UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MORGANA ALCINA SALES VALADARES

TAXAS RELACIONADAS, DERIVADAS COMO TRANSFORMAÇÕES LINEARES E APLICAÇÕES

ARAGUAÍNA
2021

MORGANA ALCINA SALES VALADARES

TAXAS RELACIONADAS, DERIVADAS COMO TRANSFORMAÇÕES LINEARES E APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciada em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior.

ARAGUAÍNA
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

V136t Valadares, Morgana Alcina Sales.
Taxas relacionadas, derivadas como transformações lineares e aplicações. / Morgana Alcina Sales Valadares. – Araguaína, TO, 2021.
67 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2021.
Orientador: José Carlos de Oliveira Junior

1. Derivadas. 2. Aproximações. 3. Taxas relacionadas. 4. Generalização da derivação. I. Título

CDD 510

MORGANA ALCINA SALES VALADARES

TAXAS RELACIONADAS, DERIVADAS COMO TRANSFORMAÇÕES LINEARES E APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciada em Matemática. Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior .

Aprovada em: 11/08/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior (orientador)

Alvaroy

Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hancco

Renata A. da Silva

Profa. Dra. Renata Alves da Silva

Dedico este trabalho a Deus e à minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus, pelo cuidado e amor. Por sempre estar nos momentos mais difíceis, por me mostrar que sou capaz de realizar meus sonhos e por ter dado a oportunidade de viver esses momentos até hoje.

À minha mãe, Rejane, por ser meu maior exemplo, por não me abandonar, por cuidar de mim e acreditar em mim. Ao meu maninho, pelo carinho, cuidado e por compreender os momentos que precisava de silêncio.

Ao meu namorado Gustavo, por estar comigo nessa caminhada, me incentivando e me ajudando. Você se faz presente mesmo estando a 2.317,5 km de distância.

Às minhas amigas do Pará, especialmente, à Aline, Jessyca, Mariana, Penha, Nanda, Tayla e Becca, por estarem presentes nos momentos mais importantes da minha vida.

Aos meus colegas de curso: Atalia, Bárbara, Daniela, Elizabeth, Micaela, Pedro Dark, Tainara, Thafne e Victor Jesus; agradeço o companheirismo ao longo deste percurso.

Aos professores do Colegiado de Matemática, que acompanharam minha trajetória ao longo dos últimos anos, sou grata pelos ensinamentos e incentivos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Carlos, por me ajudar a enfrentar as barreiras que tive até aqui, por me incentivar a correr atrás dos meus sonhos e por acreditar em mim.

Enfim, aqueles que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação.

Obrigada!

A Matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza.

(Bertrand Russel)

RESUMO

Este trabalho apresenta as derivadas de funções de várias variáveis e evidencia suas aplicações.Tendo como principal objetivo apresentar duas aplicações, a saber, taxas relacionadas e aproximações de funções, e buscando determinar uma generalização da derivação para funções mais gerais. Para isso, são apresentados os conceitos fundamentais do cálculo diferencial e expostos variados tipos de problemas referentes a taxas relacionadas, como também uma noção de derivação de funções de várias variáveis, que aqui são transformações lineares, e estende, em um certo sentido, a noção de derivada de funções de uma variável. A metodologia utilizada nesta monografia é de natureza exploratória, bibliográfica, e a abordagem é qualitativa. Os resultados nos proporcionaram criar um apêndice contendo um diagrama que exibe um algoritmo geral de solução de problemas que envolvem taxas relacionadas, pois a maior parte dos casos segue um mesmo processo de resolução, o que torna possível o desenvolvimento de um “algoritmo". Como resultados, esta pesquisa mostra que as derivadas possibilitam encontrar boas aproximações da imagem de uma função em torno de um ponto.

Palavras-chave: Derivadas. Aproximações. Taxas relacionadas. Generalização da derivação. Transformações lineares.

ABSTRACT

This work presents the derivatives of functions of several variables and highlights their applications. Its main objective is to present two applications, namely, related rates and function approximations, and seeking to determine a generalization of the derivation for more general functions. For this, the fundamental concepts of differential calculus are presented and various types of problems related to related rates are exposed, as well as a notion of derivation of functions of several variables, which here are linear transformations and, extends, in a certain sense, the notion of derivative for functions of one variable. The methodology used in this monograph is exploratory, bibliographical, and the approach is qualitative. The results allowed us to create an appendix containing a diagram that shows a general algorithm for solving problems involving related rates, since most cases follow the same resolution process, which makes the development of an "algorithm" possible. As a result, this research shows that derivatives make it possible to find good approximations of the image of a function around a point.

Keywords: Derivatives. Approximations. Related rates. Generalization od the derivation. Linear transformations.

Lista de Figuras

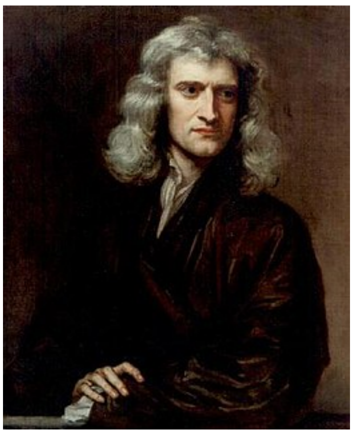
Sumário

Capítulo 1
Introdução

O Cálculo é dividido em dois ramos, que são o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. Esse é utilizado também para resolver problemas a respeito de áreas de regiões limitadas por uma curva e aquele para resolver, inicialmente, problemas relacionados a tangentes a uma curva em um ponto dado. O estudo do Cálculo Diferencial e Integral foi feito separadamente por muito tempo e, apenas no século XVII, esses dois ramos foram relacionados por meio do tão famoso teorema fundamental do cálculo. É impossível falar sobre o desenvolvimento desses ramos sem comentar sobre os matemáticos Gottfried Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1642-1727), dos quais faremos um panorama histórico curto a seguir.

Newton nasceu na cidade de Woolsthorpe, situada na Inglaterra. Quando era criança, criava objetos que poderiam moer trigo. Era matemático e físico, e sua primeira invenção foi em relação a séries infinitas. Newton forjou sua própria matemática, por suas descobertas e suas invenções, como o teorema do binômio e o método dos fluxos. Ele recebe também notoriedade na Física com a Lei da gravitação e outros princípios tão importantes quanto.

Figura 1.1. Isaac Newton



Fonte: Wikipedia (2021).

Leibniz, por sua vez, nasceu em Lípsia, na Alemanha. Ele recebeu uma influência positiva de seu pai, que era professor de filosofia, e aprendeu dois idiomas de forma independente quando era criança. Foi um grandioso matemático no século XVII, demonstrando o Teorema Fundamental do Cálculo e gerando muitas regras de diferenciação. Entre 1673 e 1676, idealizou seu próprio Cálculo, com suas próprias notações.

Figura 1.2. Gottfried Leibniz

Fonte: Wikipedia (2021).

No que tange ao mérito do desenvolvimento do cálculo, Leibniz e Newton eram adversários. Newton foi o primeiro a descobrir, mas Leibniz mencionou os primeiros resultados . Atualmente, considera-se que os dois criaram o Cálculo separadamente.

Dentro do primeiro ramo do cálculo, isto é, do cálculo diferencial, as derivadas desempenham um papel essencial. Na verdade, a palavra "diferencial" é devida exatamente ao conceito de derivada, que é a inclinação da reta tangente a uma curva em um determinado ponto. Além de fornecer essa inclinação, ela pode ser vista como taxa de variação instantânea de uma função e pode ser aplicada em outras questões como determinar o máximo e o mínimo de uma função, velocidade e aceleração, volume de sólidos geométricos e etc. Outro exemplo é que podemos utilizar apenas o conceito de derivada para determinar uma boa aproximação de $\operatorname{sen}(0,8)$ (veja Seção 2.3), sem a utilização de calculadora. Todas essas aplicações evidenciam a força desse conceito que será discutido neste trabalho.

A respeito das taxas relacionadas, elas serão uma das aplicações de derivada e um dos nossos objetos principais de estudo. Um problema exemplo referente a taxas relacionadas é: cada vez que adicionamos água para dentro de um cone, o raio e o nível do volume estarão mudando, em relação ao tempo, à medida que a água entra no recipiente. Com isso, o volume e o raio estarão aumentando e essas duas grandezas estarão se relacionando entre si, de forma que uma dependerá da outra e, consequentemente, as duas taxas de variação estarão relacionadas. Mais precisamente, as grandezas raio e volume, que dependem do tempo, satisfazem uma equação específica que fornece a relação procurada entre as taxas de variação.

Compreender questões sobre taxas relacionadas faz uma conexão direta com outras ciências como a Física, Engenharia e Biologia. Velocidade, movimento de partículas, resistores elétricos, crescimento do cérebro de uma espécie de peixes, são exemplos nos quais podemos aplicar o conceito de taxas relacionadas e que traremos nesta monografia. Isso mostra que esse tema é intrinsecamente interdisciplinar.

No nosso cotidiano, há muitos casos que dependem de várias variáveis, por exemplo, a temperatura em um ponto da superfície da terra depende da longitude, latitude e a amplitude, em outras palavras, depende de três variáveis. Então, é natural pensarmos em uma generalização da definição de derivada para funções com mais de uma variável. Essa generalização mostrará que a derivada de funções de mais variáveis é uma transformação linear, que pode gerar uma boa aproximação da função dada em torno de um ponto específico.

Feitas essas considerações, pretendemos apresentar neste trabalho o conceito geométrico de derivada, regras de diferenciação, taxas relacionadas, aplicação da derivada mais geral e objetivando responder à seguinte questão norteadora: **Quais problemas de outras ciências que podemos aplicar taxas relacionadas para resolvê-los e como generalizar a definição de derivada para funções de várias variáveis**? Intentamos, ainda, trazer como apêndice um diagrama que apresenta um algoritmo geral de resolução de problemas que envolvam grandezas relacionadas.

O trabalho está dividido em mais quatro capítulos capítulos. No segundo capítulo apresentamos os *resultados básicos do cálculo diferencial*, abordamos os conceitos principais da derivação. No terceiro, *taxas Relacionadas*, expomos uma aplicação da derivada de uma variável. No quarto, *terivadas como transformações lineares*, mostramos a generalização da derivada para funções de mais de uma variável e, além disso, fazemos algumas aplicações. Finalmente, no último capítulo, apresentamos as conclusões do trabalho ao respondermos a questão motivadora de nossa pesquisa.

Para que a leitura deste trabalho seja fluente, recomendamos que o leitor tenha familiaridade com os conceitos da Álgebra Linear, limite, continuidade e derivadas parciais. Referenciamos [7, 12, 13] para encontrá-los.

Capítulo 2

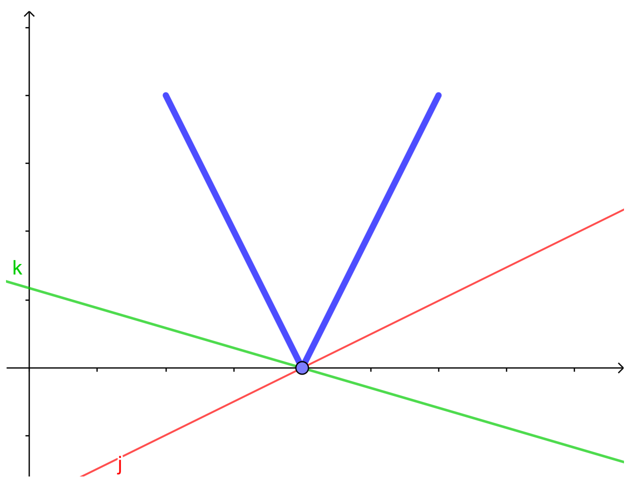
Resultados Básicos do Cálculo Diferencial

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos básicos do Cálculo Diferencial, necessários para que o leitor compreenda os demais capítulos. Utilizaremos [7, 8, 9] como referências bibliográfias.

2.1 Reta Tangente

O que seria reta tangente em um ponto de uma curva? Uma reta que passa apenas por este ponto? Como o leitor desenharia a reta tangente ao vértice da letra "V" abaixo? Seria a reta verde ou a reta vermelha? Nenhuma das duas?

Figura 2.1. Letra V

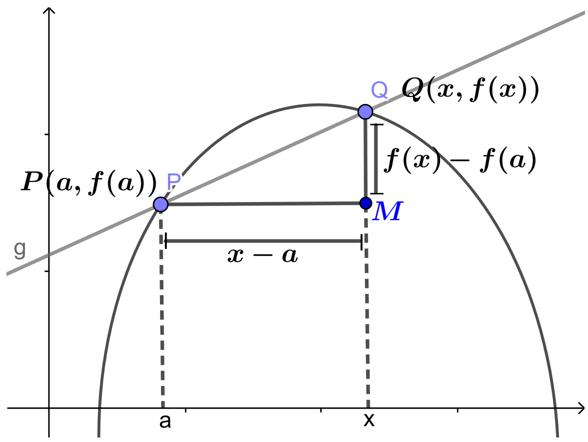


Fonte: Arquivo pessoal.

O problema da tangente deu origem ao cálculo diferencial. Esse problema foi muito discutido no século XVII por inúmeros matemáticos, dentre os quais destacamos Pierre Fermat $(1601-1665)$, que introduziu as primeiras ideias sobre o conceito, John Wallis $(1616-1703)$, Isaac Newton $(1642-1727)$, Isaac Barrow $(1630-1677)$, e Gottfried Leibniz $(1646-1716)$, que deram continuidade e solucionaram o problema da reta tangente. A seguir, tentaremos resolver esse problema e apresentar a definição formal de reta tangente.

