UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

THAFNE SIRQUEIRA CARVALHO

INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS VARIACIONAIS

ARAGUAÍNA
2021

THAFNE SIRQUEIRA CARVALHO

INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS VARIACIONAIS

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciada em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior.

ARAGUAÍNA
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

C331i Carvalho, Thafne Sirqueira.
Introdução aos Métodos Variacionais. / Thafne Sirqueira Carvalho. – Araguaína, TO, 2021.
50 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2021.
Orientador: José Carlos de Oliveira Junior

1. Espaços de Sobolev. 2. Teorema do Passo da Montanha. 3. Palais-Smale. 4. Ponto Crítico. I. Título

CDD 510

THAFNE SIRQUEIRA CARVALHO

INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS VARIACIONAIS

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciada em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior .

Aprovada em: 10/08/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior (orientador)

Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hancco

Profa. Dra. Renata Alves da Silva

Dedico este trabalho aos meus avós.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter dado forças, coragem e persistência na conclusão desta etapa tão importante em minha vida.

Agradeço, de modo especial, aos meus maiores incentivadores, meus avós, Luzia Sirqueira Ferreira e Valdemar Gomes Ferreira, por terem me dado todas as condições de me dedicar aos estudos, por serem meu apoio e por estarem ao meu lado em todos os momentos. Inclusive, a vocês dedico esse trabalho.

Agradeço, em geral, à minha família por torcerem por mim. À minha mãe, Edvane; minhas irmãs, Thaila e Nathália; e às minhas queridas sobrinhas, Érica, Clara e Lara, por compartilharem esse momento comigo.

Agradeço, imensamente, ao meu querido orientador José Carlos de Oliveira Junior, por todo aprendizado durante a graduação e pelos conhecimentos adquiridos durante um ano de PIBIC. Agradeço pelo apoio, paciência, incentivo e por estar sempre disposto a esclarecer minhas dúvidas. É uma pessoa muito prestativa e uma grande inspiração como professor.

Além disso, agradeço a todos os professores do curso de Matemática da UFT por todo aprendizado nesses quatro anos. É uma honra conhecer professores tão maravilhosos.

Agradeço aos meus amigos de curso, Victor, Morgana e Aniscleide. Para mim, é uma satisfação muito grande compartilhar esse momento com vocês. Obrigada pelas risadas, pelo companheirismo e diversão que tivemos. Que possamos realizar cada sonho almejado juntos.

Às minhas queridas amigas Luciana, Clarêlis e Carol, pelo incentivo e torcida, por me acompanharem desde o ensino médio nessa caminhada. Obrigada por todos os momentos juntas.

Enfim, agradeço a todos que fizeram parte dessa caminhada e da realização desse sonho.

A Matemática é a honra do espírito humano.

(Leibniz)

RESUMO

Esta monografia apresenta uma introdução aos Métodos Variacionais, que formam, hoje em dia, um método importante que é aplicado na área de equações diferenciais. Assim, procurou-se responder a seguinte questão norteadora: como resolver equações diferenciais ordinárias (edo) utilizando os Métodos Variacionais? Esta pesquisa tem como objetivo principal determinar condições necessárias e suficientes para que certas equações diferenciais ordinárias possuam solução via Métodos Variacionais. Para isso, inicialmente, fez-se uma breve revisão sobre medida e os espaços de Lebesgue para generalizar o conceito de integral de Riemann; a partir disso, definiram-se o conceito de derivada fraca e, em seguida, os conhecidos espaços de Sobolev. Dessa forma, nesses espaços, estabeleceu-se o que chamamos de solução fraca do funcional associado à equação dada, para, mais tarde, resolver a Edo pelos Métodos Variacionais. Quanto à metodologia utilizada nesse trabalho, temos a pesquisa exploratória e bibliográfica, e a abordagem qualitativa. Como resultados desse estudo, destaca-se a utilização do Teorema do Passo da Montanha, que fornece algumas condições no funcional, entre elas a condição de Palais Smale, sob as quais o funcional tem ponto crítico. Com isso, os Métodos Variacionais se preocupam em encontrar pontos críticos de funcionais associados à alguma equação diferencial.

Palavras-chave: Espaços de Sobolev. Teorema do Passo da Montanha. Palais-Smale. Ponto Crítico.

ABSTRACT

This monograph presents an introduction to Variational Methods, which today form an important method that is applied in the field of differential equations. Thus, we sought to answer the following guiding question: how to solve ordinary differential equations (ode) using Variational Methods? This research has as main objective to determine necessary and sufficient conditions for certain ordinary differential equations to have a solution via Variational Methods. For this, initially, a brief review of measure and Lebesgue spaces was made to generalize the concept of Riemann's integral; from this, the concept of the weak derivative was defined, followed by the well-known Sobolev spaces. Thus, in these spaces, what we call a weak solution of the functional associated with the given equation was established, to later solve the Edo by the Variational Methods. As for the methodology used in this work, we have exploratory and bibliographical research, and a qualitative approach. As a result of this study, we highlight the use of the Mountain Pass Theorem, which provides some functional conditions, including the Palais Smale condition, under which the functional has a critical point. Thus, Variational Methods are concerned with finding critical functional points associated with some differential equation.

Keywords: Sobolev spaces. Mountain Pass Theorem. Palais-Smale. Critical point.

Lista de Símbolos

$\wp(X)$	conjunto das partes de X
$\Omega \subset \mathbb{R}$	domínio no espaço $\mathbb{R}$, geralmente, um intervalo
$\overline{\Omega}$	fecho de Ω
$L^p(\Omega)$	espaço de Lebesgue
$\int_\Omega u d\mu$	integral de Lebesgue da função u
$\int_a^b u(x)dx$	integral definida de Riemann da função u no intervalo [a,b]
$\|u\|_{L^p}$	norma da função u em $L^p(\Omega)$
$W^{1,p}(\Omega)$	espaço de Sobolev
$H^1(\Omega)$	espaço de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$
$\|u\|_{H^1}$	norma da função u em $H^1(\Omega)$
$\|u\|_E$	norma da função u no espaço E
$C^k(\Omega)$	espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis em Ω
$\hookrightarrow$	imerso em
B_ρ	bola aberta centrada em zero com raio $\rho > 0$
$L(E,F)$	espaço normado das transformações lineares contínuas de E em F

Sumário

Capítulo 1

Introdução

As equações diferenciais possuem grande relevância no estudo e na compreensão de vários fenômenos da realidade. Portanto, devido a essa notória importância, pesquisadores da área têm descoberto métodos de resolução de equações diferenciais, dentre os quais destacam-se, neste trabalho, os Métodos Variacionais. Tais métodos podem ser aplicados tanto em equações diferenciais ordinárias como nas parciais, no entanto, nessa pesquisa receberá foco a equação diferencial ordinária (edo), dada da seguinte forma:

$$\begin{cases} -u''(t) + c(t)u(t) = f(t,u) \ \text{ em } \ (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $a < b, u = u(t)$ é a incógnita da equação e c, f são funções apropriadas que satisfazem certas hipóteses (veja [13, Capítulo 8]).

Mostraremos que há exemplos de funções c e f cujos métodos tradicionais de resolução de edo's (equações exatas, separáveis, fator integrante, métodos dos coeficientes a determinar, etc) não podem ser aplicados diretamente para solucionar a equação (1.1) ou equações similares. Então, um novo método é utilizado na resolução de tal equação, e este é o tema principal desta pesquisa, a saber, os Métodos Variacionais.

O pontapé inicial para o surgimento desse método foi o desenvolvimento do cálculo das variações, no qual matemáticos se debruçavam na resolução de problemas que envolvessem máximos ou mínimos, também conhecidos como problemas de otimização.

Um dos mais antigos problemas sobre otimização, mencionado em [1], data de 850 a.C., conhecido como problema de Dido. Segundo a lenda, Dido é uma fenícia considerada a primeira rainha de Cartago. Com o assassinato do seu marido, foi-lhe prometida uma terra na qual poderia cercar com a pele de um boi. Assim, cortando a pele, cercou uma extensão de terra semicircular. Desse acontecimento, originou-se o problema de Dido, que consiste em encontrar a curva de maior área possível entre todas as curvas planas. Ainda segundo [1], mais detalhes dessa história encontram-se em *Eneida*, de Vírgílio [2].

Embora o surgimento do cálculo variacional data desse período, seu desenvolvimento se dá no século XVII quando matemáticos começaram a buscar solução para os problemas da época. Entre eles está o famoso Problema da Braquistócrona, cujo desafio impulsionou o estudo do cálculo das variações.

O problema da Braquistócrona (veja [3]) é, a saber: dados dois pontos num plano vertical, a alturas diferentes, que trajetória do plano deve seguir uma partícula material para ir do ponto mais alto ao mais baixo no menor espaço de tempo possível? Essa pergunta era até mesmo alvo de competição entre os matemáticos para resolvê-la.

Segundo [1], essa questão foi publicada no jornal *Acta Eruditorium*, em 1696, por Johann Bernoulli. No final do século XVII, o entusiasmo dos irmãos[1] Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748) pela Matemática trouxe inúmeras contribuições para o Cálculo Variacional. Enquanto Jakob Bernoulli se debruçou sobre as figuras isopométricas, que consistem em caminhos planos fechados de uma dada espécie e perímetro fixo que abarcam uma área máxima, seu irmão, Johann Bernoulli, colaborou ainda mais ao buscar respostas para o problema da Braquistócrona.

Além desses, outros matemáticos se interessavam por problemas dessa natureza. Em 1630, Galileu Galilei (1564-1643) relacionou o tempo de descida por um segmento circular com os tempos correspondentes dos polígonos inscritos e outros arcos, apresentando o problema da Braquistócrona de uma outra forma. Já Isaac Newton (1642-1627), em 1696, determinou a forma de um corpo que se move no ar, com resistência mínima, utilizando o cálculo variacional, de acordo com [1, 4], respectivamente. Os trabalhos de Lagrange (1736-1813), Leonhard Euler (1707-1783) e Carl Jacobi (1804-1851) também contribuíram veementemente para o desenvolvimento dessa área.

A resposta de James Bernoulli (1654-1705) para um problema isopométrico, em 1701, serviu como base de estudo para Euler que descobriu a equação diferencial

$$\frac{d}{dx}f_{y'} - f_y = 0$$

que atualmente recebe seu nome, Equação de Euler. Em 1762 e 1770, foi publicado um novo método por Lagrange no qual substituia a função $y(x)$ pela função $y(x) + \delta y(x)$, com isso, Euler designou as notações de Lagrange chamando $\delta y(x)$ de variação da função $y(x)$ e δI de variação da integral. Devido a isso, este novo campo da Matemática foi denominado de Cálculo Variacional, conforme diz [1].

