_k(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & \ldots & y_k(n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1(n+k) & y_2(n+k) & \ldots & y_k(n+k) \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Da equação linear de ordem superior (2.24), temos que para $1 \leq i \leq k$,

$$y_i(n+k) = -a_1(n)y_i(n) - \ldots - a_{k-1}(n)y_i(n+k-2) - a_k(n)y_i(n+k-1). \tag{2.32}$$

Substituindo essa relação de (2.32) na última linha da matriz de (2.31), encontramos que

$$\begin{aligned} y_1(n+k) &= -a_1(n)y_1(n) - \ldots - a_{k-1}(n)y_1(n+k-2) - a_k(n)y_1(n+k-1) \\ y_2(n+k) &= -a_1(n)y_2(n) - \ldots - a_{k-1}(n)y_2(n+k-2) - a_k(n)y_2(n+k-1) \\ &\vdots \\ y_k(n+k) &= -a_1(n)y_k(n) - \ldots - a_{k-1}(n)y_k(n+k-2) - a_k(n)y_k(n+k-1). \end{aligned}$$

Notemos que substituindo (2.32) na última linha de (2.31) obtemos matrizes com linhas linearmente dependentes, resultando apenas o determinante em (2.33).

Substituindo essa relação em (2.31), tem-se

$$C(n+1) = \det \begin{pmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & \ldots & y_k(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & \ldots & y_k(n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_1(n)y_1(n) & -a_1(n)y_2(n) & \ldots & -a_1(n)y_k(n) \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

Aplicando as propriedades de determinantes,

$$= -a_1(n) \det \begin{pmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & \ldots & y_k(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & \ldots & y_k(n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1(n) & y_2(n) & \ldots & y_k(n) \end{pmatrix}$$

$$= -a_1(n)(-1)^{k-1}\det\begin{pmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \dots & y_k(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \dots & y_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1(n+k-1) & y_2(n+k-1) & \dots & y_k(n+k-1) \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$C(n+1) = (-1)^k a_1(n)C(n). \tag{2.34}$$

Usando da solução das equações de primeira ordem homogênea, definida em (2.9), a solução de (2.34) será dada por

$$\begin{aligned} C(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1}(-1)^k a_1(i)\right]C(n_0) \\ &= (-1)^{k(n-n_0)}\left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a_1(i)\right)C(n_0). \end{aligned}$$

□

Se a equação de ordem superior definida em (2.24) possui os coeficientes constantes, então a solução será obtida a partir de

$$C(n) = (-1)^{k(n-n_0}a_1^{(n-n_0)}C(n_0). \tag{2.35}$$

Como para encontrarmos um conjunto fundamental de soluções da equação, precisaremos ter certeza da independência linear das soluções, veremos agora um corolário que nos auxiliará nessa verificação.

Corolário 2.46. *Suponha que $a_1(n) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$. Então o determinante da matriz de Casorati $C(n) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$ se, e somente se, $C(n_0) \neq 0$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Inicialmente, provamos que $C(n_0) \neq 0$. Pela hipótese temos que $a_1(n) \neq 0$, para todo $n \geq n_0$, podemos então escrever a equação

$$C(n) = (-1)^{k(n-n_0)}\left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a_1(i)\right)C(n_0),$$

da seguinte forma

$$C(n_0) = \frac{C(n)}{(-1)^{k(n-n_0)}\left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a_1(i)\right)}.$$

Como pela hipótese temos que $C(n) \neq 0$, temos que $C(n_0) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, provamos que $C(n) \neq 0$.

Pela hipótese temos que $a_1(n) \neq 0$, daí temos então que $\prod_{i=n_0}^{n-1} a_1(i)$ também será diferente de zero e como $C(n_0) \neq 0$. Então podemos concluir a partir daí que $C(n) \neq 0$. □

Temos então que para verificarmos se o Casoratian $C(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, basta testarmos se $C(0) \neq 0$ no caso em que $n_0 = 0$. Notemos que podemos escolher o n_0 mais adequado para calcular $C(n_0)$.

Agora, apresentamos um teorema que mostra qual a relação entre a independência linear das soluções e o Casoratian determinado por elas.

Teorema 2.47. *O conjunto de soluções $y_1(n), y_2(n), \ldots, y_k(n)$ da equação de diferenças linear homogênea de ordem superior, definida em (2.24), é um conjunto fundamental de soluções se, e somente se, para algum $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, o Casoratian $C(n_0) \neq 0$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Supomos que o conjunto de soluções $y_1(n), y_2(n), \ldots, y_k(n)$ da equação geral é um conjunto fundamental, ou seja, de acordo com a definição 2.41 é um conjunto linearmente independente. Então existem constantes a_1,$a_2, \ldots, a_k$ tal que

$$a_1y_1(n) + a_2y_2(n) + \ldots + a_ky_k(n) = 0,$$

para todo $n \geq n_0$, com $n_0 \in \mathbb{Z}^+$.

Generalizando para k equações, encontramos

$$\begin{aligned}
a_1y_1(n) + a_2y_2(n) + \ldots + a_ky_k(n) = 0\\
a_1y_1(n+1) + a_2y_2(n+1) + \ldots + a_ky_k(n+1) = 0\\
a_1y_1(n+2) + a_2y_2(n+2) + \ldots + a_ky_k(n+2) = 0\\
\vdots\\
a_1y_1(n+k-1) + a_2y_2(n+k-1) + \ldots + a_ky_k(n+k-1) = 0.
\end{aligned}$$

Daí, podemos considerar

$$Y(n) = \begin{pmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \ldots & y_k(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \ldots & y_k(n+1) \\ \vdots & & & \\ y_1(n+k-1) & y_2(n+k-1) & \ldots & y_k(n+k-1) \end{pmatrix}, \omega = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

e reescrever o sistema de equações anterior, da seguinte forma

$$Y(n)\omega = 0. \tag{2.36}$$

Observemos que se $Y(n)$ for inversível, $\det Y(n) \neq 0$. Logo, o sistema de equações que definimos em (2.36) tem somente a solução trivial, ou seja, $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$, se isso acontece podemos afirmar que

$$\det Y(n) = C(n) \neq 0, \forall n \geq n_0.$$

Assim, pelo Corolário 2.46 resulta que $C(n_0) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Agora supomos que $C(n_0) = \det Y(n_0) \neq 0$. Então o sistema de equações de (2.36) tem somente a solução trivial. Logo, pelo corolário 2.46 as soluções $y_1(n)$,$y_2(n), \ldots, y_k(n)$ da equação de ordem superior linear e homogênea, formam um conjunto fundamental. □

A partir das definições e do teorema apresentados anteriormente, podemos facilitar nossos cálculos para encontrar o conjunto fundamental de soluções, vamos utilizar desse métodos para analisar novamente as equações (2.28) e (2.29).

Exemplo 2.48. Considerando as sequências $\{1,n,n^2\}$ e $\{3^n, (-2)^n, (-2)^{n+3}\}$, como sendo soluções das equações (2.28) e (2.29). Verificaremos se formam um conjunto fundamental de soluções respectivamente das equações.

Nós já verificamos que as sequências são soluções das equações dadas. Então, analisando o Casoratian das soluções $\{1,n,n^2\}$ para o exemplo (2.28), resulta

$$C(n) = \det \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 \\ 1 & n+2 & (n+2)^2 \end{pmatrix}.$$

Para $n = 0$, encontramos que

$$C(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Assim, pelo Teorema 2.47 temos que as soluções $\{1,n,n^2\}$ são linearmente independentes e formam um conjunto fundamental de soluções da equação.

Agora analisemos o exemplo (2.29) , vamos verificar através do Casoratian se as soluções

$\{3^n, (-2)^n, (-2)^{n+3}\}$ formam um conjunto fundamental. Então

$$C(n) = \det \begin{pmatrix} 3^n & (-2)^n & (-2)^{n+3} \\ 3^{n+1} & (-2)^{n+1} & (-2)^{n+4} \\ 3^{n+2} & (-2)^{n+2} & (-2)^{n+5} \end{pmatrix}.$$

Para $n = 0$, encontramos

$$C(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 3 & -2 & 16 \\ 9 & 4 & -32 \end{pmatrix} = 0.$$

Assim, pelo Teorema 2.47 temos que as soluções $\{3^n, (-2)^n, (-2)^{n+3}\}$ são linearmente dependentes e não formam um conjunto fundamental.

Veremos agora um teorema que nos dá uma condição suficiente para que a equação possua um conjunto fundamental de soluções.

Teorema 2.49. *(Teorema Fundamental) Se $a_k \neq 0$ para todo $n \geq n_0$, então a equação de diferenças de ordem superior homogênea (2.24) possui um conjunto fundamental de soluções para $n \geq n_0$.*

Demonstração: Tomando como condições inicias $y_i(n_0 + i - 1) = 1$ e $y_i(n_0) = y_i(n_0 + 1) = \ldots = y_i(n_0 + i - 2) = y_i(n_0 + i) = \ldots = y_i(n_0 + k - 1) = 0$, para $0 \leq i \leq k$. Podemos afirmar pelo Teorema do Problema do Valor Inicial 2.35, que existem soluções $y_1(n), y_2(n), \ldots, y_k(n)$ que satisfazem a equação de diferenças. Assim, para cada i temos que

$$\begin{cases} x_1(n_0) = 1 & \text{e} \quad x_1(n_0 + j) = 0, \quad j = 1{,}2, \ldots k - 1 \\ x_2(n_0 + 1) = 1 & \text{e} \quad x_2(n_0 + j) = 0, \quad j = 0{,}2, \ldots k - 1 \\ x_3(n_0 + 2) = 1 & \text{e} \quad x_3(n_0 + j) = 0, \quad j = 0, 1{,}3, \ldots k - 1 \\ \quad \vdots & \\ x_k(n_0 + k - 1) = 1 & \text{e} \quad x_k(n_0 + j) = 0, \quad j = 0{,}1, \ldots k - 2 \end{cases}.$$

Substituindo esses valores na matriz de Casorati, definida em (2.26), temos

$$Y(n_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos então que $Y(n_0)$ é a matriz identidade, que sempre terá determinante diferente de zero. Analisando, temos que

$$C(n_0) = \det Y(n) = \det(I) = 1.$$

Logo, pelo Teorema 2.47 o conjunto de soluções $\{y_1(n), y_2(n), \ldots, y_k(n)\}$ é um conjunto fundamental de soluções, da equação geral (2.24). □

Apresentaremos agora dois resultados que nos mostram como encontrar soluções para a equação geral (2.24) a partir de soluções já conhecidas.

Lema 2.50. *Sejam $y_1(n)$ e $y_2(n)$ duas solução já conhecidas de* (2.24)*. Então temos que*
(i) $y(n) = y_1(n) + y_2(n)$ é uma solução de (2.24).
(ii) $y_3(n) = ay_1(n)$ é uma solução de (2.24) *para alguma constante $a \neq 0$.*

Demonstração: *(i)* Vamos mostrar que

$$y_1(n+k)+y_2(n+k)+a_k(n)(y_1(n+k-1)+y_2(n+k-1))+\ldots+a_1(n)(y_1(n)+y_2(n)) = 0.$$

Pela hipótese, temos que $y_1(n)$ e $y_2(n)$ são soluções de (2.24), então teremos respectivamente, que

$$y_1(n+k) + a_k(n)y_1(n+k-1) + \ldots + a_1(n)y_1(n) = 0 \tag{2.37}$$

e

$$y_2(n+k) + a_k(n)y_2(n+k-1) + \ldots + a_1(n)y_2(n) = 0. \tag{2.38}$$

Somando as igualdades (2.37) e (2.38), encontramos

$$y_1(n+k)+y_2(n+k)+a_k(n)y_1(n+k-1)+a_k(n)y_2(n+k-1)+\ldots+a_1(n)y_1(n)+a_1(n)y_2(n) = 0.$$

Então

$$y_1(n+k)+y_2(n+k)+a_k(n)(y_1(n+k-1)+y_2(n+k-1))+\ldots+a_1(n)(y_1(n)+y_2(n)) = 0.$$

Como queríamos demonstrar.

(ii) Vamos mostrar que

$$ay_1(n+k) + a_k(n)ay_1(n+k-1) + \ldots + a_1(n)ay_1(n) = 0.$$

Como y_1 é solução de (2.24), temos que

$$y_1(n+k) + a_k(n)y_1(n+k-1) + \ldots + a_1(n)y_1(n) = 0. \tag{2.39}$$

Multiplicando a igualdade (2.39) pela constante a que definimos inicialmente, encontramos

$$a(y_1(n+k) + a_k(n)y_1(n+k-1) + \ldots + a_1(n)y_1(n)) = a.0\ .$$

Então,

$$ay_1(n+k) + a_k(n)\, ay_1(n+k-1) + \ldots + a_1(n)\, ay_1(n) = 0.$$

Portanto, concluímos a demonstração. □

Lema 2.51. *Sejam y_1,$y_2, \ldots, y_k$ são soluções de (2.24), e*

$$y(n) = a_1y_1(n) + a_2y_2(n) + \ldots + a_ky_k(n) \tag{2.40}$$

onde a_1,$a_2, \ldots, a_k$ são constantes. Então $y(n)$ é também solução de (2.24).

Demonstração: Pelo item *(ii)* do lema 2.50 temos que $a_1x_1(n)$,$a_2x_2(n), \ldots, a_kx_k(n)$, com a_1,$a_2, \ldots, a_k$ constantes, são soluções da equação geral homogênea (2.24). Assim, pelo item *(i)* do Lema 2.50, obtemos que

$$a_1y_1(n) + a_2y_2(n) + \ldots + a_ky_k(n),$$

também é solução de (2.24). □

Estávamos até o momento encontrando soluções particulares para a equação (2.24). Definiremos agora como obter a solução geral da equação.