Tentaremos agora resolver o problema da reta tangente b a uma curva de equação $y = f(x)$ no ponto $P(a, f(a))$. Para encontrarmos a equação da reta b, é preciso determinar sua inclinação m. Para isso, considere dois pontos $P(a, f(a))$ e $Q(x, f(x))$ sobre a curva, onde $Q \neq P$. Sabemos que dois pontos determinam uma única reta, podemos determinar a reta $\overline{PQ} = g$, que será secante ao gráfico de f, pois está sendo cortada em dois pontos da curva. Considere o ponto M como na figura abaixo. Com ele, forma-se um triângulo retângulo QMP. A variação no eixo y será $f(x) - f(a)$, e no eixo x corresponderá a $x - a$, como mostra na Figura 2.2.

Figura 2.2. Reta secante $\overline{PQ}$



Fonte: Arquivo pessoal.

Desse modo, podemos calcular a inclinação M_{PQ} da reta secante g. Temos

$$M_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{2.1}$$

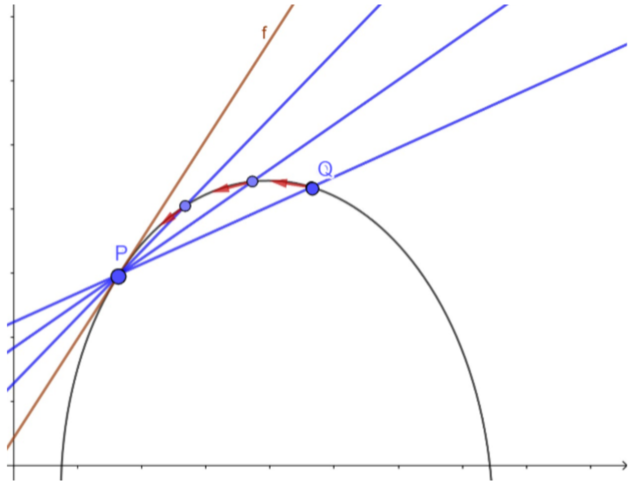
Fazendo o ponto Q tender ao ponto P, como mostra na Figura 2.3 (as retas azuis são as secantes, a reta vermelha é a possível tangente), vemos que a variação de $x - a$ tende a 0. Quando esse limite existir, definiremos a inclinação da reta chamada tangente.

A reta tangente será, portanto, a posição limite dessas retas secantes quando Q tende a P. Rigorosamente, sua inclinação será

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{2.2}$$

quando o limite existir. Outra maneira equivalente para representar a inclinação da reta tangente

Figura 2.3. Retas secantes se aproximando da reta tangente



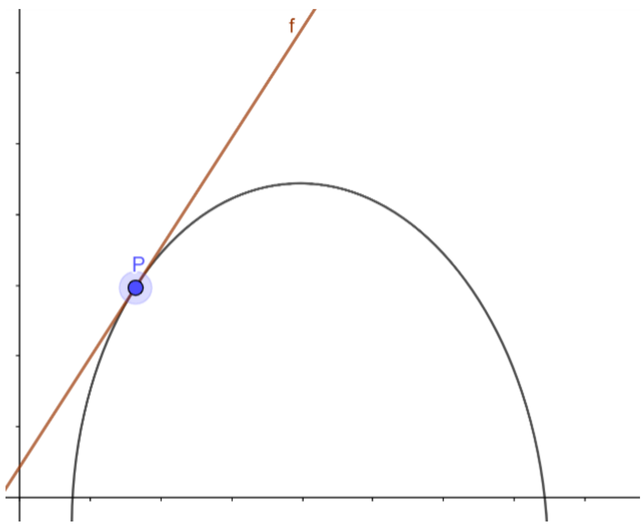
Fonte: Arquivo pessoal.

é fazer $h = x - a$, ou seja, $x = a + h$ e, como x tende a a, então h tende a 0. Assim,

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2.3}$$

quando o limite existir. Portanto, para que haja uma reta tangente a uma curva, devemos seguir o processo de encontrar a inclinação das retas secantes $\overline{PQ}$, averiguar se o limite do coeficiente angular existe e, se existir, podemos determinar a reta tangente, como mostra a Figura 2.4 abaixo.

Figura 2.4. Reta tangente



Fonte: Arquivo pessoal.

Definição 2.1. *A reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta por P que tem a inclinação*

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

caso o limite exista.

Para obter a equação da reta tangente, podemos utilizar a definição da equação ponto-inclinação da reta, pois ela associa a inclinação da reta, com as variações das distâncias de x e y. Assim,

$$y - f(a) \;=\; m(x - a), \tag{2.4}$$

onde m é a inclinação da reta.

Agora, faremos um exemplo sobre a reta tangente ao vértice da letra "V" da Figura 2.1.

Exemplo 2.2. Existe reta tangente ao vértice da letra "V", sabendo que a equação que define a letra é dada por $f(x) = |2x - 8|$ e as coordenadas do vértice são $P(4, 0)$?

Solução: Observe que temos uma função modular, ou seja, quando $h > 0$, teremos $|2(4 + h) - 8| = 2(4 + h) - 8$. Utilizando a Definição 2.1,

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{2(4+h) - 8 - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{8 + 2h - 8}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{2h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Quando $h < 0$, temos $|2x - 8| = -(2x - 8)$. Então,

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{-(2(4+h) - 8) - 0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0-} \frac{-8 - 2h - 8}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{-2h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} -2 \\ &= -2. \end{aligned}$$

Para que exista limite, os limites laterais devem ser iguais, como os limites laterais são diferentes, não existirá o limite da função em questão. Com isso, não há possibilidade de desenhar a reta tangente ao vértice da letra "V", pois ela não existe. Sendo assim, não existirá reta tangente em gráficso de funções em pontos que formam um "$bico$ $(quina)$".

Exemplo 2.3. Encontre a equação da reta tangente à parábola $y = x^2 + 1$ no ponto $P(2, 5)$.
Solução: Utilizando a Definição 2.1,

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 1 - (2^2 + 1)}{x - 2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 1 - 5}{x - 2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x\to 2} x + 2 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Utilizando agora a forma ponto-inclinação da reta pelo ponto $P(2, 5)$, temos

$$\begin{aligned} y - 5 &= 4(x - 2) \\ y - 5 &= 4x - 8 \\ y &= 4x - 8 + 5 \\ y &= 4x - 3. \end{aligned}$$

Então, a equação da reta tangente à parábola $y = x^2 + 1$ no ponto $P(2, 5)$ é $y = 4x - 3$.

Exemplo 2.4. Encontre a inclinação da reta tangente à função $y = x^3 - 3x + 4$ no ponto genérico $x = a$.

Solução: Utilizando a Definição 2.1,

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{((a+h)^3 - 3(a+h) + 4) - (a^3 - 3a + 4))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 3a - 3h + 4 - a^3 + 3a - 4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 3h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(3a^2 + 3ah + h^2 - 3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 3a^2 + 3ah + h^2 - 3 \\
&= 3a^2 - 3.
\end{aligned}$$

Com isso, a inclinação da reta tangente pedida é igual a $3a^2 - 3$.

2.2 Derivada

A demonstração de utilizar limite para determinar a reta tangente de uma curva condiz ao conceito de derivada. O conceito de derivada é um dos conceitos mais importantes do cálculo diferencial. Esse limite é utilizado para calcular a aceleração e velocidade, máximo e mínimo de uma função, taxa de variação de uma função, para avaliar a taxa de propagação de um vírus, na previsão do tempo, no custo de um produto e outras aplicações. Com isso, pode-se perceber a relevância que esse assunto tem a nos oferecer, visto que pode ser utilizado no nosso cotidiano e em diversas outras áreas.

Apesar de vermos esse conceito em várias disciplinas do curso de graduação, em geral, não vemos tantas aplicações, como o caso das taxas relacionadas, que será vista neste trabalho. Para isso, tentaremos mostrar ao leitor a importância dessa definição, pois a derivada será a base do nosso estudo, e como sua aplicação nas taxas relacionadas pode ser relevante para a construção de saberes. Mostraremos agora a definição da derivada como função.

Definição 2.5. *A derivada de uma função $y = f(x)$ no ponto $x = a$, indicada por $f'(a)$, é*

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

caso o limite exista. Outra forma semelhante de ser formulada a definição de derivada é

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

A notação $f'(x)$ tem um significado muito importante. Ela representa a derivada de $y = f(x)$ no ponto genérico x. A notação f' tem o mesmo significado, e essas notações foram produzidas por Newton. A notação d/dx simboliza a operação de diferenciação. Leibniz utilizou a definição de reta tangente para introduzir a notação dy/dx, que é chamada de quociente diferencial e que representa a derivada de y em relação a x (representa a taxa de variação de y em relação a x). Essas são as notações que representam a derivação:

$$f'(x) = y' = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = D(f)(x) = D_x f(x).$$

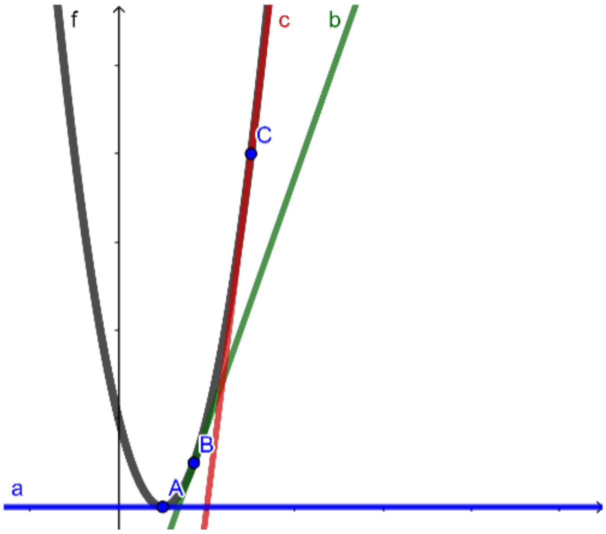
Aqui, utilizaremos apenas quatro primeiras notações. Então, observe que todos esses símbolos representam a mesmo conceito (o de derivação) e isso se deu pelo motivo de que Newton utilizou conceitos de física para estudar o cálculo diferencial, visto que estudava a fluxão como uma taxa de mudança ou velocidade. Já Leibniz tinha uma visão abstrata, pois estava mais voltado para filosofia. Utilizava os termos de diferenciais, sucedendo de pequenas adições nos fatores de x e y, e esses aumentos foram autodenominados como dx e dy, respectivamente. A seguir, faremos alguns exemplos utilizando a definição de derivada.

Exemplo 2.6. Encontre a derivada da função $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$.
Solução: Utilizando a Definição 2.5,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(2(x+h)^2 - 4(x+h) + 2) - (2x^2 - 4x + 2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(2(x^2 + 2xh + h^2) - 4x - 4h + 2) - 2x^2 + 4x - 2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 4x - 4h + 2 - 2x^2 + 4x - 2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{4xh + 2h^2 - 4h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(4x + 2h - 4)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 4x + 2h - 4 \\
&= 4x - 4.
\end{aligned}$$

Então, $f'(x) = 4x - 4$. Substituindo na função $f'(x)$ pelos valores 1, $\frac{5}{4}$ e 3, encontraremos $f'(1) = 0$, $f'(\frac{5}{4}) = 1$ e $f'(3) = 8$ e esses resultados representam a derivada no ponto específico, ou seja, o ponto onde se encontrará a reta tangente, como mostra a Figura 2.5. Veja que a reta tangente a simboliza a reta com inclinação $f'(1) = A$, a reta b com inclinação $f'(\frac{5}{4}) = B$ e a reta c com inclinação $f'(3) = C$.

Figura 2.5. Representação das retas tangentes da função



Fonte: Arquivo pessoal.

Exemplo 2.7. Derive $f(a) = \dfrac{2a}{a-1}$.
Solução: Utilizando a Definição 2.5,

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{2(a+h)}{a+h-1} - \dfrac{2a}{a-1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(2a+2h)(a-1) - 2a(a+h-1)}{(a+h-1)(a-1)} \cdot \frac{1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2a^2 - 2a + 2ah - 2h - 2a^2 - 2ah + 2a}{(a+h-1)(a-1)} \cdot \frac{1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{(a+h-1)(a-1)} \cdot \frac{1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2}{(a+h-1)(a-1)} \\
&= \frac{-2}{(a-1)(a-1)} \\
&= \frac{-2}{(a-1)^2}.
\end{aligned}$$

Então, $f'(a) = \dfrac{-2}{(a-1)^2}$.

Definição 2.8. *Uma função f é dita derivável (ou diferenciável) no ponto $x = a$ se $f'(a)$ existe. Uma função f é derivável (ou diferenciável) se f' existir em todo domínio da função f.*

No Exemplo 2.6, o domínio de f é o conjunto de todos os números reais, e $f'(x)$ vai existir para qualquer número real x. Com isso, f é uma função derivável.

Exemplo 2.9. Onde a função $f(x) = \sqrt{x+1}$ é diferenciável?
Solução: Vamos utilizar a Definição 2.5 para descobrimos se $f(x)$ é diferencial.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h}. \end{aligned}$$

Multiplicaremos $\left(\dfrac{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}}\right)$ na equação, iremos fazer isso para simplificar a raiz, assim

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h+1-(x+1)}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h+1-x-1)}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+0+1} + \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

Observe que $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ não é definida para $x < -1$. Então, não haverá derivada para os valores $x < -1$. Mas f será derivável em qualquer número, diferente desses valores. Portanto, f é derivável no intervalo aberto $(-1, \infty)$.