Ademais, outros que colaboraram para o desenvolvimento do cálculo variacional, segundo [5], foram Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897), Carl Friendrich Gauss (1777-1855), David Hilbert (1802-1943) e William Rowan Hamilton (1805-1865).

[1]Os irmãos Bernoulli, Jakob e Johann, foram os primeiros a aplicar a teoria de Leibniz a novos problemas. Ambos tinham grande interesse pela Matemática, e desenvolveram uma relação competitiva de disputa científica.

Portanto, feitas essas considerações, pretendemos apresentar neste trabalho uma introdução ao Método Variacional, visando responder à seguinte questão norteadora: como resolver equações diferenciais ordinárias utilizando os Métodos Variacionais? Estabelecida essa problemática, define-se como objetivo geral resolver uma classe de edo's, como em (1.1), via métodos variacionais. Para tal fim, de modo específico, objetivamos apresentar os conceitos de medida e espaços de Lebesgue, com o intuito de generalizar as integrais de Riemann, e, em seguida, conceituar derivada fraca. Além disso, definem-se os espaços de Sobolev, cujo domínio, no caso, é a reta real, usado para encontrar solução de uma classe de edo's. Ressalta-se que esse método consiste em encontrar um funcional associado a uma edo e, posteriormente, encontrar pontos críticos deste funcional (chamados de solução fraca da edo). Aqui, utilizaremos para isso o Teorema do Passo da Montanha.

À vista disso, a pesquisa realizada se designa como exploratória, que consiste na obtenção de informações sobre a temática escolhida e sua delimitação. Para coleta de dados, empregamos a pesquisa bibliográfica, fundamentando-se na leitura de materiais já publicados. Já quanto à abordagem, aderimos a pesquisa qualitativa, não preocupando-nos com dados estatísticos, e sim, com a obtenção de dados diretamente do objeto de estudo. Como embasamento da metodologia, utilizamos [6] e [7]. Agora, veremos a estrutura definida na monografia.

Em *Noções Preliminares*, mostraremos os conceitos básicos da teoria da medida e os espaços de Lebesgue, para melhor entendimento de conceitos estudados nos próximos capítulos.

Em *Solução Fraca de Edo's*, apresentaremos os espaços de Sobolev, onde serão definidas o que foram chamadas de soluções fracas, além da derivada de certos funcionais importantes no trabalho.

Por último, em *Métodos Variacionais*, encontra-se a essência desta monografia, que é mostrar como os Métodos Variacionais podem ser utilizados para a resolução de algumas edo's. Para isso, será aplicado o famoso Teorema do Passo da Montanha.

Capítulo 2

Noções Preliminares

Neste capítulo, estudaremos conceitos básicos da Teoria da Medida e Análise Funcional necessários para compreender os métodos variacionais. Entre eles, estão as definições de σ-álgebra, σ-álgebra de Borel, espaço mensurável, função mensurável, medida e derivada fraca. Para a construção das preliminares, serão utilizadas as seguintes referências bibliográficas, [9, 10, 11, 12, 19].

2.1 σ-álgebra

No primeiro momento, define-se σ-álgebra e σ-álgebra de Borel, para, posteriormente, conceituar medida, talvez a definição mais importante para compreender integral de Lebesgue e, em seguida, espaços de Sobolev.

Definição 2.1. *Seja um conjunto X, o conjunto das partes de X, representado por $\wp(X)$, é o conjunto formado por todos os subconjuntos de X.*

Definição 2.2. *Denomina-se σ-álgebra de um conjunto X, um subconjunto $\mathcal{A}$ do conjunto das partes de X que satisfaz as seguintes condições:*

1. *$\emptyset, X \in \mathcal{A}$;*
2. *Se $E \in \mathcal{A}$, então o seu complementar $E^C = X - E \in \mathcal{A}$;*
3. *Considerando qualquer sequência (E_n) de $\mathcal{A}$, então a união $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}$.*

Em outras palavras, o conjunto vazio e o próprio conjunto X pertencem a σ-álgebra $\mathcal{A}$; se E é um conjunto da σ-álgebra $\mathcal{A}$, então o seu complementar também pertence a σ-álgebra $\mathcal{A}$; a união de conjuntos que formam uma sequência de elementos da σ-álgebra $\mathcal{A}$ também pertence a $\mathcal{A}$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.3. Duas σ-álgebras muito conhecidas são $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ e $\mathcal{A} = \wp(X)$. Também denominadas de menor σ-álgebra e maior σ-álgebra de X, respectivamente. No caso, $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ é a σ-álgebra formada pelo conjunto vazio e o próprio X, já $\mathcal{A} = \wp(X)$ refere-se ao conjunto das partes de X.

Exemplo 2.4. Seja $X = \{2, 7, 9, 12\}$. Então, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{2\}, \{7, 9, 12\}, X\}$ é uma σ-álgebra de X.

Exemplo 2.5. O conjunto $\mathcal{A} = \{\emptyset, E, E^C, X\}$ é uma σ-álgebra de X, para qualquer $E \subseteq X$.

Os Exemplos 2.3, 2.4 e 2.5 são σ-álgebras, porque satisfazem as três condições dadas na Definição 2.2. Note ainda que o Exemplo 2.5 é uma generalização do Exemplo 2.4.

Exemplo 2.6. Um exemplo importante de σ-álgebra é a seguinte. Seja $\mathcal{S}$ um subconjunto de $\wp(X)$. Considere $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S})$ a σ-álgebra definida como a interseção de todas as σ-álgebras $\mathcal{C}$ que contêm $\mathcal{S}$, ou seja, $\sigma(\mathcal{S}) = \bigcap_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}} \mathcal{C}$. No caso em que $\mathcal{S}$ é uma σ-álgebra, a interseção vai ser igual a ela própria, isto é, $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{S})$.

Assim, a σ-álgebra gerada por um subconjunto $\mathcal{S}$ é denotada por $\sigma(\mathcal{S})$.

Exemplo 2.7. A σ-álgebra gerada por $\emptyset$, considerando um conjunto X qualquer, é $\{\emptyset, X\}$.

Exemplo 2.8. A σ-álgebra de subconjuntos de $X = \mathbb{N}$ gerada por $\mathcal{S} = \{\{n\}; n \in \mathbb{N}\}$ (que não é um σ-álgebra) é $\wp(X)$.

Exemplo 2.9. Seja $X = \mathbb{N}$. A σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{N}$ gerada por $\mathcal{S} = \{\{4\}, \{5\}\}$ é $\sigma(\mathcal{S}) = \{\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{4, 5\}, \{4\}^{\mathsf{C}}, \{5\}^{\mathsf{C}}, \{4, 5\}^{\mathsf{C}}, \mathbb{N}\}$.

A seguir, vamos construir a σ-álgebra mais importante deste trabalho, a saber, a σ-álgebra de Borel, cujos elementos serão chamados de borelianos. Por causa dessa σ-álgebra, poderemos estender o conceito de integral de Riemann para conjuntos mais gerais que apenas intervalos e, por isso, conseguiremos definir um conceito novo de derivada (a derivada fraca) que estende o conceito clássico do Cálculo Diferencial. Começamos com a próxima definição.

Definição 2.10. *Considere $\mathcal{S}$ a família de intervalos abertos de $\mathbb{R}$. A σ-álgebra gerada por $\mathcal{S}$, denotada por $\mathcal{B}$, é denominada de σ-álgebra de Borel, e seus elementos são chamados de borelianos.*

Veja abaixo alguns exemplos de borelianos.

Exemplo 2.11. Os conjuntos unitários, formados por um único ponto, $\{x\}$, tal que $x \in \mathbb{R}$, são borelianos de $\mathcal{B}$ (veja a demonstração do Lema 2.26).

Exemplo 2.12. Os conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^{\mathsf{C}}, \mathbb{R}$ pertencem aos borelianos $\mathcal{B}$.

Exemplo 2.13. Qualquer intervalo sobre $\mathbb{R}$ pertence aos borelianos, como por exemplo, $I = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 4\}$.

2.2 Conjuntos e Funções Mensuráveis

Definição 2.14. *Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de um conjunto não vazio de X. O par $(X, \mathcal{A})$ é dito um espaço mensurável e os conjuntos em $\mathcal{A}$ são os conjuntos mensuráveis.*

Exemplo 2.15. Sejam $X = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{A} = \{X, \emptyset\}$ uma σ-álgebra. Então, o par $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável.

Exemplo 2.16. Sejam $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{A} = \wp(X)$ uma σ-álgebra. Então, o par $\{X, \mathcal{A}\}$ é um espaço mensurável.

Definição 2.17. *Dizemos que $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ é $\mathcal{A}$-mensurável ou mensurável se, $\forall \delta \in \mathbb{R}$, o conjunto $[f > \delta] = \{x \in X : f(x) > \delta\} = f^{-1}(]\delta, +\infty])$ é mensurável, isto é, se $[f > \delta] \in \mathcal{A}$.*

A seguir, daremos alguns exemplos de funções mensuráveis.

Exemplo 2.18. Se $E \in X$, a função característica $X_E : X \to \mathbb{R}$, definida como

$$X_E(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in E \\ 0, \text{ se } x \notin E \end{cases},$$

é uma função mensurável, independentemente da σ-álgebra escolhida.

Exemplo 2.19. Seja $f(x) = c, \forall x \in X$ uma função constante. Se $\alpha \geq c$ então $\{x \in X : f(x) > \alpha\} = \emptyset$. Por outro lado, se $\alpha < c$, então $\{x \in X : f(x) > \alpha\} = X$. Logo, toda função constante é mensurável.

Lema 2.20. *Sejam f, g funções mensuráveis e c um número real. Então as funções $cf, f^2, f + g, fg, |f|$ são mensuráveis.*

Demonstração: Veja a prova deste lema em [9], página 9. □

Exemplo 2.21. No espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, as funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ são mensuráveis, como $e^x, x^3, \dfrac{x}{x^2+5}$.

Conhecendo os conceitos de σ-álgebra e funções mensuráveis, pode-se falar de medida, que refere-se a uma maneira de medir os conjuntos da σ-álgebra dos borelianos. Seria interessante termos uma maneira de medir conjuntos que estenda o comprimento de intervalos na reta, ou seja, uma medida que, quando restrita a intervalos, resulte no comprimento deles. Vamos ver se isso é possível.

