UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

SUED BRANDÃO DE AQUINO

APROXIMAÇÕES DE FUNÇÕES USANDO DERIVAÇÃO

ARAGUAÍNA
2021

SUED BRANDÃO DE AQUINO

APROXIMAÇÕES DE FUNÇÕES USANDO DERIVAÇÃO

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientadora: Profa. Dra. Samara Leandro Matos da Silva.

ARAGUAÍNA
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

A657a Aquino, Sued Brandão de.

Aproximações de funções usando derivação. / Sued Brandão de Aquino. – Araguaína, TO, 2021.

46 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2021.

Orientadora : Samara Leandro Matos da Silva

1. Cálculo. 2. Aproximação. 3. Derivada. 4. Diferencial. I. Título

CDD 510

SUED BRANDÃO DE AQUINO

APROXIMAÇÕES DE FUNÇÕES USANDO DERIVAÇÃO

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientadora: Profa. Dra. Samara Leandro Matos da Silva.

Aprovado em: 15 / 12 / 2021 .

BANCA EXAMINADORA

Samara L. Matos da Silva
Profa. Dra. Samara Leandro Matos da Silva (orientadora)

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior

Fernanda Vital de Paula
Profa. Dra. Fernanda Vital de Paula

Aos meus pais, por nunca terem medido esforços para me proporcionar um ensino de qualidade durante todo o meu período escolar.

AGRADECIMENTOS

O caminho até aqui por mim percorrido foi cheio de dúvidas e incertezas. Mas, por mais torto que tenha sido o meu caminho, nunca me arrependerei de todos os conhecimentos que adquiri e das pessoas que conheci. Sem dúvida, este capítulo da minha vida ficou marcado. Logo, só tenho a agradecer.

Aos meus amigos e colegas de curso Pedro Darc, Adrielly Lopes, Raielly Lima, Sinara Pereira, Kemile Djanaru, Thiago Lymer, Pedro Junior, Mateus Silva, Marcela Maia, e aos demais que me incentivaram e que certamente tiveram impacto na minha formação acadêmica.

Aos meus mestres Jamur Andre Venturin, Adriano Fonseca, Deive Barbosa Alves, Fernanda Vital de Paula, Raimundo Cavalcante, Silvia Regina, Liliane Rodrigues, Jose Carlos e todos os outros. Em especial, a minha professora e orientadora Samara Leandro por aceitar e me ajudar da melhor forma possível a construir esse trabalho.

Minha família que sempre esteve presente me apoiando e me ajudando durante todo esse caminho. Em específico, nada disso teria sido possível sem a presença da minha magnífica mãe, que tornou isso tudo possível, me consolando nos momentos difíceis e me auxiliando a tomar as melhores decisões.

Aos meus amigos e amigas de fora da faculdade, em especial à Maisa Carvalho e Thauane Silva, que estão me acompanhando desde antes do inicio da construção desse trabalho acadêmico, sempre me ajudando e apoiando de diversas formas.

A Deus por sempre se manter presente na minha vida e na vida de todas as pessoas que eu amo, cuidando, abençoando, sendo para mim um melhor amigo eterno. E por ter me levado a conhecer pessoas extraordinárias durante esse curso.

Quero agradecer ao meu irmão de outra mãe e melhor amigo Adrian Leite Rodrigues, que não está mais entre nós, por sempre ter me amado, cuidado de mim, e sempre desejado o melhor para mim.

Enfim, sou infinitamente grato por todas as experiências e encontros que tive. A vocês, meu muito obrigado!

Oh! Tempo, pare, pois vós sois tão lindo.

Sued B. Aquino

RESUMO

A presente pesquisa trata-se de um estudo sobre aproximações de funções usando os métodos de derivações, visto que, durante o ensino de cálculo nos deparamos com diversas funções com fórmulas complexas que se tornam problemáticas por necessitarem de uma atenção maior. Por isso, objetificamos revisar conceitos indispensáveis do cálculo como limite e reta tangente, tendo em vista a compreensão do conceito e do uso da derivada de uma função para encontrar expressões e valores aproximados dessas funções em determinados valores. A metodologia adotada baseia-se em uma pesquisa quantitativa totalmente bibliográfica, revisando livros, artigos acadêmicos e notas de aula. Constatou-se que os conceitos de diferenciais podem ser desenvolvidos afim de encontrar valores aproximados de raízes que se assemelham fortemente aos seus reais valores. Em paralelo, é visto que a derivada de uma função em determinado ponto traz estimativas arbitrariamente boas, e que quanto menor for os parâmetros escolhidos menor será o erro. Além disso, abordando o mesmo conceito, os polinômios de Taylor nos mostram que é possível uma aproximação ainda maior dos valores de uma função por meio da derivação.

Palavras-chave: Cálculo. Aproximação. Derivada. Diferencial.

ABSTRACT

The present research is a study about function approximations using derivation methods, since, during the teaching of calculus, we come across several functions with complex formulas that become problematic because they need more attention. Therefore, we aim to review essential concepts of calculus such as limit and tangent line, with a view to understanding the concept and the use of the derivative of a function to find expressions and approximate values of these functions in certain values. The methodology adopted is based on a fully bibliographic quantitative research, reviewing books, academic articles and lecture notes. It was found that the concepts of differentials can be developed in order to find approximate values of roots that strongly resemble their real values. In parallel, it is seen that the derivative of a function at a given point brings arbitrarily good estimates, and that the smaller the chosen parameters, the smaller the error. Furthermore, approaching the same concept, Taylor polynomials show us that an even closer approximation of the values of a function through derivation is possible.

Keywords: Calculation. Approximation. Derivative. Differential.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A palavra *Cálculo*, original do *latim calculus*, remete a pedregulho e relembra os costumes de fazer operações matemáticas em pedras. O *Cálculo* como conhecemos hoje é um ramo da matemática, construído (ou descoberto?) por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz no século XVII. Dentre os principais problemas matemáticos daquela época, estava a determinação da reta tangente a uma curva em um dado ponto (ANTON et al., 2014). Não há dúvidas que este estudo foi o propulsor que originou o conceito foco dos estudos deste trabalho: a diferencial de uma função. Uma vez que a reta tangente pode ser usada como uma aproximação, a diferencial se torna essencial.

Na base do cálculo estão diferenciação e integração, que têm como propósito estudar situações e aplicações em diversas áreas como física, economia, química, engenharia, estatística e outras. Neste trabalho apresentamos a técnica de aproximação usando a primeira base do cálculo, a diferenciação. Base esta que estuda e estimula conceitos sobre a derivada, que está relacionada com a taxa de variação e a reta tangente. Em paralelo, iremos abordar o estudo de derivadas sobre às funções não lineares. Esta escolha foi feita, visto que algumas dessas funções exibem formas e desenvolvimentos complexos, que exigem uma compreensão maior. Outro ponto é que, para essas funções não lineares, como por exemplo a função raiz, na maioria das vezes é evitado os cálculos manuais e são procuradas soluções em ferramentas tecnológicas, causando assim uma dependência. Destacamos que não focaremos em resoluções por métodos tecnológicos, usaremos estas somente como artifício de comparação de resultados. Este distanciamento da tecnologia, será feito com o intuito de evidenciar esse método de aproximação de função, e não ficarmos dependentes da tecnologia, pois como Albert Einstein disse “O espírito humano precisa prevalecer sobre a tecnologia”.

Além disso, a radiciação é uma operação matemática abordada na educação básica, e lá seu desenvolvimento é superficial, é mostrado apenas exemplos de raízes perfeitas, enquanto isso o cálculo das demais raízes fica vedado dos estudantes, e assim eles crescem sem saber que é possível encontrar respostas para uma raiz não perfeita sem o uso da calculadora, usando o procedimento de aproximação. Já na educação superior, durante a disciplina de cálculo 1 (que é quando geralmente se inicia o estudo de derivada), esses conceitos de aproximações são brevemente explicados.

Por conta disso, objetificamos encontrar valores aproximados para as, abandonadas, imperfeitas raízes, usando os processos de diferenciais e derivação, e em paralelo, pretendemos encontrar funções arbitrariamente aproximadas para às funções ditas abstratas. Ademais, outro objetivo desse trabalho é dar atenção a essa parte do cálculo sobre aproximações, que é pouco explorada, mas que dispõe de estudos importantíssimos, com alta relevância em várias áreas.