Definição 2.52. Seja $\{y_1,y_2, \ldots, y_k\}$um conjunto fundamental de soluções de (2.24). Então a solução geral da equação (2.24) é dada por

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_ix_i(n),$$

para uma constante arbitrária a_i.

O termo geral significa que essa solução pode satisfazer qualquer conjunto de condições iniciais.

Exemplo 2.53. Dada a equação

$$x(n+4) + 2x(n+3) - 13x(n+2) - 14x(n+1) + 24x(n) = 0, \tag{2.41}$$

verificamos se a sequência $\{1, (-2)^n, 3^n, (-4)^n\}$ forma um conjunto fundamental de soluções para a equação (2.41) e em seguida determinamos a sua solução geral.

Para verificarmos se os valores da sequência $\{1, (-2)^n, 3^n, (-4)^n\}$ formam um conjunto fundamental de soluções, vamos nos valer do Teorema 2.47, onde temos que se o determinante da matriz de Casorati for diferente de zero para algum n_0 então a sequência forma um conjunto fundamental de soluções. Então o Casoratian é dado por

$$C(n) = \det \begin{pmatrix} 1 & (-2)^n & 3^n & (-4)^n \\ 1 & (-2)^{n+1} & 3^{n+1} & (-4)^{n+1} \\ 1 & (-2)^{n+2} & 3^{n+2} & (-4)^{n+2} \\ 1 & (-2)^{n+3} & 3^{n+3} & (-4)^{n+3} \end{pmatrix}.$$

Para $n = 0$, encontramos

$$C(n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & -8 & 27 & 64 \end{pmatrix} = 480 \neq 0.$$

Então de fato, $\{1, (-2)^n, 3^n, (-4)^n\}$ forma um conjunto fundamental de soluções da equação (2.41).

Pela definição 2.52, a solução geral da equação (2.41) será

$$y(n) = a_1 + a_2(-2)^n + a_3 3^n + a_4(-4)^n.$$

2.2.2 Equações de diferenças lineares de ordem superior com coeficientes constantes

Para as equações que foram descritas anteriormente temos o caso em que as contantes a_k que compõem a equação não depende de n.

Definição 2.54. As equações de diferenças lineares com coeficientes constantes, são da forma

$$x(n+k) + a_k x(n+k-1) + \ldots + a_1 x(n) = 0, \tag{2.42}$$

onde os $a_i s$ são contantes e $a_1 \neq 0$.

Nessa subseção nosso objetivo é encontrar um conjunto fundamental de soluções para a equação (2.42) e consequentemente sua solução geral.

Definição 2.55. Para cada equação de diferenças linear com coeficientes constantes existe uma sequência geométrica que é solução de (2.42), ou seja, existe uma solução da forma $x(n) = \lambda^n$, onde λ é um número complexo.

Supomos que a solução da equação (2.42) seja da forma $\lambda^n,\ \lambda \in \mathbb{C}$.
Substituindo este valor na equação (2.42), obtemos

$$\lambda^k + b_k\lambda^{k-1} + \ldots + b_1 = 0, \tag{2.43}$$

que depende apenas de λ e não de n.

Essa equação é chamada de equação característica de (2.42). O polinômio característico do lado esquerdo da igualdade, possui grau k. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, temos que o polinômio (2.43) pode ser fatorado em k termos de primeiro grau, de modo que o polinômio possua k raízes.
Assim, se definimos

$$f(\lambda) = \lambda^k + b_k\lambda^{k-1} + \ldots + b_1,$$

temos que,

$$f(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) = 0.$$

A partir das raízes desse polinômio, que serão linearmente independentes, poderemos encontrar a solução geral da equação homogênea (2.42).

Teorema 2.56. *A sequência geométrica $x(n) = \lambda^n$ é solução de* (2.42) *se, e somente se, a constante $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfaz a equação característica* (2.43)*.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$Substituindo λ^n na equação (2.42), obtemos

$$\lambda^{n+k} + b_k\lambda^{n+k-1} + \ldots + b_1\lambda^n = 0.$$

Multiplicando esta equação por λ^{-n}, encontramos

$$\lambda^k + b_k\lambda^{k-1} + \ldots + b_1 = 0,$$

que é a equação característica de (2.42) com k soluções complexas, dada em (2.43).

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfaz a equação característica (2.43), ou seja, temos que

$$\lambda^k + b_k\lambda^{k-1} + \ldots + b_1 = 0.$$

Multiplicando essa equação por λ^n, obtemos

$$\lambda^{n+k} + b_k\lambda^{n+k-1} + \ldots + b_1\lambda^n = 0.$$

Se $x(n) = \lambda^n$, resulta

$$x(n+k) + a_k x(n+k-1) + \ldots + a_1 x(n) = 0.$$

$\square$

A partir do Teorema 2.56, podemos considerar duas situações:

(i) Suponhamos que as raízes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ de (2.43) sejam distintas.
Então teremos um teorema que irá caracterizar o conjunto fundamental de soluções.

Teorema 2.57. *Se as raízes características $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ de (2.43) são distintas, então $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n$ formam um conjunto fundamental de soluções de (2.42).*

Demonstração: Pelo Teorema 2.47, para termos o conjunto fundamental de soluções, basta mostrar que $C(n) \neq 0$, onde $C(n)$ representa o determinante matriz Casorati das soluções, definida em (2.42). A partir dessas definições teremos que

$$C(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}.$$

O determinante dessa matriz é chamado de determinando Vandermonde e nele os termos de cada linha da matriz formam uma sequência geométrica.
Daí podemos dizer que o determinante é dado por

$$C(0) = \prod_{1<i<j<k} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Como o teorema está definido que todas as raízes $\lambda_i's$ são distintas, temos que $\lambda_j \neq \lambda_i$ para todo j e i. Assim, concluímos que $C(0) \neq 0$, e pelo Teorema 2.47, $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n$ formam um conjunto fundamental de soluções de (2.42). $\square$

Consequentemente, análogo ao caso em que os coeficientes são não constantes, como na Definição 2.52, a solução geral de (2.42) é

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^n, \; a_i \in \mathbb{C}.$$

(ii)Suponhamos que as raízes de (2.43) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ são de multiplicidade m_1,$m_2, \ldots, m_r$, respectivamente, com

$$\sum_{i=1}^{r} m_i = k.$$

Teorema 2.58. *Seja m_i a multiplicidade da raíz característica λ_i de (2.43). Então as funções*

$$y_i(n) = u_i(n)\lambda_i^n,$$

onde $u_i(n)$ são polinômios cujo grau não excede $m_i - 1$, formam um conjunto fundamental de soluções de (2.42).

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [12] p.38.

Exemplo 2.59. Vamos encontrar a solução geral da equação

$$x(n+3) - 5x(n+2) + 8x(n+1) - 4x(n) = 0.$$

Primeiro encontramos a equação característica da equação, que será

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0,$$

onde $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$, e $\lambda_3 = 1$. Pelo Teorema 2.58, esta equação possui três soluções linearmente independentes: $y_1 = 2^n, y_2 = n2^n$ e $y_0 = 1^n = 1$.

Verificamos através do determinante da matriz de Casorati, a independência linear dessas soluções. Então, temos que

$$C(n) = \det \begin{pmatrix} 2^n & n2^n & 1 \\ 2^{n+1} & (n+1)2^{n+1} & 1 \\ 2^{n+2} & (n+2)2^{n+2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema 2.47, calculamos

$$\begin{aligned} C(0) &= \det\begin{pmatrix} 2^0 & 0.2^0 & 1 \\ 2^{0+1} & (0+1)2^{0+1} & 1 \\ 2^{0+2} & (0+2)2^{0+2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \neq 0, \end{aligned}$$

que comprova a independência linear das soluções.

Assim, a solução geral da equação definida no enunciado é

$$x(n) = b_1 2^n + b_2 n 2^n + b_3,$$

onde b_1,b_2 e b_3 são constantes arbitrárias.

Vejamos agora um exemplo em que o polinômio característico possui raízes complexas.

Exemplo 2.60. Vamos encontrar a solução geral da equação

$$x(n+4) - 4x(n+3) + 8x(n+2) - 16x(n+1) + 16x(n) = 0.$$

Temos uma equação de diferenças linear homogênea de ordem quatro, a sua equação característica será

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 16\lambda + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 2)^2(\lambda^2 + 4) = 0.$$

Equivalente a escrever

$$(\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda^2 + 4) = 0.$$

As raízes dessa equação são: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2i$ e $\lambda_4 = -2i$. Temos duas raízes reais e duas raízes complexas. Para as raízes reais usaremos o método do Teorema 2.58, obtemos assim

$$x(n) = a_1 2^n + a_2 n 2^n,$$

que é a solução da equação apresentada no exemplo, em relação ao autovalor 2, de multiplicidade 2.

Para as raízes complexas da equação, teremos a solução geral da seguinte forma

$$x(n) = c_1(a + bi)^n + c_2(a - bi)^n,$$

já que $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$.

Precisaremos transformar nossas raízes complexas para a forma trigonométrica. Em coordenadas polares temos que

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \rho \cos\theta, \quad b = \rho \operatorname{sen}\theta, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right).$$

Então para a nossa equação, teremos $\rho = \sqrt{4} = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Precisaremos transformar nossas raízes para a forma trigonométrica, ou seja, o formato que nos permitirá encontrar a solução geral da equação.

Sendo assim, pelo Teorema de Moivre (Teorema que estabelece uma relação entre os números complexos e a trigonometria),

$$[\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = \rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta),$$

daqui, encontramos que

$$\begin{aligned} x(n) &= c_1(\rho\cos\theta + i\rho \operatorname{sen}\theta)^n + c_2(\rho\cos\theta + i\rho\operatorname{sen}\theta)^n \\ &= c_1(\rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) + c_2(\rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \\ &= \rho^n[(c_1(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)) + c_2(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)] \\ &= \rho^n[(c_1 + c_2)\cos n\theta + i(c_1 + c_2)\operatorname{sen} n\theta] \\ &= \rho^n[a_1 \cos n\theta + a_2 \operatorname{sen} n\theta], \end{aligned}$$

onde $a_1 = c_1 + c_2$ e $a_2 = i(c_1 + c_2)$.

Assim, temos

$$x(n) = 2^n\left[a_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + a_2)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

Portanto, a solução geral da equação apresentada no Exemplo 2.60 é dada por

$$x(n) = b_1 2^n + b_2 n 2^n + b_3 2^n \cos\frac{n\pi}{2} + b_4 2^n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}.$$

Observação 2.61.

$i)$ A determinação dos coeficientes da solução geral da equação, dependerá dos valores iniciais, apresentados no problema, ou seja, se conhecemos os valores iniciais de uma equação qualquer, podemos montar um sistema, de modo a obter os valores para as constantes b_1,$b_2, \ldots, b_k$.

$ii)$ Nesta seção analisamos que para solucionarmos o problema de uma equação de diferenças linear de ordem k, precisamos encontrar um conjunto de soluções linearmente independente. Nem sempre essa é uma tarefa fácil, principalmente quando falamos de equação não-homogênea. Para esses casos, o melhor caminho a se tomar para obter a solução geral do modelo é o método de variação de parâmetros e coeficientes indeterminados, seguindo o mesmo modelo das equações diferenciais. Essa análise pode ser vista em [5].

$iii)$ Em geral não é possível estabelecer um critério de estabilidade assintótico para as equações de diferenças de ordem k, no entanto existe alguns critérios pré estabelecidos para as equações com coeficientes constantes. Neste trabalho não estudaremos esses critérios, um breve estudo desses conceitos pode ser encontrado em [13], p.100.

Capítulo 3

Sistemas de Equações Lineares Homogêneos e Critérios de Estabilidade

Muitos modelos matemáticos envolvem várias equações, não apenas em situações teóricas como também no campo prático, é comum surgirem equações com duas ou mais variáveis independentes. No capítulo anterior vimos métodos de resolução para equações de diferenças com apenas uma variável dependente e uma variável independente. Agora veremos uma teoria básica para solucionar sistemas de equações de diferenças lineares e como encontrar métodos de soluções para se obter a solução geral dos sistemas. Faremos uma breve análise da estabilidade desses sistemas, e nos sistemas autônomos particularizamos a sua estabilidade para sistemas que envolvem matrizes de ordem 2. Tomamos como base para a escrita desse capítulo as seguintes referências: [4, 13, 15].

3.1 Sistemas de Equações Lineares Não Autônomos

Vamos analisar a existência e unicidade de solução para o sistema de equações lineares não autônomos.

Definição 3.1. Consideramos o sistema

$$x(n+1) = A(n)x(n), \tag{3.1}$$

em que $A(n) = (a_{ij}(n))$ é uma *matriz não singular*, (isso quer dizer que a matriz admite inversa, ou seja, $\det A(n) \neq 0$)), de ordem k é chamado de equações de diferenças lineares, *não autônomo, homogêneo*.

O sistema não homogêneo é definido da mesma forma, porém possui a função $g(n)$, com valores em $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, sendo assim

$$x(n+1) = A(n)x(n) + g(n),$$

mas aqui falaremos apenas sobre os sistemas lineares homogêneos, para saber mais consultar [5] e [13].

Estabelecemos a existência e unicidade da solução da equação (3.1)

Teorema 3.2. *Para cada vetor* $x_0 \in \mathbb{R}^k$ *e* $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, *existe uma única solução* $x(n,n_0)$ *de* (3.1) *com* $x(n_0,n_0) = x_0$.