Pela relevância desse conceito, tanto neste trabalho quanto nas aplicações, é interessante estudarmos regras para encontrarmos a derivada de determinadas funções. A seção seguinte é concernente a isso.

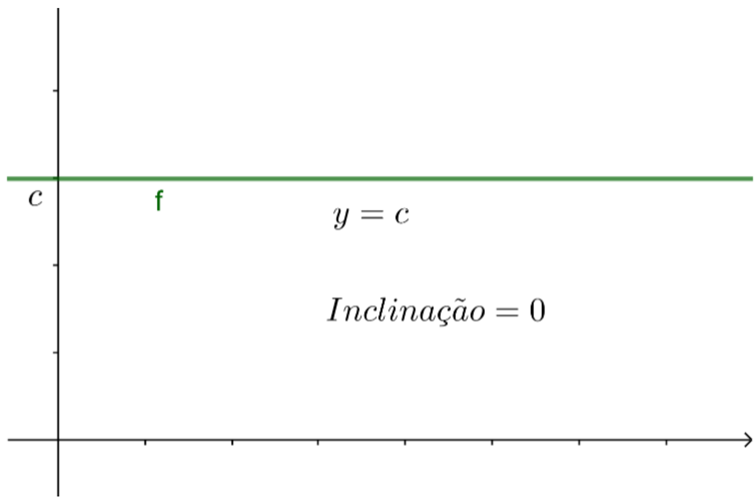
2.3 Regras de Derivação

A seguir, mostraremos como derivar funções constantes, funções potências, funções de multiplicadas por uma constante, funções de soma e diferença, funções de produto e quociente. Para demonstrar todas essas regras, utilizaremos a Definição 2.5.

Regra da Função Constante

Seja a função $f(x) = c$, onde c é uma constante. O gráfico dessa função é uma reta horizontal, como mostra na Figura 2.6. O seu coeficiente angular é igual a 0 e, assim, a sua derivada $f'(x) = 0$, pois, como vimos anteriormente, a derivada de uma função é a inclinação da reta tangente a uma curva e, como temos apenas uma reta horizontal, a reta tangente em qualquer ponto será a própria reta.

Figura 2.6. Função constante



Fonte: Arquivo pessoal.

Então, a regra da derivada de uma função constante é

$$\frac{d}{dx}c = 0.$$

Demonstração: Temos $f(x) = c$, então

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, a derivada de qualquer constante sempre será zero. □

Regra da Potência

Dada uma função potência $f(x) = x^n$, se n for um número inteiro positivo, então sua derivada é

$$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n-(x)^n}{h}. \end{aligned}$$

Utilizaremos o Teorema Binomial para desenvolver $(x+h)^n$, e obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + ... + nxh^{n-1} + h^n) - (x^n)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + ... + nxh^{n-1} + h^n)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + ... + nxh^{n-2} + h^{n-1})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + ... + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right) \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Assim, a derivada de $f(x) = x^n$ é $f'(x) = nx^{n-1}$. □

A regra da potência também é válida para números reais quaisquer (quando a função potência está bem definida). A saber, se n for um número real qualquer, temos

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}.$$

Regra da Multiplicação por uma Constante

Dada uma função $g(x) = cf(x)$, $c \in \mathbb{R}$, a sua derivada é dada, se f é uma função derivável, por

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x).$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c(f(x+h)-f(x))}{h} \\ &= c\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= cf'(x). \end{aligned}$$

Dessa forma, a derivada de $g(x) = cf(x)$ sempre será $g'(x) = cf'(x)$. □

Exemplo 2.10. Derive $\frac{d}{dx}5x^3$.
Solução:

$$\frac{d}{dx}5x^3 = 5\frac{d}{dx}x^3 = 5(3x^2) = 15x^2.$$

A derivada é $\frac{d}{dx}5x^3 = 15x^2$.

Regras da Soma e da Diferença

Dada uma soma de duas funções $f(x) = m(x) + n(x)$, para derivarmos essa função, apenas somamos as derivadas das funções $m'(x) + n'(x)$, sendo $m(x)$ e $n(x)$ deriváveis. Então,

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(m(x) + n(x)\right) = \frac{d}{dx}m(x) + \frac{d}{dx}n(x).$$

Demonstração: Temos, $f(x) = m(x) + n(x)$ e, assim,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{m(x+h) + n(x+h) - [m(x) + n(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{m(x+h) + n(x+h) - m(x) - n(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(m(x+h) - m(x)) + n(x+h) - n(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{m(x+h) - m(x)}{h} + \frac{n(x+h) - n(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{m(x+h) - m(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{n(x+h) - n(x)}{h} \\
&= m'(x) + n'(x).
\end{aligned}$$

□

Então, provamos a regra da soma. A regra da soma não se limita apenas a soma de duas funções. Ela se aplica à soma de qualquer número de funções.

A regra da diferença é semelhante à regra da soma, o que diferencia é que $n(x)$ será negativo. Assim, se $f(x) = m(x) + (-1)n(x)$, temos

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(m(x) - n(x)) = \frac{d}{dx} m(x) - \frac{d}{dx} n(x).$$

A demonstração da regra da diferença é equivalente à da regra da soma, apenas com a mudança de sinal em $n(x)$.

Exemplo 2.11. Determine $\frac{d}{dx}(2x^2 + 4x^6 - 8x + x - 3x^5 + 143)$.
Solução:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(2x^2 + 4x^6 - 8x + x - 3x^5 + 143) &= \frac{d}{dx}2x^2 + \frac{d}{dx}4x^6 - \frac{d}{dx}8x + \frac{d}{dx}x - \frac{d}{dx}3x^5 + \frac{d}{dx}143 \\
&= 2\frac{d}{dx}x^2 + 4\frac{d}{dx}x^6 - 8\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}x - 3\frac{d}{dx}x^5 + \frac{d}{dx}143 \\
&= 2(2x) + 4(6x^5) - 8(1) + 1 - 3(5x^4) + 0 \\
&= 4x + 24x^5 - 7 - 15x^4.
\end{aligned}$$

A derivada, portanto, é igual a $\frac{d}{dx}(2x^2 + 4x^6 - 8x + x - 3x^5 + 143) = 4x + 24x^5 - 7 - 15x^4$.

Observe que, no exemplo anterior, as regras da função constante, da potência e da multiplicação por uma constante foram relacionadas às regras da soma e da diferença.

Regra do Produto

A derivada de um produto de duas funções $k(x) = f(x) \cdot g(x)$ é dada pela segunda função $g(x)$ multiplicada pela derivada da primeira função $f'(x)$ somado à primeira função $f(x)$ multiplicada pela derivada da segunda função $g'(x)$. Isto é,

$$\frac{d}{dx}k(x) = \frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} k'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}. \end{aligned}$$

Somaremos o termo $\dfrac{g(x+h) \cdot f(x)}{h} - \dfrac{g(x+h) \cdot f(x)}{h}$ dentro do limite. Logo,

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} + \frac{g(x+h) \cdot f(x)}{h} - \frac{g(x+h) \cdot f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x) + g(x+h) \cdot f(x) - g(x+h) \cdot f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) \cdot (f(x+h) - f(x)) + f(x) \cdot (g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} g(x+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

Assim, a derivada de $k(x) = f(x) \cdot g(x)$ é igual à $k'(x) = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$. □

Exemplo 2.12. Determine a derivada de $k(x) = (x^2 + 2)(x^5 + 3)$.
Solução:

$$\begin{aligned} k'(x) &= (x^5 + 3) \cdot 2x + (x^2 + 2) \cdot 5x^4 \\ &= 2x^6 + 6x + 5x^6 + 10x^4 \\ &= 7x^6 + 10x^4 + 6x. \end{aligned}$$

Regra do Quociente

Dada uma função $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, a sua derivada é a função $g(x)$ multiplicada pela derivada da função $f(x)$ menos a função $f(x)$ multiplicada pela derivada da função $g(x)$ e tudo isso dividido pelo quadrado de $g(x)$. Em fórmula,

$$\frac{d}{dx}k(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Antes de demonstrarmos essa regra, relembramos que toda função g diferenciável no ponto $x = a$ é contínua nesse ponto. De fato, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(g(x)-g(a)) = \lim_{x\to a}\left[(g(x)-g(a))\cdot\frac{(x-a)}{(x-a)}\right] &= \lim_{x\to a}\left[\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right]\\ &= g'(a)\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$, o que mostra que g é contínua em a. Utilizaremos esse fato no que segue.

Demonstração: Temos $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Utilizando a Definição de derivada, obtemos

$$\begin{aligned}k'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)}\cdot\frac{1}{h}.\end{aligned}$$

Somaremos o termo $f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)$ dentro do limite para obter

$$\begin{aligned}&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{g(x+h)\cdot g(x)}\cdot\frac{1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)) - (f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x))}{g(x+h)\cdot g(x)}\cdot\frac{1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\dfrac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{h}\right) - \left(\dfrac{f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x}{h})\right)}{g(x+h)\cdot g(x)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\cdot\left(\dfrac{f(x+h)-f(x))}{h}\right) - f(x)\cdot\left(\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)}{g(x+h)\cdot g(x)}\\
&= \frac{\lim_{h\to 0} g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x+h)-f(x))}{h}\right) - \lim_{h\to 0} f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\left(\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)}{\lim_{h\to 0} g(x)\lim_{h\to 0} g(x+h)}\\
&= \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)\cdot g(x)}\\
&= \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}.\end{aligned}$$

$\square$

Demonstramos a regra do quociente e, para melhor compreensão, faremos alguns exemplos a seguir.

Exemplo 2.13. Seja $f(x) = \dfrac{3x^3 - 2x}{x^2+1}$, ache $f'(x)$.
Solução:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2+1)\cdot(9x^2-2)-(3x^3-2x)\cdot 4x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{9x^4-2x^2+9x^2-2-(12x^4-8x^2)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{9x^4-2x^2+9x^2-2-12x^4+8x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-3x^4+15x^2-2}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Portanto, a derivada de $f(x)$ é $f'(x) = \dfrac{-3x^4+15x^2-2}{(x^2+1)^2}$.

Exemplo 2.14. Derive $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x^4+x^2-1}{x+4}\right)$.
Solução:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{2x^4+x^2-1}{x+4}\right) &= \frac{(x+4)\cdot\frac{d}{dx}(2x^4+x^2-1)-(2x^4+x^2-1)\cdot\frac{d}{dx}(x+4)}{(x+4)^2} \\ &= \frac{(x+4)\cdot(\frac{d}{dx}2x^4+\frac{d}{dx}x^2-\frac{d}{dx}1)-(2x^4+x^2-1)\cdot(\frac{d}{dx}x+\frac{d}{dx}4)}{(x+4)^2} \\ &= \frac{(x+4)\cdot(2\frac{d}{dx}x^4+2x)-(2x^4+x^2-1)\cdot(1)}{(x+4)^2} \\ &= \frac{(x+4)\cdot(2\cdot(4x^3)+2x)-(2x^4+x^2-1)}{(x+4)^2} \\ &= \frac{(x+4)\cdot(8x^3+2x)-(2x^4+x^2-1)}{(x+4)^2} \\ &= \frac{8x^4+2x^2+32x^3+8x-2x^4-x^2+1}{(x+4)^2} \\ &= \frac{6x^4+32x^3+x^2+8x+1}{(x+4)^2}. \end{aligned}$$

Assim, a derivada $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x^4+x^2-1}{x+4}\right)$ é igual a $\dfrac{6x^4+32x^3+x^2+8x+1}{(x+4)^2}$.

Regra da Cadeia

Iremos iniciar com um exemplo para mostrar como seria derivar uma função composta sem a utilização da regra da cadeia e com a utilização da regra. Suponha que tenhamos que derivar uma função $y = (5x + 3)^3$. Como podemos proceder?

Primeiramente, podemos reescrever a função dada como $y = (5x+3)^2 \cdot (5x+3)$, e, em seguida, fazendo o produto notável de $(5x + 3)^2$, ou seja,

$$y = (25x^2 + 30x + 9) \cdot (5x + 3).$$

Fazendo agora a distributiva, obtemos

$$\begin{aligned} y &= 125x^3 + 150x^2 + 45x + 75x^2 + 90x + 27 \\ y &= 125x^3 + 225x^2 + 135x + 27. \end{aligned}$$

Agora, podemos derivar utilizando as regras já feitas e mostrar que

$$y' = 375x^2 + 450x + 135.$$

Se utilizarmos a regra da cadeia, podemos resolver da seguinte forma.

$$\begin{aligned} y &= (5x + 3)^3 \\ y' &= 3(5x + 3)^2 \cdot 5 \\ y' &= 15(25x^2 + 30x + 9) \\ y' &= 375x^2 + 450x + 135. \end{aligned}$$

Note que foi bem mais simples utilizar essa regra. Imagine ter que derivar uma função como $y = (6x - 4)^{70}$ sem a regra! Seria com certeza bem mais complicado. Portanto, a regra da cadeia é de grande relevância. Mostraremos agora a regra da cadeia em sua essência.