Com base nos pontos mencionados é feito uma pesquisa teórica quantitativa, revisando livros, artigos e notas de aulas da área das exatas, tencionando para a construção e elaboração de um meio para alcançar os objetivos desse trabalho. Importante mencionar que, com o intuito de descomplicar a formatação textual desta dissertação e dos caracteres matemáticos, usamos o *software TeXstudio* que possui um sistema de composição tipográfica de qualidade *LaTex*.

Visto que, o cálculo em sua composição constantemente relaciona os conceitos da álgebra e da geometria, no estudo das aproximações, também lançamos mão do *software GeoGebra* que possui algumas funções que ligam as áreas da álgebra e geometria e construímos todos os gráficos presentes nas figuras.

Isto posto, os capítulos desse trabalho se completam. O segundo capítulo vai apresentar conceitos fundamentais do cálculo 1 onde se formam as primeiras ideias de diferenciação, que são elementares, uma vez que é destas bases que se ramifica outras subdivisões do cálculo. Este recorte é construído com a finalidade de criar uma base necessária para o entendimento do terceiro capítulo. Este que vai mostrar o foco do trabalho, as aproximações de funções, formando conceitos como linearização e diferenciais, e por fim, exemplificando aplicações do uso da derivação e diferenciais para as estimações. Ressaltamos ainda que para a clara compreensão desta parte deste trabalho, será necessário um domínio em conceitos básicos como: teoria de séries; e equações ordinárias diferenciais (EDO).

Outrossim, destaca-se que este trabalho se fundamenta, além do interesse próprio do pesquisador, como também pela relevância da citação deste ramo da matemática, e pela importância teórica que trará aos professores e estudantes no campo acadêmico, em paralelo contribui para o entendimento e compreensão de outros pesquisadores da área de exatas.

Capítulo 2

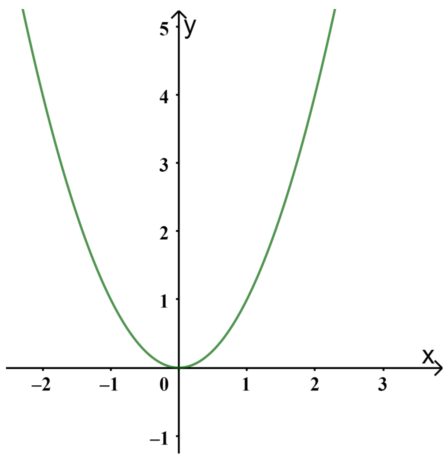
Limite e Derivada

Neste capítulo faremos um resgate teórico sobre os conceitos que abrangem limite e derivada com o objetivo de produzir uma base para o estudo do terceiro capítulo. Com este propósito, redigiremos este capítulo tendo como referências Stewart (2010), Munem e Foulis (1982) e Alves et al. (2010).

2.1 Limite

Iniciamos nossos estudos sobre limites observando função $f(x) = x^2$, que possui gráfico presente na Figura 2.1.

Figura 2.1: Função $f(x) = x^2$.



Fonte: Arquivo próprio.

Observando a Figura 2.1, consideremos os valores aos redores de $x = 2$, ou seja, quando x está próximo de 2. Dito isso, observe a tabela 2.1, que mostra os resultados de $f(x)$ para os valores mais próximos de x, pela sua esquerda.

Tabela 2.1: Valores de $f(x)$ pela esquerda de x.

x	$f(x)$
1,5	2,25
1,9	3,61
1,99	3,9601
1,999	3,996001

Fonte: Arquivo próprio.

Notemos que, ao lançarmos valores para x mais próximos de 2, os respectivos valores de $f(x)$ se aproximam de 4. Continuando, vejamos a tabela 2.2, que mostra os valores de x pela sua direita.

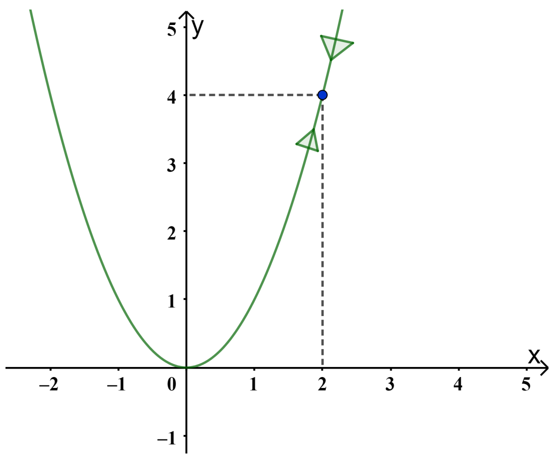
Tabela 2.2: Valores de $f(x)$ pela direita de x.

x	$f(x)$
2,5	6,25
2,1	4,41
2,01	4,0401
2,001	4,004001

Fonte: Arquivo próprio.

Novamente, reparemos que ao darmos valores de x mais próximos de 2, os valores de $f(x)$ vão se aproximando de 4. Com o objetivo de uma melhor visualização desse limite de valores, observamos a Figura 2.2, que apresenta o gráfico construído com base nas tabelas 2.1, e 2.2:

Figura 2.2: Função $f(x) = x^2$, para $x = 2$.



Fonte: Arquivo próprio.

Das Tabelas 2.1, 2.2 e da Figura 2.2, percebemos que, quanto mais x se aproxima de 2 tanto pela sua esquerda quanto pela sua direita, $f(x)$ se aproxima de 4. De fato, temos a noção de que os valores de $f(x)$ podem chegar arbitrariamente perto de 4, basta aproximarmos consideravelmente x de 2. Neste caso, dizemos o limite de $f(x)$ quando x tende a 2, é igual a 4, e escrevemos:

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

Definição 2.1. *Seja f uma função definida em algum intervalo aberto, contendo a, exceto possivelmente no próprio a, dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é L, e escrevemos:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L. \tag{2.1}$$

Se, fazendo x suficientemente próximo pela esquerda e direita de a, logo, os valores de $f(x)$ serão, arbitrariamente, próximos de L.

Exemplo 2.2. *Conjecture o valor de* $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+1}{2}$.

Solução:

Primeiramente, vamos construir as tabelas com os valores de $f(x)$ pela sua esquerda e direita.

Tabela 2.3: Valores de $f(x)$ pela esquerda de x.

x	$f(x)$
2,5	3,625
2,9	4,705
2,99	4,97005
2,999	4,997001

Fonte: Arquivo próprio.

Tabela 2.4: Valores de $f(x)$ pela direita de x.

x	$f(x)$
3,5	6,625
3,1	5,305
3,01	5,03005
3,001	5,003001

Fonte: Arquivo próprio.

Com base nos valores que as tabelas 2.3 e 2.4, nos proporcionaram, podemos sugerir que

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2+1}{2} = 5.$$

2.1.1 Definição formal de Limite

Vimos que podemos determinar o limite de uma certa função, quando tendenciamos valores pelas laterais de um a qualquer. Essas aproximações são chamadas de Limites laterais. Assim, nas tabelas 2.1, 2.3, denominamos **Limite lateral a esquerda**, e pelas tabelas 2.2, 2.4, nomeamos **Limite lateral a direita**. Exemplos de notação:

Limite lateral à esquerda, tabela 2.1:

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4.$$

Limite lateral a direita, tabela 2.2:

$$\lim_{x \to 2^+} x^2 = 4.$$

Desta maneira, o limite vai existir somente se os seus respectivos limites laterais tenderem para o mesmo valor. Caso os limites laterais tenderem para valores diferentes, dizemos que esse limite não existe.

Teorema 2.3. *Seja f uma função definida em algum intervalo aberto, contendo a, exceto possivelmente no próprio a, dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é L, e escrevemos:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Se, e somente se, os limites laterais a esquerda e a direita existirem, isto é:

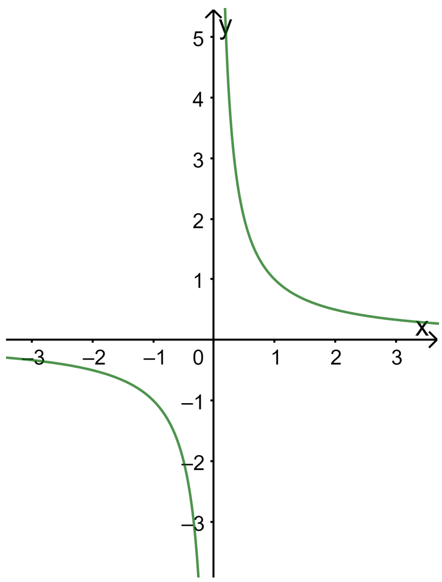
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L. \tag{2.2}$$

Exemplo 2.4. *Seja $f(x) = \frac{1}{x}$ encontre o limite de $f(x)$ quando x tender a 0.*

Solução:

Antes de tudo, construímos o gráfico de $f(x)$.