Demonstração: Iterando a equação $x(n+1) = A(n)x(n)$, definida em 3.1, obtemos

$$\begin{gathered}
x(n_0,n_0) = x(n_0) = x_0 \\
x(n_0+1,n_0) = x(n_0+1) = A(n_0)x(n_0) = A(n_0)x_0 \\
x(n_0+2,n_0) = x(n_0+2) = A(n_0+1)x(n_0+1) = A(n_0+1)A(n_0)x_0 \\
\vdots
\end{gathered}$$

Pelo padrão das iterações, podemos perceber por indução que

$$x(n,n_0) = A(n_0+(n-1))\ldots A(n_0)x_0,$$

ou seja, podemos escrever

$$x(n,n_0) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right] x_0. \tag{3.2}$$

Da equação (3.2), podemos concluir que

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) = \begin{cases} A(n-1)A(n-2)\ldots A(n_0), & \text{se } n \geq n_0, \\ I, & \text{se } n = n_0. \end{cases}$$

Mostramos agora que de fato (3.2) nos dá uma única solução. Suponhamos que (3.2) seja válida para n inteiro positivo, assim temos

$$\begin{aligned}
x(n+1,n_0) &= A(n)x(n) \\
&= A(n)\left[\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right] x_0 \\
&= \left[\prod_{i=n_0}^{n} A(i)\right] x_0.
\end{aligned}$$

Portanto, existe solução de (3.1) e ela é única determinada por (3.2), pois iterando e partindo do valor inicial (x_0), não se pode chegar a outra solução. □

Quando falamos de equações de primeira ordem, falamos dos conceitos de independência linear entre as soluções das equações, trabalharemos com resultados parecidos para a solução de sistemas de equações de diferenças.

Definição 3.3. Definimos Φ como a matriz de ordem $k \times k$, cujas colunas são as soluções do sistema (3.1), isto é,

$$\Phi(n) = [x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)]_{k\times k} \tag{3.3}$$

em que $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ são soluções do sistema (3.1).

Dessa forma, para $n+1$, temos

$$\begin{aligned} \Phi(n+1) &= [A(n)x_1(n), A(n)x_2(n), \ldots, A(n)x_k(n)] \\ &= A(n)[x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)] \\ &= A(n)\Phi(n). \end{aligned}$$

Daqui,

$$\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n), \tag{3.4}$$

ou seja, Φ satisfaz o sistema (3.1).

Teorema 3.4. *Sejam $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ as soluções do sistema (3.1), então elas serão linearmente independentes para $n \geq n_0$ se, e somente se, $\Phi(n)$ é não singular para todo $n \geq n_0$.*

Demonstração: Para analisarmos a independência linear das soluções, fazemos uma combinação linear das mesmas e as igualamos a zero, ou seja, tomamos $c_i = 0$, para $1 \leq i \leq k$, em que

$$c_1x_1(n) + c_2x_2(n) + \ldots + c_kx_k(n) = 0,$$

para todo $n \geq 0$.

Se generalizarmos para k equações, obtemos

$$\begin{gathered} c_1x_1(n) + c_2x_2(n) + \ldots + c_kx_k(n) = 0 \\ c_1x_1(n+1) + c_2x_2(n+1) + \ldots + c_kx_k(n+1) = 0 \\ \vdots \\ c_1x_1(n+k-1) + c_2x_2(n+k-1) + \ldots + c_kx_k(n+k-1) = 0, \end{gathered}$$

podemos escrever esse resultado como

$$\Phi(n)\beta = 0, \tag{3.5}$$

onde

$$\Phi(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \dots & x_k(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \dots & x_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1(n+k-1) & x_2(n+k-1) & \dots & x_k(n+k-1) \end{pmatrix} \text{ e } \beta = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}.$$

Daí podemos perceber que o sistema (3.5) terá somente a solução trivial, ou seja, $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_k = 0$ se, e somente se, a matriz $\Phi(n)$ é não singular, isto é,

$$\det \Phi(n) \neq 0, \quad \text{para todo } \ n \geq n_0.$$

□

Definição 3.5. Se a matriz $\Phi(n)$, conforme definida em (3.3), é não singular para todo $n \geq n_0$ e satisfaz a equação (3.4), então a chamamos de *matriz fundamental do sistema autônomo* (3.1).

Observação 3.6. Uma das propriedades de matrizes fundamentais refere-se ao fato de que existem infinitas matrizes fundamentais para um sistema como (3.1).

De fato, seja $\Phi(n)$ uma matriz fundamental de (3.1), e C uma matriz não singular, de modo que possamos afirmar que o produto $\Phi(n)C$ está definido, então

$$\Phi(n+1)C = A(n)\Phi(n)C,$$

ou seja, $\Phi(n)C$ também é uma matriz fundamental de (3.1).

Definição 3.7. A matriz

$$\Phi(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i), \quad \text{em que } \ \Phi(n_0) = I,$$

é uma matriz fundamental de (3.1).

Teorema 3.8. *Existe uma única solução $\Phi(n)$ para o sistema (3.4) tal que $\Phi(n_0) = I$.*

Demonstração: A equação matricial (3.4) representa um sistema com k^2 equações de diferenças de primeira ordem.

Pelo Teorema 3.2, obtém-se um único vetor solução v com k^2 componentes, ou seja, aplicando para cada ponto o teorema da existência e unicidade de solução, obtemos um vetor v tal que

$$v(n_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde o 1 aparecerá nas posições $1 + i(k+1)$ com $0 \leq i \leq (k-1)$.

Uma vez determinado o vetor v, podemos convertê-lo em uma matriz do tipo $k \times k$, então agrupamos as primeiras k componentes na primeira coluna, os segundos k componentes para a segunda e assim sucessivamente.

Como cada um dos vetores v é único, a matriz $\Phi(n)$ é única. □

Definição 3.9. A partir da matriz fundamental $\Phi(n)$, definimos a matriz de transição como sendo $\Phi(n,m) = \Phi(n)\Phi^{-1}(m)$.

Uma vez que a matriz de transição foi definida, podemos listar algumas de suas propriedades.

Por definição, temos

$$\begin{cases} \Phi(n) & = \displaystyle\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\ , \quad \Phi(n_0) = I \\ & = A(n-1)A(n-2)\ldots A(n_0). \\ & \\ \Phi(n,m) & = \Phi(n)\Phi^{-1}(m). \end{cases}$$

Então apresentamos as seguintes propriedades:

(i) $\Phi^{-1}(n,m) = \Phi(m,n)$;

De fato,

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(n,m) &= [\Phi(m,n)]^{-1} \\ &= [\Phi(n)\Phi^{-1}(m)]^{-1} \\ &= [\Phi^{-1}(m)]^{-1}[\Phi(n)]^{-1} \\ &= \Phi(m)\Phi^{-1}(n) \\ &= \Phi(m,n). \end{aligned}$$

(ii) $\Phi(n,m) = \Phi(n,r)\Phi(r,m)$;

De fato,

$$\begin{aligned} \Phi(n,r)\Phi(r,m) &= [\Phi(n)\Phi^{-1}(r)].[\Phi(r)\Phi^{-1}(m)] \\ &= \Phi(n)\Phi^{-1}(r)\Phi(r)\Phi^{-1}(m) \\ &= \Phi(n)\ I\ \Phi(n)^{-1}(m) \\ &= \Phi(n)\Phi^{-1}(m) \\ &= \Phi(n,m). \end{aligned}$$

(iii) $\Phi(n,m) = \displaystyle\prod_{i=m}^{n-1} A(i)$;

De fato,

$$\begin{aligned}
\Phi(n,m) &= \Phi(n)\Phi^{-1}(m) \\
&= \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \left[\prod_{i=n_0}^{m-1} A(i) \right]^{-1} \\
&= A(n-1)\dots A(n_0)A^{-1}(n_0)\dots A^{-1}(m-1) \\
&= A(n-1)\dots A(m) \\
&= \prod_{i=m}^{n-1} A(i).
\end{aligned}$$

Corolário 3.10. *A solução única de $x(n,n_0)$ de (3.1) com $x(n_0,n_0) = x_0$ é dada por*

$$x(n,n_0) = \Phi(n,n_0)x_0.$$

Demonstração: De fato, temos que a solução única da equação matricial (3.1),

$$x(n+1) = A(n)x(n),$$

é dada pela equação (3.2)

$$x(n,n_0) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right] x_0,$$

e pela propriedade (iii) da matriz de transição, obtemos

$$\Phi(n,n_0) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i).$$

Portanto,

$$x(n,n_0) = \Phi(n,n_0)x_0.$$

□

Para calcularmos o determinante de $\Phi(n)$, enunciaremos um teorema.

Teorema 3.11. *(Fórmula de Abel para sistemas)*
Para todo $n \geq n_0 \geq 0$,

$$\det \Phi(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} [\det A(i)] \right) \det \Phi(n_0). \tag{3.6}$$

Demonstração: De fato, pela equação (3.4),

$$\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n),$$

aplicando o determinante em ambos os lados da equação de diferenças linear, obtemos

$$\det \Phi(n+1) = \det A(n) \det \Phi(n),$$

cuja solução geral é dada por (3.6). $\square$

Corolário 3.12. *A matriz fundamental $\Phi(n)$ é não singular e as soluções*

$$x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n),$$

são linearmente independentes para $n \geq n_0$ se, e somente se, $\Phi(n_0)$ é não singular.

Demonstração: De fato, pela Fórmula de Abel, uma vez que se a matriz A é não singular, então $\Phi(n)$ será não singular, se, somente se, $\Phi(n_0)$ também não for.

Consequentemente, pelo Teorema 3.4, as soluções

$$x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n),$$

serão linearmente independentes se, e somente se, o determinante de $\Phi(n_0)$ for não nulo. $\square$

Teorema 3.13. *Existem k soluções linearmente independentes para o sistema* (3.1)

Demonstração: Considere os vetores

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,\ldots,0) \\ e_2 &= (0,1,\ldots,0) \\ &\vdots \\ e_k &= (0,0,\ldots,1) \end{aligned}$$

como sendo os k vetores unitários de $\mathbb{R}^k$. Pelo Teorema 3.2, para cada vetor e_i, com $1 \leq i \leq k$ existe uma única solução $x(n,n_0)$ de (3.1), de modo que

$$x(n_0,n_0) = e_i.$$

Verificamos agora que as soluções de $x(n,n_0)$ são linearmente independentes.

Para isso, basta verificarmos que $\Phi(n_0)$ é não singular . Note que já definimos $\Phi(n_0) = I$, logo seu determinante é diferente de zero, ou seja, as k soluções de (3.1) são linearmente independentes. $\square$

Assim, como estudamos para equações de diferenças lineares, os sistemas de equações também possuem uma característica de determinação de novas soluções a partir de duas já conhecidas. Definimos condições para que isso aconteça, no lema a seguir.

Lema 3.14. *(Princípio da Superposição). As soluções do sistema (3.1) são fechadas em relação a soma e a multiplicação por escalar, ou seja, se $x_1(n)$ e $x_2(n)$ são soluções de (3.1) e c uma constante real, então vale*
$i)$ $x_1(n) + x_2(n)$ é uma solução de (3.1);
$ii)$ $cx_1(n)$ é uma solução de (3.1).

Demonstração:

- $x_1(n) + x_2(n)$ é uma solução de (3.1).
  De fato, se $x_1(n)$ e $x_2(n)$ são soluções de (3.1), temos respectivamente que

$$x_1(n+1) = A(n)x_1(n)$$

e

$$x_2(n+1) = A(n)x_2(n).$$

  Seja

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n).$$

  Então,

$$\begin{aligned} x(n+1) &= x_1(n+1) + x_2(n+1) \\ &= A(n)x_1(n) + A(n)x_2(n) \\ &= A(n)[x_1(n) + x_2(n)] \\ &= A(n)x(n). \end{aligned}$$

- $cx_1(n)$ é uma solução de (3.1).

  De fato, se $x_1(n)$ é solução de (3.1), temos que

$$x_1(n+1) = A(n)x_1(n).$$

  Multiplicando os dois lados da equação por uma constante c, encontramos que

$$\begin{aligned} cx_1(n+1) &= cA(n)x_1(n) \\ &= A(n)[cx_1(n)]. \end{aligned}$$

  Logo, $cx_1(n)$ é solução de (3.1).

□

Vamos definir agora a solução geral para os sistemas lineares homogêneos não autônomos.

Definição 3.15. Sejam $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ soluções linearmente independentes de (3.1), $\Phi(n)$ uma matriz fundamental do sistema, cujas colunas são essas soluções e

$$C = (c_1, c_2, \ldots, c_k)^T$$

um vetor de $\mathbb{R}^k$. A solução geral de (3.1) é dada por

$$x(n) = \Phi(n)C.$$

Assim, o conjunto S de todas as soluções de (3.1) é um espaço vetorial de dimensão k, munido das operações de soma e multiplicação por escalar. Sua base é formada por $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ soluções linearmente independentes do sistema.

3.2 Sistemas de Equações Lineares Autônomos

Definição 3.16. Seja o sistema linear de ordem k (k equações), representado por

$$\begin{cases} x_1(n+1) = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \ldots + a_{1k}x_k(n) \\ x_2(n+1) = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \ldots + a_{2k}x_k(n) \\ \vdots \\ x_k(n+1) = a_{k1}x_1(n) + a_{k2}x_2(n) + \ldots + a_{kk}x_k(n) \end{cases}.$$

Podemos reescrevê-lo como

$$x(n+1) = Ax(n), \tag{3.7}$$

onde

$$x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_k(n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \text{ e } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k}(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk}(n) \end{bmatrix}$$

é uma matriz não singular com entradas constantes e reais. Destacamos que o sistema (3.7) será autônomo se os valores de A são todos constantes.

Iterando a equação, (3.7) encontramos que a solução é da forma $x(n,n_0) = A^{n-n_0}x_0$, onde $A^0 = I_{k\times k}$.

Se especificarmos um valor inicial $x(n_0) = x_0$, para $n_0 \geq 0$ teremos então um Problema de Valor Inicial e podemos afirmar que existirá uma única solução para o sistema linear homogêneo autônomo, mostraremos esse resultado posteriormente.