Se uma função g for derivável em x e a função f for derivável em $g(x)$, então a função composta $f \circ g$, definida por $F(x) = f(g(x))$, será derivável em x e F' será dada pelo produto

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Também pode ser escrita da seguinte forma.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Essa regra mostra que a notação Leibniz é útil, pois relaciona a notação de derivada com a notação frações.

Vimos que dy/dx presenta a derivada de y em relação a x, dy/du simboliza a taxa de variação de y em relação a u (a taxa de variação representa a derivada, veremos esse assunto na seção seguinte) e du/dx como a taxa de variação de u em relação a x. Realizaremos alguns exemplos para entendermos essa regra.

Exemplo 2.15. Seja a função $y = (6x-4)^{70}$, encontre y'.
Solução: Como a função é composta, podemos utilizar a regra da cadeia. Considere $f(x) = x^{70}$ e $g(x) = 6x - 4$, derivando essas funções, teremos

$$f'(x) = 70x^{69} \text{ e } g'(x) = 6.$$

Aplicando a regra dacadeia, obtemos

$$\begin{aligned} y' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= 70(6x-4)^{69} \cdot 6 \\ &= 420(6x-4)^{69}. \end{aligned}$$

Portanto, a derivada é $420(6x-4)^{69}$.

Exemplo 2.16. Encontre $H'(x)$ se $H(x) = \sqrt{8x^2+4}$.
Solução: Podemos reescrever a função $H(x) = (8x^2+4)^{\frac{1}{2}}$. Logo,

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \text{ e } g(x) = 8x^2 + 4.$$

Derivando essas funções

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \text{ e } g'(x) = 16x.$$

Como $H(x) = f(g(x))$, podemos utilizar a regra da cadeia para obter

$$\begin{aligned} H'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{2}(8x^2+4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 16x \\ &= \frac{8x}{\sqrt{8x^2+4}}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.17. Encontre $\dfrac{dy}{dx}\left(\left(\dfrac{1}{x-3}\right)^5\right)$.

Solução: Tomaremos $u = \dfrac{1}{x-3}$ e $y = u^5$, derivando as funções u e y, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx}\left(\frac{1}{x-3}\right) &= \frac{(x-3)\cdot\frac{du}{dx}1 - 1\cdot\frac{du}{dx}(x-3)}{(x-3)^2} \\
&= \frac{(x-3)\cdot 0 - 1\cdot 1}{(x-3)^2} \\
&= \frac{-1}{(x-3)^2} \\
\frac{dy}{du}u^5 &= 5u^4.
\end{aligned}$$

Agora, iremos aplicar a regra da cadeia e obter

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \\
&= 5u^4\cdot\left(\frac{-1}{(x-3)^2}\right).
\end{aligned}$$

Como $u = \dfrac{1}{x-3}$, iremos substituir no resultado. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 5\left(\frac{1}{x-3}\right)^4\cdot\left(\frac{-1}{(x-3)^2}\right) \\
&= \frac{1}{(x-3)^4}\cdot\left(\frac{-5}{(x-3)^2}\right) \\
&= \frac{-5}{(x-3)^6}.
\end{aligned}$$

Utilizando a definição de derivada, a Definição 2.2, podemos demonstrar as seguintes igualdades:

1. $\dfrac{d(sen(x))}{dx} = \cos(x)$;
2. $\dfrac{d(\cos(x))}{dx} = -sen(x)$;
3. $\dfrac{d(tg(x))}{dx} = sec^2(x)$;
4. $\dfrac{d(cotg(x))}{dx} = -cossec^2(x)$;
5. $\dfrac{d(sec(x))}{dx} = sec(x)\cdot tg(x)$;
6. $\dfrac{d(cossec(x))}{dx} = -cossec(x)\cdot cotg(x)$;

7. $\dfrac{d(ln(x))}{dx} = \dfrac{1}{x}$;

8. $\dfrac{d(log_a(x))}{dx} = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

2.4 Aproximação por derivadas

Exemplo 2.18. Encontre uma aproximação de $\sqrt[3]{7,8}$ utilizando o conceito de derivada.
Solução: Podemos utilizar o conceito de reta tangente, visto que a reta tangente é a melhor reta que se aproxima de uma função em torno de um ponto. Suponha que

$$g(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Derivaremos essa função, já que a derivada é a inclinação da reta tangente. Então,

$$g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Agora, substituiremos a função g' em um ponto próximo de $7,8$. Veja que 8 é consideravelmente próximo e, quando trocamos x por 8 na função g', encontraremos uma raiz exata, ou seja,

$$\begin{aligned} g'(8) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 4} \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Com isso, a inclinação da reta tangente que procuramos é $\dfrac{1}{12}$. Para obtermos a equação dessa reta, utilizaremos a equação (2.4). Veja que o ponto em questão é $P(8, 2)$ e, então,

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{1}{12}(x - 8) \\ y &= \frac{x - 8}{12} + 2 \\ y &= \frac{x - 8 + 24}{12} \\ y &= \frac{x + 16}{12}. \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta tangente é $y = \dfrac{x+16}{12}$. Para encontrar a aproximação de $\sqrt[3]{7,8}$ é só substituir x por $7,8$ nessa equação, obtendo

$$\begin{aligned} y &= \frac{7,8+16}{12} \\ y &\approx 1,983. \end{aligned}$$

Portanto, a aproximação é de $1,98333\ldots$. Precisamente, $\sqrt[3]{7,8} = 1,98319\ldots$. Note que, os valores são iguais até a terceira casa decimal, ou seja, encontramos uma boa aproximação, nesse sentido.

Exemplo 2.19. Utilize o conceito de derivada para determinar uma aproximação de sen $(0,8)$.
Solução: Considere a função

$$f(x) = \text{sen } x\ .$$

Derivaremos essa função, pois sabemos que a derivada é a inclinação da reta tangente, e a reta tangente é a única reta que melhor se aproxima da função em torno de um ponto. Assim,

$$f'(x) = \cos x.$$

Tentaremos encontrar agora um número que se aproxima de $0,8$. Note que $\dfrac{\pi}{4}$ está bem próximo. Então, substituiremos x por $\dfrac{\pi}{4}$, temos

$$\begin{aligned} f'(\frac{\pi}{4}) &= \cos\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Com isso, a inclinação é $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Também temos o ponto que passa a reta tangente, que é $P(\dfrac{\pi}{4}, \text{sen}\dfrac{\pi}{4}) = P(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$. Iremos fazer uma aproximação de π e $\sqrt{2}$, onde π é aproximadamente $3,14159\ldots$, aproximaremos para $3,14$. Já $\sqrt{2}$ é aproximadamente $1,41421...$, aproximaremos para $1,41$. Portanto, as coordenadas do ponto serão $P(\dfrac{3,14}{4}; \dfrac{1,41}{2}) = P(0,78; 0,70)$. Podemos, então, simplificar a inclinação da reta tangente para $0,70$. Utilizaremos, agora, a equação (2.4) para determinar a equação da reta tangente. Temos

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 0,70 &= 0,70(x - 0,78) \\ y &= 0,70x - 0,546 + 0,70 \\ y &= 0,70x + 0,154. \end{aligned}$$

Como queremos encontrar a aproximação de sen $(0,8)$, substituiremos x por $0,8$ e obteremos

$$\begin{aligned} y &= 0,70 \cdot 0,8 + 0,154 \\ y &= 0,56 + 0,154 \\ y &= 0,714. \end{aligned}$$

Portanto, a aproximação de sen $(0,8)$ é $0,714$. Note que o valor exato com seis casas decimais é igual a 0,717356.

Note que, esses dois exemplos evidenciam o quão boa é a aproximação da reta tangente a uma função em torno de um ponto específico.

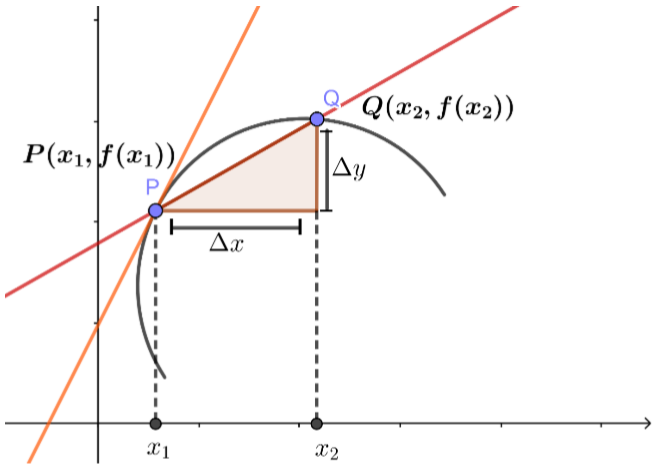
2.5 Derivada como taxa de variação

Seja $y = f(x)$ uma variável que depende de x. Se x muda de um valor para outro, essa incrementação pode ser expressa por $\Delta x = x_2 - x_1$, e a variação relacionada a y será $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. A divisão $\Delta y / \Delta x$ representa a taxa média de variação de y em relação a x. Logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{2.5}$$

Podemos compreender a taxa média de variação como a inclinação da reta secante PQ, como mostra a Figura 2.7.

Figura 2.7. Taxa Média e Instantânea de variação



Fonte: Arquivo pessoal.

Se movimentarmos o ponto Q em relação ao ponto P, x_2 tenderá cada vez mais a x_1, fazendo Δx tender a 0. Desse modo, se esse limite existir, encontramos a taxa instantânea da variação de y em relação a x, isto é, quanto naquele exato momento, y varia em relação a x. Com isso, a definição de taxa de variação instantânea condiz com o próprio conceito de derivada. Então,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \tag{2.6}$$

caso o limite exista. Observe que as taxas instantâneas são limites de taxas médias.

Exemplo 2.20. ([9],3.4-questão 25) Uma frente fria aproxima-se de uma região. A temperatura é T graus t horas após a meia-noite e $T = 0,1(400 - 40t + t^2)$, $0 \leq t \leq 12$.

$a)$ Ache a taxa de variação média de T em relação a t entre $5h$ e $6h$.

Solução: Observe-se que T depende de t, $6h$ é nosso valor final e $5h$ é o valor inicial. Como a alternativa está pedindo a taxa média, teremos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{\Delta t} &= \frac{T(6) - T(5)}{6 - 5} = \frac{0,1(400 - 40 \cdot 6 + 6^2) - 0,1(400 - 40 \cdot 5 + 5^2)}{1} \\ &= 0,1(400 - 240 + 36) - 0,1(400 - 200 + 25) = 40 - 24 + 3,6 - 40 + 20 - 2,5 \\ &= -2,9. \end{aligned}$$

Então, a taxa média é $-2,9$ graus por hora.

$b)$ Ache a taxa de variação de T em relação a t às $5h$.

Solução: Nessa alternativa, está pedindo a taxa instantânea. Inicialmente, ao simplificarmos a equação $T = 0,1(400 - 40t + t^2)$, teremos

$$T(t) = 40 - 4t + 0,1t^2.$$

Sabendo que a taxa instantânea é a derivada, então

$$T'(t) = -4 + 0,2t.$$

Substituindo t por 5, faremos essa substituição, pois queremos encontrar a taxa instantânea quando for $5h$ da manhã, obtemos

$$T'(5) = -4 + 0,2 \cdot 5 = -4 + 1 = -3.$$

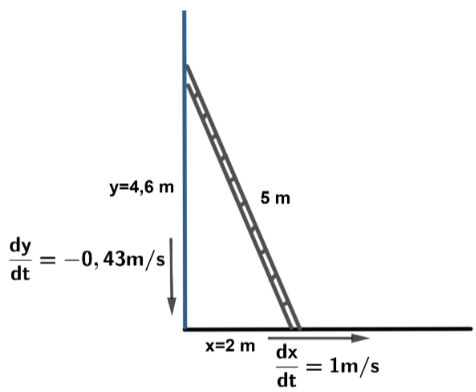
Assim, a taxa instantânea é -3 graus por hora.

Capítulo 3
Taxas Relacionadas

O que seriam “taxas relacionadas"? A frase em si é autoexplicativa: são taxas que se relacionam. Um exemplo é: Uma quantidade de óleo está vazando de um recipiente e está se espalhando em um padrão circular. Como o óleo está crescendo em um formato de um círculo, à medida que o tempo passa, o círculo se expande e, assim, o raio e a área estão crescendo, e suas taxas de crescimento estão se “relacionando”.

Outro exemplo é: Uma escada com 5 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. A base da escada desliza, afastando-se da parede a uma taxa de $1\ m/s$. Nesse exemplo, temos uma distância y, que corresponde ao vértice da parede até o topo da escada, e outra distância x, que equivale a distância da parede até a base da escada. Como a escada está deslizando, a distância y estará diminuindo e a distância x estará aumentando. Então, as taxas de variação em relação ao tempo de x e y estão se “relacionando", enquanto a escada desliza. Veja que a taxa de variação de x é uma taxa constante, enquanto a taxa de variação de y muda a cada metro por segundo. Quando a base da escada estiver a $2\ m$ da parede, o topo da escada estará escorregando para baixo a uma taxa de $-0,43\ m/s$, como mostra a Figura 3.1, a taxa de variação de y ser negativa significa que a distância do topo da escada ao solo está decrescendo.