Definição 2.22. *Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra. Chama-se medida em $\mathcal{A}$ uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ que satisfaz:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$*;*

2. Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de conjuntos dois a dois disjuntos em* $\mathcal{A}$*, então*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Aqui, estamos assumindo que $a + \infty = +\infty + a = +\infty + \infty = +\infty$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$*.*

Exemplo 2.23. Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de X. Considere a função $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ dada por

$$\mu(B) = \begin{cases} \text{número de elementos de B}, & \text{se } B \quad \text{é finito} \\ +\infty, & \text{se } B \quad \text{é infinito.} \end{cases}$$

A medida μ é a medida caracterizada como medida de contagem.

Lema 2.24. *Do Lema 3.3 em [9], segue que, se* $E, F \in \mathcal{A}$ *e* μ *é uma medida em* $\mathcal{A}$*, então* $E \subseteq F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$*.*

Demonstração: Como $E \subseteq F$, então $F = E \cup (F \backslash E)$ e $E \cap (F \backslash E) = \emptyset$. Temos que E e $F \backslash E$ são disjuntos, logo pode-se usar a ideia de μ ser aditiva (item 2. da Definição 2.22) e obter

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \mu[E \cup (F \backslash E)] \\ &= \mu(E) + \mu(F \backslash E). \end{aligned}$$

Como $\mu(F \backslash E) \geq 0$, conclui-se que $\mu(F) \geq \mu(E)$. $\square$

Exemplo 2.25. Considere $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel. Existe uma única medida μ definida em $\mathcal{B}$ tal que $\mu(a, b) = b - a$, para todo intervalo aberto (a, b). Essa medida recebe o nome de medida de Lebesgue. Essa afirmação pode ser vista no Exemplo 3.2-d) em [9].

A medida de Lebesgue é a medida com a qual define-se o conceito de integral de Lebesgue e, em seguida, de derivada fraca. Lembrando que devemos considerar os borelianos para que essa medida de Lebesgue exista.

Lema 2.26. Se $P = \{a_1, \cdots, a_n\} \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$, então $\mu(P) = 0$.

Demonstração: Vamos mostrar que a medida de Lebesgue de um conjunto formado por um único ponto é 0, isto é, dado $b_1 \in \mathbb{R}$,

$$\mu(\{b_1\}) = 0.$$

Não é difícil mostrar que $\{b_1\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(b_1 - \frac{1}{n}, b_1 + \frac{1}{n}\right)$. Sabendo que a medida do ponto é igual a medida da interseção, temos

$$\mu(\{b_1\}) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(b_1 - \frac{1}{n}, b_1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Como a interseção está contida em todos os intervalos $\left(b_1 - \frac{1}{n}, b_1 + \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, segue do Lema 2.24 e do Exemplo 2.25 que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(\{b_1\}) \leq \mu\left(b_1 - \frac{1}{n}, b_1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n}.$$

Utilizando o Teorema do Confronto [8, Teorema 2, p. 64], obtemos

$$0 \leq \mu(\{b_1\}) \leq \frac{2}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} \mu\{(b_1)\} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Portanto, $\mu(\{b_1\}) = 0$, o que significa que a medida de um ponto é 0, como havíamos afirmado. Logo,

$$\mu(P) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\}\right) = \mu(\{a_1\}) + \mu(\{a_2\}) + \ldots + \mu(\{a_n\}) = 0.$$

□

2.3 Integral de Lebesgue

Considerando a medida de Lebesgue definida na σ-álgebra dos borelianos $\mathcal{B}$, Lebesgue definiu uma integral que recebe o seu nome e generaliza a integral de Riemann no seguinte sentido: Toda função f que é Riemann integrável (na definição da Análise Real [8, Capítulo 10]) é também Lebesgue integrável e as duas integrais são iguais (veja o Exercício 4.L em [9]).

Seja $\mathcal{B}$ a σ-álgebra dos borelianos e considere μ a medida de Lebesgue em $\mathcal{B}$. Se $\Omega \in \mathcal{B}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável, escrevemos a integral de Lebesgue de f sobre Ω com o símbolo:

$$\int_\Omega f d\mu.$$

Em outras palavras, dados um intervalo qualquer em $\mathcal{B}$, $[a, b]$, $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função Riemann integrável, vale o seguinte resultado:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\mu. \tag{2.1}$$

Isso significa que a integral de Lebesgue é uma extensão da integral de Riemann, ou seja, se f é integrável segundo Riemann, então f é integrável segundo Lebesgue. No entanto, não vale a recíproca, pois existem funções que são Lebesgue integráveis, mas não são Riemann integráveis, conforme exemplo a seguir.

Exemplo 2.27. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

A função f é Lebesgue integrável, mas não é Riemann integrável.

Cabe ressaltar que a integral de Lebesgue engloba um espaço maior de funções que as integrais de Riemann, o que permite sua aplicação no cálculo das variações e outras áreas importantes da Matemática. Decidimos não apresentar a definição precisa da integral de Lebesgue, pois fugiria do foco do trabalho. Apesar disso, o leitor pode consultar [9] para encontrar essa definição importante.

Ressaltamos que utilizaremos as seguintes propriedades das integrais de Lebesgue no decorrer do trabalho. Considere Ω um conjunto mensurável.

1. Se f, g são funções Lebesgue integráveis em um conjunto mensurável, então

$$\int_\Omega (f + g)d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu.$$

2. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Nas mesmas condições do item anterior,

$$\int_\Omega \alpha f d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu.$$

Outro conceito importante são os espaços L^p's, também conhecidos como espaços de Lebesgue.

Definição 2.28. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}$ um boreliano e $1 \leq p < \infty$. O espaço $L^p(\Omega)$ é definido como*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \textit{ mensurável} : \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Da definição acima, Ω é um conjunto dentro da σ-álgebra de Borel, e a integral de $|f|^p$ sobre o conjunto Ω é um número, ou seja, a integral deve ser finita para pertencer a $L^p(\Omega)$. Além disso, é possível mostrar que o espaço L^p é um espaço vetorial de Banach, visto no capítulo posterior, cuja norma é a seguinte

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Uma desigualdade interessante no estudo dos espaços $L^p(\Omega)$ é a que segue.

Teorema 2.29 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$*, onde* $1/p + 1/q = 1$*. Então,* $fg \in L^1(\Omega)$ *e* $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|q\|_{L^q}$*, ou seja,*

$$\left|\int_\Omega fg d\mu\right| \leq \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração: A demonstração pode ser consultada em [9], página 56. □

Exemplo 2.30. Mostre que $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$ para $x \in \Omega = (1, +\infty)$ pertence a $L^1(\Omega)$.

Demonstração: Como h é contínua em seu domínio, segue do Exemplo 2.21 que h é mensurável. Usando (2.1), temos

$$\int_{(1,+\infty)} \frac{1}{x^2} d\mu = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\bigg|_1^b\right) = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right] = 1.$$

Portanto, $h \in L^1(\Omega)$, pois $\displaystyle\int_{(1,+\infty)} |h|^1 d\mu < \infty$. □

Exemplo 2.31. Mostre que $g(x) = \frac{1}{x}$ para $x \in \Omega = (0, 1)$ não pertence a $L^1(\Omega)$.

Demonstração: De modo análogo ao exemplo anterior,

$$\int_{(0,1)} \frac{1}{x} d\mu = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to 0^+} \left(\ln|x|\bigg|_b^1\right) = \lim_{b \to 0^+} -\ln|b| = +\infty.$$

Logo, $g \notin L^1(\Omega)$, já que $\displaystyle\int_{(0,1)} |g|^1 d\mu$ diverge. □

Uma propriedade importante da integral de Lebesgue que utilizaremos no decorrer do trabalho é a seguinte (veja [9]).

1. Seja $\Omega \in \mathcal{B}$. Então,
$$\int_\Omega 1 d\mu = \mu(\Omega). \tag{2.2}$$
Em particular, se $\Omega = (a, b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, temos $\displaystyle\int_\Omega 1 d\mu = \mu(a, b) = b - a$.

2.4 Derivada fraca

A noção de derivada fraca se iniciou com Sobolev, no século XX, no estudo de problemas associados a equações diferenciais, ela estende a derivada clássica do Cálculo, pois uma função que possui derivada no sentido clássico também tem derivada no sentido fraco, e no caso elas são iguais.

Definição 2.32. *Seja $u \in L^p(\Omega)$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que u é fracamente diferenciável ou diferenciável no sentido fraco se existir $v \in L^p(\Omega)$ tal que*

$$\int_{\Omega} u\varphi' d\mu = -\int_{\Omega} v\varphi d\mu, \forall \varphi \in C_0^1(\Omega),$$

onde $C_0^1(\Omega)$ é o espaço vetorial das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ que possuem a primeira derivada (clássica) contínua e, além disso, se anulam nos extremos do intervalo Ω (se houver). Neste caso, chamamos v de derivada fraca de u denotamos $v = u'$.

Um resultado que vale mencionar é que, quando a derivada fraca de uma função existe, então ela é única, a menos de conjuntos de medida de Lebesgue nula (isso significa que, se $w(x) = u'(x)$ para todo x em $\Omega \setminus E$, onde $E \subset \Omega$ com $\mu(E) = 0$, então diremos que $w = u'$). Esse fato pode ser encontrado em [19], página 70.

Como exemplo, temos que a função módulo não é derivável no sentido clássico, no entanto, a função $u(x) = |x|$, $x \in (-1, 1)$, possui derivada fraca. Vamos mostrar abaixo utilizando a técnica de integração por partes.

Exemplo 2.33. Mostrando que $u(x) = |x|$, $x \in (-1, 1)$ possui derivada fraca.