Teorema 3.17. *Seja o Problema de Valor Inicial dado pelo sistema linear homogêneo autônomo, com $x(n_0) = x_0$, onde n_0 é um número natural. Tal problema admite uma única solução, dada por*

$$x(n,n_0) = A^{n-n_0}x_0.$$

Demonstração: Para provarmos esse resultado vamos utilizar indução matemática, partindo do fato de que $x(n_0) = x_0$, temos então que

$$x(n_0 + 1, n_0) = Ax_0.$$

Supomos agora que $x(n,n_0) = A^{n-n_0}x_0$.

Então provamos que vale para $x(n + 1, n_0)$, então

$$\begin{aligned} x(n+1,n_0) &= Ax(n) \\ &= AA^{n-n_0}x_0 \\ &= A^{n-n_0+1}x_0. \end{aligned}$$

Daí temos que a solução é única, pois todas serão determinadas a partir de iterações sobre x_0. A medida que aumentamos a ordem da matriz a solução será a mesma em relação a x_0 alterando apenas as potências da matriz A. □

Observação 3.18. Podemos considerar $n_0 = 0$ sem que haja perda de generalidade. Pois se tivéssemos que n_0 seja diferente de zero, nós podemos torná-lo zero. Se consideramos a sequência $y(n)$ tal que

$$y(n - n_0) = x(n),$$

de forma que teremos o sistema

$$y(n + 1) = Ay(n) \text{ e } y(0) = x(n_0),$$

notemos que nesse caso a solução é dada por

$$y(n) = A^n y(0).$$

Sendo assim, podemos desenvolver nossas discussões considerando n_0 como sendo zero.

Vimos então que para encontrar a solução geral dos sistemas lineares homogêneos autônomos, precisamos calcular as potências da matriz A. Para isso, estudaremos o Algoritmo de Putzer, muito utilizado em Equações Diferenciais,porém aqui analisaremos uma versão discreta desse algoritmo. Para compreendê-lo precisaremos de alguns resultados de matrizes.

Definição 3.19. Seja uma matriz real $A = (a_{ij})_{k\times k}$, um autovalor de A é um número real ou complexo λ, tal que

$$Av = \lambda v,$$

para algum vetor não nulo $v \in \mathbb{C}^k$. Daqui decorre que

$$Av - \lambda v = 0$$

$$(A - \lambda I)v = 0, \tag{3.8}$$

com I sendo a matriz identidade $k \times k$.

Para que (3.8) possua uma solução não trivial, o determinante da matriz $A - \lambda I$ tem que ser igual a 0, ou seja,

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

ou usamos o equivalente a ela,

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \ldots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0. \tag{3.9}$$

A equação acima é chamada de equação característica de A, cujas raízes λ são chamados de autovalores de A. Assim, se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ são autovalores de A, podemos então escrever o primeiro membro de (3.9) como

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{k}(\lambda - \lambda_j),$$

chamado de polinômio característico de A. Os valores do vetor v, correspondentes a cada autovalor λ são chamados de autovetores de A. Falaremos a seguir de um dos resultados fundamentais da teoria de matrizes.

Teorema 3.20. *(Teorema de Cayley-Hamilton) Toda matriz satisfaz a sua equação característica, ou seja, se $p(\lambda)$ é o polinômio característico da matriz A de dimensão $k \times k$, podemos dizer que a matriz A anula o polinômio $(p(A) = 0)$. Ou seja,*

$$p(A) = \prod_{j=1}^{k}(A - \lambda_j I) = 0$$

ou

$$A^k + a_1A^{k-1} + a_2A^{k-2} + \ldots + a_{k-1}A + a_kI = 0.$$

Esse teorema pode ser demonstrado de várias maneiras seja através do Teorema Fundamental da Álgebra, da decomposição através de operadores lineares e noção de matriz adjunta. Para mais, consultar [13].

Verificamos o Teorema de Cayley-Hamilton, através de um exemplo. Dado que, ainda não aplicamos o conceito de valor inicial, então o sistema não irá possuir tais condições.

Exemplo 3.21. Verificamos o Teorema de Cayley-Hamilton para o sistema

$$\begin{cases} x_1(n+1) = 3x_1(n) + 2x_2(n) \\ x_2(n+1) = 5x_1(n) + x_2(n). \end{cases}$$

A ordem da matriz A, depende da quantidade de equações que o nosso sistema possui. Nesse caso o sistema possui duas equações, então a matriz A será uma matriz quadrada de ordem 2.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então a equação característica de A, será dada por

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 5 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (3-\lambda)(1-\lambda) - 10 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda - 7 = 0. \end{aligned}$$

Como o teorema afirma que a A anula sua equação característica, substituímos λ por A, obtendo

$$\begin{aligned} p(A) &= \prod_{j=1}^{2}(A - \lambda_j I) \\ &= A^2 - 4A - 7 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 8 \\ 20 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 20 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz A satisfaz a equação característica.

Observação 3.22. O Teorema de Cayley-Hamilton implica que A^n pode ser escrito como combinação linear de $I, A, A^2, \ldots, A^{k-1}$, se A é uma matriz de ordem k. Isso ainda vale para $n = -1$, o que pode facilitar o cálculo de algumas inversas.

Exemplo 3.23. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seu polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, substituindo λ por A, encontramos que $A^2 - 2A + I = 0$, podemos então reescrever A^2 como,

$$A^2 = 2A - I$$

então, podemos reescrever todas as outras potências de A, como combinação linear, do tipo,

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2A \\ &= (2A - I)A \\ &= -2A^2 - 2A \\ &= -2(2A - I) - 2A \\ &= 4A - 2I - A \\ &= 3A - 2I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^4 &= A^3A \\ &= (3A - 2I)A \\ &= 3A^2 - 2IA \\ &= 3(2A - I) - 2AI \\ &= 6A - 3I - 2A \\ &= 4A - 3I \\ &\vdots \end{aligned}$$

Utilizando essa técnica recursiva, podemos determinar qualquer potência inteira positiva da matriz A.

3.2.1 Algoritmo de Putzer

Desenvolveremos agora o algoritmo de Putzer, utilizado em equações diferenciais para determinar o valor de e^{At}. Aqui utilizaremos um algoritmo análogo, que pode ser considerado como a sua versão discreta, para calcularmos a potência de ordem n de uma dada matriz.

Seja A uma matriz real de ordem k , a representação de A^n é dada da forma

$$A^n = \sum_{i=1}^{s} u_i(n)M(i-1), \tag{3.10}$$

onde $u_i(n)'s$ são funções escalares a serem determinadas e,

$$\begin{cases} M(i) = (A - \lambda_i I)M(i-1), \;\; M(0) = I & (3.11) \\ M(i+1) = (A - \lambda_{i+1} I)M(j), \;\; M(0) = I. & (3.12) \end{cases}$$

Iterando (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} M(1) &= A - \lambda_1 I \\ M(2) &= (A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I) \\ M(3) &= (A - \lambda_3 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por indução, obtemos

$$M(n) = (A - \lambda_n I)(A - \lambda_{n-1} I)\ldots(A - \lambda_1 I),$$

ou em sua forma compacta

$$M(n) = \prod_{i=1}^{n}(A - \lambda_i I). \tag{3.13}$$

Pelo teorema de Cayley-Hamilton,

$$M(k) = \prod_{i=1}^{k}(A - \lambda_i I) = 0. \tag{3.14}$$

Daqui podemos afirmar que $M(n) = 0$, para todo $n \geq k$. Assim podemos reescrever a equação (3.10) como

$$A^n = \sum_{i=1}^{k} u_i(n)M(i-1). \tag{3.15}$$

Se tomarmos $n = 0$ em (3.15), temos

$$A^0 = I = u_1(0)I + u_2(0)M(1) + u_3(0)M(2) + \ldots + u_k(0)M(k-1). \tag{3.16}$$

Para que a equação (3.16) seja satisfeita é necessário que

$$u_1(0) = 1 \;\text{ e }\; u_2(0) = u_3(0) = \ldots + u_k = 0. \tag{3.17}$$

Para $n > 0$, de (3.15) vem que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} u_i(n+1)M(i-1) &= A^{n+1} \\
&= A\left[\sum_{i=1}^{k} u_i(n)M(i-1)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k} u_i(n)AM(i-1).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

De (3.11), encontramos $AM(i-1)$,

$$\begin{aligned}
M(i) &= (A-\lambda_i I)M(i-1) \\
M(i) &= AM(i-1) - \lambda_i M(i-1)
\end{aligned}$$

$$AM(i-1) = M(i) + \lambda_i M(i-1). \tag{3.19}$$

Então substituindo (3.19) em (3.18), encontramos a solução para $n > 0$,

$$\sum_{i=1}^{k} u_i(n+1)M(i-1) = \sum_{i=1}^{k} u_i(n)[M(i) + \lambda_i M(i-1)]. \tag{3.20}$$

Analisaremos agora as funções escalares $u_i(n)'s$.

Por (3.11) e (3.12) encontramos que

$$\begin{aligned}
M(1) &= (A-\lambda_1 I)M(1-1) \\
&= (A-\lambda_1 I)M(0) \\
&= AM(0) - \lambda_1 M(0) \\
&= A - \lambda I \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Aplicando a condição (3.17), onde diz que $u_1(n) = 1$ e os demais $u_i's$ sendo iguais a zero. Substituímos a condição mostrada acima na equação (3.20).

Teremos

$$\begin{aligned}
u_1(n+1)M(1-1) &= u_1(n+1)M(0) \\
&= u_1(n+1) \\
&= u_1(n)[M(1) + \lambda_1 M(1-1)] \\
&= u_1(n)M(1) + u_1(n)\lambda_1 M(0) \\
&= u_1(n)\lambda_1.
\end{aligned}$$

Assim,

$$u_1(n+1) = u_1(n)\lambda_1, \text{ para } u_1(0) = 1. \tag{3.21}$$

Iterando a equação (3.21), obteremos por indução que

$$u_i(n+1) = u_i(n)\lambda_i + u_{i-1}(n), \text{ para } u_i(0) = 0, \ i = 2{,}3, \ldots \ k. \tag{3.22}$$

Temos então que $u_i(n)'s$ estarão definidas da seguinte maneira

$$\begin{cases} u_1(n+1) = \lambda_1 u_1(n), & u_1(0) = 1, \\ u_i(n+1) = \lambda_i u_i(n) + u_{i-1}(n), & u_i(0) = 0, \ i = 2{,}3, \ldots \ k. \end{cases} \tag{3.23}$$

Dos conceitos de equações de diferenças lineares de primeira ordem, definidas na equação (2.10), temos que a solução de (3.23), é dada por

$$u_1(n) = \lambda_1^n, \quad u_i(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_i^{n-1-j} u_{i-1}(j), \quad i = 2{,}3, \ldots, k. \tag{3.24}$$

Assim, (3.13) e (3.24), constituem o algoritmo de Putzer para calcularmos a potência de uma matriz.

Observação 3.24. Vale ressaltar que esse método que apresentamos é um pouco trabalhoso para matrizes de ordem maiores que quatro, pois nem sempre será possível termos uma expressão clara da solução do problema, também é possível calcular a potência de matrizes através do método de *diagonalização* (para mais, consulte [13]). Aqui continuaremos utilizando o algoritmo discreto de Putzer, visto que, trabalharemos com sistemas envolvendo até três equações, de modo que as matrizes maiores serão de ordem 3.

Resolveremos agora alguns exemplos utilizando o algoritmo de Putzer.

Exemplo 3.25. Considere o sistema linear homogêneo e autônomo, dado por

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= -6x_1(n) - 2x_2(n), & x_1(0) = 1, \\ x_2(n+1) &= 6x_1(n) + x_2(n), & x_2(0) = 2. \end{cases}$$

Utilizando o algoritmo de Putzer, vamos encontrar A^n.

Temos que

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de A é definida por $(A - \lambda I) = 0$, então

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -6-\lambda & 2 \\ 6 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Então

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0.$$

Os autovalores de A são as raízes da equação característica obtida acima, então

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -3.$$

A fórmula que determina A^n, depende de $u_i(n)$ e $M(i-1)$, sendo assim vamos determiná-los.

Calculamos os valores para $M(i-1)$, para $i = 1{,}2$.

$$M(0) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} M(1) &= A - \lambda_1 I \\ &= A + 2I. \end{aligned}$$

Então

$$M(1) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos calcular os valores de $u_i(n)$, para $i = 1{,}2$.