Figura 2.3: Função $f(x) = \frac{1}{x}$.



Fonte: Arquivo próprio.

Agora observamos que ao aproximarmos x pela esquerda de 0 teremos $-\infty$, ou seja.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Em paralelo, ao aproximarmos x pela direita de 0, conseguiremos $+\infty$. Então.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}.$$

Logo, o limite de $f(x)$ quando x tende a 0, não existe.

Na seção 2.1 introduzimos uma definição de limite intuitiva, porém essa definição é inadequada para alguns usos. Pensando de forma mais apropriada, temos a definição precisa de limite.

Definição 2.5. *Seja f uma função definida em algum intervalo aberto, contendo a, exceto possivelmente no próprio a, dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é L, e escrevemos:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

se para todo número $\epsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x-a| < \delta$ *então* $|f(x) - L| < \epsilon$

2.1.2 Propriedades do Limite

Até esse ponto apenas exemplificamos o resultado de um limite com o auxílio de gráficos e tabelas. Nesta seção, apresentaremos uma série de *Propriedades do Limite*, que normalmente são usadas para o encontrá-lo.

Seja $c \in R$, considere $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, onde L, M são números reais quaisquer, portanto:

1. $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M$.
2. $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L - M$.
3. Sendo c uma constante qualquer, logo $\lim_{x\to a} c = c$.

   E, $\lim_{x\to a} [cf(x)] = c[\lim_{x\to a} f(x)] = cL$.
4. $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)] \cdot [\lim_{x\to a} g(x)] = L \cdot M$.
5. Sendo $g(x) \neq 0$, logo $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$, com $M \neq 0$.

6. Sendo n um inteiro positivo qualquer, logo $\lim_{x\to a}\ [f(x)]^n = [\lim_{x\to a}\ f(x)]^n = L^n$.
   E, $\lim_{x\to a}\ \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a}\ f(x)} = \sqrt[n]{L}$.

Essas propriedades são básicas e algumas podem ser provadas por indução (1, 2 e 4). Para aqueles que procuram a prova de algumas dessas propriedades, sugerimos a leitura da referência [3].

Exemplo 2.6. *Vamos usar a maior parte das propriedades do limite para encontrar o*

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{5x^3+2x}{x^2-3}}.$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{5x^3+2x}{x^2-3}} &= \sqrt{\lim_{x\to 2}\ \frac{5x^3+2x}{x^2-3}}\\
&= \sqrt{\frac{\lim_{x\to 2}\ (5x^3+2x)}{\lim_{x\to 2}\ (x^2-3)}}\\
&= \sqrt{\frac{5[\lim_{x\to 2}\ (x^3)]+2[\lim_{x\to 2}(x)]}{\lim_{x\to 2}\ (x^2)-\lim_{x\to 2}(3)}}\\
&= \sqrt{\frac{5\cdot(2^3)+2\cdot(2)}{(2^2)-(3)}}\\
&= \sqrt{\frac{44}{1}}\\
&= \sqrt{44}.
\end{aligned}$$

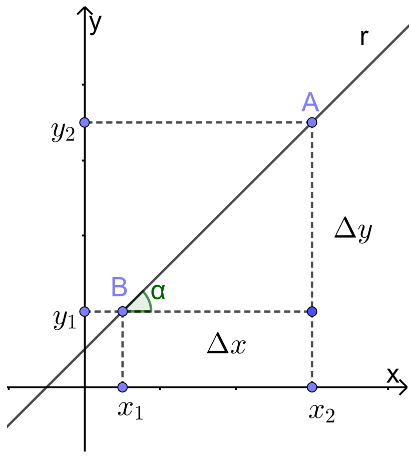
2.2 Variação da Reta tangente

Antes de falarmos sobre derivada, precisamos citar alguns conceitos prévios, que são essenciais para o entendimento e compreensão do significado de derivada.

2.2.1 Taxa de variação

O primeiro ponto a ser tratado é a taxa de variação, que pode ser entendida como o coeficiente angular de uma reta, ou seja, o declive de uma reta em relação ao eixo das abscissas de um plano cartesiano. Com o objetivo de entender esse conceito visualmente, vamos considerar o ponto (x_1, y_1) e o ponto (x_2, y_2) na função apresentada na Figura 2.4. Note que ao caminhar sobre a reta da direita para esquerda, isso remete na variação do eixo y, designada por $\Delta y = y_2 - y_1$, e da mesma forma, a variação no eixo x, $\Delta x = x_2 - x_1$.

Figura 2.4: Função $f(x) = x + \frac{1}{2}$.



Fonte: Arquivo próprio.

O coeficiente angular de uma reta não vertical, que passa pelos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), é representado pela letra m, e é definido como a tangente de α , ou seja:

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ com } x_1 \neq x_2 \tag{2.3}$$

Exemplo 2.7. *Vamos encontrar a taxa de variação da reta da Figura 2.4. Para isso, precisamos considerar dois pontos pertencentes a reta, desse modo, consideremos os pontos* $A(0.5, 1)$, $B(3, 3.5)$*. Agora joguemos na equação (2.3) e manipulemos:*

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3,5 - 1}{3 - 0,5} = \frac{2,5}{2,5} = 1.$$

Em paralelo é importante lembrar que quando temos uma equação do tipo $ax + b = 0$, a variável a será o coeficiente angular da função. Ou seja, a taxa de variação da função dada em 2.4, é 1.

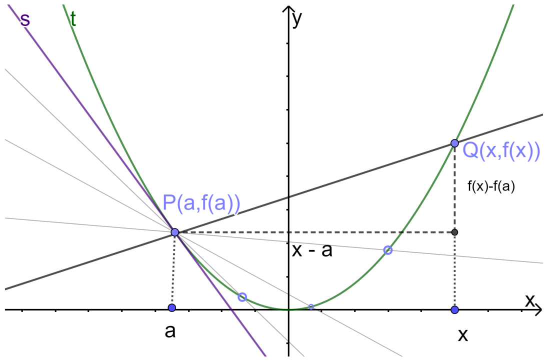
2.2.2 Reta tangente

Outro ponto necessário antes de chegarmos a derivada é a reta tangente. A palavra *tangente* vem do latim *tangens*, que significa tocando (Stewart, 2010). Logo, quando citamos *a reta tangente*, nos referimos a reta que toca algo.

Outrora, dizia-se que reta tangente a um círculo era aquela que o tocava sem cortá-lo. Porém essa confirmação não é adequada para outras curvas.

Deste modo, observe a Figura 2.5 onde o gráfico apresenta geometricamente a definição de reta tangente por meio intuitivo de limite. Considere os pontos $P(a, f(a))$, $Q(x, f(x))$, sendo $a \neq x$, construindo a reta secante PQ que passa por dois pontos da curva t.

Figura 2.5: Reta tangente, a posição limite da reta secante.



Fonte: Arquivo próprio.

Agora calculemos o coeficiente angular dessa secante, usando a equação (2.3):

$$m_{PQ} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{2.4}$$

Tendo isso em mente, e com o objetivo de encontrar a reta tangente no ponto P, vamos investigar o coeficiente angular da reta secante quando Q se aproxima de P, fazendo x tender a a. Caso m_{PQ} tender a um número m o tomamos como o coeficiente angular da reta tangente que passa por P e consideramos a reta tangente como a posição limite da reta secante.

Definição 2.8. *Definimos como reta tangente, a reta que passa pela curva $y = f(x)$ em um ponto P(a,f(a)) e possui o coeficiente angular igual a:*

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{2.5}$$

caso esse limite exista.