Demonstração: Seja $\Omega = (-1, 1)$ e considere $u : \Omega \to \mathbb{R}$ a função $u(x) = |x|$. Como u é contínua, segue que u é mensurável. Além disso, usando (2.1), não é difícil ver que $u \in L^1(\Omega)$. Pela definição de módulo,

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Assim, novamente por (2.1), $\forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$,

$$\int_{(-1,1)} |x|\varphi' d\mu = \int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx = \int_{-1}^{0} -x\varphi'(x)dx + \int_{0}^{1} x\varphi'(x)dx.$$

Integrando por partes o lado direito da igualdade acima, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} -x\varphi'(x)dx &= -\left\{ x\varphi(x)|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \varphi(x)1dx \right\} \\ &= -[0\varphi(0) - (-1)\varphi(-1)] - \int_{-1}^{0} -1\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Ora, $\forall \varphi \in C_0^1(-1, 1)$, vale $\varphi(-1) = 0$ e $\varphi(1) = 0$. Daí ,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} -x\varphi'(x)dx &= -[0 \cdot \varphi(0) + 1 \cdot 0] - \int_{-1}^{0} -1\varphi(x)dx \\ &= -\int_{-1}^{0} -1\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\varphi'(x)dx &= \left\{x\varphi(x)|_0^1 - \int_0^1 1\varphi(x)dx\right\}\\ &= [1\varphi(1) - 0\varphi(0)] - \int_0^1 1\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

De $\forall\varphi \in C_0^1(-1,1)$, vale $\varphi(-1) = 0$ e $\varphi(1) = 0$ mais uma vez,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\varphi'(x)dx &= [1\cdot 0 - 0\cdot\varphi(0)] - \int_0^1 1\varphi(x)dx\\ &= -\int_0^1 1\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\int_{-1}^1 |x|\varphi'(x)dx = -\int_{-1}^0 -1\varphi(x)dx - \int_0^1 1\varphi(x)dx.$$

Logo, a derivada fraca de u é dada por

$$v(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } -1 < x \leq 0\\ 1, & \text{se } 0 < x < 1\end{cases},$$

uma vez que a Definição 2.32 é satisfeita, isto é, $\forall\varphi \in C_0^1(-1,1)$,

$$\int_{(-1,1)} |x|\varphi'(x)d\mu = -\int_{(-1,1)} v(x)\varphi(x)d\mu.$$

□

Dessa forma, conclui-se que a função módulo tem derivada fraca. Este novo conceito de derivada vai ser importante para definirmos os espaços de Sobolev.

Não provaremos, mas a aplicação de derivação no sentido fraco é uma aplicação linear no seguinte sentido:

1. Se v_1 e v_2 são derivadas fracas das funções u_1 e u_2, respectivamente, então a função $u_3 = u_1 + u_2$ possui derivada fraca e, além disso, a derivada fraca de u_3 é igual a $v_1 + v_2$, isto é, $u_3' = (u_1 + u_2)' = u_1' + u_2' = v_1 + v_1$.

2. Se v_1 é a derivada fraca de u_1, então a derivada fraca de $u_3 = \alpha u_1$ é $\alpha v_1, \forall\alpha \in \mathbb{R}$, isto é, $u_3' = (\alpha u_1)' = \alpha u_1' = \alpha v_1$.

Capítulo 3
Solução Fraca e Espaços de Sobolev

Agora que já sabemos alguns conceitos importantes da Teoria da Medida, nesta seção, vamos conhecer a edo que será foco neste trabalho. Nos espaços de Lebesgue e de Sobolev, espera-se definir o que chamaremos de solução fraca de uma dada edo, para, nos capítulos posteriores, resolvermos algumas delas utilizando o Teorema do Passo da Montanha.

Começaremos definindo o conceito de solução fraca. Para a construção deste capítulo, utilizamos [13, 14, 15, 16, 17].

3.1 Motivação para a definição de solução fraca

Como dito na introdução deste trabalho, existem edo's cujos métodos tradicionais de resolução (equações exatas, separáveis, fator integrante, método dos coeficientes a determinar, etc) não podem ser aplicados diretamente. Um exemplo é a equação dada por:

$$\begin{cases} -u''(t) + c(t)u(t) = f(t,u) \text{ em } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \tag{P}$$

em que $a < b, u = u(t)$ é a incógnita da equação e c, f são funções dadas. Uma solução forte (ou clássica) para a edo acima é uma função u de classe C^2, isto é, funções que possuem duas derivadas contínuas, já que a equação possui a segunda derivada de u como um dos termos. No entanto, podemos transformar (P) em uma equação que requer apenas uma derivada, da seguinte forma:

$$\int_{(a,b)} u'(t)\varphi' d\mu + \int_{(a,b)} c(t)u(t)\varphi d\mu = \int_{(a,b)} f(t,u)\varphi d\mu, \ \ \forall \varphi \in C_0^1([a,b]). \tag{3.1}$$

Para chegar em (3.1), multiplicamos $\varphi \in C_0^1([a,b])$ em ambos os lados de (P), integramos com a integral de Lebesgue (que coincide, nesse caso, com a de Riemann) e utilizamos integração por partes para obter

$$\int_{(a,b)} -u''(t)\varphi d\mu + \int_{(a,b)} c(t)u(t)\varphi d\mu = \int_{(a,b)} f(t,u)\varphi d\mu \Rightarrow$$

$$-\left(\varphi u'(t)|_a^b - \int_{(a,b)} u'(t)\varphi' d\mu\right) + \int_{(a,b)} c(t)u(t)\varphi d\mu = \int_{(a,b)} f(t,u)\varphi d\mu \Rightarrow$$

$$-\varphi u'(t)|_a^b + \int_{(a,b)} u'(t)\varphi' d\mu + \int_{(a,b)} c(t)u(t)\varphi d\mu = \int_{(a,b)} f(t,u)\varphi d\mu \Rightarrow$$

$$-\varphi(b)u'(b) + \varphi(a)u'(a) + \int_{(a,b)} u'(t)\varphi' d\mu + \int_{(a,b)} c(t)u(t)\varphi d\mu = \int_{(a,b)} f(t,u)\varphi d\mu.$$

Como $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, então

$$\int_{(a,b)} u'(t)\varphi' d\mu + \int_{(a,b)} c(t)u(t)\varphi d\mu = \int_{(a,b)} f(t,u)\varphi d\mu.$$

Dessa forma, em vez de se procurar diretamente uma solução para (P), encontra-se, primeiramente, uma função $u \in C_0^1([a,b])$ que satisfaz (3.1), pois seria mais viável buscar solução para uma equação que requer apenas uma derivada da função incógnita. Caso essa função u exista, dizemos que u é uma solução fraca da edo (P).

3.2 Espaços de Banach e funcionais diferenciáveis

Como já dito antes, procuraremos pontos críticos de determinadas aplicações definidas em espaços vetoriais específicos. Nesta seção, vamos definir esses objetos. Para maiores detalhes, veja [13, 16].

Definição 3.1. *Seja E um espaço vetorial com norma $\|\cdot\|_E$. Uma sequência $(x_n) \subset E$ é chamada de sequência de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\|_E < \varepsilon$.*

Definição 3.2. *Denomina-se de espaço de Banach todo espaço vetorial normado completo. Lembrando que um espaço vetorial normado é completo se toda sequência de Cauchy é convergente.*

Vejamos alguns exemplos importantes de espaços de Banach sob normas adequadas.

Exemplo 3.3. O espaço normado do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um espaço de Banach.

Exemplo 3.4. O espaço normado $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach.

Exemplo 3.5. O espaço das funções contínuas $C([a,b],\mathbb{R})$ é um espaço de Banach.

Exemplo 3.6. Considere o conjunto das aplicações lineares contínuas de E e F, $L(E, F)$, tal que E e F são espaços vetoriais normados. Se F é completo, então $L(E, F)$ é um espaço de Banach. Para ver isso, veja [17].

Quando o espaço vetorial é de Banach, alguns fatos interessantes ocorrem. Veremos isso melhor nas próximas seções. Além disso, embora no trabalho não tragamos uma aplicação direta do fato dos espaços vetoriais serem Banach, essa hipótese é essencial na demonstração dos resultados futuros quando lidamos com problemas de convergência.

Sobre esses espaços vetoriais especiais, vamos definir o que seria um funcional. Um funcional é uma função que associa cada elemento do seu domínio um número real. Assim, a noção de funcional diferenciável estende a derivada usual do Cálculo, pois em vez de derivar uma função $y = f(x)$ em relação a variável x, diferencia-se um funcional cuja variável não é necessariamente um número real.

A propósito, os métodos variacionais utilizam funcionais diferenciáveis para resolver problemas no campo das equações diferenciais ordinárias. Com isso, veremos o conceito de derivada de Fréchet.

Daqui em diante, E, F serão sempre espaços de Banach.

Definição 3.7. *Considere uma aplicação $f : E \to F$ e $a \in E$. Se existe $f'(a) \in L(E, F)$, uma transformação linear de E em F tal que*

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h)$$

e

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{\|h\|_E} = 0,$$

então f é dita ser diferenciável a Fréchet (ou Fréchet diferenciável) e $f'(a)$ é chamada de derivada de Fréchet em $a \in E$ de f.

A derivada de Fréchet também pode ser representada da seguinte forma

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|f(a + h) - f(a) - f'(a)h\|_F}{\|h\|_E} = 0.$$

Agora, vejamos algumas proposições importantes.

Proposição 3.8. *Se $f : E \to F$ é diferenciável a Fréchet em $a \in E$, então f é contínua em a.*

Demonstração: Se f é Fréchet diferenciável em a, então existe o seguinte limite como visto na Definição 3.7

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|f(a + h) - f(a) - f'(a)h\|_F}{\|h\|_E} = 0,$$

da mesma maneira

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h)$$

e

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{\|h\|_E} = 0.$$

Podemos reformular a equação acima como

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{\varepsilon(h)}{\|h\|_E}\|h\|_E,$$

e passando o limite de ambos os lados da equação

$$\begin{aligned}
\lim_{\|h\|_E \to 0} f(a+h) &= \lim_{\|h\|_E \to 0} \left[f(a) + f'(a)h + \frac{\varepsilon(h)}{\|h\|_E}\|h\|_E \right] \\
&= f(a) + \lim_{\|h\|_E \to 0} f'(a)h + \lim_{\|h\|_E \to 0} \left[\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|_E}\|h\|_E \right] \\
&= f(a) + f'(a)0 + \lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{\|h\|_E} \lim_{\|h\|_E \to 0} \|h\|_E \\
&= f(a) + 0 + 0 \cdot 0 \\
&= f(a).
\end{aligned}$$

Logo, f é contínua em a. □

Proposição 3.9. *Se f é Fréchet diferenciável em a, então a derivada $f'(a)$ é única.*

Demonstração: Como f é diferenciável a Fréchet, então suponha que existam duas transformações lineares tais que

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T_1(h)}{\|h\|_E} = 0$$

e

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T_2(h)}{\|h\|_E} = 0,$$

o que implica dizer que

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T_1(h)}{\|h\|_E} = \lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T_2(h)}{\|h\|_E} \Rightarrow$$

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T_1(h)}{\|h\|_E} - \lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T_2(h)}{\|h\|_E} = 0.$$

Dessa forma,

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|T_1(h) - T_2(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

e considerando $v \neq 0$ e tomando $h = tv$, com $t \neq 0$, obtemos

$$\lim_{|t| \to 0} \frac{|t| \|T_1(v) - T_2(v)\|_F}{|t| \|v\|_E} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\|T_{1(v)} - T_2(v)\|_F}{\|v\|_E} = 0 \Rightarrow T_1(v) = T_2(v), \forall v \in E.$$

Portanto, $T_1 = T_2$. □

Em outras palavras, se existe $T \in L(E, F)$ tal que

$$f(a + h) = f(a) + T(h) + \varepsilon(h)$$

e

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{\|h\|_E} = 0,$$

então $T = f'(a)$.