De (3.24), temos que

$$\begin{aligned} u_1(n) &= \lambda_1^n \\ &= (-2)^n. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_2(n) &= \sum_{j=0}^{n-1} (-3)^{n-1-j}(-2)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-3)^{n-1}}{(-3)^j}(-2)^j \\ &= (-3)^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^j. \end{aligned}$$

Usando a fórmula para os n primeiros termos de uma sequência e substituindo pelo somatório, obtemos

$$
\begin{aligned}
&= (-3)^{n-1}\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\frac{2}{3} - 1}\right] \\
&= (-3)^{n-1}\left[\frac{\frac{2^n-3^n}{3^n}}{\frac{-1}{3}}\right] \\
&= (-3)^{n-1}\left[\frac{2^n - 3^n}{3^{n-1}}\right] \\
&= (-3)^{n-1}\left[\frac{-(2^n - 3^n)}{(-3)^{n-1}}\right] \\
&= -2^n + 3^n.
\end{aligned}
$$

Logo, por (3.15)

$$
\begin{aligned}
A^n &= \sum_{i=1}^{k} u_i(n)M(i-1) \\
&= u_1(n)M(0) + u_2(n)M(1) \\
&= (-2)^n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (-2^n + 3^n)\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{bmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4[(-2)^n + 3^n] & 2[(-2)^n + 3^n] \\ 6[(-2)^n + 3^n] & 3[(-2)^n + 3^n] \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} (-2)^n + -4(-2)^n - 4.3^n) & 2(-2)^n + 2.3^n) \\ 6(-2)^n + 6.3^n & (-2)^n + 3(-2)^n + 3.3^n \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} -3(-2)^n - 4.3^n & 2(-2)^n + 2.3^n) \\ 6(-2)^n + 6.3^n & 4(-2)^n + 3.3^n \end{bmatrix}.
$$

Então a solução do sistema é dada por

$$\begin{aligned}
x(n) = A^n x(0) &= \begin{bmatrix} -3(-2)^n - 4.3^n & 2(-2)^n + 2.3^n) \\ 6(-2)^n + 6.3^n & 4(-2)^n + 3.3^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3(-2)^n - 4.3^n + 2[2(-2)^n + 2.3^n)] \\ 6(-2)^n + 6.3^n + 2[4(-2)^n + 3.3^n] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-2)^n \\ 14(-2)^n + 12.3^n] \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.26. Vamos resolver o sistema

$$\begin{cases} x_1(n+1) = 3x_1(n) + x_2(n) + x_3(n), & x_1(0) = 3 \\ x_2(n+1) = 3x_2(n) + 2x_3(n), & x_2(0) = 2 \\ x_3(n+1) = 3x_3(n), & x_3(0) = 2 \end{cases}.$$

Temos que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de A é definida por $(A - \lambda I) = 0$, então

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Então

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= -(\lambda^3 - 9\lambda^2 + 27 - 27) = 0 \\ &= -(\lambda - 3)^3 = 0. \end{aligned}$$

Então os autovalores de A são:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3.$$

Vamos agora encontrar os valores de $u_i(n)$ e $M(i-1)$, para $i = 1{,}2{,}3$.

Os valores de $M(i-1)$, para $i = 1,2,3$, são:

$$M(0) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} M(1) &= A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ M(2) &= (A-3I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Encontramos agora os valores de $u_i(n)$, para $i = 1,2,3.4$

$$u_1(n) = 3^n.$$

$$\begin{aligned} u_2(n) &= \sum_{j=0}^{n-1} 3^{n-1-j}(3^j) \\ &= 3^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} 1 \\ &= n.3^{n-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3(n) &= \sum_{j=0}^{n-1} 3^{n-1-j}(j.3^{j-1}) \\ &= \frac{3^{n-1}}{3}\sum_{j=0}^{n-1}(3^{-1})(j3^j) \\ &= 3^{n-2}\frac{n(n-1)}{3} \\ &= 3^{n-3}n(n-1). \end{aligned}$$

Logo, por (3.15)

$$\begin{aligned} A^n &= u_1(n)M(0) + u_2(n)M(1) + u_3(n)M(2) \\ &= 3^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + n.3^{n-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3^{n-3}n(n-1)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 3^n & n & n.3^{n-1} + 2[3^{n-3}n(n-1)] \\ 0 & 3^n & 2(n.3^{n-1}) \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, podemos obter a solução geral da equação

$$\begin{aligned}
x(n) = A^n x(0) &= \begin{bmatrix} 3^n & n & n.3^{n-1} + 2[3^{n-3}n(n-1)] \\ 0 & 3^n & 2(n.3^{n-1}) \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3^{n+1} + 4n.3^{n-1} + 2.3^{n-3}.n(n-1) \\ 2.3^n + 4n.3^{n-1} \\ 2.3^n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3^n\left(1 + \dfrac{4n}{3} + \dfrac{2}{27}n(n-1)\right) \\ 3^n\left(\dfrac{2+4n}{3}\right) \\ 2.3^n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3^n\left(\dfrac{27 + 36n + 2n(n-1)}{27}\right) \\ 3^n\left(\dfrac{2+4n}{3}\right) \\ 2.3^n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Vamos resolver agora um sistema autônomo homogêneo que envolve raízes complexas, usaremos a fórmula polar para o números complexos análogo com o que fizemos no exemplo 2.60.

O exemplo abaixo foi retirado de [4], p.126.

Exemplo 3.27. Considere o sistema linear homogêneo e autônomo, dado por

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= x_1(n) + x_2(n), & x_1(0) = 1 \\ x_2(n+1) &= -x_1(n) + x_2(n), & x_2(0) = 0 \end{cases}.$$

Temos que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de A é :

$$\det(A-\lambda I)=\begin{bmatrix}1-\lambda & 1\\ -1 & 1-\lambda\end{bmatrix}=0.$$

Então

$$p(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+2=0.$$

Como dito anteriormente, a matriz A possui autovalores complexos,

$$\lambda_1=1+i \quad \text{e} \quad \lambda_2=1-i.$$

Vamos encontrar agora os valores de $M(i-1)$ e $u_i(n)$, para $i=1{,}2$.
Os valores para $M(i-1)$, para $i=1{,}2$.

$$M(0)=I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$M(1) \;=\; A-(1+i)I \;=\begin{bmatrix}-i & 1\\ -1 & -i\end{bmatrix}.$$

Os valores de $u_i(n)$, para $i=1{,}2$, são:

$$u_1(n) \;=\; (1+i)^n.$$

$$\begin{aligned}
u_2(n) &= \sum_{j=0}^{n-1}(1-i)^{n-1-j}(1+i)^j\\
&= (1-i)^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(1-i)^{-j}(1+i)^{-j}\\
&= (1-i)^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^j\\
&= (1-i)^{n-1}\left(\frac{\frac{(1+i)^j}{(1-i)^j}-1}{\frac{1+i}{1-i}-1}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-i)^{n-1}\left(\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{(1-i)^n}\right)\cdot\left(\frac{(1-i)}{2i}\right)\\
&= (1-i)^{n-1}\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{2i(1-i)^{n-1}}\\
&= \frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{2i}.
\end{aligned}
$$

Usando a fórmula polar para números complexos, encontramos que

$$u_1 = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\tfrac{\pi}{4}n + i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\pi}{4}n\right)\ \text{ e }\ u_2 = 2^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\pi}{4}.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
A^n &= u_1(n)M(0)+u_2(n)M(1)\\
&= 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\tfrac{\pi}{4}n + i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\pi}{4}n\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + 2^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\pi}{4}\begin{bmatrix}-i & 1\\ -1 & -i\end{bmatrix}\\
&= 2^{\frac{n}{2}}\begin{bmatrix}\cos\tfrac{\pi}{4}n & \mathrm{sen}\,\tfrac{\pi}{4}n\\ -sen\tfrac{\pi}{4}n & \cos\tfrac{\pi}{4}n\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Sendo assim, a solução do sistema é dada por

$$
\begin{aligned}
x(n) &= A^n x(0)\\
&= 2^{\frac{n}{2}}\begin{bmatrix}\cos\tfrac{\pi}{4}n & \mathrm{sen}\,\tfrac{\pi}{4}n\\ -sen\tfrac{\pi}{4}n & \cos\tfrac{\pi}{4}n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\\
&= 2^{\frac{n}{2}}\begin{bmatrix}\cos\tfrac{\pi}{4}n\\ -\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\pi}{4}n\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

3.2.2 Estabilidade dos sistemas lineares autônomos

Ao analisar modelos, em sistemas dinâmicos é necessário compreender a sua dinâmica de movimento, para assim determinar as suas características. Então se faz necessário estabelecer critérios de estabilidade, veremos agora um pouco da estabilidade dos sistemas homogêneos autônomos, apresentados na Definição 3.16, sendo da forma

$$x(n+1) = Ax(n), \ \text{ com } \ A_{k\times k} \ \text{ e } \ x_{k\times 1}. \tag{3.25}$$

Para compreendermos o teorema que será apresentado a seguir precisaremos de duas definições da Álgebra Linear.

Definição 3.28. Considere uma matriz A, de ordem k com diferentes autovalores $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$.

O espectro de A, denotado por $\sigma(A)$ é o conjunto dos autovalores de A e o raio espectral de A é

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| ; \lambda \text{ em } \sigma(A)\}.$$

Definição 3.29. Um autovalor é semisimples se o correspondente bloco de Jordan for diagonal.

O teorema a seguir expressa quando um sistema será instável, a partir da análise do espectro da matriz A.

Teorema 3.30. *Se $\rho(A) > 1$, então a solução $x(n)$ do sistema (3.25) satisfaz a relação*

$$\lim_{n\to\infty} \|x(n)\| = \infty.$$

O teorema abaixo resume os principais resultados da estabilidade para os sistemas lineares autônomos, definidos em (3.25), sua demonstração pode ser encontrada em [5].

Teorema 3.31. *Segue que*
(i) *O zero da solução (3.25) é estável se, e somente se, $\rho(A) \leq 1$ e os autovalores do módulo da unidade são semisimples.*
(ii) *O zero da solução de (3.25) é assintoticamente estável se, e somente se, $\rho(A) < 1$.*

Corolário 3.32. *A solução zero do sistema (3.25) é instável se $\rho(A) > 1$.*

Verificamos a partir de um exemplo.

Exemplo 3.33. Vamos determinar a estabilidade do zero da solução do sistema

$$\begin{cases} x_1(n+1) = \frac{3}{12}x_1(n) - 3x_3(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) - 3x_2(n) + x_3(n) \\ x_3(n+1) = -x_3(n) \end{cases}.$$

Do sistema de equações temos que

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{12} & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de A é determinada por

$$\det A = \begin{bmatrix} \frac{3}{12} - \lambda & 0 & -3 \\ 1 - \lambda & -3 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= -(\lambda^3 + \frac{15}{4}\lambda^2 + 2\lambda - \frac{3}{4}) \\ p(\lambda) &= -(\lambda + 3)(\lambda + 1)(\lambda - \tfrac{1}{4}). \end{aligned}$$

Temos então que

$$\sigma(A) = \left\{ -3,\ -1,\ \frac{1}{4} \right\} \text{ e } \rho(A) = \frac{1}{4} < 1.$$

Portanto, pelo Teorema 3.31, item (ii), o zero da solução do sistema solucionado acima é assintoticamente estável.

3.2.3 Sistemas lineares homogêneos autônomos bidimensionais

Vamos analisar agora um pouco dos critérios de estabilidade dos sistemas lineares homogêneos e autônomos, de ordem 2×2, do tipo

$$\begin{cases} x_1(n+1) = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) & (3.26) \\ x_2(n+1) = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n), & (3.27) \end{cases}$$

ou seja,

$$x(n+1) = Ax(n),$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } x(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}.$$

Podemos reescrever a equação (3.26) como

$$x_1(n+2) = a_{11}x_1(n+1) + a_{12}x_2(n+1).$$

De (3.27) obtemos

$$x_1(n+2) = a_{11}x_1(n+1) + a_{12}(a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n)). \tag{3.28}$$

Da equação (3.26),temos que

$$x_2(n) = \frac{x_1(n+1) - a_{11}x_1(n)}{a_{12}}. \tag{3.29}$$

Substituindo (3.29) em (3.28), obtemos

$$x_1(n+2) = a_{11}x_1(n+1) + a_{12}a_{21}x_1(n) + a_{22}(x_1(n+1) - a_{11}x_1(n)),$$

que também pode ser escrita como

$$x_1(n+2) - (a_{11} + a_{22})x_1(n+1) + (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})x_1(n) = 0. \tag{3.30}$$

No capítulo 2, vimos que a solução de uma equação de diferença de primeira ordem do tipo,

$$x(n+1) = ax(n),$$

é definida em (3.31) e podemos aplicar a iteração na solução, assim teremos

$$\begin{aligned} x(n) &= C\lambda^n, & (3.31)\\ x(n+1) &= C\lambda^{n+1}, & (3.32)\\ x(n+2) &= C\lambda^{n+2}. & (3.33)\end{aligned}$$

Substituindo (3.33) e (3.32) na equação (3.30), encontramos que

$$C\lambda^{n+2} - (a_{11} + a_{22})C\lambda^{n+1} + (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})C\lambda^n = 0. \tag{3.34}$$

Pela Definição 2.55, podemos reescrever a equação de modo a obter

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}) = 0. \tag{3.35}$$

Desse modo, temos que a solução (3.31) será válida somente se λ satisfizer a equação (3.35) que é a equação característica de de (3.30).

Podemos simplificar a equação (3.35), adotando uma nova notação para os seus coeficientes, então

$$\beta = a_{11} + a_{22} \quad \text{e} \quad \alpha = a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}.$$

Então as soluções da equação característica (3.35) são

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2} \tag{3.36}$$

e a partir delas, podemos determinar o comportamento das soluções da equação (3.30).

A equação (3.30) possui todos os coeficientes lineares, não apresenta nenhuma variável quadrática ou exponencial, possuindo somente múltiplos escalares. Assim, pelo Lema 2.40 temos que a combinação linear destas soluções, também será solução do sistema bidimensional, nesse caso.

Então, se λ_1 e λ_2 são soluções da equação (3.30), a sua solução geral será

$$x_1(n) = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n, \text{ para } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

onde A_1 e A_2 serão determinados a partir da condição inicial imposta pelo problema.

Podemos reescrever o sistema definido pelas equações (3.26) e (3.27), como

$$x(n+1) = Px(n), \tag{3.37}$$

onde

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } x(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}.$$

Da equação (3.31), observamos que as soluções serão da forma

$$x(n) = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \lambda^n.$$

Substituindo a solução na equação (3.37), temos

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \lambda^{n+1} = P \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \lambda^n \Rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \lambda = P \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

$$(P - \lambda I) \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0,$$

então, λ é um autovalor de P com autovetor $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ associado.

Fazendo a combinação linear das soluções, encontramos a solução geral do sistema, dada por

$$x(n) = c_1 \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} \lambda_1^n + c_2 \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \lambda_2^n,$$

onde os autovetores e autovalores estão associados pelos índices respectivamente.