Exemplo 2.9. *Vamos considerar a função $f(x) = x^2$ da Figura 2.1. Encontre a equação da reta tangente à curva de f quando $a = \frac{1}{2}$.*

Solução: Primeiramente, calculamos $f(a)$, quando $a = \frac{1}{2}$.

$$f(a) = a^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Agora, reescrevemos a equação (2.5), com os respectivos valores:

$$m = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})}{(x - \frac{1}{2})} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Sendo assim, torna-se necessário construirmos a equação da reta, cujo forma deriva da fórmula do coeficiente angular m (2.3). Uma vez que precisamos isolar Δy, temos:

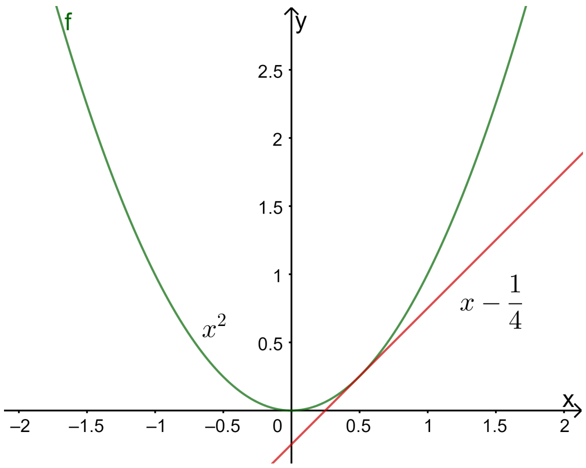
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1). \tag{2.6}$$

Lembrando que $y = f(x)$, logo, reescrevemos a fórmula final da equação (2.6), com os dados que conseguimos. Deste modo:

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \Rightarrow f(x) - f(a) = m(x - a)$$
$$\Rightarrow f(x) - \frac{1}{4} = 1\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = x - \frac{1}{4}.$$

Então, encontramos a equação da reta tangente à curva da função $f(x) = x^2$ quando $a = \frac{1}{2}$.

Figura 2.6: Tangente da função $f(x) = x^2$ no ponto $\frac{1}{2}$.



Fonte: Arquivo próprio.

A Figura 2.6 mostra a reta tocando no ponto (0.5, 0.25) da curva da função.

Exemplo 2.10. *Considerando a função $f(x) = |x|$, encontre a equação da reta tangente no ponto $a = 0$.*

Solução:

Antes de tudo, devemos construir o gráfico da função $f(x) = |x|$.

A Figura 2.7 nos mostra o gráfico da função. Agora, do mesmo modo do exemplo anterior iremos procurar a reta tangente.

Calculemos $f(a)$.

$$f(a) = |a| = |0| = 0$$

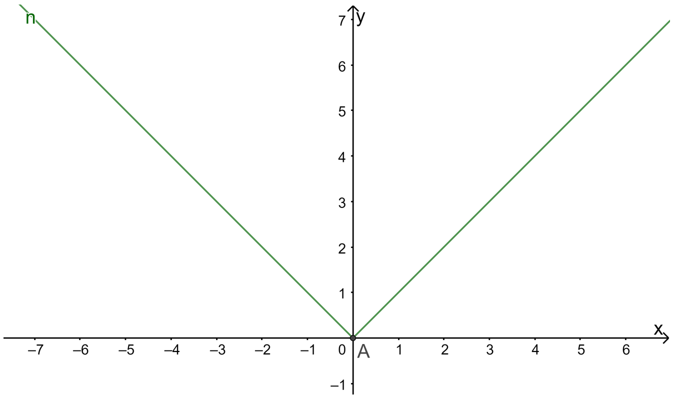
e calculemos o coeficiente angular m.

$$m = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x - 0}.$$

Lembrando dos limites laterais, perceba que, se procurarmos o limite lateral direito:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = 1.$$

Figura 2.7: Função $f(x) = |x|$.



Fonte: Arquivo próprio.

Se procurarmos o limite lateral esquerdo:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-0}{x-0} = -1.$$

Logo, os limites laterais diferem, então o limite não existe.

Portanto pela definição da reta tangente 2.8, a função $f(x) = |x|$ não possui reta tangente, pois m não existe.

2.3 Derivada

Uma vez tendo construído a noção de limite e compreendido os conceitos de taxa de variação e de reta tangente, daremos um passo antecessor para o foco desse trabalho de conclusão de curso: entender a derivada. O ato de usar a derivada em certa sentença matemática, se chama "derivação", e seu símbolo como sua expressão varia dentre as diversas fontes. Com o objetivo de facilitar a visualização da expressão na qual está sendo aplicada a derivação, se $y = f(x)$ é uma função derivável, usaremos o símbolo operador diferenciais, introduzido por Leibniz (Stewart, 2010), $\dfrac{dy}{dx}$.

Vimos que o limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ é usado para encontrar o coeficiente angular da reta tangente. Este limite é bastante usado em vários ramos da matemática e em outras áreas das exatas. Por sua importância ele ganha seu próprio nome, assim:

Definição 2.11. *Nomeamos derivada da função f no ponto a, e indicamos por $\frac{df(a)}{dx}$,o limite:*

$$\frac{df(a)}{dx} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \tag{2.7}$$

caso esse limite exista.

Por existir tantos usos para esse limite, existem várias outras expressões que o representam. Com a finalidade de mostrar a expressão mais usual, tomemos a equação da definição da derivada (2.7) e façamos $a = x_0$, logo $x - x_0 = \Delta x$, e deste modo quando $x \to x_0$, $\Delta x \to 0$, ficando dessa forma:

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2.8}$$

Exemplo 2.12. *Calcule usando a equação (2.8), a derivada da função $f(x) = 2x^3 - 5x$, em um ponto qualquer x.*

Solução:

$$\begin{aligned}
\frac{df(x)}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x + \Delta x)^3 - 5(x + \Delta x) - (2x^3 - 5x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 - 5x - 5\Delta x - 2x^3 + 5x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x^3 + 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 - 5\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2\Delta x^2 + 6x^2 + 6x\Delta x - 5 \\
&= 6x^2 - 5.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.13. *Calcule usando a equação (2.8), a derivada da função, $f(x) = x^2 + 2$, em um ponto genérico x.*

Solução:

$$\begin{aligned}
\frac{df(x)}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + 2 - (x^2 + 2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2 - x^2 - 2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x \\
&= 2x.
\end{aligned}$$

2.3.1 Regras de derivação.

Como vimos anteriormente, podemos calcular a derivada de uma função usando sua definição com o limite. Mas é notório o esforço deste caminho. Tendo isso em mente, nesta subseção elencaremos algumas propriedades que podem ser usadas para se derivar uma função, com o objetivo de facilitar os cálculos.

A primeira regra apresenta a função mais simples, a função constante, por isso é cabível demonstrar a mesma. Porém, as demais regras são mais complexas de se fazer o mesmo, em visto disso, para o leitor afim de saber sobre, sugerimos a leitura da referência [3].

1. Derivada de uma função constante.

   Se, existe c tal que $f(x) = c$, logo $\frac{df(x)}{dx} = 0$.

   Prova:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0. \tag{2.9}$$

2. Derivada de uma potência.

   Seja $\mathbb{Z}^*$ e se $f(x) = x^n$, então $\frac{df(x)}{dx} = nx^{n-1}$.

   Exemplo 2.14. *Calcule a derivada de $f(x) = x$.*

   ***Solução**:*

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}x = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1.$$

3. Derivada do produto de uma constante por uma função.

   Se $g(x)$ é uma função derivável e c uma constante real, onde $f(x) = c \cdot g(x)$, então

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}cg(x) = c\frac{dy}{dx}g(x). \tag{2.10}$$

   Exemplo 2.15. *Calcule a derivada da função, $f(x) = 3x^3$.*

   ***Solução**:*

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}3x^3 = 3 \cdot \frac{dy}{dx}x^3 = 3 \cdot 3x^{3-1} = 9x^2.$$

4. Derivada da soma.

   Sendo $f(x)$ e $g(x)$ ambas deriváveis, tem-se:

$$h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow \frac{dh(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}f(x) + \frac{dy}{dx}g(x). \tag{2.11}$$

   Exemplo 2.16. *Calcule a derivada da função, $f(x) = 4x^2 + 2x$.*

   ***Solução**:*

$$f(x) = 4x^2 + 2x \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}4x^2 + \frac{dy}{dx}2x = 8x + 2.$$

5. Derivada do produto.

   Sendo $f(x)$ e $g(x)$ ambas deriváveis, portanto:

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow \frac{dh(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}f(x) \cdot g(x) + \frac{dy}{dx}g(x) \cdot f(x). \tag{2.12}$$

Exemplo 2.17. *Calcule a derivada da função,* $f(x) = xy$*.*

Solução:

$$f(x) = xy \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}x \cdot y + \frac{dy}{dx}y \cdot x = 1 \cdot y + 0 \cdot x = y.$$

6. Derivada do quociente.

   Sendo $f(x)$ e $g(x)$ as duas deriváveis, logo:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ com } g(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{dh(x)}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}f(x) \cdot g(x) - \frac{dy}{dx}g(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}. \tag{2.13}$$

Exemplo 2.18. *Calcule a derivada da função,* $f(x) = \frac{x}{x+1}$*, com* $x + 1 \neq 0$*.*