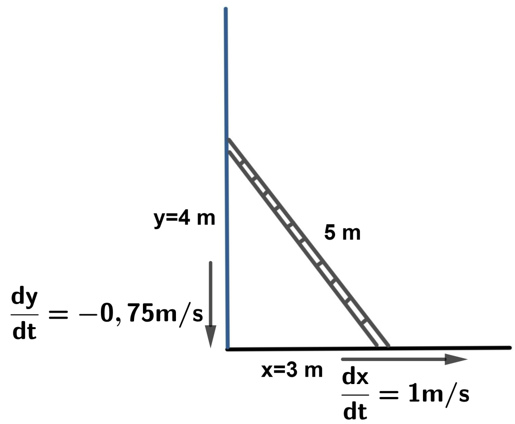
Figura 3.1. Escada apoiada em uma parede vertical, onde a base dista $2\ m$



Fonte: Arquivo pessoal

Note que, quando $x = 3$, o topo da escada desliza a uma taxa de $-0,75\ m/s$, se a distância x aumenta, isso implica que y diminua. Sendo assim, a taxa de y decresce mais rápido, ou seja, a velocidade do topo aumenta, como mostra a Figura 3.2.

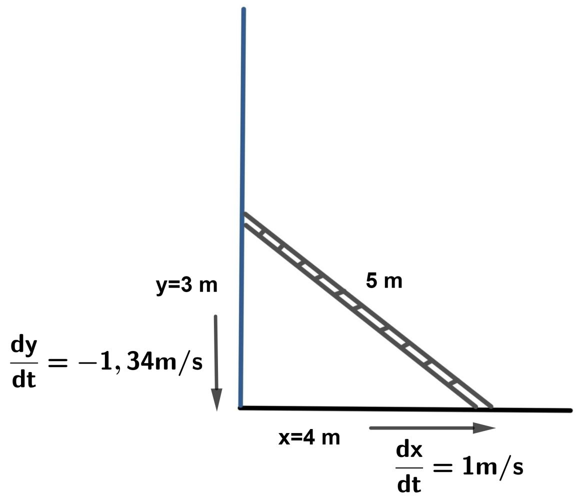
Figura 3.2. Escada apoiada em uma parede vertical, onde a base dista $3\ m$



Fonte: Arquivo pessoal

Veja, também, quando $x = 4$, o topo da escada desliza a uma taxa de $-1,34\ m/s$, como mostra a Figura 3.3 . Observe que a escada desliza mais rápido dessa vez, ou seja, as variações que estão acontecendo não são constantes. Se a distância x aumenta, isso implica que y diminui. Sendo assim, a taxa de variação de y decresce mais rápido à medida que a distância x aumenta (veja o Exemplo 3.1 que contém os detalhes dessa questão).

Figura 3.3. Escada apoiada em uma parede vertical, onde a base dista 4 m



Fonte: Arquivo pessoal

Vimos nesses exemplos duas grandezas se relacionando, mas podemos ter mais de duas grandezas se relacionando, como no seguinte exemplo: Em um tanque de água, com forma de um cone circular invertido, está sendo bombeado água para dentro. Como temos um cone, o volume, raio e altura estão crescendo, conforme a água entra no tanque. Assim, suas taxas de crescimento estarão se "relacionando"entre si.

Para resolver os problemas de taxas relacionadas, temos que determinar a taxa de variação de uma grandeza em termo da outra taxa de variação, ou seja, para encontrar uma taxa de variação de uma determinada grandeza, utilizaremos o resultado da taxa de variação da outra grandeza que está sendo relacionada. Seguiremos um processo para resolver esses problemas, em primeiro lugar, temos que encontrar uma equação que relacione as grandezas e, em seguida, utilizar a Regra da Cadeia para derivar os dois lados da equação em relação ao tempo (em relação à grandeza independente).

Os problemas que envolvem taxas relacionadas estão ligados fortemente a questões práticas, a problemas da realidade, em situações do dia a dia. Com isso, fica evidente a importância dessa aplicação da derivada. Podemos resolver problemas nas áreas da Geometria, Física, Engenharia, Biologia e de outras. A seguir, faremos vários exemplos de problemas sobre taxas relacionadas que envolvam essas áreas. Todos esses problemas nos fizeram desenvolver um tipo de algoritmo para facilitar, em um certo sentido, na resolução de problemas que envolvem taxas relacionadas. O leitor pode encontrar esse passo a passo no Apêndice deste trabalho.

Exemplo 3.1. (Exemplo adaptado de [7], 3,9-Exemplo 2) Uma escada com $5\ m$ de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada desliza, afastando-se da parede a uma taxa de $1\ m/s$, quão rápido o topo da escada está escorregando para baixo na parede quando a base da escada estiver a $2\ m$, a $3\ m$ e a $4\ m$ da parede?

Solução: Temos uma distância y, que corresponde à distância da base da parede até o topo da escada, e uma distância x, que equivale a distância da parede até a base da escada. **Primeiro caso:** quando a base está a $2\ m$, ou seja, quando $x = 2$. O que temos? Foram dados o comprimento da escada, que é $5\ m$, e $\frac{dx}{dt} = 1\ m/s$. Esta taxa de variação permanece constante em todo o percurso. O que queremos? Queremos encontrar $\frac{dy}{dt}$, que é a taxa de variação a qual o topo da escada está escorregando para baixo.

Observe que x e y estão se relacionando por uma equação que depende do tempo. Observe a Figura 3.1 e perceba que a equação que relaciona essas grandezas é o Teorema de Pitágoras, garantindo que

$$x^2 + y^2 = 5^2.$$

Utilizaremos a regra da cadeia para derivar ambos os lados dessa equação. Então,

$$\begin{aligned}\frac{d(x^2)}{dt} + \frac{d(y^2)}{dt} &= \frac{d(5^2)}{dt}\\ 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

Isolaremos dy/dt, pois queremos encontrá-lo, logo

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{-2x}{2y}\cdot\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{-x}{y}\cdot\frac{dx}{dt}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Temos os valores de x e dx/dt, mas não temos o valor de y. Porém, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras para descobrir este valor.

$$2^2 + y^2 = 5^2 \Rightarrow y^2 = 25 - 4 \Rightarrow y = \sqrt{21} \Rightarrow y \approx 4,6m.$$

Podemos substituir os valores na equação (3.1) e obter

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{-2}{4,6}\cdot 1\\ &\approx -0,43m/s.\end{aligned}$$

Quando $x = 2\ m$, a taxa de variação do topo da escada é $-0,43\ m/s$ escorregando para baixo.

Segundo caso: quando a base está a $3\ m$ da parede. Já encontramos a equação que relaciona as grandezas, com isso, substituiremos os valores de x, y e dx/dt na equação (3.1). Porém, os valores x e y não serão os mesmos. Temos, agora, $x = 3$, utilizaremos o Teorema de Pitágoras para achar o valor de y. Então,

$$3^2 + y^2 = 5^2 \Rightarrow y^2 = 25 - 9 \Rightarrow y = \sqrt{16} \Rightarrow y = 4m.$$

Substituindo $x = 3$ e $y = 4$ na equação (3.1). Logo,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{-3}{4}\cdot 1\\ &= -0,75m/s.\end{aligned}$$

Quando $x = 3\ m$, o topo da escada desliza a uma taxa de $-0,75\ m/s$, como mostra a Figura 3.2.

Terceiro caso: quando a base está a $4\ m$ da parede. Faremos o mesmo processo, agora,

$x = 4$. Usando o Teorema de Pitágoras, temos

$$4^2 + y^2 = 5^2 \Rightarrow y^2 = 25 - 16 \Rightarrow y = \sqrt{9} \Rightarrow y = 3m.$$

Substituindo $x = 4$ e $y = 3$ na equação (3.1), encontraremos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{-4}{3} \cdot 1 \\ &\approx -1,34m/s. \end{aligned}$$

Portanto, quando $x = 4$, o topo da escada desliza a uma taxa de $-1,34\ m/s$, como mostra a Figura 3.3. O motivo dessas taxas serem negativas mostra que a distância do topo da escada ao solo está decrescendo.

Exemplo 3.2. ([7], 3,9-Questão 3) Cada lado de um quadrado está aumentando a uma taxa de $6\ cm/s$. Com que taxa a área do quadrado está aumentando quando a área do quadrado for 16 cm^2?

Solução: De início, vamos identificar as informações que a questão nos dá. O que temos? O lado do quadrado está aumentando a uma taxa de $6\ cm/s$, então temos a variação do lado l e a área dadas por

$$\frac{dl}{dt} = 6\ cm/s \text{ e } A = 16\ cm^2.$$

O que queremos? Queremos saber a taxa de variação da área do quadrado, ou seja,

$$\frac{dA}{dt} =?.$$

Observe que o lado e a área estão se relacionando por uma equação. Então, essas são nossas taxas relacionadas e essas taxas estão em função do tempo. Agora, teremos que encontrar uma equação que relacione essas taxas. Com isso, podemos utilizar a equação da área do quadrado.

$$A = l^2.$$

Para usarmos o que temos na questão, é preciso derivar essa equação. Para isso, utilizaremos a regra da cadeia, pois a equação envolve função composta.

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{d(l^2)}{dt} \\ \frac{dA}{dt} &= 2l\frac{dl}{dt}. \end{aligned}$$

Como $A = 16\ cm^2$, utilizando a área do quadrado e lembrando que o lado é um número positivo, temos

$$A = l^2 \Rightarrow 16 = l^2 \Rightarrow l = 4.$$

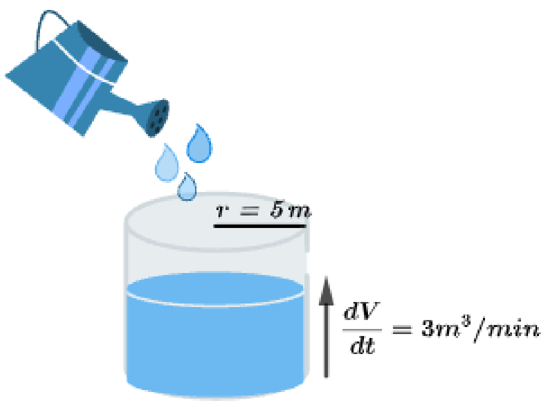
Podemos substituir os valores $\frac{dl}{dt} = 6\ cm/s$ e $l = 4$ e obter

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= 2l\frac{dl}{dt}\\ \frac{dA}{dt} &= 2 \cdot 4 \cdot 6\\ \frac{dA}{dt} &= 48cm^2/s.\end{aligned}$$

Com isso, a taxa de variação da área do quadrado é $48\ cm^2/s$.

Exemplo 3.3. ([7], 3,9-Questão 5) Um tanque cilíndrico com raio $5\ m$ está sendo enchido com água a uma taxa de $3\ m^3/min$. Quão rápido estará aumentando a altura da água?
Solução: O que temos? Foi-nos dado o raio, que é $r = 5\ m$, e dV/dt, que representa a taxa de variação do volume da água à medida que o tempo passa, como mostra na Figura 3.4.

Figura 3.4. Tanque cilíndrico



Fonte: Arquivo pessoal

O que queremos? Queremos encontrar a taxa de variação da altura, sendo representada por

$$\frac{dh}{dt} = ?.$$

As grandezas V e h estão se relacionando pela equação

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Sabemos que $r = 5$, então

$$V = \pi \cdot 25 \cdot h.$$

Iremos derivar cada lado em relação a t, teremos

$$\frac{dV}{dt} = \pi \cdot 25 \cdot \frac{dh}{dt}.$$

Teremos que colocar em evidência dh/dt, porque queremos encontrá-la. Assim,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi \cdot 25} \cdot \frac{dV}{dt}.$$

Substituindo $dV/dt = 3$, temos

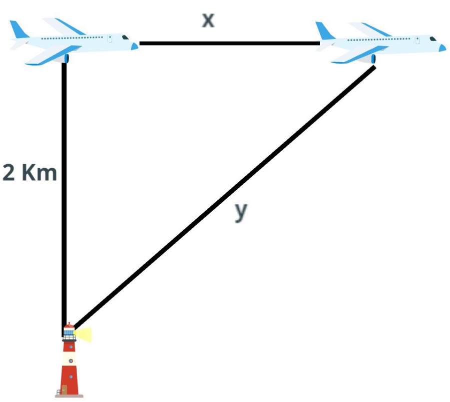
$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi \cdot 25} \cdot 3 \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{3}{\pi \cdot 25} \Rightarrow \frac{dh}{dt} \approx 0,04\ m/min.$$

Logo, a altura estará aumentando a uma taxa de $0,04\ m/min$.

Exemplo 3.4. ([7], 3,9-Questão 11) Um avião voa horizontalmente a uma altitude de $2\ km$, a $800\ km/h$, e passa diretamente sobre uma estação de radar. Encontre a taxa segundo a qual a distância entre o avião e a estação aumenta quando ele está a $3\ km$ além da estação.

Solução: Desenhamos a Figura 3.5, onde x é a distância do avião depois de $3\ km$, e y é a distância entre o avião e a estação.

Figura 3.5. Distância entre o avião e a estação



Fonte: Arquivo pessoal

O que temos? Quando o avião passa sobre o radar, ele está a $2\ km$ da estação. Temos a velocidade do avião, que será a taxa de variação de x em relação ao tempo, dada por $dx/dt = 800\ km/h$, e possuímos a distância entre o avião e a estação, que é $y = 3\ km$. O que queremos? Queremos encontrar dy/dt, pois é a taxa a qual a distância entre o avião e a estação estarão.