Veremos, por meio de um exemplo, que a derivada a Fréchet coincide com a derivada usual do Cálculo.

Exemplo 3.10. Calcule a derivada a Fréchet de $f(x) = x^3$ no ponto $x = 2$.

Resolução: Para f ser diferenciável a Fréchet, então

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|f(a + h) - f(a) - T(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Como queremos encontrar a derivada de f no ponto $x = 2$, substituímos a por x e mostramos que esse limite converge para 0. Temos

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|(2 + h)^3 - 2^3 - T(h)|}{|h|} =$$

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8 - T(h)|}{|h|} =$$

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|12h + 6h^2 + h^3 - T(h)|}{|h|}.$$

Supondo que $T(h) = 12h$, como $h \in \mathbb{R}$, vamos verificar se o limite existe com essa transformação linear (contínua) T. Segue que

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|12h + 6h^2 + h^3 - 12h|}{|h|} = \lim_{|h| \to 0} \frac{|6h^2 + h^3|}{|h|}.$$

Pela desigualdade triangular $0 \leq |6h^2+h^3| \leq 6|h|^2+|h|^3$. Assim, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{|h|\to 0} 0 \leq \lim_{|h|\to 0} \frac{|6h^2+h^3|}{|h|} \leq \lim_{|h|\to 0} \frac{6|h|^2+|h|^3}{|h|} \Rightarrow$$

$$\lim_{|h|\to 0} 0 \leq \lim_{|h|\to 0} \frac{|6h^2+h^3|}{|h|} \leq \lim_{|h|\to 0} (6|h|+|h|^2) \Rightarrow$$

$$0 \leq \lim_{|h|\to 0} \frac{|6h^2+h^3|}{|h|} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{|6h^2+h^3|}{|h|} = 0.$$

Portanto, como o limite tende a 0 para $T(h) = 12h$, então $T(h) = f'(2)h = 12h$, já que T é contínua, linear e única. □

No exemplo acima, observa-se que a derivada a Fréchet coincidiu com a derivada usual do Cálculo, no seguinte sentido. Nas notações do Cálculo, temos que $f'(2) = 12$; nas nossas notações (a Fréchet), temos $f'(2)h = 12h$. Se olharmos para a matriz da transformação linear $f'(2)$, podemos escrever $f'(2) = [12]_{1\times 1}$, matriz de ordem 1×1, o que mostra sua relação com a derivada usual $f'(2) = 12$, estendendo a definição do Cálculo. Além disso, a derivada a Fréchet é válida para espaços vetoriais gerais, e não apenas para funções de uma variável. Veja no proximo exemplo.

Exemplo 3.11. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (que é contínua) tal que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f((1,2)+(h_1,h_2)) - f(1,2) - T(h_1,h_2)|}{|(h_1,h_2)|} = 0,$$

onde $f(x,y) = 3x^2y$.

Resolução: Substituindo em $f(x,y)$, temos

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(1+h_1, 2+h_2) - f(1,2) - T(h_1,h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|3(1+h_1)^2(2+h_2) - (3\cdot 1^2\cdot 2) - T(h_1,h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|3(1+2h_1+h_1^2)(2+h_2) - 6 - T(h_1,h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|3(2+h_2+4h_1+2h_1h_2+2h_1^2+h_1^2h_2) - 6 - T(h_1,h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|6+3h_2+12h_1+6h_1h_2+6h_1^2+3h_1^2h_2 - 6 - T(h_1,h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|3h_2+12h_1+6h_1h_2+6h_1^2+3h_1^2h_2 - T(h_1,h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}. \tag{3.2}$$

Considerando que $T(h_1,h_2) = 12h_1 + 3h_2$ substituímos na equação (3.2)

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|3h_2 + 12h_1 + 6h_1h_2 + 6h_1^2 + 3h_1^2h_2 - (12h_1 + 3h_2)|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|3h_2 + 12h_1 + 6h_1h_2 + 6h_1^2 + 3h_1^2h_2 - 12h_1 - 3h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|6h_1h_2 + 6h_1^2 + 3h_1^2h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Pela desigualdade triangular, obtemos

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|6h_1h_2 + 6h_1^2 + 3h_1^2h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left(\frac{|6h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} + \frac{|6h_1^2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} + \frac{|3h_1^2h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right) \tag{3.3}$$

Agora, pelo Teorema do Confronto vamos verificar se os limites existem calculando para cada caso. Veja que

$$\begin{aligned}
\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} 0 &\leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|6h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|6h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2}} \\
0 &\leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{6|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{6|h_1||h_2|}{|h_1|} \\
0 &\leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{6|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} 6|h_2| \\
0 &\leq \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{6|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq 0.
\end{aligned}$$

Com isso, $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|6h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$

De modo análogo fazemos com os outros limites, obtendo $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|6h_1^2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$ e $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|3h_1^2h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$. Substituindo esses resultados dos limites na equação (3.3), segue que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|6h_1h_2 + 6h_1^2 + 3h_1^2h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0,$$

portanto, a transformação linear $T(h_1,h_2) = 12h_1 + 3h_2$ satisfaz o limite acima. Essa transformação linear é chamada de derivada à Fréchet da função de duas variáveis f. □

Exemplo 3.12. O funcional $J : L^2(0,1) \to \mathbb{R}$, definido por $J(u) = \displaystyle\int_{(0,1)} u^2(x)d\mu$ é Fréchet diferenciável.

Demonstração: Note que J está bem definido, pois $u \in L^2(0,1)$ (veja na Definição 2.28 que

$L^2(0,1)$ corresponde ao espaço de Lebesgue respectivo). Dessa forma, $\int_{(0,1)} u^2(x)d\mu < \infty$. Para verificar se J é Fréchet diferenciável, deve-se encontrar uma transformação linear $T : L^2(0,1) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\|h\|_{L^2}\to 0} \frac{|J(a+h) - J(a) - T(h)|}{\|h\|_{L^2}} = 0. \tag{3.4}$$

Observe que a norma é $\|h\|_{L^2}$, já que o espaço considerado é o $L^2(0,1)$. Lembrando que a norma em $L^2(0,1)$ é

$$\|h\|_{L^2} = \left(\int_{(0,1)} |h|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}},$$

de (3.4), temos

$$\lim_{\|h\|_{L^2}\to 0} \frac{\left|\int_{(0,1)} (a+h)^2 d\mu - \int_{(0,1)} a^2 d\mu - T(h)\right|}{\sqrt{\int_{(0,1)} h^2 d\mu}} =$$

$$\lim_{\|h\|_{L^2}\to 0} \frac{\left|\int_{(0,1)} a^2 d\mu + 2\int_{(0,1)} ahd\mu + \int_{(0,1)} h^2 d\mu - \int_{(0,1)} a^2 d\mu - T(h)\right|}{\sqrt{\int_{(0,1)} h^2 d\mu}}.$$

Veja que $h \mapsto 2\int_{(0,1)} ahd\mu$ é linear em h, assim, seria interessante definir a transformação $T : L^2(0,1) \to \mathbb{R}$ por $T(h) = 2\int_{(0,1)} ahd\mu$, obtendo

$$\lim_{\|h\|_{L^2}\to 0} \frac{\left|2\int_{(0,1)} ahd\mu + \int_{(0,1)} h^2 d\mu - 2\int_{(0,1)} ahd\mu\right|}{\sqrt{\int_{(0,1)} h^2 d\mu}}.$$

Assim,

$$\lim_{\|h\|_{L^2}\to 0} \frac{\left|\int_{(0,1)} h^2 d\mu\right|}{\sqrt{\int_{(0,1)} h^2 d\mu}} = \lim_{\|h\|_{L^2}\to 0} \sqrt{\int_{(0,1)} h^2 d\mu} = 0.$$

Portanto, como a derivada é única pela Proposição 3.9, segue que J é Fréchet diferenciável no ponto a e sua derivada a Fréchet é a transformação linear dada por $J'(a)h = 2\int_{(0,1)} ahd\mu$. $\square$

Na próxima seção, falaremos a respeito dos espaços de Sobolev, um dos conceitos mais importantes deste capítulo e o exemplo mais relevante de espaços de Banach que poderíamos dar.

3.3 Espaços de Sobolev

O espaço de Sobolev é um espaço de funções onde vamos procurar soluções de algumas equações diferenciais ordinárias. Para isso, a definição apresentada abaixo trata-se do conceito dos espaços de Sobolev.

Definição 3.13. *Sejam $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$. Considere*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int_\Omega u\varphi' d\mu = -\int_\Omega g\varphi d\mu, \forall \varphi \in C_0^1(\Omega) \right\}.$$

Esse espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é denominado de espaço de Sobolev. Note que, para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, a função $g \in L^p(\Omega)$ é exatamente a derivada fraca de u, ou seja, $g = u'$.

Pelas propriedades lineares da derivada fraca, não é difícil mostrar que $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial.

Observação 3.14. *Para o caso em que $p = 2$, vamos denotar $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.*

Observação 3.15. *Vale muito salientar aqui que a definição de espaço de Sobolev requer apenas que exista a primeira derivada fraca da função. Portanto, isso faz com que, num certo sentido, passemos a "procurar" funções num espaço ainda maior, já que a derivada clássica implica na derivada fraca e o contrário não é verdade.*

Nos Espaços de Sobolev, vamos considerar as seguintes normas

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u'\|_{L^p}^p + \|u\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Já no espaço $H^1(\Omega)$, temos a norma

$$\|u\|_{H^1} = (\|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposição 3.16. *Para $1 \leq p < \infty$, o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Veja a prova na bibliografia [13], Proposição 8.1. □

A título de curiosidade, $H^1(\Omega)$ é um espaço de Banach, pois, como visto na Proposição 3.16, $H^1(\Omega)$ é um caso particular de $W^{1,p}(\Omega)$. Além disso, o espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ pode ser visto como o conjunto das funções $u \in L^2(\Omega)$ que possuem a primeira derivada no sentindo fraco em $L^2(\Omega)$, ou seja, $u' \in L^2(\Omega)$. Abaixo, veja exemplos de funções em $H^1(\Omega)$.