Solução:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x+1} \\ \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dx}x \cdot (x+1) - \frac{dy}{dx}(x+1) \cdot x}{(x+1)^2} \\ \frac{df(x)}{dx} &= \frac{1 \cdot (x+1) - 2 \cdot x}{(x+1)^2} \\ \frac{df(x)}{dx} &= \frac{(x+1) - 2x}{(x+1)^2} \\ \frac{df(x)}{dx} &= \frac{-x+1}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

7. Regra da cadeia.

   Sendo $y = f(u)$ e $u = g(x)$ ambas funções deriváveis, então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}. \tag{2.14}$$

Exemplo 2.19. *Calcule a derivada da função,* $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$*.*

Solução:

Uma vez que $u = x^2 + 2$ *temos*

$$\frac{du}{dx}x^2 + 2 = 2x$$

e $y = \sqrt{u}$*,*

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{u} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

Logo temos:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \\
\frac{df(x)}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x \\
\frac{df(x)}{dx} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Diferenciais e Derivação: Algumas Aplicações

No capítulo anterior, abordamos conceitos acerca de limite e derivada, com a intenção de termos uma base para o entendimento deste capítulo. Agora, focaremos no objetivo principal do trabalho e apresentaremos conceitos de aproximação de funções e algumas aplicações. Ademais, usaremos como referência para redigir este capítulo Stewart (2010), Alves et al (2010), Rodrigues (2017), Elias (2016) e Silva (2018).

3.1 Linearização

Lembrando do conceito e das projeções de reta tangente discutida no capítulo anterior na subseção 2.2.2 e observando a Figura 3.1 nota-se que ao darmos um *zoom* sobre a intersecção de uma curva e sua reta tangente, vamos ver que, cada vez mais perto, mais a curva se assemelha a reta. Este pensamento é impulsionador do conceito que abordaremos nesta seção, que é o ato de aproximar funções usando retas tangentes às suas curvas, chamado *linearização*.

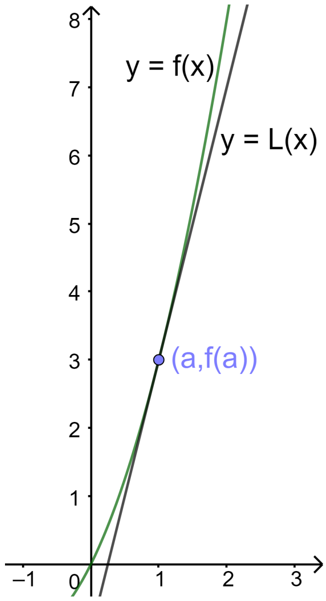
O pensamento é de que calcular $f(a)$ na função afim $L(x)$ é mais fácil do que calcular por meio de $f(x)$. Então nos contentamos com os valores calculados na reta tangente. Ou seja, usamos a reta tangente no ponto $(a, f(a))$ como uma aproximação para a função $f(x)$.

Com o objetivo de encontrarmos a equação da reta tangente da Figura 3.1 lembramos da equação da reta estudada no capítulo anterior (2.6).

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1).$$

Ainda sobre o capítulo anterior, vimos que $m = \frac{df(a)}{dx}$ em um ponto $(a, f(a))$. Trocando x_1 por a na equação (2.6), tem-se:

Figura 3.1: Linearização.



Fonte: Arquivo próprio.

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{df(a)}{dx}(x-a) \\ f(x) &= f(a) + \frac{df(a)}{dx}(x-a). \end{aligned}$$

Finalmente, denominamos aproximação linear ou a equação da reta tangente de f em a a função linear que possui essa reta tangente como gráfico, ou seja:

$$L(x) = f(a) + \frac{df(a)}{dx}(x-a). \tag{3.1}$$

Exemplo 3.1. *Encontre a linearização da função $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $a = 4$.*

Solução:

Temos que

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}.$$

Logo sua derivada, vai ser:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}.$$

Assim,

$$f(4) = 2.$$

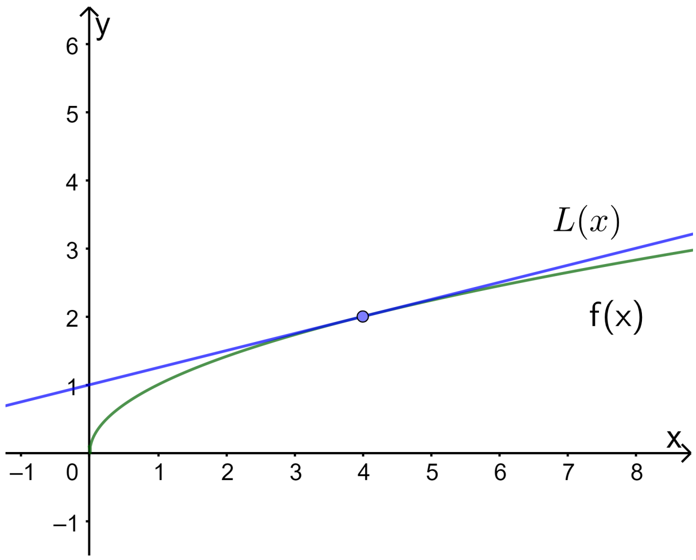
$$\frac{df(4)}{dx} = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

Finalmente, vamos escrever a aproximação, substituindo os respectivos valores na equação (3.1).

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4) = 2 + \frac{1}{4}x - 1 = \frac{1}{4}x + 1.$$

Observe a Figura 3.2 e veja a reta tangente à curva quando $a = 4$. A Tabela 3.1 mostra os valores de $L(x)$ e $f(x)$, para os respectivos valores nos arredores de x.

Figura 3.2: Aproximação Linear.



Fonte: Arquivo próprio.

Tabela 3.1: Aproximação Linear.

x	$f(x)$	$L(x)$
3,5	1,870	1,875
3,9	1,975	1,975
3,99	1,997	1,9975
4	2	2
4,01	2,002	2,0025
4,1	2,023	2,025
4,5	2,121	2,125

Fonte: Arquivo próprio.

Perceba, na tabela 3.1 quando x assume os valores 3,99, 4 e 4,01, os valores de f e l curva e a reta têm diferenças extremamente pequenas. Em outras palavras, os valores estão arbitrariamente próximos um do outro. A aproximação linear ilustrada na Figura 3.2 e na tabela 3.1 nos mostra que essa técnica é precisa em volta do ponto que escolhemos.

3.2 Diferenciais

Nas seções anteriores, para identificar a derivação usamos o símbolo $\frac{dy}{dx}$ (lembrando que $y = f(x)$). Nesta seção, daremos um significado único para dy e dx separados. Por esse motivo, para determinarmos o ato de derivação, nesta seção o símbolo $f'(x)$ (lê-se, f linha de x) é mais apropriado.

Quando estudamos diferenciais, é mais usual o termo diferenciabilidade. Com esse pensamento e por capricho vamos primeiramente definir diferenciabilidade, usando a própria definição de derivada 2.11.

Diferenciabilidade, ou até mesmo derivabilidade é a capacidade de achar uma derivada em um ponto. Ou seja, em síntese, se uma função é diferenciável em um ponto, existe naquele ponto uma reta tangente ao gráfico.

Definição 3.2. *Dizemos que f é diferenciável (ou derivável) em x_0, quando existe a sua derivada em x_0.*

Dito isso, partimos para o conceito de diferencial. O diferencial de uma função pode ser colocado lado a lado com às ideias de linearização tratada na seção anterior, uma vez que, diferencial indica na matemática uma variação de f quando se desloca de um ponto a outro.

Vimos no capítulo anterior na subseção 2.2.1, que Δx indica uma variação quando em x adicionamos Δx. Ou seja, Δx é um acréscimo de x.

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Por sua vez, a varição em x acarreta numa variação em y, definida como Δy.