Podemos então concluir que a análise da solução geral do sistema, dada por $x(n)$ dependerá dos autovalores de P.

Faremos uma análise do comportamento das soluções de um sistema autônomo bidimensional, a análise será feita a partir do sistema

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) \\ x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n). \end{cases}$$

reduzimos ele a uma única equação em função apenas de $x_1(n)$, dada em (3.30), faremos a análise com base nos autovalores dessa equação.

Os critérios determinados para o comportamento das soluções devem ser estudado caso a caso, para autovalores reais e autovalores complexos, separadamente. Iniciaremos analisando os casos para raízes reais.

Autovalores Reais

Se λ_1 e λ_2 são reais, o comportamento da solução irá depender se λ está em uma das quatro possibilidades a seguir

$$\lambda \geq 1, \quad \lambda \leq -1, \quad 0 < \lambda < 1, \quad -1 < \lambda < 0.$$

Chamaremos $x_1(n) = \lambda_1^n$ e $x_1^*(n) = \lambda_2^n$,as soluções de (3.30). Teremos então as seguintes classificações:

$i)$ Se $\lambda_1, \lambda_2 > 1$, as soluções λ_1^n e λ_2^n crescem a medida que n aumenta. Então $x_1(n)$ e $x_1^*(n)$ crescem ilimitadamente.

$ii)$ Se $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$, as soluções λ_1^n e λ_2^n tendem a zero a medida que n aumenta. Então $x_1(n)$ e $x_1^*(n)$ tendem a zero.

$iii)$ Se $-1 < \lambda_1, \lambda_2 < 0$, então λ_1^n e λ_2^n oscilam entre valores positivos e negativos, e em módulo declinam a zero.

$iv)$ Se $\lambda_1, \lambda_2 < -1$, então λ_1^n e λ_2^n oscilam como em (iii) mas em módulo, crescem.

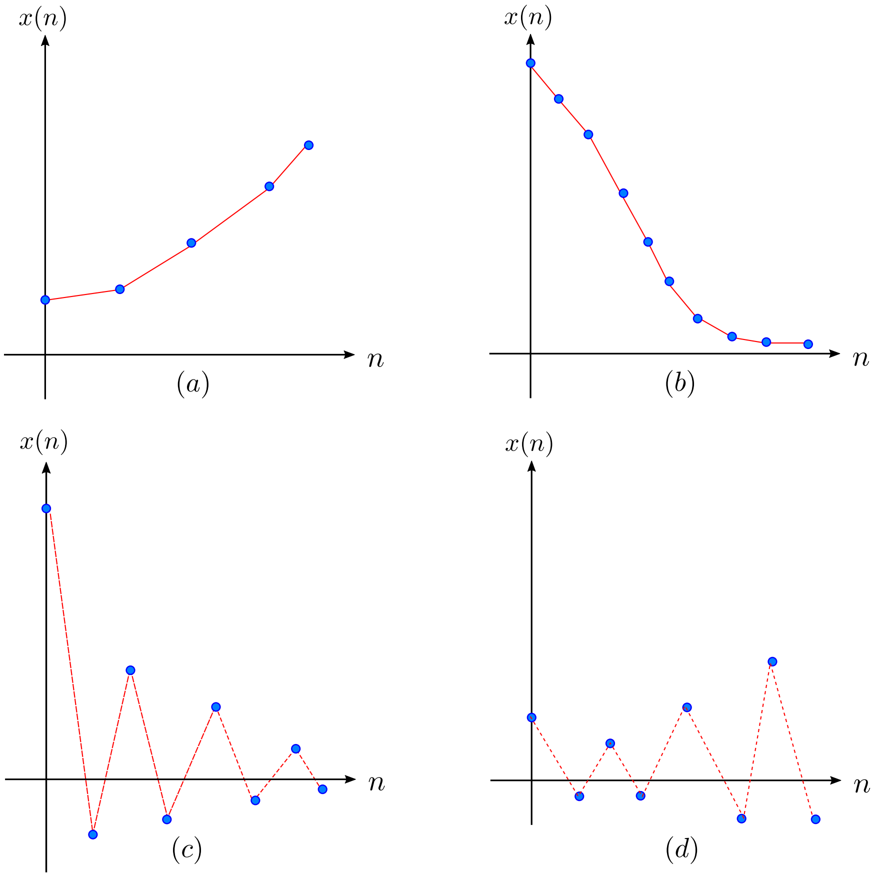
Para os casos em que $\lambda_1, \lambda_2 = 1$, $\lambda_1, \lambda_2 = 0$ ou $\lambda_1, \lambda_2 = -1$, que são pontos que permitem tirar conclusões sobre a estabilidade das soluções a partir dos autovalores, tendem, respectivamente, para

(1) Como $\lambda_1, \lambda_2 = 1$, a solução será estática, não irá crescer, pois $x_1 = C_1$ e $x_1^* = C_2$;

(2) Como $\lambda_1, \lambda_2 = 0$, então $x_1 = x_1^* = 0$;

(3) Para $\lambda_1, \lambda_2 = -1$, teremos uma oscilação entre os valores $x_1 = C_1$, $x_1^* = C_2$ e $x_1 = -C_1, x_1^* = -C_2$.

Figura 3.1: Comportamento qualitativo para solução $x(n) = C\lambda^n$



Fonte: Arquivo pessoal.

Autovalores Complexos

A partir daqui analisaremos o comportamento das soluções da equação (3.30), em que os autovalores são complexos. A equação característica (3.35) terá autovalores complexos, com a parte imaginária diferente de zero quando

$$\beta^2 < 4\alpha,$$

e irão ocorrer em pares conjugados,

$$\lambda_1 = a + bi \quad \text{e} \quad \lambda_2 = a - bi\ , \tag{3.38}$$

onde $a = \dfrac{\beta}{2}$ e $b = \dfrac{1}{2}\left|\beta^2 - 4\alpha\right|^{\frac{1}{2}}$.

Após obter os valores complexos de λ, se faz necessário encontrar a solução geral da equação envolvendo os autovalores complexos obtidos, podemos tomar como exemplo a solução geral

$$x_1(n) = A_1(a + bi)^n + A_2(a - bi)^n. \tag{3.39}$$

Podemos representar os números complexos por um par de coordenadas, (ρ, θ), como fizemos no Exemplo 2.60, onde

$$a = \rho \cos\theta \quad \text{e} \quad b = \rho \operatorname{sen}\theta, \tag{3.40}$$

onde

$$\rho = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right). \tag{3.41}$$

É possível relacionar esse valores e a partir do Teorema de Euler, encontrar as seguintes relações

$$\begin{array}{rcccl} a + bi & = & \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) & = & \rho e^{i\theta}, \\ a - bi & = & \rho(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta) & = & \rho e^{-i\theta}. \end{array}$$

Daqui, obtemos

$$\begin{aligned} (a + bi)^n &= (\rho e^{i\theta})^n \\ &= \rho^n e^{i\theta n} \\ &= c + di, \end{aligned}$$

onde $c = \rho^n \cos n\theta \quad \text{e} \quad d = \rho^n \operatorname{sen} n\theta$.

A partir dessas relações, podemos reescrever a equação (3.39), como

$$\begin{aligned} x_1(n) &= A_1(a + bi)^n + A_2(a - bi)^n \\ &= A_1\rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) + A_2\rho^n(\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta) \\ &= (A_1 + A_2)(\rho^n \cos n\theta) + (A_1 - A_2)i(\rho^n \operatorname{sen} n\theta) \\ &= \mu_1\rho^n \cos n\theta + i\mu_2\rho^n \operatorname{sen} n\theta, \end{aligned}$$

onde $\mu_1 = A_1 + A2$ e $\mu_2 = (A_1 - A_2)$. Considerando $u(n) = \rho^n \cos n\theta$ e $v(n) = \rho^n \operatorname{sen} n\theta$, resulta

$$x_1(n) = \mu_1 u(n) + i\mu_2 v(n). \tag{3.42}$$

A equação (3.42) possui parte real e imaginária , como ela é linear temos que as partes reais e imaginárias das soluções complexas também são soluções, então podemos expressar a solução de (3.39) como

$$\begin{aligned} x_1(n) &= C_1 u(n) + C2v(n) \\ &= \rho^n(C_1 \cos n\theta + \mathbb{C}_2 \operatorname{sen} n\theta, \end{aligned} \tag{3.43}$$

onde ρ e θ estão relacionados com a e b pelas equações (3.40) e (3.41).

O comportamento das soluções complexas $\lambda = a \pm bi$, estão associados com soluções oscilatórias, a amplitude de oscilação do sistema depende de ρ^n e a frequência de oscilações do raio $\frac{b}{a}$.

A amplitude das soluções poderá ser:

- Crescente, se $\rho = \sqrt{(a^2 + b^2)} > 1$.
- Decrescente, se $\rho = \sqrt{(a^2 + b^2)} < 1$.
- Constante, se $\rho = 1$.

Outro ponto importante a ser observado é que quando $\arctan(\frac{b}{a})$ é múltiplo racional de π e $\rho = 1$, a solução será periódica na medida em que oscila através de um número finito de valores e retorna a estes a cada ciclo completado.

Apresentamos um método um pouco mais direto para se determinar a estabilidade dos sistemas lineares bidimensionais. O critério para essa análise é realizado em função dos coeficientes da equação característica.

Teorema 3.34. *Seja a equação característica*

$$\lambda^2 - \beta\lambda + \alpha = 0, \tag{3.44}$$

temos que o zero da solução da equação

$$x(n+1) = Ax(n),$$

definida anteriormente em (3.25)*, é assintoticamente estável se*

$$|\beta| < 1 + \alpha < 2.$$

A demonstração do Teorema 3.34, pode ser encontrada em [4].

Vejamos agora alguns exemplo envolvendo autovalores reais e complexos, dos métodos de análises de estabilidade apresentados acima.

Exemplo 3.35. Vamos analisar o comportamento das soluções do sistema

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= 4x_1(n) + x_2(n), \\ x_2(n+1) &= 2x_1(n) + 5x_2(n). \end{cases} \tag{3.45}$$

Do sistema temos que

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

E a equação característica de A é

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Dessa forma,

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0. \tag{3.46}$$

Da equação característica encontramos os autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 6$. Assim, a solução geral do sistema (3.45)

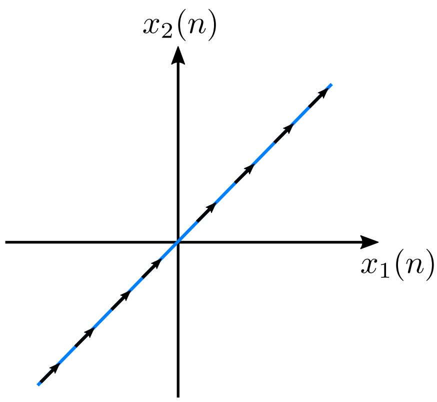
$$x_1(n) = C_1 3^n + C_2 6^n \, . \tag{3.47}$$

Para verificarmos o comportamento das soluções, analisamos os seus autovalores, como λ_1 e λ_2 são maiores que 1, temos que as soluções

$$x_1(n) = C_1 3^n \quad \text{e} \quad x_1^*(n) = C_2 6^n,$$

crescem ilimitadamente. Sendo assim, as soluções da equação (3.47) do sistema (3.45) também crescem ilimitadamente, em módulo. Na Figura 3.2 podemos visualizar o comportamento do sistema.

Figura 3.2: Comportamento das Soluções do Sistema 3.45



Fonte: Arquivo pessoal.

Os dois exemplos apresentados a seguir, foram retirados de [4].

Exemplo 3.36. Vamos analisar o comportamento das soluções do sistema

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= x_1(n) - 3x_2(n), \\ x_2(n+1) &= x_1(n) + x_2(n). \end{cases} \tag{3.48}$$

Do sistema obtemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de A é determinada por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Assim,

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0. \tag{3.49}$$

Temos então dois autovalores complexos $\lambda_1 = 1 + i\sqrt{3}$ e $\lambda_2 = 1 - i\sqrt{3}$. De (3.38), encontramos $a = 1$ e $b = \sqrt{3}$. Assim, de (3.41) obtemos que

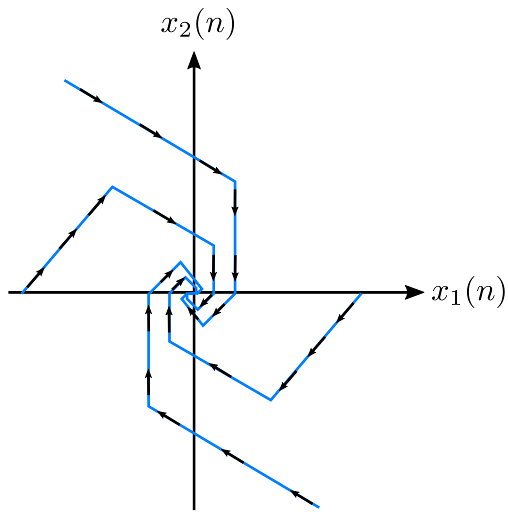
$$\rho = (1+3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{e} \quad \theta = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Logo, de (3.43), obtemos que a solução geral de valores reais do sistema (3.48) é

$$x_1(n) = 2^n\left[C_1\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + C_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right]. \tag{3.50}$$

Como $\rho = 2 > 1$, podemos concluir que as soluções determinadas a partir da equação (3.50) do sistema (3.48) possuem amplitude de oscilações igual a ρ^n, frequência igual a $\frac{\pi}{3}$ e crescem em módulo, ilimitadamente. A representação gráfica da solução do sistema está na Figura 3.3.