Exemplo 3.17. A função $u(x) = x^2$ no intervalo $\Omega = (-5, 5)$, pertence ao espaço $H^1(\Omega)$. Nesse exemplo, como $u \in L^2(\Omega)$ e u possui derivada fraca (pois possui derivada clássica) também em $L^2(\Omega)$. Então, $u \in H^1(\Omega)$.

Agora, em seguida, observe uma função que não pertence a $H^1(\Omega)$.

Exemplo 3.18. A função $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no intervalo $\Omega = (0, 1)$ não pertence ao espaço $H^1(\Omega)$. Não é difícil ver que $u \notin L^2(\Omega)$, então $u \notin H^1(\Omega)$.

Exemplo 3.19. Prove que $J : H^1(a, b) \to \mathbb{R}$, dado por $J(u) = \frac{1}{2}\int_{(a,b)} (u')^2 d\mu + \frac{1}{2}\int_{(a,b)} u^2 d\mu$, é Fréchet diferenciável.

Demonstração: Vamos separar $J(u)$ em $J_1(u)$ e $J_2(u)$, com o intuito de facilitar a resolução. De tal modo que

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int_{(a,b)} (u')^2 d\mu \;\text{ e }\; J_2(u) = \frac{1}{2}\int_{(a,b)} u^2 d\mu.$$

De modo análogo ao Exemplo 3.12, seja $J_1 : H^1(a, b) \to \mathbb{R}$, tem-se que J_1 está bem definida, já que $u' \in L^2$. Com isso, $J_1(u) = \frac{1}{2}\int_{(a,b)} (u')^2 d\mu < \infty$. Para saber se J_1 é Fréchet diferenciável, é necessário encontrar uma transformação linear $T_1 : H^1(a, b) \to \mathbb{R}$ que satisfaça o limite

$$\lim_{\|h\|_{H^1}\to 0} \frac{\frac{1}{2}\int_{(a,b)} [(a+h)']^2 d\mu - \frac{1}{2}\int_{(a,b)} (a')^2 d\mu - T_1(h)}{\sqrt{\int_{(a,b)} (h')^2 d\mu + \int_{(a,b)} h^2 d\mu}} = 0.$$

Lembre que a norma em $H^1(a, b)$ é

$$\|h\|_{H^1} = (\|h'\|_{L^2}^2 + \|h\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{(a,b)} (h')^2 d\mu + \int_{(a,b)} h^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pela propriedade de derivada fraca $(a + h)' = a' + h'$, temos

$$\lim_{\|h\|_{H^1}\to 0} \frac{\frac{1}{2}\int_{(a,b)} (a'+h')^2 d\mu - \frac{1}{2}\int_{(a,b)} (a')^2 d\mu - T_1(h)}{\sqrt{\int_{(a,b)} (h')^2 d\mu + \int_{(a,b)} h^2 d\mu}} =$$

$$\lim_{\|h\|_{H^1}\to 0} \frac{\frac{1}{2}\int_{(a,b)} (a')^2 d\mu + \frac{1}{2}2\int_{(a,b)} a'h' d\mu + \frac{1}{2}\int_{(a,b)} (h')^2 d\mu - \frac{1}{2}\int_{(a,b)} (a')^2 d\mu - T_1(h)}{\sqrt{\int_{(a,b)} (h')^2 d\mu + \int_{(a,b)} h^2 d\mu}}.$$

Como $\displaystyle\int_{(a,b)} a'h'd\mu$ é linear em h', pode-se definir uma transformação linear $T_1 : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por $T_1(h) = \displaystyle\int_{(a,b)} a'h'd\mu$. Fazendo a substituição,

$$\lim_{\|h\|_{H^1}\to 0} \frac{\displaystyle\int_{(a,b)} a'h'd\mu + \frac{1}{2}\int_{(a,b)} (h')^2 d\mu - \int_{(a,b)} a'h'd\mu}{\sqrt{\displaystyle\int_{(a,b)} (h')^2 d\mu + \int_{(a,b)} h^2 d\mu}} = \lim_{\|h\|_{H^1}\to 0} \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_{(a,b)} (h')^2 d\mu}{\sqrt{\displaystyle\int_{(a,b)} (h')^2 d\mu + \int_{(a,b)} h^2 d\mu}}.$$

Pela seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{\|h\|_{H^1}\to 0} \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_{(a,b)} (h')^2 d\mu}{\sqrt{\displaystyle\int_{(a,b)} (h')^2 d\mu + \int_{(a,b)} h^2 d\mu}} &\leq \lim_{\|h\|_{H^1}\to 0} \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_{(a,b)} (h')^2 d\mu}{\sqrt{\displaystyle\int_{(a,b)} (h')^2 d\mu}} \\ &\leq \lim_{\|h\|_{H^1}\to 0} \frac{1}{2}\sqrt{\int_{(a,b)} (h')^2 d\mu} \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{\|h\|_{H^1}\to 0} \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_{(a,b)} (h')^2 d\mu}{\sqrt{\displaystyle\int_{(a,b)} (h')^2 d\mu + \int_{(a,b)} h^2 d\mu}} = 0.$$

Pelo Exemplo 3.12, o funcional J_2 é Fréchet diferenciável e sua derivada é $T_2 : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é dada por $T_2(h) = \displaystyle\int_{(a,b)} ahd\mu$. Portando, $J = J_1 + J_2$ é Fréchet diferenciável e sua derivada a Fréchet é a transformação linear $J'(u)h = \displaystyle\int_{(a,b)} a'h'd\mu + \int_{(a,b)} ahd\mu$. □

Capítulo 4
Métodos Variacionais

Neste capítulo, apresentaremos a essência do nosso trabalho: utilizar os métodos variacionais na resolução de edo's. Aqui, mostraremos o Teorema do Passo da Montanha, considerado o mais importante teorema relacionado aos métodos variacionais. A construção deste capítulo foi baseada nas referências [13, 18, 19].

4.1 Teorema do Passo da Montanha

O Teorema do Passo da Montanha (TPM) é atribuído a Ambrosetti-Rabinowitz e estabelece condições para a existência de pontos críticos de um funcional. Assim, dado um funcional J, esse teorema fornece circunstâncias nas quais J tem ponto crítico. Abaixo, enunciamos esse teorema.

Teorema 4.1 (Teorema do Passo da Montanha)**.** *Seja E um espaço de Banach e $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição de Palais-Smale (PS). Suponha que $J(0) = 0$ e que as seguinte condições sejam satisfeitas*

1. $\exists\, \rho, \gamma > 0$*, tais que* $J(u) \geq \gamma$ *quando* $\|u\| = \rho$*.*

2. $\exists\, e \notin B_\rho$*, tal que* $J(e) \leq 0$*,*

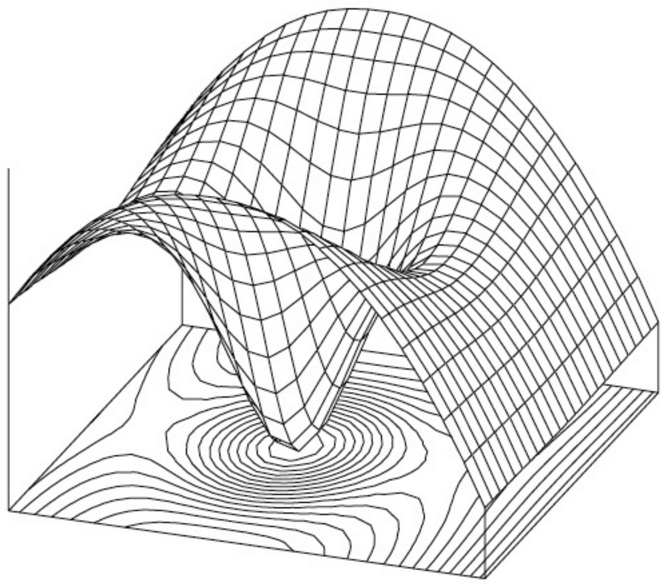
então J possui um valor crítico $c \geq \gamma$, com

$$c = \inf_{\alpha \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\alpha(t)),$$

sendo $\Gamma = \{\alpha \in C([0,1], E) |\ \alpha(0) = 0, \alpha(1) = e\}$*.*

O motivo do qual o teorema se chama Passo da Montanha segue na figura abaixo.

Figura 1 - Uma visão do TPM



Fonte: [18], página 66.

> Considere dois vales A e B tais que A é cercado por uma cordilheira que o separa de B. Para ir de A a B, devemos cruzar a cadeia de montanhas. Se quisermos subir o mínimo possível, teremos que considerar a elevação máxima de cada caminho. O caminho com o mínimo (dessas elevações máximas) cruzará o passo da montanha ([18], tradução do autor).

Veremos duas definições importantes a seguir. A primeira é sobre sequências de Palais-Smale (PS) de um funcional $J : E \to \mathbb{R}$ e a segunda, sobre o funcional J satisfazer a condição de Palais-Smale (ou apenas condição (PS)).

Definição 4.2. *Chamamos* $(u_n) \subset E$ *de sequência de Palais-Smale do funcional* $J : E \to \mathbb{R}$ *se* $J(u_n) \to c \in \mathbb{R}$ *e* $J'(u_n) \to 0$ *quando* $n \to +\infty$.

Definição 4.3. *O funcional* $J : E \to \mathbb{R}$ *satisfaz a condição de Palais-Smale se, dada qualquer sequência* $(u_n) \subset E$ *de Palais-Smale de* J*, ou seja, qualquer sequência verificando* $J(u_n) \to c \in \mathbb{R}$ *e* $J'(u_n) \to 0$ *quando* $n \to +\infty$*, então* (u_n) *possui uma subsequência que converge em* E.

Em nosso contexto, vale ressaltar que essa condição se resume a mostrar que (u_n) possui uma subsequência limitada (ou ela mesma o é). Quando $J'(u_n) \to 0$ queremos dizer que $\|J'(u_n)\|_{E^*} \to 0$ quando $n \to +\infty$, onde a norma em $E^* = L(E, \mathbb{R})$ (chamado de dual do espaço E) é definida como sendo

$$\|J'(u)\|_{E^*} = \sup_{\|h\|_E \leq 1} \frac{|J'(u)h|}{\|h\|_E}, \quad \forall\, u \in E.$$

Como J é um funcional linear contínuo, esse supremo sempre existe.