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) \Rightarrow \Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1). \tag{3.2}$$

Definição 3.3. *Sejam $y = f(x)$, onde f é uma função diferenciável Δx um acréscimo em x, e uma reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto x. Façamos $\Delta x = dx$. Portanto, a diferencial x, dx é uma variável independente podendo ser dado qualquer valor, em consequência, a diferencial y, dy, dependendo de x, fica definida pela equação:*

$$dy = f'(x)dx. \tag{3.3}$$

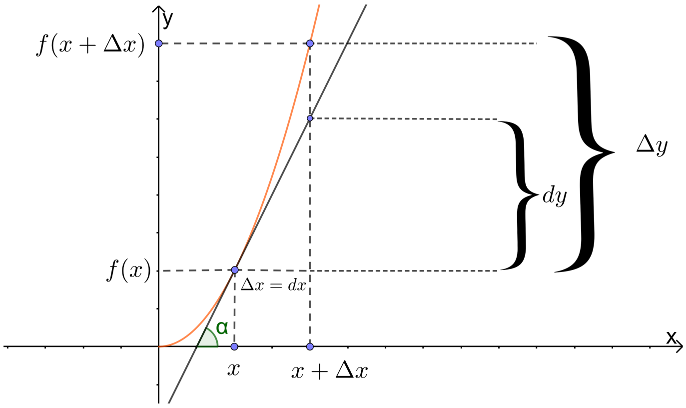
Observe na Figura 3.3 a representação geométrica.

A inclinação da reta tangente, como já vimos anteriormente, é dada pela tangente de α e como vimos na seção 2.3 pela derivada de f no ponto x, isso nos leva equação (3.4).

$$tg\alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow dy = f'(x)dx. \tag{3.4}$$

Ou seja, como tínhamos visto na definição.

Figura 3.3: O diferencial.



Fonte: Arquivo próprio.

Com base na Figura 3.3 percebemos que a medida que Δx vai se tornando 0, $\Delta y \to dy$, o que nos da oportunidade de fazer a seguinte aproximação:

$$\Delta y \approx dy \tag{3.5}$$

$$f(x_1+\Delta x) - f(x_1) \approx f'(x)dx \tag{3.6}$$

$$f(x_1+\Delta x) \approx f(x_1) + f'(x)dx. \tag{3.7}$$

Uma vez que, $dx = \Delta x$, essa aproximação é somente outro modo de como formular a equação da linearização (3.1).

3.2.1 O cálculo de erros

Quando usamos as técnicas de aproximação usando linearização ou diferenciais, procuramos uma aproximação que nos satisfaça, porém, não podemos esquecer que ainda existe um valor real. Dizendo isso, notamos o erro que é cometido.

Definição 3.4. *O erro absoluto(E) fica definido como:*

$$E = |Valor\ real\ - Valor\ aproximado\ |$$

E o erro relativo é dado por:

$$E_r = \frac{|Valor\ real\ - Valor\ aproximado\ |}{|Valor\ aproximado\ |}$$

Sobre o erro cometido na relação da equação (3.5). Observe no gráfico da Figura 3.3, dy e Δy. Graficamente, o Δy nos mostra a variação no eixo y, em relação a curva. E dy nos mostra a variação no eixo y em relação a reta tangente. Então, Δy indica o nosso valor real na curva, enquanto dy nos mostra o valor aproximado na reta tangente.

Definição 3.5. *O erro absoluto cometido fica definido como*

$$E = |\Delta y - dy|.$$

Precisamos estar cientes de que somos criaturas que erram, que o erro é o melhor amigo da experiência, e com o erro é possível ficarmos melhores. Dado que, sem os erros que cometemos ao aproximarmos funções não seríamos capazes de valorizar os grandes acertos que o ser humano já conseguiu, por exemplo com o meio tecnológico, uma vez que mentes brilhantes estiveram frente a obstáculos maiores que eles, e mesmo assim conseguiram superar sempre aprendendo.

3.3 Aplicações

A área do cálculo que estuda as aproximações e as derivadas, como qualquer outra área, evolui com o tempo e desenvolve diversas aplicações com usos tanto na própria matemática, como em outras áreas. Com este pensamento, é imprescindível citar algumas dessas aplicações e seus usos.

3.3.1 Aproximação de raízes

As técnicas estudadas de diferenciais podem ser usadas para estimar o valor de uma raiz imperfeita, o que particularmente é bastante satisfatório de se saber e entender, uma vez que, ao compreendermos este método alternativo aos convencionais (tecnológicos), podemos nos tornar independentes, ao mesmo tempo que damos atenção a um território do cálculo importantíssimo.

Exemplo 3.6. *Seja* $y = \sqrt{x}$.

(a) Encontre fórmulas para dy *e* Δy.

(b) Calcule dy *e* Δy *em* $x = 9$ *com* $dx = \Delta x = 3$. *E encontre o erro absoluto* E.

Solução(a) *: Com* $y = f(x) = \sqrt{x}$, *e pela equação de variação em* y *(3.2) temos:*

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}.$$

Agora para acharmos dy *levamos em consideração a equação de* dy *(3.4).*

$$dy = f'(x)dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx.$$

Solução(b) *: Em* $x = 9$ *com* $dx = \Delta x = 3$.

$$\Delta y = \sqrt{12} - \sqrt{9} \approx 0,464.$$

E dy.

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2\sqrt{9}}(3) = \frac{3}{6} = 0,5.$$

Por último encontremos o erro absoluto E. Com base na definição 3.5, vamos ter:

$$E = |\Delta y - dy| = |0,464 - 0,5| = 0,036.$$

O erro de aproximação foi de 0,036.

Exemplo 3.7. *Calcule uma aproximação para a $\sqrt{5}$, usando os conceitos de diferenciais.*

Solução :

Primeiramente, lembramos que $\sqrt{5} = f(x_1 + \Delta x)$, logo precisamos de uma soma que dê 5. Nesse pensamento, peguemos, $x_1 = 4$ pois 4 é o quadrado perfeito mais próximo de 5, deste modo $\Delta x = dx = 1$.

Temos que,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \\ f(4) &= 2. \end{aligned}$$

Agora calculemos $f'(4)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(4) &= \frac{1}{2\sqrt{4}} \\ f'(4) &= \frac{1}{4} = 0,25. \end{aligned}$$

Substituindo os valores na equação aproximada (3.5).

$$\begin{aligned} \sqrt{5} = f(4+1) &\approx f(4) + f'(4)\cdot 1 \\ \sqrt{5} &\approx 2 + 0,25\cdot 1 = 2,25. \end{aligned}$$

Numa calculadora conseguimos o seguinte valor aproximado:

$$\sqrt{5} \approx 2,236.$$

Portanto, o erro ao usar diferenciais é de $0,014$, logo, percebe-se que é uma aproximação suficientemente boa, em casos de funções mais complicadas essa técnica pode se tornar extremamente útil.

Exemplo 3.8. *Calcule uma aproximação para a $\sqrt[3]{27,5}$ usando o método de diferenciais.*

Solução *:*

Pensando da mesma forma do exemplo anterior, tomemos 27 como o cubo perfeito mais próximo de 27,5. Logo, $x_0 = 27$ *e* $\Delta x = dx = 0,5$.

Vamos encontrar o $f(27)$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[3]{x} \\
f(27) &= \sqrt[3]{27} = 3.
\end{aligned}
$$

Agora calculamos o $f'(27)$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \\
f'(x) &= \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{-2}{3}} \\
f'(27) &= \frac{1}{3} \cdot 27^{\frac{-2}{3}} \\
f'(27) &= 0,037.
\end{aligned}
$$

Substituindo os valores encontrados na equação aproximada (3.5).

$$
\sqrt[3]{27,5} = f(27 + 0,5) \approx f(27) + f'(27) \cdot 0,5
$$
$$
\sqrt[3]{27,5} \approx 3 + 0,037 \cdot 0,5 = 3,0185.
$$

Calculando numa calculadora:

$$
\sqrt[3]{27,5} = 3,0184.
$$

O erro ao usar diferenciais é de $0,0001$.

Comparando os erros das aproximações ao usar diferenciais nos Exemplos 3.6, 3.7 e 3.8, nota-se que o erro cometido é proporcional ao tamanho do Δx, quanto menor, menor é o erro.

3.3.2 Polinômios de Taylor

Os conceitos abordados e desenvolvidos na subseção anterior são articulados e desenvolvidos com o objetivo de aproximar funções, porém existe outro método que fornece aproximações até mesmo mais precisas, usando os polinômios de Taylor.

Nascido na Inglaterra em 1685, Brook Taylor foi um grande matemático que apresentou importantes estudos na área do cálculo. Sua obra mais famosa e por qual ele ficou mais conhecido é a ”Methodus incrementorum directa et inversa e Perspectiva Linea”onde ele apresenta a expansão de Taylor. O que posteriormente, Joseph-Louis Lagrange, outro matemático de renome, proclamou a base do cálculo diferencial (SILVA, 2018).

O polinômio de Taylor pode ser uma técnica relativamente fácil de aproximar funções que possuem infinitas derivadas.