Figura 3.3: Comportamento das Soluções do Sistema 3.48



Fonte: Arquivo pessoal.

Exemplo 3.37. Verificamos a estabilidade do zero da solução do sistema

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= -x_1(n) + 5x_2(n), \\ x_2(n+1) &= -0{,}5x_1(n) + 2x_2(n). \end{cases} \tag{3.51}$$

Do sistema obtemos

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -0{,}5 & 2 \end{bmatrix}.$$

A equação característica de A é dada por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 5 \\ -0{,}5 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Assim,

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 0{,}5 = 0. \tag{3.52}$$

Os autovalores de A são:

$$\lambda_1 = \frac{1+i}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{1-i}{2}$$

De (3.38), encontramos $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$. Assim, de (3.41) obtemos que

$$\rho = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \theta = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Logo, de (3.43), obtemos que a solução geral de valores reais do sistema (3.51) é

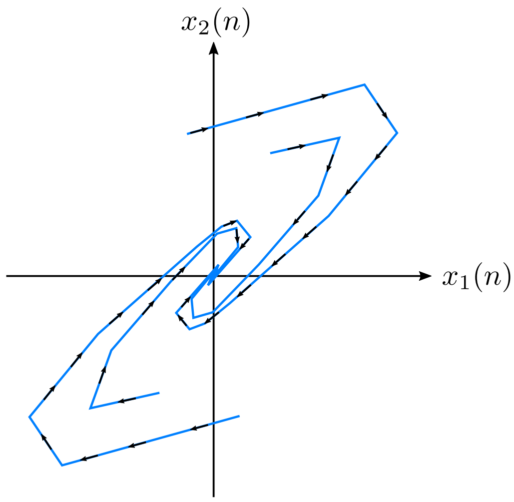
$$x_1(n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left[C_1 \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]. \tag{3.53}$$

Analisando a equação (3.44) apresentada no Teorema 3.34, e comparando com a equação (3.52), equação característica do sistema, encontramos

$$|\beta| = 1 < 1 + \alpha = 1{,}5 < 2.$$

Logo, a solução (3.53) do sistema (3.51) é assintoticamente estável e tende para 0. A representação gráfica, está dada na Figura 3.4.

Figura 3.4: Comportamento das Soluções do Sistema 3.51



Fonte: Arquivo pessoal.

Capítulo 4

Algumas Aplicações

Os modelos de dinâmicas populacionais tem como objetivo fazer previsões no desenvolvimento sustentável de uma determinada população e frequentemente usados em Biologia, pois a maioria das populações se reproduzem em intervalos de tempo bem determinados. As equações de diferenças nos permitem uma análise de crescimento ou decrescimento de uma população, bem como pode auxiliar estabelecendo condições para que se permaneça estável. Existem diferentes modelos populacionais que utilizam a teoria de equações de diferenças, nesse sentido, apresentaremos a seguir um modelo de reprodução de coelhos, aplicamos o modelo de Malthus para uma população em decrescimento, calculando a mortalidade infantil no Brasil e para uma população em crescimento, utilizando o modelo Malthusiano e de Verhulst, para se determinar a quantidade de usuários de internet ao longo dos anos. Por fim, calculamos a população de Bisontes num determinado tempo n, onde trabalhamos com uma população em diferentes fases de crescimento, isso nos possibilitará exemplificar situações em que o modelo estará determinado por sistemas de equações lineares. Esse capítulo teve como referência [8, 13].

4.1 Modelo de Reprodução dos Coelhos (Fibonacci)

Leonardo de Pisa (apelidado por Fibonacci), pensou no seguinte problema: “Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?”

Fibonacci apresentou a seguinte solução: no primeiro mês há um casal que ainda não é fértil; no segundo mês, há ainda um casal, que agora será fértil; no terceiro, mês há o mesmo casal do mês anterior, só que agora terá um casal de filhotes; no quarto mês, haverá o casal inicial mais o casal nascido no mês anterior (ainda não fértil) e um novo casal. E o problema segue. Com o passar do tempo, seguindo o processo da figura, após um ano teremos o resultado da tabela a seguir.

Tabela 4.1: Reprodução de Coelhos Anual

Mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Casais	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Se representarmos por $f(n)$ o número de pares de coelhos no final de n meses, encontramos uma relação de recorrência que representa o modelo

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n),\ 1 \leq n \leq 10, \tag{4.1}$$

$f(1) = f(2) = 1$ são nossas condições iniciais para esse problema.

Como Fibonacci inicialmente queria entender o problema em apenas 12 meses a equação (4.1) modela a situação, e teremos como obter todos os outros valores dessa sequência como vimos na observação 2.33.

A equação (4.1) estão limitada aos 12 meses iniciais, mas se quisermos saber a quantidade de coelhos que terá no cercado após n meses, além dos doze, podemos assumir a mesma equação, bastando mudar o conjunto em que n estará definido, obteremos assim uma solução geral para o problema. Assim,

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n),\ n \geq 1. \tag{4.2}$$

Pela definição de equações de ordem superior com coeficientes constantes definida em (2.54) obtemos a equação característica da equação (4.2)

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Então as raízes características serão $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Assim, obtemos a solução geral

$$f(n) \quad = \quad a_1\frac{1-\sqrt{5}}{2} + a_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\ \ n \geq 1.$$

Como nomeamos as raízes por α e β, podemos reescrever a equação,

$$f(n) = a_1\alpha^n + a_2\beta^n.$$

Dado que temos os dados iniciais do modelo de Fibonacci, podemos montar um sistema de modo a obter as constantes a_1 e a_2.

Para $\ n = 1$, temos $\ f(1) = 1,$

Para $\ n = 2$, temos $\ f(2) = 1.$

De modo que obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} a_1\alpha^1 + a_2\beta^1 &= 1 \\ a_1\alpha^2 + a_2\beta^2 &= 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

Então a solução geral será

$$f(n) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

A solução geral da Sequência de Fibonacci, é chamada de Teorema de Binet, um resultado interessante, com esse teorema podemos encontrar qualquer termo da sequência de Fibonacci, sem depender de recorrência.

4.2 Modelo Malthusiano - Mortalidade Infantil no Brasil

Thomas Malthus foi um economista inglês, ele apresentou em 1978, uma equação que descreve o crescimento de uma população humana. Segundo Malthus o crescimento populacional da época era um crescimento geométrico, enquanto a sustentação de recursos naturais e a produção de alimentos era aritmética, com base nisso e a fim de causar espanto na época, Malthus afirmava que em um determinado espaço de tempo não muito distante, o planeta estaria super lotado e por isso inabitável, e segundo ele, quanto mais a taxa de natalidade crescia, maior era a miséria e a fome.

O modelo que Malthus propôs pressupõe que a variação da população no instante n e $n+1$ é proporcional ao instante n.

Definida da seguinte forma

$$P(n+1) = \alpha P(n) + P(n). \tag{4.3}$$

Considerando a população inicial como $P(0) = P_0$ temos

$$\begin{cases} P(n+1) &= \alpha P(n) + P(n), \\ P(0) &= P_0, \end{cases} \tag{4.4}$$

ou seja,

$$P(n) = (1+\alpha)^n P_0, \tag{4.5}$$

onde α é a taxa de crescimento ou decrescimento de uma população.

Isolando α na equação (4.3), obtemos

$$\alpha = \sqrt[n]{\frac{P(n)}{P_0}} - 1. \tag{4.6}$$

Utilizaremos aqui o modelo de Malthus para calcular uma população em decrescimento, mais especificamente para se obter a mortalidade infantil no Brasil, durante um ano. O cálculo é feito a partir da quantidade de crianças que morrem antes de completar um ano de vida durante um ano em relação a quantidade de nascidos no mesmo ano. Os dados que utilizaremos aqui, foram retirados do site *Ipeadata*, referentes aos anos de 2011 a 2018. [1]

A taxa de mortalidade infantil é obtida da seguinte forma

$$\frac{n^{\text{o}} \text{ de óbitos}}{n^{\text{o}} \text{ de nascimentos}} \times 1000 = \text{Taxa de mortalidade.} \tag{4.7}$$

Na Tabela 4.2 os dados relacionados ao nascimento foram obtidos da pesquisa geral *(Ipeadata)*, com eles conseguimos calcular a taxa de decrescimento.

Por (4.6), temos

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt[8]{\frac{2.787.981}{3.059.019}} - 1 \\ &= -0{,}011530088. \end{aligned}$$

Resultando que a população irá decrescer, visto que a taxa é negativa.

Com isso, encontramos o número de crianças que morreram a cada 1000 nascidas pela equação (4.7), denotamos esses valores na Tabela 4.2 por *Mortalidade A*, onde cada valor representado, equivale a cada 1000 crianças nascidas do total geral.

Utilizamos o modelo de Malthus para fazer uma projeção $P(n)$, e encontramos valores aproximados para a quantidade de crianças nascidas no mesmo período, assim como o número dos que morreram (*Mortalidade B*), a partir da projeção Malthusiana.

Então esses dados foram baseados nas pesquisas do *Ipeadata*.

Tabela 4.2: Projeção Mortalidade Infantil- Modelo de Malthus

Ano	Nascimento	Mortalidade (A)	$P(n)$	Mortalidade (B)	Erro (%)
2011	3.059.019	35,2708	3.059.019	35,2708	0
2012	3.015.052	34,7638	3023748,24	34,8641	0,2884
2013	2.973.118	34,2803	2988884,16	34,4621	0,5302
2014	2.933.186	33,8199	2954422,06	34,0647	0,7239
2015	2.894.982	33,3794	2920357,32	33,6720	0,8765
2016	2.857.985	32,9528	286685,34	33,2837	1,004
2017	2.822.384	35,5423	2853401,6	32,9000	1,0989
2018	2.787.981	32,1457	2820501,63	32,5206	1,1664

Fonte: Arquivo Pessoal.

[1]Disponível em: http://www.ipeadata.gov.br/Default.aspx.

O erro dado em porcentagem foi obtido a partir da diferença entre os dados disponíveis no site do *Ipeadata*(Mortalidade (A))e os dados calculados a partir do modelo de Malthus (Mortalidade (B)), a partir disso tiramos o percentual com base na diferença.

Com isso, percebemos que a varição do erro da tabela de valores calculados pelas pesquisas com fatos que já ocorreram se aproximam bastante do que calculamos com o modelo de Malthus. Com ele podemos fazer uma projeção para dados futuros, no site do Ipeadata contêm uma projeção até 2060, vamos verificar para $2025, 2030$ e 2035.

Usando a mesma taxa de decrescimento obtida anteriormente, encontramos os dados da Tabela 4.3 .

Tabela 4.3: Projeções Futuras Mortalidade Infantil- Modelo de Malthus

Ano	Nascimento	Mortalidade (A)	$P(n)$	Mortalidade (B)	Erro (%)
2025	2.827.039	32,5960	2600581,9	29,9849	8,0103
2030	3.015.052	30,9403	2454074,87	28,2957	8,5474
2035	2.973.118	29,4841	2315821,49	26,7016	9,4372

Fonte: Arquivo Pessoal.

Concluímos que o modelo foi eficiente para o período em que analisamos, porém o modelo de Malthus é muito utilizado para fazer previsões a curto prazo, visto que desconsidera questões que influenciam diretamente no crescimento populacional, como a fome, epidemias e outras catástrofes.

Dessa forma, os valores de $P(n)$, tendem a se tornar cada vez menores em situações de decrescimento, podendo levar uma população à extinção, analisando a longo prazo.

Isso, dado que

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \lim_{n\to\infty} (1+\alpha)^n P_0 = 0,$$

quando $\alpha < 0$, pois $0 < 1 + \alpha < 1$.

4.3 Aumento de Usuários de Internet no Brasil

A internet está presente no cotidiano da maioria da população, houve um tempo em que essa presença não era tão marcante, mas os números atuais das pesquisas, mostram que a quantidade de usuários tem aumentado consideravelmente.

Realizamos uma análise a partir de dois métodos para obtermos essa projeção, para tal fim, utilizamos o Método Malthusiano e o Método de Verhulst, sendo que o segundo leva em consideração que a população deverá crescer até um limite máximo sustentável, chegará um tempo em que ela irá se estabilizar. O modelo de Verhulst obedece a variação da população em cada instante, levando em consideração o caráter finito do ambiente, e também os recursos naturais ilimitados, o que o difere do modelo Malthusiano.

Os dados da pesquisa que utilizaremos foram realizadas pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), e estão de acordo com o PNAD (Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios), a pesquisa é realizada anualmente, tanto nos setores urbanos como rurais, então os números envolvem os dois setores, foram entrevistados indivíduos que tinham a partir de 10 anos de idade. [2]

4.3.1 Análise com o modelo de Malthus

Com a quantidade de usuários obtidos na pesquisa, representados na Tabela 4.4, na segunda coluna, podemos obter a taxa de crescimento.

Sendo assim, da equação (4.6), obtemos

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt[8]{\frac{76{,}6}{126{,}9}} - 1 \\ &= 0{,}065133653. \end{aligned}$$

Visto isso, podemos obter valores para $P(n)$, aplicamos a fórmula do modelo de Malthus, definida em (4.5) e obtivemos a coluna $P(n)$, na Tabela 4.4.

Tabela 4.4: Quantitativo de Usuários de Internet- Modelo Malthusiano

Ano	Usuários (Milhões)	$P(n)$	$P(n)$ - Usuários	Erro ($\%$)
2011	76,6	7,6600	0	0
2012	80,9	81,5892	0,6892	0,8520
2013	85,8	86,9034	1,1034	1,2861
2014	94,2	92,5638	-1,63622	1,7370
2015	102	98,5928	-3,4072	3,3404
2016	107,9	105,0145	-2,8855	2,6742
2017	120,7	107,9000	-12,8	10,6048
2018	126,9	119,1400	-7,7600	6,1151

Fonte: Arquivo Pessoal

Calculamos a diferença entre o valor obtidos pelas pesquisas e o valor obtido a partir do modelo de Malthus, como vemos na coluna *P(n)- Usuários*, e também na última coluna da Tabela 4.4 mostramos a taxa de erro que o método apresentou.