Lema 4.4. *Seja $T \in L(E, \mathbb{R})$ um funcional linear contínuo. Então, para todo elemento $u \in E$, vale que*

$$|T(u)| \leq \|T\|_{E^*}\|u\|_E.$$

Demonstração: Seja $u \neq 0$ um elemento de E. Então, $h = \dfrac{u}{\|u\|_E}$ tem norma igual a 1. Assim,

$$|T(h)| \leq \sup_{\|\tilde{h}\|_E \leq 1} \frac{|T(\tilde{h})|}{\|\tilde{h}\|_E} = \|T\|_{E^*}.$$

Com isso, substituindo h por $\dfrac{u}{\|u\|_E}$, segue da linearidade de T que

$$\frac{1}{\|u\|_E}|T(u)| = \left|T\left(\frac{u}{\|u\|_E}\right)\right| = |T(h)| \leq \|T\|_{E^*},$$

e isso implica que

$$|T(u)| \leq \|T\|_{E^*}\|u\|_E,$$

como queríamos demonstrar, pois o caso $u = 0$ é óbvio. $\square$

Exemplo 4.5. Calcule a norma $\|f'(2)\|_{\mathbb{R}^*}$, onde $f(x) = x^3$.

Resolução: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = x^3$. Já mostramos que a derivada de f no ponto $x = 2$ é igual a $f'(2)h = 12h$ (veja Exemplo 3.10). Sabendo que

$$\|f'(2)\|_{\mathbb{R}^*} = \sup_{\|h\| \leq 1} \frac{|f'(2)h|}{\|h\|},$$

temos

$$\|f'(2)\|_{\mathbb{R}^*} = \sup_{|h| \leq 1} \frac{|f'(2)h|}{|h|} = \sup_{|h| \leq 1} \frac{|12h|}{|h|} = \sup_{|h| \leq 1} \frac{12|h|}{|h|} = 12.$$

Portanto, a norma da derivada é $\|f'(2)\|_{\mathbb{R}^*} = 12$. $\square$

Exemplo 4.6. Prove que $\|J'(a)\|_{(H^1)^*} \leq 2\|a\|_{H^1}$, onde $J : H^1(a, b) \to \mathbb{R}$ é o funcional dado por $J(u) = \displaystyle\int_{(a,b)} (u')^2 d\mu$.

Demonstração: Seja $J \in H^1(a, b)$ e $J(u) = \displaystyle\int_{(a,b)} (u')^2 d\mu$, então pelo Exemplo 3.19 $J'(a)h = 2\displaystyle\int_{(a,b)} a'h d\mu$. Obtemos, então,

$$\|J'(a)\|_{(H^1)^*} = \sup_{\|h\|_{H^1} \leq 1} \frac{\left|2\displaystyle\int_{(a,b)} a'h d\mu\right|}{\|h\|_{H^1}}. \tag{4.1}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder (Teorema 2.29) e o fato de que $\|\cdot\|_{L^2} \leq \|\cdot\|_{H^1}$, temos

$$\|J'(a)\|_{(H^1)^*} = \sup_{\|h\|_{H^1}\leq 1} \frac{\left|2\int_{(a,b)} a'hd\mu\right|}{\|h\|_{H^1}} \leq \sup_{\|h\|_{H^1}\leq 1} \frac{2\left(\int_{(a,b)} |a'|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{(a,b)} |h|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}}{\|h\|_{H^1}}$$

$$\|J'(a)\|_{(H^1)^*} \leq \sup_{\|h\|_{H^1}\leq 1} 2\left(\int_{(a,b)} |a'|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|J'(a)\|_{(H^1)^*} \leq \sup_{\|h\|_{H^1}\leq 1} 2\|a'\|_{L^2} = 2\|a'\|_{L^2}.$$

Assim, $\|J'(a)\|_{(H^1)^*} \leq 2\|a\|_{H^1}$, como queríamos mostrar. □

Exemplo 4.7. Seja $J : L^2(0,1) \to \mathbb{R}$ o funcional definido por $J(u) = \int_{(0,1)} u^2 d\mu$. Então pelo Exemplo 3.19, sabemos que $J'(u)h = 2\int_{(0,1)} uhd\mu$ para todos $u, h \in L^2(0,1)$. Prove que a sequência $u_n(x) = x^n$, $0 < x < 1$ e $n \geq 1$, é uma sequência Palais-Smale para o funcional J.

Demonstração: Vamos mostrar que $J(u_n) \to c$ e $\|J'(u_n)\| \to 0$ quando $n \to +\infty$ para algum $c \in \mathbb{R}$. De fato, temos que

$$J(u_n) = \int_{(0,1)} (x^n)^2 d\mu.$$

Como neste caso a integral de Lebesgue coincide com a integral de Riemann, então

$$J(u_n) = \int_0^1 x^{2n} dx = \left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{2n+1}.$$

Calculando o limite quando $n \to +\infty$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$$

Portanto, $J(u_n) \to 0 = c$ quando $n \to +\infty$. Agora, para o outro caso, note que

$$\|J'(u_n)\|_{(L^2)^*} = \sup_{\|h\|_{L^2}\leq 1} \frac{|J'(u_n)h|}{\|h\|_{L^2}} = \sup_{\|h\|_{L^2}\leq 1} \frac{\left|2\int_{(0,1)} x^n hd\mu\right|}{\sqrt{\int_{(0,1)} h^2 d\mu}}.$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$0 \leq \sup_{\|h\|_{L^2}\leq 1} \frac{\left|2\displaystyle\int_{(0,1)} x^n h d\mu\right|}{\sqrt{\displaystyle\int_{(0,1)} h^2 d\mu}} \leq \frac{\displaystyle\sup_{\|h\|_{L^2}\leq 1} 2\left(\int_{(0,1)} x^{2n} d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{(0,1)} h^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\displaystyle\int_{(0,1)} h^2 d\mu}}$$

$$\leq 2\left(\int_{(0,1)} x^{2n} d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_0^1\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dessa forma, pelo teorema do Confronto,

$$\lim_{n\to\infty} \|J'(u_n)\|_{(L^2)^*} = \lim_{n\to\infty} \sup_{\|h\|_{L^2}\leq 1} \frac{\left|2\displaystyle\int_{(0,1)} x^n h d\mu\right|}{\sqrt{\displaystyle\int_{(0,1)} h^2 d\mu}} = 0,$$

o que mostra que (u_n) é, de fato, uma sequência de Palais-Smale para o funcional J. $\square$

Uma pergunta pertinente a se fazer é: qual a natureza (forma, gráfico, etc) das funções do espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$? Apesar da definição deste espaço ser abstrata, o próximo resultado fornece uma informação preciosa sobre propriedades das funções que estão em $H^1(\Omega)$. Ele é conhecido como imersão (contínua) de Sobolev e pode ser generalizado para conjuntos Ω diferentes de intervalos.

Lema 4.8. *Seja Ω um intervalo aberto limitado. Toda função em $H^1(\Omega)$ é uma função contínua, isto é, uma função em C^0. Mais do que isso,*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}),$$

e isso significa que existe uma constante $A > 0$ tal que $\|u\|_{C^0} \leq A\|u\|_{H^1}$, onde $\|u\|_{C^0} = \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$.

Demonstração: Veja a prova em [19], página 95. $\square$

Exemplo 4.9. Sejam $J : H^1(0,1) \to \mathbb{R}$ dado por $J(u) = \displaystyle\int_{(0,1)} u^2 d\mu$ e $u_n(x) = \sqrt{4n}x^n$, com $0 < x < 1$ e $n \geq 1$. Prove que (u_n) é uma sequência de Palais-Smale para J.

Demonstração: Vamos mostrar que $J(u_n) \to c$ e $\|J'(u_n)\| \to 0$ quando $n \to +\infty$ para algum $c \in \mathbb{R}$. Temos que

$$J(u_n) = \int_{(0,1)} (\sqrt{4n}x^n)^2 d\mu = \int_0^1 4nx^{2n} dx = 4n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_0^1 = \frac{4n}{2n+1}.$$

Calculando o limite quando $n \to +\infty$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{2n+1} = 2 = c.$$

Agora, vejamos a segunda condição. Note que

$$\|J'(u_n)\|_{(H^1)^*} = \sup_{\|h\|_{H^1}\leq 1} \frac{|J'(u_n)h|}{\|h\|_{H^1}} = \sup_{\|h\|_{H^1}\leq 1} \frac{2\left|\int_{(0,1)} \sqrt{4n}x^n h\right|}{\|h\|_{H^1}} = \sup_{\|h\|_{H^1}\leq 1} \frac{2\sqrt{4n}\left|\int_{(0,1)} x^n h\right|}{\|h\|_{H^1}}.$$

Pelo Lema 4.8, segue que

$$\|J'(u_n)\|_{(H^1)^*} = \sup_{\|h\|_{H^1}\leq 1} \frac{2\sqrt{4n}\left|\int_{(0,1)} x^n h d\mu\right|}{\|h\|_{H^1}} \leq \sup_{\|h\|_{H^1}\leq 1} \frac{2\sqrt{4n}\|h\|_{C^0}\left|\int_{(0,1)} x^n d\mu\right|}{\|h\|_{H^1}}.$$

Novamente pelo Lema 4.8, conseguimos

$$\begin{aligned}\|J'(u_n)\|_{(H^1)^*} \leq \sup_{\|h\|_{H^1}\leq 1} \frac{2\sqrt{4n}\|h\|_{C^0}\left|\int_{(0,1)} x^n d\mu\right|}{\|h\|_{H^1}} &\leq \sup_{\|h\|_{H^1}\leq 1} 2\sqrt{4n}A\int_{(0,1)} x^n d\mu \leq 2\sqrt{4n}A\int_{(0,1)} x^n d\mu \\ &= 2\sqrt{4n}A \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{4A\sqrt{n}}{n+1}.\end{aligned}$$

Portanto, $\|J'(u_n)\|_{(H^1)^*} \to 0$ quando $n \to +\infty$. □

4.2 Uma aplicação do Teorema do Passo da Montanha

Nesta seção, veremos uma aplicação do Teorema do Passo da Montanha (TPM) na resolução de equações diferencias ordinárias. Para isso, considere o problema

$$\begin{cases} -u'' + u = t^2 u|u|^{3/2}, t \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{P}$$

Antes de começar a resolução, ressaltamos que o problema (P) não pode ser estudado diretamente por meio dos métodos clássicos de resolução de edo's que estudamos na graduação (fator integrante, equações separáveis, exatas, etc). Isso também mostra a força do TPM.