Definição 3.9. *Seja uma função f com n derivadas em volta do ponto x_0. O polinômio de Taylor de ordem n associado à função f é definido por:*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(N)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \\ P_n(x) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \end{aligned}$$

onde $f^{(k)}$ significa a k-ésima derivada de f. Note que para $k = 0$ convenciona-se $f^0 = f$. Eventualmente, observe que quando $n = 1$, encontramos a equação da linearização (3.1). Em relação a esta, diferencia apenas que $a = x_0$ e a notação de derivada.

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

Exemplo 3.10. *Na Exemplo 3.1 encontramos uma linearização para a função $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $x_0 = 4$. Agora, seja a mesma função no mesmo ponto, encontre o polinômio de Taylor de grau 2, e compare os valores para $x = 4,1$.*

Solução:

Segue que

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2.$$

Primeiramente, encontremos o valor de $f(4)$ para a função raiz.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \\ f(4) &= 2. \end{aligned}$$

Agora, vamos de encontro ao valor da primeira derivada da função no ponto 4.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(4) &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

E da segunda derivada.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-1}{4\sqrt{x^3}} \\ f''(4) &= \frac{-1}{4\sqrt{4^3}} = -\frac{1}{32}. \end{aligned}$$

Substituindo na fórmula encontramos o polinômio.

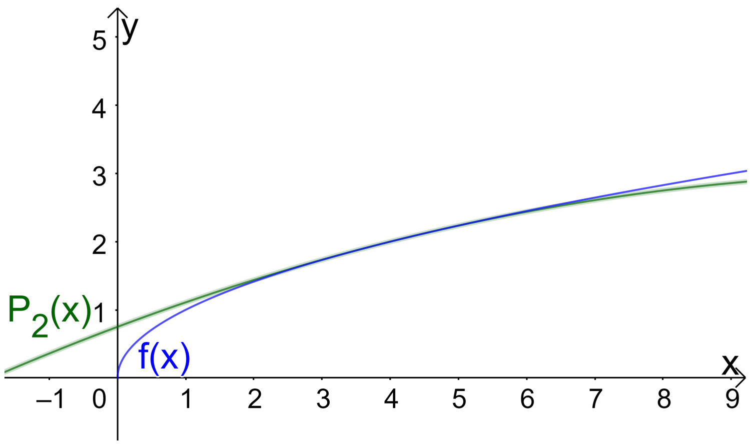
$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 \\ P_2(x) &= 2 + \frac{1}{4}(x-4) + \frac{\frac{-1}{32}}{2}(x-4)^2 \\ P_2(x) &= 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64}. \end{aligned}$$

Por fim encontramos a seguinte aproximação para $x = 4,1$.

$$P_2(x) = 2 + \frac{4,1-4}{4} - \frac{(4,1-4)^2}{64} = 2,02484375.$$

Perceba na tabela 3.1 que o polinômio de Taylor de grau 1, nos dá uma aproximação para a raiz de 4,1 bem próxima a real, mas, o polinômio de grau 2 nos trouxe uma aproximação mais real ainda (comparando com o valor da calculadora). Logo, note que quanto maior for o grau do polinômio de Taylor, maior será a precisão da aproximação. A Figura 3.4 nos mostra

Figura 3.4: Aproximação da função $f(x) = \sqrt{x}$.



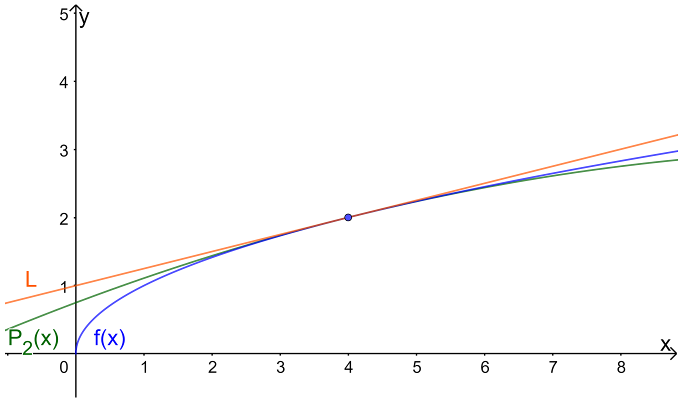
Fonte: Arquivo próprio.

graficamente a aproximação pelo método de Taylor.

Veja a Figura 3.5 e compare as aproximações da função $f(x) = \sqrt{x}$ *no ponto* $x = 4$, *pela a linearização* $L(x)$ *e pelo polinômio de Taylor de grau 2* $P_2(x)$.

Exemplo 3.11. *Seja a função* $f(x) = sen(x^2)$. *Calcule o polinômio de Taylor de grau 2 no ponto* $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, *e encontre uma aproximação para* $x = 0,9$.

Figura 3.5: Comparação das aproximações de Taylor e linearização.



Fonte: Arquivo próprio.

***Solução**:*

Para isso primeiramente, precisamos calcular o polinômio nos arredores de $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Sendo assim, descubramos o valor de $f(\frac{\sqrt{\pi}}{2})$ para a função seno.

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen}(x^2) \\ f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) &= \operatorname{sen}\left(\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Agora, consigamos a primeira derivada da função no ponto $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x^2) \cdot 2x \\ f'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) &= \cos\left(\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\right) \cdot 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

E a segunda derivada.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2(-2x^2 sen(x^2) + \cos(x^2)) \\ f''\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) &= 2\left(-2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 sen\left(\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\right) + \cos\left(\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\right)\right) = \frac{\sqrt{2}(-\pi+2)}{2} \\ &= -\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Substituindo na fórmula, temos:

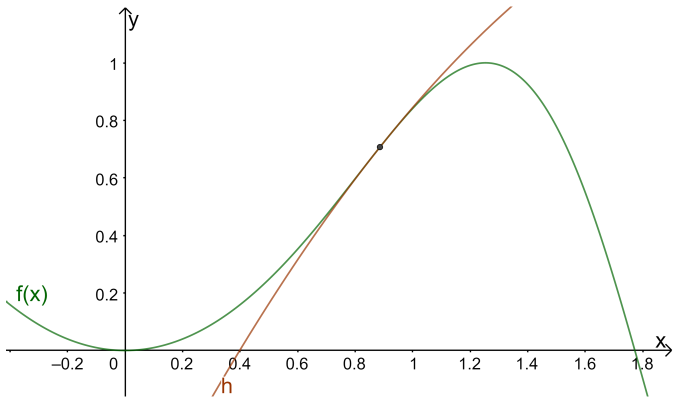
$$\begin{aligned} P_2(x) &= f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) + f'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(x - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right) + \frac{f''\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)}{2!}\left(x - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right)^2 \\ P_2(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(x - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right) + \frac{-\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}}{2!}\left(x - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right)^2 \\ P_2(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(x - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right) + \frac{-\pi + 2}{2\sqrt{2}}\left(x - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right)^2. \end{aligned}$$

Enfim, tomamos o ponto $x = 0,9$.

$$P_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(0,9 - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right) + \frac{-\pi + 2}{2\sqrt{2}}\left(0,9 - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right)^2 = 0,724.$$

A Figura 3.6 exibe o gráfico com a aproximação da função $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$.

Figura 3.6: Aproximação da função $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$.



Fonte: Arquivo próprio.

Com base nos conceitos abordados sobre os Polinômios de Taylor, e os Exemplos 3.10 e o 3.11, é interessante reconhecer que esses polinômios ampliam o conceito de aproximação de função, fazendo com que vejamos que função linear é uma opção de aproximação, mas existem outras funções não lineares que apresentam aproximações muito eficazes também.

Obs.: Não mostraremos o erro cometido pela aproximação usando o polinômio de Taylor. Mas, para o leitor com vontade de ler sobre, sugerimos a leitura da referência [11].

3.3.3 Período de um Pêndulo Simples

Permeando a área da física, encontramos uma importante aplicação do conceito de linearização e diferenciais, que reformula uma equação tornando o valor dela aproximado. Os físicos, em alguns de seus casos, encontram dificuldades em trabalhar com fórmulas complexas, então a aproximação se torna realmente útil, fazendo com que eles possam continuar suas pesquisas com menos esforço e a possibilidade de um erro mínimo.

Pêndulo simples é uma massa presa a um fio (esse com massa desprezível), e por apresentar dimensões tão simples não possui forças dissipativas, por isso ao ser retirado da posição de equilíbrio apresenta uma movimento periódico. O exemplo mais conhecido é o clássico relógio de pêndulo construído por Christiaan Huygens em 1656.