As variáveis x e y estão se relacionando, e a equação que as relaciona é dada pelo Teorema de Pitágoras, isto é,

$$y^2 = x^2 + 2^2.$$

Utilizaremos a regra da cadeia para derivar essa equação e obter

$$\begin{aligned}
\frac{d(y^2)}{dt} &= \frac{d(x^2)}{dt} + \frac{d(2^2)}{dt} \\
2y\frac{dy}{dt} &= 2x\frac{dx}{dt} \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{2x}{2y}\frac{dx}{dt} \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{x}{y}\frac{dx}{dt}. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Não podemos substituir os valores agora, pois não sabemos o valor de x. Porém, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras novamente para encontrá-lo. Sabemos que $y = 3$ e temos um lado, que vale 2 do triângulo retângulo da figura. Logo,

$$3^2 = x^2 + 2^2 \Rightarrow 9 = x^2 + 4 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}.$$

Dessa forma, podemos substituir os valores na equação (3.2). Temos $x = \sqrt{5}$, $y = 3$ e $dx/dt = 800$ e, assim,

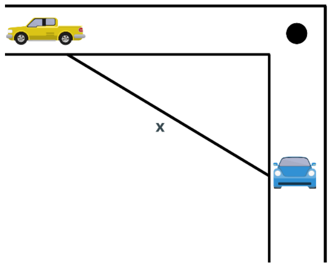
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot 800 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{800\sqrt{5}}{3}\ km/h.$$

A taxa de variação entre o avião e a estação é de $596\ km/h$ quando ambos estão a uma distância de $3\ km$.

Exemplo 3.5. ([7], 3,9-Questão 15) Dois carros iniciam o movimento partindo de um mesmo ponto. Um viaja para o sul a $30\ km/h$ e outro para oeste a $72\ km/h$. A que taxa está crescendo a distância entre os carros duas horas depois?

Solução: Ilustramos a Figura 3.6 , onde o ponto preto representa o ponto de partida dos dois carros. O carro azul que viaja para o sul será indico como s, o carro amarelo que viaja para o oeste será denotado como o. A distância x simboliza a distância entre os carros depois de duas horas.

Figura 3.6. Distância entre os carros



Fonte: Arquivo pessoal.

O que temos? Foi-nos dado a velocidade média dos carros s e o, que são denotadas por $ds/dt = 30\ km/h$ e $do/dt = 72\ km/h$, respectivamente. Por último, foi dado o tempo, sendo $t = 2\ h$. O que queremos? Queremos encontrar a taxa de variação da distância entre os dois carros duas horas depois, sendo representada por

$$\frac{dx}{dt} = ?$$

Perceba que as variáveis s, o e x estão se relacionando, e a equação que relaciona essas variáveis é

$$x^2 = o^2 + s^2.$$

Derivando cada lado em relação a t, obteremos

$$\begin{aligned} \frac{d(x^2)}{dt} &= \frac{d(o^2)}{dt} + \frac{d(s^2)}{dt} \\ 2x\frac{dx}{dt} &= 2o\frac{do}{dt} + 2s\frac{ds}{dt} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{o}{x}\frac{do}{dt} + \frac{s}{x}\frac{ds}{dt}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Veja que não foram dadas as distâncias x, s e o. Podemos utilizar a fórmula da velocidade média para encontrar a distância o e s. Sabemos o tempo é $t = 2\ h$ e as velocidades constantes $do/dt = 72\ km/h$ e $ds/dt = 30\ km/h$ e, assim,

$$Vm = \frac{\Delta S}{\Delta T} \Rightarrow 72 = \frac{\Delta S}{2} \Rightarrow \Delta S = 144km.$$

Portanto, $o = 144\ km$. De igual modo,

$$Vm = \frac{\Delta S}{\Delta T} \Rightarrow 30 = \frac{\Delta S}{2} \Rightarrow \Delta S = 60km.$$

Assim, $s = 60\ km$. Para encontrar x, utilizaremos o Teorema de Pitágoras, pois encontramos as distâncias o e s. Temos

$$x^2 = o^2 + s^2 \Rightarrow x^2 = 144^2 + 60^2 \Rightarrow x^2 = 24336 \Rightarrow x = \sqrt{24336} \Rightarrow x = 156.$$

Com isso, $x = 156\ km$. Agora, podemos substituir na equação 3.3 e obter

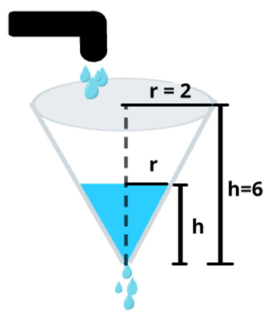
$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{o}{x}\frac{do}{dt} + \frac{s}{x}\frac{ds}{dt} \\
\frac{dx}{dt} &= \frac{144}{156} \cdot 72 + \frac{60}{156} \cdot 30 \\
\frac{dx}{dt} &\approx 66 + 12 \\
\frac{dx}{dt} &\approx 78km/h.
\end{aligned}$$

A taxa de variação da distância entre os dois carros duas horas depois é de $78\ km/h$.

Exemplo 3.6. ([7], 3,9-Questão 23) Está vazando água de um tanque cônico invertido a uma taxa de $10.000\ cm^3/min$. Ao mesmo tempo, está sendo bombeada água para dentro do tanque a uma taxa constante. O tanque tem $6\ m$ de altura e o diâmetro no topo é de $4\ m$. Se o nível da água estiver subindo a uma taxa de $20\ cm/min$ quando a altura da água for $2\ m$, encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada dentro do tanque.

Solução: O que temos? São dados a taxa do vazamento, que é de $10.000\ cm^3/min$, a altura $h = 6\ m$ e o diâmetro $d = 4\ m$. Sabendo que o raio é igual a $\frac{d}{2}$, sendo assim, $r = 2$. A taxa da altura da água é $20\ cm/min$, ou seja, $\left(\frac{dh}{dt} = 20m/min\right)$ quando $h = 2\ m$. O que queremos? Encontrar a taxa dV/dt de entrada da água. Para achar a taxa de entrada, temos que lembrar que está vazando água por minuto, como está sendo ilustrado na Figura 3.7. Então, teremos $\left(-10.000 + \frac{dV}{dt}\right)$ é a taxa de volume resultante de água no tanque.

Figura 3.7. Vazamento de água de um tanque cônico invertido



Fonte: Arquivo pessoal

A equação que relaciona as grandezas V, h e r é

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}. \tag{3.4}$$

O volume V está em função de r e h. É possível simplificar essa equação, colocando-a em termos apenas da variável h. Para simplificarmos, utilizaremos os triângulos semelhantes da seguinte forma.

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{6} \Rightarrow 6r = 2h \Rightarrow r = \frac{h}{3}.$$

Substituindo $r = \dfrac{h}{3}$ na fórmula, obtemos

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot h \\ V &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h^2}{9} \cdot h \\ V &= \frac{\pi \cdot h^3}{27}. \end{aligned}$$

Derivando os dois lados em relação a t,

$$\begin{gathered} \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{27} \cdot \frac{d(h^3)}{dt} \\ \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{27} \cdot 3h^2 \cdot \frac{dh}{dt} \\ \frac{dV}{dt} = \frac{\pi \cdot h^2}{9} \cdot \frac{dh}{dt}. \end{gathered}$$

Substituindo $\dfrac{dh}{dt} = 20\ cm/min$ e $h = 200\ cm$ (convertemos m para cm), logo

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\pi \cdot h^2}{9} \cdot \frac{dh}{dt} \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\pi \cdot 200^2}{9} \cdot 20 \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{800.000\pi}{9} \\ \frac{dV}{dt} &\approx 279.253 cm^3/min. \end{aligned}$$

A taxa dV/dt que encontramos agora é apenas a taxa de volume que a água entra no tanque. Temos ainda o vazamento que está acontecendo no mesmo instante. Para encontrar a taxa da entrada da água, temos

$$\begin{aligned} -10.000 cm^3/min + \frac{dV}{dt} &= 279.253 cm^3/min \\ \frac{dV}{dt} &= 279.253 cm^3/min + 10.000 cm^3/min \\ \frac{dV}{dt} &= 289.253 cm^3/min. \end{aligned}$$

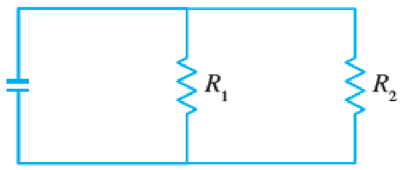
Assim, a taxa de entrada é de $289.253\ cm^3/min$.

Exemplo 3.7. ([7], 3,9-Questão 31) Se dois resistores com resistências R_1 e R_2 estão conectados em paralelo, como na Figura 3.8, então a resistência total R, medida em ohms (Ω), é dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \tag{3.5}$$

Se R_1 e R_2 estão crescendo a taxas de $0,3$ Ω/s e $0,2$ Ω/s, respectivamente, quão rápido estará variando R quando $R_1 = 80\Omega$ e $R_2 = 100\Omega$?

Figura 3.8. Resistores



Fonte: [7], p.229

Solução: O resistor R está em função de R_1 e R_2. Com isso, R, R_1 e R_2 estão se relacionando em função do tempo. Veja que já foi dada a equação que relaciona essas grandezas, então iremos derivar cada lado, pois a questão solicita a taxa de variação de R. Podemos redefinir a equação (3.5) da seguinte forma

$$R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}.$$

Utilizando a regra da cadeia para derivar, temos

$$\begin{aligned} \frac{d(R^{-1})}{dt} &= \frac{d(R_1^{-1})}{dt} + \frac{d(R_2^{-1})}{dt} \\ -R^{-2}\frac{dR}{dt} &= -R_1^{-2}\frac{dR_1}{dt} - R_2^{-2}\frac{dR_2}{dt}. \end{aligned}$$

Isolando a taxa de variação de R, chegamos a

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{dt} &= \frac{-R_1^{-2}\dfrac{dR_1}{dt} - R_2^{-2}\dfrac{dR_2}{dt}}{-R^{-2}} \\
\frac{dR}{dt} &= \frac{\dfrac{-1}{R_1^2}\dfrac{dR_1}{dt} + \dfrac{-1}{R_2^2}\dfrac{dR_2}{dt}}{\dfrac{-1}{R^2}} \\
\frac{dR}{dt} &= \left(\frac{-1}{R_1^2}\frac{dR_1}{dt} + \frac{-1}{R_2^2}\frac{dR_2}{dt}\right) \cdot -R^2 \\
\frac{dR}{dt} &= \frac{R^2}{R_1^2}\frac{dR_1}{dt} + \frac{R^2}{R_2^2}\frac{dR_2}{dt}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Foram dados os valores de $R_1 = 80\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $\dfrac{dR_1}{dt} = 0,3\ \Omega/s$ e $\dfrac{dR_2}{dt} = 0,2\ \Omega/s$. Mas não foi dado o valor de R. Apesar disso, podemos utilizar a equação (3.5) para encontrá-lo, pois temos os valores de R_1 e R_2. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\
\frac{1}{R} &= \frac{1}{80} + \frac{1}{100} \\
\frac{1}{R} &= \frac{100+80}{8000} \\
\frac{1}{R} &= \frac{180}{8000} \\
180R &= 8000 \\
R &= \frac{8000}{180} \\
R &\approx 44,5.
\end{aligned}$$

Assim, R é aproximadamente $44,5$. Agora, podemos substituir os valores que temos na equação (3.6) e obter

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{dt} &= \frac{44,5^2}{80^2} \cdot 0,3 + \frac{44,5^2}{100^2} \cdot 0,2 \\
\frac{dR}{dt} &= \frac{594,075}{6,400} + \frac{396,05}{10,000} \\
\frac{dR}{dt} &= 0,092824218 + 0,039606 \\
\frac{dR}{dt} &= 0,132429218 \\
\frac{dR}{dt} &\approx 0,13\Omega/s.
\end{aligned}$$

Com isso, a resistor R estará variando a uma taxa de $0,13\ \Omega/s$.