Fizemos uma projeção para 2025, 2030 e 2035, não tem ainda projeções disponíveis pelo IBGE, mas de acordo com o modelo de Malthus, nesses anos respectivamente, a quantidade de usuários de internet será aproximadamente ao apresentado na Tabela 4.5.

[2]Disponível em: https://teleco.com.br/internet.asp

Tabela 4.5: Projeção Usuários de Internet no Brasil- Modelo de Malthus

Ano	Usuários(Milhões)
2025	185,3046
2025	254,0427
2030	348,2790

Fonte: Arquivo Pessoal

4.3.2 Análise com o modelo de Verhulst

Verhulst introduziu um modelo diferente do Malthusiano, ele introduziu a equação de crescimento logístico, essa equação nos possibilita uma análise mais detalhada do crescimento populacional de uma determinada espécie. Possui uma constante que permite considerar a interação entre os indivíduos e aos riscos de mortalidade, ou possíveis competições de sobrevivência, é o que diferencia do método de Malthus.

O modelo de Verhulst é um equação de diferença não linear de primeira ordem e não homogênea expressa por

$$P(n+1) = (1+\alpha)P(n) - \beta P^2(n). \tag{4.8}$$

O termo $-\beta x^2(n)$ é considerado como o termo inibidor de crescimento, é a partir dele que consideramos os recursos limitados ou a competição entre espécies, mantendo um equilíbrio no crescimento ou decrescimento da população, ele é expresso proporcionalmente ao número de indivíduos $P^2(n)$ que disputam pela sobrevivência.

Considerando $\mu = 1 + \alpha$ na equação (4.8), e considerando o termo inibidor de crescimento, temos

$$P(n+1) = \mu P(n) - \beta P^2(n),$$

onde μ e β são coeficientes a serem determinados.

Se considerarmos K como sendo a capacidade de uma determinada população, r a taxa de crescimento intrínseca e sendo P_0 conhecido, podemos expressar $P(n)$ em função de P_0, da seguinte forma

$$P(n) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0})e^{-rn}, \tag{4.9}$$

que é solução da equação (4.8).

Para determinar a constante K, consideramos um conjunto de dados x_i, que serão medidos em um tempo discreto n_i, por essa sequência sabemos que a sequência converge para K a medida em que n_i cresce infinitamente, esses pontos satisfazem uma função f contínua, descrita como

$$f(x_i) = x_{i+1}.$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_i) = \lim_{n\to\infty} x_{i+1} = K.$$

Assim, a sequência de pontos determinados por (x_i, x_{i+1}) converge para (K, K), e desse modo K é um ponto fixo, da função f.

Podemos representar a população $P(n+1)$ como y, x como sendo a população em $P(n)$, onde K é o ponto fixo da equação

$$y = ax + b,$$

as constantes a e b serão determinadas a partir de uma regressão linear.

Da equação (4.9) é possível obter o valor da taxa intrínseca r_n, dada por

$$r_n = -\frac{1}{n}\left[\ln\left(P_0\left(\frac{K}{P(n)} - 1\right)\right) - \ln(K - P_0)\right]. \tag{4.10}$$

Deve se calcular a taxa ano a ano da qual você tenha acesso aos dados, de modo que a taxa r a ser considerada seja a média aritmética dos valores $r_i's$ obtidos.

Os resultados apresentados anteriormente podem ser encontrados em [2, 8] mais detalhadamente, não explicitamos aqui, já que trouxemos o modelo com o objetivo de causar interesse na continuação do conteúdo, possivelmente em trabalhos futuros.

Vamos utilizar esses resultados para calcular a quantidade de usuários de internet no Brasil. Os dados realizados em pesquisas forma obtidos no site do IBGE, assim como mencionamos na análise de Malthus.

Apresentamos os cálculos de maneira direta, foram realizados online[3], e como o objetivo aqui é mostrar apenas os dados finais, não abriremos os cálculos.

Então a partir dos dados apresentados na Tabela 4.6 podemos determinar a lei de formação do modelo

$$\begin{aligned} P(n+1) &= aP(n) + b \\ P(n+1) &= 1.075P(n) + 61541.72\,. \end{aligned}$$

Então o ponto fixo x^* será igual a

$$x^* = K = -820556,$$

todos os valores são expressos em milhões.

Calculamos os $r_i's$ a partir da equação (4.10) e são apresentados na Tabela 4.6, sendo sua média $r = 6{,}1585$.

[3]Disponível em: https://www.easycalculation.com/pt/statistics/regression.php

Encontrados o ponto fixo, x^* e o valor da taxa intrínseca r, podemos aplicar a fórmula de Verhulst, através da fórmula (4.9), apresentamos os resultados na quarta coluna da Tabela 4.6.

Tabela 4.6: Quantitativo de Usuários de Internet- Modelo Verhulst

Ano	Usuários (Milhões)	r_i	$P(n)$	$P(n)$- Usuários	Erro (%)
2011	76,6		76,600	0	0
2012	80,9	5,63500	81,324	4,2400	0,52410
2013	85,8	5,6855	86,665	8,6500	1,0082
2014	94,2	6,6073	92,754	9,2754	9,8465
2015	102	6,6069	99,758	9,9758	9,7802
2016	107,9	6,1585	107,90	1,0790	1,0000
2017	120,7	6,4666	117,48	1,1748	9,7332
2018	126,9	6,01410	128,93	1,2893	1,0682

Fonte: Arquivo Pessoal

4.3.3 Comparação dos modelos

Com havíamos comentado anteriormente o modelo de Malthus desconsidera fatores que interferem no crescimento populacional, ele tende a crescer a medida que n aumenta tende ao infinito. Enquanto que no modelo de Verhulst, a população tende a se estabilizar em algum momento a medida que n aumenta.

Tabela 4.7: Comparação entre Modelo de Malthus e Verhulst

Ano	Dados Oficiais	Modelo de Malthus	Erro (%)	Modelo de Verhulst	Erro (%)
2011	76,6	76,600	0	76,600	0
2012	80,9	81,5892	0,8520	81,324	0,52410
2013	85,8	86,9034	1,2861	86,665	1,0082
2014	94,2	92,5638	-1,7370	92,754	9,8465
2015	102	98,5928	-3,3404	99,758	9,7802
2016	107,9	105,0145	-2,6742	107,90	1,0000
2017	120,7	107,9000	-10,6048	117,48	9,7332
2018	126,9	119,1400	-6,1151	128,93	1,0682

Fonte: Arquivo Pessoal

Pela Tabela 4.7 podemos observar que o modelo de Verhulst apresenta uma porcentagem de erro bem menor que o modelo de Malthus, no entanto, não trabalhamos com equações de diferenças não lineares neste trabalho, mas fica aberto a oportunidade para trabalhos futuros.

4.4 População de Bisontes na América do Norte

Os bisontes são grandes mamíferos que vivem na América do Norte, também conhecidos como Bisão-Americano. Já teve uma população abundante, mas depois de longas caçadas, restaram poucos. Faremos uma análise da população desses animais.

Supomos que

$$b(n) = [b_1(n) \quad b_2(n) \quad b_3(n)]^T,$$

seja um vetor que representa a população de bisontes da América do Norte.

Onde

- $b_1(n) \to$ representa a quantidade de nascimentos.
- $b_2(n) \to$ quantidade de bisontes com um ano.
- $b_3(n) \to$ quantidade de bisontes adultos.

Se a cada ano nascem 42% de bisontes do número de adultos do ano anterior, 60% dos nascidos completam um ano, 75% dos que tinham um ano atingem a idade adulta e 95% dos adultos sobrevivem dentro de um ano.

Com esses dados podemos montar o seguinte sistema de equações de diferenças linear e autônomo,

$$\begin{cases} u_3(n+1) &= 0{,}42u_3(n), \\ u_3(n+1) &= 0{,}6u_1(n), \\ u_3(n+1) &= 0{,}75u_2(n) + 0{,}95u_3(n). \end{cases}$$

Reescrevemos o sistema como

$$u(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}42 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}95 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \\ u_3(n) \end{bmatrix}$$

Assim, podemos reescrever o sistema como

$$u(n+1) = Au(n).$$

Então a equação característica da matriz A será determinada por

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 0-\lambda & 0 & 0{,}42 \\ 0{,}6 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}95-\lambda \end{bmatrix}$$

Então

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 0{,}95\lambda^2 + 0{,}189$$

Pela Definição 3.28 temos que

$$\sigma(A) = \{-0{,}774172 - 0{,}406292i\,;\ 1{,}105\} \text{ e } \rho(A) = 1{,}105 > 1.$$

Portanto, do Teorema 3.30 e pelo corolário do Corolário 3.32, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \|u(n)\| = \infty,$$

que nos permite concluir que a população de bisontes tende a aumentar ao longo do tempo, apresentando um comportamento instável.

Capítulo 5

Considerações Finais

Este trabalho teve como base o estudo de equações de diferenças para a compreensão de alguns modelos, de maneira geral, os estudos em sistemas dinâmicos discretos podem ser aplicados em diferentes áreas, como na Biologia, Economia, entre outras áreas do conhecimento. Estudá-los é imprescindível para previsão de acontecimentos futuros. Por mais que a análise que realizamos aqui seja introdutória, servirá de base para a compreensão de outros conceitos, como o estudo dos sistemas não lineares, que culminará nos estudos da teoria do Caos, entre outros aspectos do campo de Sistemas Dinâmicos que é uma área grande e que tem muito onde nos aventurarmos.

Pensamos ter atingido nosso objetivo de apresentar técnicas de resoluções para equações de diferenças lineares de primeira ordem e ordem superior, tanto homogêneas como não homogêneas, mostrando alguns conceitos de estabilidade para a solução geral dessas equações. Para melhor entendimento dessas técnicas, foram apresentados alguns exemplos para colocá-las em prática. Também apresentamos técnicas de resolução para equações de diferenças de ordem superior homogêneas e discorremos sobre sistemas lineares autônomos, assim como, não autônomos. Estudamos alguns conceitos e critérios de estabilidade dos sistemas, principalmente nos sistemas lineares autônomos bidimensionais, e esses conceitos nos permitiram analisar a estabilidade de alguns exemplos dados.

Por fim, apresentamos algumas aplicações de modelos populacionais. Os conceitos de equações homogêneas foram fundamentais para a compreensão do modelo de reprodução de coelhos, representada por uma equação de diferenças de segunda ordem, a partir das definições estudadas obtivemos a solução geral do problema apresentado a Fibonacci, também para se calcular pelo método iterativo o modelo de Malthus tanto para entendermos a taxa de Mortalidade no Brasil de 2011 a 2018 , tanto para o aumento de usuários de internet nesse mesmo período.

Mesmo não tendo estudado no trabalho as equações de diferenças não lineares, entender o processo iterativo realizado no cálculo das equações de diferenças lineares foi fundamental para calcularmos o aumento de usuários de internet no modelo não linear apresentado por

Verhulst.

A análise de convergência e o conceito de ponto de equilíbrio nos auxiliou a entender o crescimento não estável da população de Bisontes na América do Norte, bem como a análise do espectro de autovalores.

Referências

[1] BACELAR, B. R. **Estudos de Equações de Diferenças e aplicações**. Macapá, 2016.

[2] BASSANEZI, R. C. **Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2013.

[3] BOLDRINI, José Luiz . . . [et al.] **Álgebra Linear I** - 3 ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

[4] CIPOLLI, Valéria Guedes. **Sistemas Dinâmicos Discretos- análises de estabilidade**. 2012. 147 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

[5] ELAYDI, S. **An Introduction to Difference Equations**.Springer, 2005.

[6] ELLER, Elcie Sanches.**Equações de Diferenças:** Aplicações no Ensino Médio. 166 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Matemática, Profmat, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2015.

[7] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**; v.11 14.ed. - Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2017.

[8] FERNANDES,F.R. **Equações de diferenças de 1º ordem e suas aplicações.** 2015. 104 f. Dissertação (Mestrado-Programa de Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos-SP.

[9] HIRSCH, Morris W.; SMALE, Stephen; DEVANEY, Robert L. **Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction To Chaos**. 2. ed. Califórnia: Elsevier, 2004.

[10] JESUS, Eliane Alves de; SILVA, Telles Timóteo da; D'AFONSECA, Luis Alberto. **Sistemas Dinâmicos Discretos**. 2016. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Matemática, Profmat, Universidade Federal de São João Del-rei, São João Del-rei, 2016.

[11] Junior, Walter Fernandes da Silva. **Equações de diferenças lineares de ordem superior e aplicações**. 2016. Dissertação, Profmat, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

[12] LAKSHMIKANTHAM, V.; TRIGIANTE, D.**Theory of Difference Equations:** Numerical Methods and Applications. 2006. San Diego: ACADEMIC PRESS, INC. 1988.

[13] LUÍS, Rafael Domingos Garanito. **Equações de Diferenças e Aplicações**. 2006. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Matemática, Universidade da Madeira, Funchal, 2006.

[14] **Métodos de pesquisa /** [organizado por] Tatiana Engel Gerhardt e Denise Tolfo Silveira; coordenado pela Universidade Aberta do Brasil- UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica - Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

[15] VALLE, Jaqueline. **Equações de Diferença e Teoria de Estabilidade**2016. Monografia-Graduação em Licenciatura em Matemática, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville,2016.

[16] WILLIAN E. Boyce, Richard C. DiPrima; tradução e revista técnica Valéria de Magalhães Iorio. - 10.ed. - Rio de Janeiro : LTC, 2015.