De volta ao ponto principal. Temos a equação diferencial ordinária (EDO), também chamada de "Equação de Mathieu", que serve para encontrar o movimento de um pêndulo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sen\theta = 0,$$

onde g indica a aceleração da gravidade e l indica o comprimento do pêndulo. Para valores muitos pequenos de θ usa-se a aproximação $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ que se fundamenta pela linearização apresentada na Figura 3.7, e a equação fica:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

Por conta desta aproximação, notamos que a solução da EDO linear de segunda ordem (MERGEN, 2019) com as condições iniciais é:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Esta equação diz que para amplitudes muito pequenas, o pêndulo simples tem um movimento harmônico simples (MHS), de período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Observe o do gráfico da Figura 3.7 evidenciando que para a função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ a reta tangente $L(x) = x$ no ponto 0 é uma ótima aproximação, uma vez que os pontos nessa área estão extremamente próximos, sugerindo que:

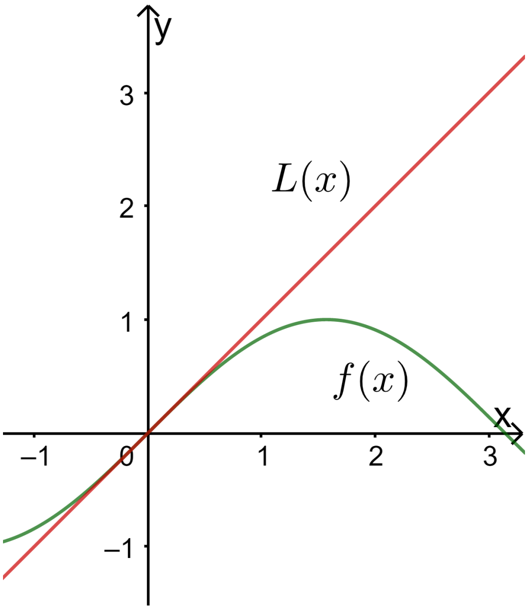
$$\operatorname{sen}(x) \approx x.$$

O pêndulo simples é constantemente citado tanto na educação básica como na superior, criando uma imagem simples, mas que em conceito é fortemente estruturada, logo é comum pelos estudantes ter uma compreensão equivocada dos seus conceitos e desenvolvimentos. E em paralelo, o pêndulo simples representa uma abordagem matemática à física que nos entrega aplicações reais.

Além do mais, percebemos na realidade a importância da aproximação, que contorna um problema, provando sua utilidade na obtenção de caminhos mais acessíveis.

Deste modo, é imprescindível a citação desta aplicação, uma vez que sua importância interdisciplinar e magnificência como recorte físico, é realmente notável. Por fim, para aqueles

Figura 3.7: Aproximação da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ pela reta tangente no ponto 0.



Fonte: Arquivo próprio.

que desejam se aprofundar neste conteúdo sugerimos a leitura das referências [13] e [14].

Considerações Finais

O ramo do cálculo é fortemente rico de estudos e aplicações e está desde outrora em desenvolvimento, sendo estimulado e reformulado por diversos estudiosos. Se aprofundar nesses conceitos, podendo ver todo o crescimento, desde o limite intuitivo até as aplicações de derivadas, é uma oportunidade única, além de ser memorável. Por razão disso, relevo a importância dessa pesquisa, uma vez que as aproximações em volta de um ponto são exemplos aplicados da superação de uma dificuldade matemática a encontrar resultados na função original, valorizando assim o esforço menta humano.

Sendo notável a importância desse estudo para a matemática aplicada e afins, redigimos este trabalho acadêmico, com o intuito de elaborar um recorte teórico, que pudesse servir como base para o encontro de funções aproximadas e, em paralelo, evidenciarmos a importância do cálculo..

Então foi feita uma abordagem teórica nos conceitos fundamentais do cálculo, apresentando limite, reta tangente e derivada. E uma vez tendo entendido essa parte teórica, fomos ao encontro do desenvolvimento dos conceitos de aproximações usando a derivação. Pela parte da linearização compreendemos como podemos aproximar uma função não linear por uma função linear, e partindo desse ponto ligamos esse conceito aos incrementos dy e dx e como a variação nos eixos podem ser abordadas para nos fornecer valores aproximados de raízes. Foi visto também que, expandindo o conceito de linearização, encontramos os polinômios de Taylor, e como eles nos fornece aproximações de funções que possuem n derivadas, fazendo com que assim saiamos do pensamento que só funções lineares podem ser aproximações suficiente, pois ao derivarmos mais de uma vez conseguimos funções não lineares que servem muito bem como aproximações. E por fim, vimos que as aproximações são abordadas na natureza pela própria física, no estudo do período do pêndulo simples.

Apesar das complicações da construção deste trabalho, problemas pessoais e dos impedimentos que a pandemia do Covid-19 trouxe, conseguimos, e de acordo com as expectativas construir uma base teórica que serviu de compreensão dos conceitos de aproximação usando derivação, e em paralelo demos foco a essa parte do cálculo que merece ser evidenciada.

Ademais, construir essa monografia foi uma experiência singular, agregando mais conhecimentos e esclarecendo pontos sobre o cálculo, como história, conceitos, desenvolvimento e outros, o tornando mais atrativo. E desenvolver os conceitos de aproximação usando as diferenciais e a derivação foi muito gratificante e em parte foi satisfatório compreender esse mundo em volta da diferencial de uma função.

Sobre os *softwares*, trabalhar com algo novo como o *Latex*, no início foi desafiador e até amedrontador, porém a programação foi ficando cada vez mais compreensível e com o tempo mostrando seu valor e sua eficácia. E também, sempre fora prazeroso estimular a epifania com a transformação dos conceitos e fórmulas em gráficos, visualmente agradáveis, com o *GeoGebra*.

No geral, conseguimos ir de acordo com os objetivos, mas é notável que pontos como: função contínua; um estudo mais aprofundado do cálculo do erro ao usar a aproximação; aplicações à economia; análise marginal; e outras aplicações à física poderiam ser adicionados a este trabalho acadêmico, e estudadas além das que já foram. Por isso, partes como essas são propulsoras de futuros possíveis estudos sobre a aproximação usando derivação.

Bibliografia

[1] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C.. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. Tradução de Valéria de Magalhães Iorio.

[2] KREYSZIG, Erwin. **Matemática Superior para Engenharia**. 9. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2008. 423 p.

[3] STEWART, James. **Cálculo**. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

[4] MUNEM, Mustafa A.; FOULIS, David J.. **Cálculo**. Rio de Janeiro: S.A., 1982. 676 p. 2 v.

[5] ALVES, Ivan Paulo Marques et al. **Limites e derivadas**. 1. ed. Santa Maria, RS: UFSM, NTE, UAB, 2010. 74p. Notas de Aula.

[6] ELIAS, Ivone Silva. **A diferencial de uma função e aplicações**. 2016. 29 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Ufsj, São João Del-Rei, 2016.

[7] RODRIGUES, Bárbara et al. **Diferenciais e o Cálculo aproximado**. 1 ed. Rio Grande: FURG, 2017. 19p. Notas de Aula.

[8] GUILHERME. **A Historia do Cálculo**. 2017. Disponível em: https://www.phylos.net/2017-12-18/a-historia-do-calculo/. Acesso em: 23 nov. 2021.

[9] Diniz, Marcos et al. **Cálculo I**: *Aula nº 15: Aproximações Lineares e Diferenciais. Regra de L'Hôspital*. Projeto Newton. UFPA, 2021. 10p. Notas de Aula.

[10] O'CONNOR, Jj; ROBERTSON, Ef. **Brook Taylor**. 2000. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Taylor/. Acesso em: 25 nov. 2021.

[11] SILVA, Rosalina Neta Viana da. **Aproximações de funções via polinômios: método de Lagrange**. 2018. 56 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Norte do Tocantins, Araguaína, 2018.

[12] HELERBROCK, Rafael. **Pêndulo simples**. 2021. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/pendulo-simples.htm. Acesso em: 29 nov. 2021.

[13] MERGEN, Alecsander. **Aproximações no ensino de física**: o estudo do pêndulo simples. 2019. 31 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura Física, Universidade Federal da Fronteira Sul, Cerro Largo, 2019.

[14] LOPES, Flávio Silva et al. **Uma revisão das aproximações lineares para grandes amplitudes de oscilações do período de um pêndulo simples**. 2018. 8 f. Monografia (Especialização) - Curso de Física, Departamento de Física, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2017.

[15] ANTON, Howard et al. **Cálculo**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman Editora Ltda, 2014. 2 v.