Exemplo 3.8. ([7], 3,9-Questão 34) Nos peixes, o peso B do cérebro como uma função do peso corporal W foi modelado pela função potência $B = 0,007W^{2/3}$, onde B e W são medidos em gramas. Um modelo para o peso corporal como uma função do comprimento corporal L (medido em centímetros) é $W = 0,12L^{2,53}$. Se, em 10 milhões de anos, o comprimento médio de uma certa espécie de peixes evoluiu de 15 cm para 20 cm a uma taxa constante, quão rápido estava crescendo o cérebro dessa espécie quando o comprimento médio era de 18 cm?
Solução: Quais as informações que a questão oferece? Foi dada a equação que relaciona o peso B do cérebro em função do peso corporal W, que é

$$B = 0,007W^{\frac{2}{3}}.$$

É dado também que W varia de acordo com a equação $W = 0,12L^{2,53}$, onde L é o comprimento corporal. Veja também que são dadas as informações da taxa de variação corporal e é dito que, em 10 milhões de anos, o comprimento médio dos peixes cresceu de 15 cm para 20 cm, a uma taxa constante. Então, temos

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{20-15}{10,000,000} \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{5}{10^7} cm/ano. \end{aligned}$$

Queremos encontrar a taxa de crescimento do cérebro do peixe quando o comprimento for de 18 cm, ou seja, $L = 18$. Como já é dada a equação que relaciona essas grandezas, derivaremos a equação em relação ao tempo para obtermos

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= \frac{d(0,007W^{\frac{2}{3}})}{dt} \\ \frac{dB}{dt} &= 0,007 \cdot \frac{2}{3} W^{\frac{-1}{3}} \cdot \frac{dW}{dt} \\ \frac{dB}{dt} &= \frac{0,014}{3} W^{\frac{-1}{3}} \cdot \frac{dW}{dt}. \end{aligned}$$

Substituindo $W = 0,12L^{2,53}$, teremos

$$\frac{dB}{dt} = \frac{0,014}{3} \cdot (0,12L^{2,53})^{\frac{-1}{3}} \cdot \frac{dW}{dt}. \tag{3.7}$$

Temos o valor de L, mas não possuímos a taxa de variação de W. Para encontramos essa taxa, podemos derivar a equação $W = 0,12L^{2,53}$ e obter

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{d(0,12 \cdot 2,53L^{1,53})}{dt} \\ \frac{dW}{dt} &= 0,3036L^{1,53} \cdot \frac{dL}{dt}. \end{aligned}$$

Agora, podemos substituir os valores de L, $\dfrac{dW}{dt}$ e $\dfrac{dL}{dt}$ na equação (3.7). Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{dB}{dt} &= \frac{0,014}{3} \cdot (0,12L^{2,53})^{\frac{-1}{3}} \cdot 0,3036L^{1,53} \cdot \frac{dL}{dt} \\
\frac{dB}{dt} &= \frac{0,014}{3} \cdot (0,12 \cdot (18)^{2,53})^{\frac{-1}{3}} \cdot (0,3036 \cdot (18)^{1,53}) \cdot \frac{5}{10^7} \\
\frac{dB}{dt} &= \frac{0,014}{3} \cdot 0,18 \cdot 25,29 \cdot \frac{5}{10^7} \\
\frac{dB}{dt} &= 1,06 \times 10^{-8}.
\end{aligned}
$$

Portanto, a taxa de crescimento do cérebro dessa espécie de peixe, quando o comprimento médio estiver a $18\ cm$, é de $1,06 \times 10^{-8} g/ano$.

Capítulo 4
Derivadas como Transformações Lineares

Vamos começar este capítulo com uma motivação. Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$. Vimos na Seção 2.2 do Capítulo 2 a definição de derivada, que é definida da seguinte forma:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Suponha que queiramos encontrar a derivada no ponto 3. Substituiremos a por 3, como mostra abaixo.

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}.$$

Podemos, também, utilizar as regras de derivação da Seção 2.3 do Capítulo 2 para determinar a derivada da função f e encontrar

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \\ f'(x) &= 3x^2 \\ f'(3) &= 3(3)^2 \\ f'(3) &= 27. \end{aligned}$$

Então,

$$27 = f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}.$$

Passaremos o número 27 para o outro lado da igualdade.

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\right)-27\\
\Leftrightarrow 0 &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\right)-\lim_{h\to 0}27\\
\Leftrightarrow 0 &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(3+h)-f(3)}{h}-27\right)\\
\Leftrightarrow 0 &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(3+h)-f(3)-27h}{h}\right). \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Note que, para todo $h \in \mathbb{R}$, $27h = f'(3)h$. Definindo $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $T(h) = 27h$, temos que T é uma transformação linear. Dessa forma, substituindo $27h$ por $T(h)$ na equação (4.1), segue que

$$0 = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)-T(h)}{h}.$$

Essa é a expressão que motiva a generalização da noção de derivada para funções vetoriais de várias variáveis. Ela nos diz que uma variação pequena da função f em torno de 3 é, essencialmente, uma transformação linear. Os Exemplos 2.18 e 2.19 mostram na prática esse fato.

Vejamos agora a definição formal da noção de derivada como transformação linear.

Definição 4.1. *Dizemos que $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $a \in I$ se existe uma transformação linear $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-T(h)}{h} = 0. \qquad (4.2)$$

Note que essa definição é equivalente à Definição 2.5.

Será que conseguimos estender essa nova definição para funções com mais de uma variável? Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 4.2. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$0 = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f\left((1,2)+(h_1,h_2)\right)-f(1,2)-T(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}},$$

onde $f(x,y) = 3x^2y$.

Solução: Vamos fazer este caso diretamente. Temos

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(1+h_1,2+h_2)-f(1,2)-T(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
\Leftrightarrow 0 &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{3(1+h_1)^2\cdot(2+h_2)-(3\cdot 1^2\cdot 2)-T(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
\Leftrightarrow 0 &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{3(1+2h_1+h_1^2)\cdot(2+h_2)-6-T(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
\Leftrightarrow 0 &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{3(2+h_2+4h_1+2h_1h_2+2h_1^2+h_1^2h_2)-6-T(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
\Leftrightarrow 0 &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{6+3h_2+12h_1+6h_1h_2+6h_1^2+3h_1^2h_2-6-T(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
\Leftrightarrow 0 &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{3h_2+12h_1+6h_1h_2+6h_1^2+3h_1^2h_2-T(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Iremos considerar $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ a transformação linear dada por $T(h_1,h_2)=12h_1+3h_2$. Portanto, faremos a substituição de $T(h_1,h_2)$ por $(12h_1+3h_2)$ na equação (4.3). Temos

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{3h_2+12h_1+6h_1h_2+6h_1^2+3h_1^2h_2-(12h_1+3h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
\Leftrightarrow 0 &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{3h_2+12h_1+6h_1h_2+6h_1^2+3h_1^2h_2-12h_1-3h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
\Leftrightarrow 0 &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{6h_1h_2+6h_1^2+3h_1^2h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
\Leftrightarrow 0 &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{6h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} + \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{6h_1^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} + \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{3h_1^2h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

caso tais limites existam. Utilizaremos o Teorema do Confronto para resolver esses limites. Faremos por partes. Veja que

$$\begin{aligned}
0 &\le \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|6h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|6h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2}} \\
0 &\le \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{6|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{6|h_1||h_2|}{|h_1|} \\
0 &\le \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{6|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} 6|h_2| \\
0 &\le \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{6|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le 0.
\end{aligned}$$

Com isso, $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \dfrac{6h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$. Seguiremos o mesmo processo para resolver o segundo limite, ou seja,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{6h_1^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{6h_1^2}{\sqrt{h_1^2}} \\
0 &\leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{6h_1^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{6|h_1|^2}{|h_1|} \\
0 &\leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{6h_1^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} 6|h_1| \\
0 &\leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{6h_1^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \dfrac{6h_1^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$. Agora,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{3h_1^2|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{3h_1^2|h_2|}{\sqrt{h_2^2}} \\
0 &\leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{3h_1^2|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{3|h_1|^2|h_2|}{|h_2|} \\
0 &\leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{3h_1^2|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} 3|h_1|^2 \\
0 &\leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{3h_1^2|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \dfrac{3h_1^2h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$. Substituindo esses resultados dos limites na equação (4.4), segue que a transformação linear $T(h_1,h_2) = 12h_1 + 3h_2$ satisfaz o limite dado inicialmente. Essa transformação linear será chamada em breve de derivada da função de duas variáveis f.

Então, respondendo a pergunta que foi feita antes do exemplo, pode-se perceber que existe uma forma de generalizar a noção de derivada clássica. O exemplo indica que é possível ter uma generalização do conceito de derivada e, de fato, essa generalização é dada pela seguinte definição.

Definição 4.3. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função. Dizemos que f é diferenciável no ponto a quando existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-T(h)}{\|h\|} = 0. \tag{4.5}$$

onde $\|h\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ é a norma euclidiana, que é um número real e simboliza a distância do vetor à origem. Em vários momentos, escreveremos $T = f'(a)$.

O limite em (4.5) quer dizer que, dado um número qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\dfrac{\|f(a+h) - f(a) - T(h)\|}{\|h\|} < \varepsilon$ sempre que $\|h\| < \delta$ (para detalhes, veja [11, Definição 1]).

Realizaremos agora um exemplo, onde determinaremos se a função $f(x,y) = (x^2y, y, y^2+x)$ é diferenciável.

Exemplo 4.4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $f(x,y) = (x^2y, y, y^2+x)$, e $a = (1,0) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que f é uma função diferenciável no ponto a.

Solução: Seguindo a Definição 4.5, precisamos encontrar uma transformação linear
$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ satisfazendo

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{f\left((1,0) + (h_1,h_2)\right) - f(1,0) - T(h)}{\|h\|} = 0.$$

Para isso, substituiremos $\|h\|$ por $\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$.

$$\begin{aligned}
& \lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(1+h_1,h_2) - f(1,0) - T(h)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \lim_{\|h\|\to 0} \frac{(1+h_1)^2 \cdot h_2, h_2, h_2^2 + 1 + h_1) - (0,0,1) - T(h)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \lim_{\|h\|\to 0} \frac{((1+2h_1+h_1^2) \cdot h_2, h_2, h_1 + h_2^2 + 1) - (0,0,1) - T(h)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \lim_{\|h\|\to 0} \frac{(h_2 + 2h_1h_2 + h_1^2h_2, h_2, h_1 + h_2^2 + 1) - (0,0,1) - T(h)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \lim_{\|h\|\to 0} \frac{(h_2 + 2h_1h_2 + h_1^2h_2, h_2, h_1 + h_2^2) - T(h)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.
\end{aligned}$$

Observe que a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(h_1,h_2) = (h_2,h_2,h_1)$ é linear (deixaremos a cargo do leitor essa prova - basta observar que cada componente é linear). Então,

$$\begin{aligned}
& \lim_{\|h\|\to 0} \frac{(h_2 + 2h_1h_2 + h_1^2h_2, h_2, h_1 + h_2^2) - (h_2,h_2,h_1)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \lim_{\|h\|\to 0} \frac{(h_2 + 2h_1h_2 + h_1^2h_2 - h_2, h_2 - h_2, h_1 + h_2^2 - h_1)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \lim_{\|h\|\to 0} \frac{(2h_1h_2 + h_1^2h_2, 0, h_2^2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \lim_{\|h\|\to 0} \frac{(2h_1h_2 + h_1^2h_2, 0, h_2^2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \lim_{\|h\|\to 0} \frac{2h_1h_2 + h_1^2h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} + \lim_{\|h\|\to 0} \frac{0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} + \frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0, \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

caso os limites existam. Aplicamos o Teorema do Confronto em cada limite. Temos

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\|h\|\to 0} \frac{|2h_1h_2 + h_1^2h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \lim_{\|h\|\to 0} \frac{|2h_1h_2 + h_1^2h_2|}{\sqrt{h_1^2}}\\
0 &\leq \lim_{\|h\|\to 0} \frac{2|h_1h_2 + h_1^2h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \lim_{\|h\|\to 0} \frac{2|h_1|\cdot|h_2| + |h_1|^2\cdot|h_2|}{|h_1|}\\
0 &\leq \lim_{\|h\|\to 0} \frac{2|h_1h_2 + h_1^2h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \lim_{\|h\|\to 0} (2|h_2| + |h_1|\cdot|h_2|)\\
0 &\leq \lim_{\|h\|\to 0} \frac{2|h_1h_2 + h_1^2h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, o primeiro limite é igual a 0. Agora, falta encontrar a última parcela da equação (4.6). Então, fazemos

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\|h\|\to 0} \frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \lim_{\|h\|\to 0} \frac{h_2^2}{\sqrt{h_2^2}}\\
0 &\leq \lim_{\|h\|\to 0} \frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \lim_{\|h\|\to 0} \frac{|h_2|^2}{|h_2^2|}\\
0 &\leq \lim_{\|h\|\to 0} \frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \lim_{\|h\|\to 0} \frac{|h_2|^2}{|h_2^2|}\\
0 &\leq \lim_{\|h\|\to 0} \frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \lim_{\|h\|\to 0} |h_2|\\
0 &\leq \lim_{\|h\|\to 0} \frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq 0.
\end{aligned}
$$

Ou seja, os limites da equação 4.6 são iguais a 0, o que mostra que, de fato, f é diferenciável, e a transformação linear dessa função é $T(h) = (h_2, h_2, h_1)$. Assim, $T(h)$ é a derivada da função f no ponto $a = (1, 0)$.

Sabe-se da Álgebra Linear que toda transformação linear (em espaços de dimensão finita) está associada a uma única (quando fixada uma base) matriz $[T]_{m\times n}$. Com isso, existe uma forma mais simples de encontrar as derivadas mais gerais. Como fizemos no Capítulo 2: mostramos na Seção 2.2 a definição formal de derivada e, na Seção 2.3, vimos que é possível derivar e obter a mesma usando as regras da derivação que simplificam demais os cálculos.

Então, quando uma função é diferenciável em um ponto, podemos calcular a derivada utilizando a definição de matriz jacobiana. Segue o teorema abaixo.

Teorema 4.5. *([10, Teorema 20.6]) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável no ponto $a \in \mathbb{R}^n$. Então, a derivada de f, como matriz, é exatamente dada pela matriz chamada de*

Jacobiana abaixo

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}_{m\times n}$$

A força do resultado anterior está tanto em explicitar a derivada da função estudada quanto mostrar que ela é única, exatamente igual à matriz Jacobiana.

Vamos fazer um exemplo utilizando esse teorema.

Exemplo 4.6. Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y,z) = \left(xyz, \dfrac{x}{y^2+1}\right)$. Encontre $g'(1,2,3) = T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Solução: Considere $g_1(x,y,z) = xyz$ e $g_2(x,y,z) = \dfrac{x}{y^2+1}$. A matriz Jacobiana em (x,y,z) é dada por

$$g'(x,y,z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

A derivada é, portanto,

$$g'(x,y,z) = \begin{bmatrix} yz & xz & xy \\ \dfrac{1}{y^2+1} & \dfrac{-2xy}{(y^2+1)^2} & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3},$$

e aplicando no ponto $a = (1,2,3)$, obtemos

$$g'(1,2,3) = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 & 1\cdot 3 & 1\cdot 2 \\ \dfrac{1}{2^2+1} & \dfrac{-2\cdot 1\cdot 2}{(2^2+1)^2} & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ \dfrac{1}{5} & \dfrac{-4}{25} & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

A matriz $g'(1,2,3)$ está associada à transformação linear dada por

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\to T(v) = g'(1,2,3)(v). \end{aligned}$$

Escrevendo $[v] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times 1}$, logo

$$T(v) = g'(1,2,3)\cdot[v] = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ \dfrac{1}{5} & \dfrac{-4}{25} & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times 1} = \left[6x+3y+2z, \frac{1}{5}x - \frac{4}{25}y\right].$$

Portanto, a derivada da função g no ponto $(1,2,3)$ é a transformação linear
$T(x,y,z) = (6x+3y+2z, \frac{1}{5}x - \frac{4}{25}y)$.

4.1 Aplicações

Exemplo 4.7. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $F(x,y) = \sqrt{x}$+sen$(xy) + x^2y$. Ache uma aproximação de $F(3,8;3,1)$.

Solução: No Capítulo 2, vimos a derivada como a inclinação da reta tangente, onde esta reta é a única reta que melhor se aproxima da função em torno de um ponto. Aqui, essa definição se aplica para as funções de várias variáveis. Nessa situação, a derivada possibilitará encontrar um "plano" tangente, e esse plano é o que melhor se aproxima da função dada em torno de um ponto específico. Derivando a função F, obtemos

$$F'(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \cos(xy)\cdot y + 2xy & \cos(xy)\cdot x + x^2 \end{bmatrix}_{1\times 2}.$$

Aplicaremos no ponto $P(4,\pi)$, pois o ponto P está bem próximo do ponto $(3,8;3,1)$. Logo,

$$F'(4,\pi) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{4}} + cos(4\pi)\cdot\pi + 24\cdot\pi & cos(4\pi)\cdot 4 + 4^2 \end{bmatrix}_{1\times 2} \approx \begin{bmatrix} 28,51 & 20 \end{bmatrix}_{1\times 2}.$$

Vimos que a matriz está associada à transformação linear, ou seja,

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 28,51 & 20 \end{bmatrix}_{1\times 2} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1} = [28,51x + 20y].$$

Mas esse ainda não é o plano que melhor se aproxima da função F em torno do ponto $(4,\pi,F(4,\pi))$. É apenas a derivada. Para encontrarmos esse plano $Q(x,y)$, fazemos como no caso de uma variável, nos perguntamos: qual o valor de $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$Q(x,y) = T(x,y) + A,$$

seja o plano que passe pelo ponto $B(4, \pi, F(4, \pi))$? Queremos que $Q(4, \pi) = F(4, \pi)$, isto é,

$$\begin{aligned}
& Q(4,\pi) = F(4,\pi) \\
\Leftrightarrow \quad & 28,51 \cdot 4 + 20 \cdot 3,14 + A = \sqrt{4} + sen(4\pi) + 4^2 \cdot 3,14 \\
\Leftrightarrow \quad & 114,04 + 62,8 + A = 2 + 0 + 50,24 \\
\Leftrightarrow \quad & 176,84 + A = 52,24 \\
\Leftrightarrow \quad & A = 52,24 - 176,84 \\
\Leftrightarrow \quad & A = -124,6.
\end{aligned}$$

Assim, o plano procurado é

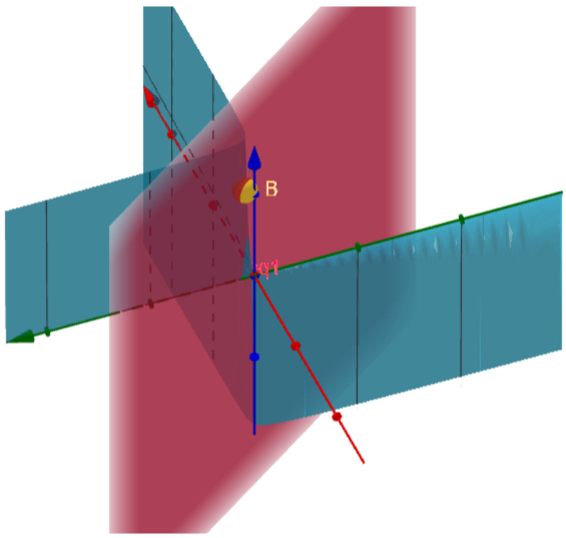
$$Q(x, y) = 28,51x + 20y - 124,6.$$

Logo, o valor aproximado de $F(3,8; 3,1)$ é

$$\begin{aligned}
F(3,8;3,1) \approx Q(3,8;3,1) &= 28,51 \cdot 3,8 + 20 \cdot 3,1 - 124,6 \\
&= 108,34 + 62 - 124,6 \\
&= 45,74.
\end{aligned}$$

Note que o valor exato com cinco casas decimais é igual a 46.00556.... A figura a seguir mostra o gráfico da função F, o gráfico Q e o ponto $B(4, \pi, F(4, \pi))$.

Figura 4.1. Representação das funções F, Q e do ponto A



Fonte: Arquivo pessoal.

Exemplo 4.8. Considere $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = y \ln(x^2 + 1) + \dfrac{y^2}{x^2 + 1}$. Encontre uma aproximação de $g(0,1;1,9)$.

Solução: A matriz Jacobiana de g é dada por

$$g'(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{2xy}{x^2+1} - \dfrac{2xy^2}{(x^2+1)^2} & \ln(x^2+1) + \dfrac{2y(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \end{bmatrix}_{1\times 2}.$$

O ponto que está próximo de $(0,1;1,9)$ é o ponto $(0,2)$. Com isso, substituiremos esses valores nas coordenadas x e y. Então,

$$g'(0,2) = \begin{bmatrix} \dfrac{2\cdot 0\cdot 2}{0^2+1} - \dfrac{2\cdot 0\cdot 2^2}{(0^2+1)^2} & \ln(0^2+1) + \dfrac{2\cdot 2(0^2+1)}{(0^2+1)^2} \end{bmatrix}_{1\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}_{1\times 2}.$$

Associando a matriz à transformação linear, temos

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}_{1\times 2} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1} = [0\cdot x + 4y] = [4y].$$

Aqui, a aplicação linear $T(x,y) = 4y$ é apenas nossa derivada. Com isso, temos que encontrar um número $A \in \mathbb{R}$ tal que $Q(x,y) = T(x,y) + A$ seja o plano que passe pelo ponto $C(0,2,g(0,2))$, onde esse plano será o melhor plano que se aproxima da função g em torno do ponto C, isto é,

$$T(0,2) + A = g(0,2) \Leftrightarrow 4\cdot 2 + A = 2\cdot \ln(0^2+1) + \frac{2^2}{0^2+1} \Leftrightarrow 8 + A = 4 \Leftrightarrow A = -4.$$

Então, A é igual a -4. Com esse valor, achamos a equação que melhor se aproxima da função g em torno do ponto $(0,2,g(0,2))$, e então

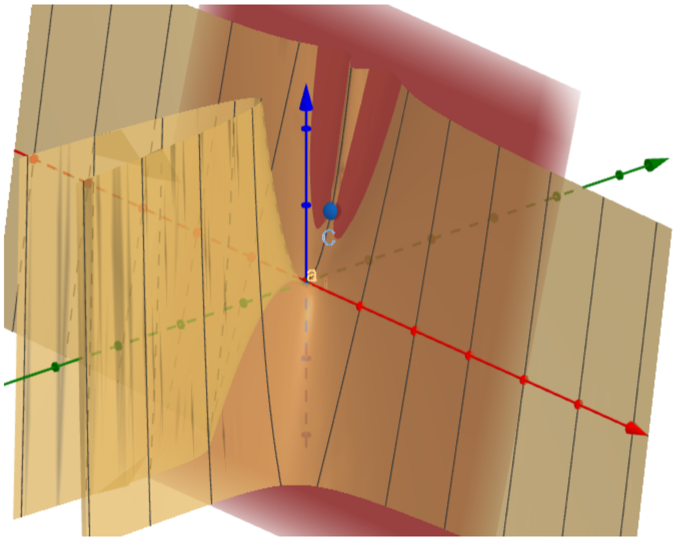
$$Q(x,y) = 4y - 4. \tag{4.7}$$

Agora, para encontrar a aproximação $g(0,1;1,9)$, substituiremos esse ponto na equação (4.7), ou seja,

$$g(0,1;1,9) = Q(0,1;1,9) = 4\cdot 1.9 - 4 = 3,6.$$

Com isso, a aproximação de $g(0,1;1,9)$ é $3,6$. Precisamente $g(0,1;1,9)$ é $3.59316\ldots$, veja o quão boa foi a aproximação que encontramos. A Figura 4.2 mostra o gráfico da função F, o gráfico Q e o ponto $C(0,2,F(0,2))$.

Figura 4.2. Representação das funções e do ponto



Fonte: Arquivo pessoal.

Capítulo 5
Considerações Finais

Durante este trabalho, intencionamos expor a derivada de funções de uma variável, aplicando o conceito em taxas relacionadas, e apresentar uma generalização de derivada para funções de várias variáveis. Para tal fim, apresentamos os conceitos fundamentais da derivação, aplicamos a derivada para funções de uma variável, aproximando valores sem usar a calculadora, e foi possível elaborar um apêndice que contém um diagrama que traz um algoritmo geral de resolução de problemas voltados para taxas relacionadas.

Nossa pesquisa se qualifica como exploratória. Para a obtenção dos dados, utilizamos a pesquisa bibliográfica e qualitativa. Com isso, tentamos responder a pergunta norteadora: Quais problemas de outras ciências que podemos aplicar taxas relacionadas para resolvê-los e como generalizar a definição de derivada para funções de várias variáveis?

Mostramos que as taxas relacionadas podem ser utilizadas na Física, como o problema dos resistores, na Geometria, como o caso do tanque que está vazando água e na Biologia, quando determinamos a taxa de crescimento do cérebro de peixes. Observamos a relevância que essa aplicação possui, pois foi possível relacionar conteúdos da Física com a Geometria, como o exemplo dos carros que estão se distanciando de um ponto. Com isso, percebemos a relação entre as ciências, ou seja, a interdisciplinaridade neste trabalho ficou evidente.

Quanto à generalização da derivada, vimos que a derivada de funções de mais de uma variável é uma transformação linear e que podemos associar a transformação linear a uma matriz, onde essa matriz é a matriz Jacobiana. Dessa forma, foi possível encontrar aproximações de funções em torno de um ponto, utilizando essa nova definição. Essas aproximações foram possíveis, pois, com a derivada de da função estudada, encontramos o plano "tangente", que é o único plano mehor se aproxima de uma função em torno do ponto específico.

Como trabalhos futuros, é possível estender a noção de derivada para espaços mais gerais do que os espaços euclidianos considerados neste trabalho. Nós não fizemos isso, pois foge do objetivo proposto. Além do mais, este trabalho servirá como base para alunos de Cálculo I, para aplicações dos conceitos do cálculo como derivada e uma possível pesquisa aprofundada sobre o conceito de derivação mais geral.

Referências

[1] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5ª ed. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas,SP: Editora da Unicamp, 2011.

[2] MAOR, Eli. **e**: A história de um número. 5ª ed. Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro,RJ: record, 2008.

[3] SILVA, Eliseu do Nascimento. **Uma Introdução ao Estudo das Derivadas no Ensino Médio**. Dissertação(Mestrado em Matemática)-Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Mossoró,RN: p.59, 2016.

[4] MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. São Paulo: Atlas, 2003.

[5] GOTTFRIED LEIBNIZ.In: **WIKIPEDIA:** a enciclopédia livre. Wikimedia, 2021. Disponível em:<https://pt.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz>. Acesso em: 08 mar. 2021.

[6] ISAAC NEWTON. In: **WIKIPEDIA:** a enciclopédia livre. Wikimedia, 2021. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton>. Acesso em: 08 mar. 2021.

[7] STEWARTS, James. **Cálculo**: volume 1. 6ª ed. Tradução técnica Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins ; revisão técnica Helena Castro. São Paulo : Cengage Learning, 2009.

[8] THOMAS, George B.**Cálculo.**. 11ª. Ed. São Paulo: Addison-Wesley, 2009.

[9] LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3ª Edição. v. 1. São Paulo: Editora HARBRA, 1994.

[10] BARTLE, Robert G.. **The Elements of Real Analysis**. Illinois,EUA: Department of Mathematics, 1964.

[11] STEWARTS, James. **Cálculo**:volume 2. 7ª ed. Tradução EZ2 Translate. São Paulo : Cengage Learning, 2013.

[12] BIANCHINI, Waldecir.**Aprendendo Cálculo de Várias Variáveis**. ed. re. 2021.Rio de Janeiro, RJ:[s.n], 2021. Disponível em:<http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo2/calculo2.pdf>. Acesso em :22 jul. 2021.

[13] BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra Linear**. 3ª edição. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1980.

Apêndice

Aqui, elaboramos um diagrama que visa dar o passo a passo de uma resolução de problemas que envolvem taxas relacionadas. Claro que, à medida que o leitor se exercita resolvendo questões, esses passos se tornam automáticos.

Figura 5.1. Passo a passo para resolver questões de taxas relacionadas