Pra resolvermos a equação (P), vamos determinar a existência de uma solução fraca que não seja a solução nula. Separaremos por itens.

1) Determine a equação que define as soluções fracas de (P).

Resolução: Uma solução forte (clássica) para P é uma função $u \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ que satisfaz

(P) pontualmente. Ou seja, a solução forte é duas vezes diferenciável e sua derivada segunda é contínua. No entanto, pode-se reformular o problema de modo a exigir menos da função u para encontrar a equação que define a solução fraca de (P). Seja $\varphi \in C_0^1(0,1)$ (lembre que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$), multiplicando a equação por φ e integrando por partes, temos

$$-u'' + u = t^2 u|u|^{3/2}$$

$$-u''\varphi + u\varphi = t^2 u|u|^{3/2}\varphi$$

$$-\int_{(0,1)} u''\varphi d\mu + \int_{(0,1)} u\varphi d\mu = \int_{(0,1)} t^2 u|u|^{3/2}\varphi d\mu$$

$$-\left(\varphi u' - \int_{(0,1)} u'\varphi' d\mu\right) + \int_{(0,1)} u\varphi d\mu = \int_{(0,1)} t^2 u|u|^{3/2}\varphi d\mu$$

$$-\varphi u' + \int_{(0,1)} u'\varphi' d\mu + \int_{(0,1)} u\varphi d\mu = \int_{(0,1)} t^2 u|u|^{3/2}\varphi d\mu$$

$$-\varphi(1)u'(1) + \varphi(0)u'(0) + \int_{(0,1)} u'\varphi' d\mu + \int_{(0,1)} u\varphi d\mu = \int_{(0,1)} t^2 u|u|^{3/2}\varphi d\mu.$$

Como $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, vamos chamar de (P') a equação

$$\int_{(0,1)} u'\varphi' d\mu + \int_{(0,1)} u\varphi d\mu = \int_{(0,1)} t^2 u|u|^{3/2}\varphi d\mu, \forall \varphi \in C_0^1(0,1), \qquad (P')$$

que é a equação que define as soluções fracas de (P). Lembrando que, se u é solução clássica de (P), então u é solução fraca de (P'). Dessa forma, usamos (P') para encontrar soluções de (P). □

2) Determine o funcional $J : H^1(0,1) \to \mathbb{R}$ cuja derivada nula (pontos críticos) são exatamente as soluções fracas da equação (P), ou seja, soluções de (P').

Resolução: Como a equação (P') pode ser reescrita como

$$\int_{(0,1)} u'\varphi' d\mu + \int_{(0,1)} u\varphi d\mu - \int_{(0,1)} t^2 u|u|^{3/2}\varphi d\mu = 0, \forall \varphi \in C_0^1(0,1), \qquad (P')$$

podemos igualar a equação por

$$J'(u)\varphi = \int_{(0,1)} u'\varphi' d\mu + \int_{(0,1)} u\varphi d\mu - \int_{(0,1)} t^2 u|u|^{3/2}\varphi d\mu.$$

Assim, o funcional J deve ser tal que $J'(u)\varphi = 0$ para toda $\varphi \in C_0^1(0,1)$. Ou seja, J é o funcional tal que sua derivada em u e numa direção φ seja dada pela equação anterior. Portanto, tomando

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{(0,1)} (u')^2 d\mu + \frac{1}{2}\int_{(0,1)} u^2 d\mu - \frac{2}{7}\int_{(0,1)} t^2|u|^{7/2} d\mu,$$

temos

$$J'(u)\varphi = \int_{(0,1)} u'\varphi' d\mu + \int_{(0,1)} u\varphi d\mu - \int_{(0,1)} t^2 u|u|^{3/2}\varphi d\mu.$$

Logo, as soluções de (P') são pontos críticos do funcional J. Uma observação importante é que J está bem definido, pois $u \in H^1(0,1)$ que está imerso (contido em) $C^0([0,1])$ pelo Lema 4.8. □

3) Agora, se (u_n) é uma sequência de Palais-Smale para o funcional J, mostre que (u_n) é limitada.

Resolução: Por hipótese, quando $n \to +\infty$, temos

$$J(u_n) \to c \tag{4.2}$$

e

$$J'(u_n) \to 0. \tag{4.3}$$

Como tese, temos que provar que (u_n) é limitada em $H^1(0,1)$. Ou seja,

$$\|u_n\|_{H^1} \leq B, \forall n \in \mathbb{N},$$

que, elevando ao quadrado, obtemos

$$\|u_n\|_{H^1}^2 \leq B^2.$$

Sabendo que

$$\|u_n\|_{H^1}^2 = \int_{(0,1)} (u')^2 d\mu + \int_{(0,1)} u^2 d\mu,$$

pela definição de $J(u_n)$ e $J'(u_n)$, temos

$$J(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|_{H^1}^2 - \frac{2}{7}\int_{(0,1)} t^2 |u_n|^{7/2} d\mu. \tag{4.4}$$

$$J'(u_n)u_n = \|u_n\|_{H^1}^2 - \int_{(0,1)} t^2 u_n^2 |u_n|^{3/2} d\mu. \tag{4.5}$$

Operando $(4.4) - \dfrac{2}{7}(4.5)$, vem que

$$\begin{aligned} J(u_n) - \frac{2}{7}J'(u_n)u_n &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{H^1} - \frac{2}{7}\int_{(0,1)} t^2|u_n|^{7/2}d\mu - \left(\frac{2}{7}\|u_n\|^2_{H^1} - \frac{2}{7}\int_{(0,1)} t^2u_n^2|u_n|^{3/2}d\mu\right) \\ &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{H^1} - \frac{2}{7}\|u_n\|^2_{H^1} \\ &= \frac{3}{14}\|u_n\|^2_{H^1}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Note que por (4.3), temos $\|J'(u_n)\|_{(H^1)^*} \to 0$ quando $n \to +\infty$, isto é, $\|J'(u_n)\|_{(H^1)^*}$ é tão pequeno quanto se queira, bastando aumentar o valor de n suficientemente. Logo, pelo Lema 4.4, temos

$$\begin{aligned} |J'(u_n)u_n| &\leq \|J'(u_n)\|_{(H^1)^*}\|u_n\|_{H^1} \\ &\leq \varepsilon\|u_n\|_{H^1} \\ &\leq 1\|u_n\|_{H^1}, \end{aligned}$$

para n suficientemente grande tal que $n > n_0$. Assim, para tais valores de n,

$$-J'(u_n)u_n \leq |J'(u_n)u_n| \leq \|u_n\|_{H^1}. \tag{4.7}$$

Agora, aplicando (4.7) em (4.6), segue que

$$J(u_n) - \frac{2}{7}J'(u_n)u_n = \frac{3}{14}\|u_n\|^2_{H^1} \leq \frac{2}{7}\|u_n\|_{H^1} + J(u_n) \Rightarrow$$

$$\frac{3}{14}\|u_n\|^2_{H^1} \leq \frac{2}{7}\|u_n\|_{H^1} + J(u_n).$$

Por (4.2), $(J(u_n))$ é uma sequência convergente. Como toda sequência convergente, ela é limitada e, então, existe uma constante $D > 0$ tal que

$$\frac{3}{14}\|u_n\|^2_{H^1} \leq \frac{2}{7}\|u_n\|_{H^1} + D, \forall n \geq n_0. \tag{4.8}$$

Supondo, por contradição, que $\|u_n\|_{H^1} \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, dividindo (4.8) por $\|u_n\|^2_{H^1} \neq 0$, obtemos

$$\frac{3}{14} \leq \frac{2}{7}\frac{1}{\|u_n\|_{H^1}} + \frac{D}{\|u_n\|_{H^1}}.$$

Fazendo $n \to +\infty$, temos $\frac{3}{14} \leq 0$, o que é um absurdo. Portando, (u_n) é limitada (ou possui uma subsequência que o é). $\square$

4) Encontre um número $\gamma > 0$ tal que $J(u) \geq \gamma$ sempre que $\|u\|_{H^1} = \rho$, para algum $\rho > 0$.

Resolução: Da definição do funcional J, temos

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{2}{7}\int_{(0,1)} t^2|u|^{7/2}d\mu.$$

Como $0 > -t^2 > -1$, então

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{2}{7}\int_{(0,1)} |u|^{7/2}d\mu. \tag{4.9}$$

Pelo Lema 4.8 e pela propriedade (2.2), obtemos

$$\frac{2}{7}\int_{(0,1)} |u|^{7/2}d\mu \leq \frac{2}{7}\left(\max_{[0,1]}|u|\right)^{7/2}\int_{(0,1)} 1d\mu = \frac{2}{7}\|u\|_{C^0}^{7/2}(1-0) \leq \frac{2}{7}A\|u\|_{H^1}^{7/2}.$$

Portanto,

$$\frac{2}{7}\int_{(0,1)} |u|^{7/2}d\mu \leq \frac{2}{7}A\|u\|_{H^1}^{7/2}. \tag{4.10}$$

Aplicando (4.10) em (4.9), vem que

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{2}{7}\int_{(0,1)} |u|^{7/2}d\mu \geq \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{2}{7}A\|u\|_{H^1}^{7/2}.$$

Seja $\|u\|_{H^1} = \rho > 0$. Então,

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{2}{7}A\rho^{7/2}.$$

Note que, para $\rho > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{2}{7}A\rho^{7/2} > 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\rho^2 > \frac{2}{7}A\rho^{7/2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{2}{7}A\rho^{3/2} \\ &\Leftrightarrow \frac{7}{4A} > \rho^{3/2} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{7}{4A}\right)^{2/3} > \rho. \end{aligned}$$

Dessa forma, se tomarmos $0 < \rho < \left(\frac{7}{4A}\right)^{2/3}$ com $\|u\|_{H^1} = \rho$, teremos

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{2}{7}A\rho^{7/2} := \gamma > 0.$$

□

5) Seja $u \neq 0$ em $H^1(0,1)$. Prove que $J(su) \to -\infty$ quando $s \to +\infty$.

Resolução: Da definição de J, temos que

$$\begin{aligned}
J(su) &= \frac{1}{2}\int_{(0,1)} s^2(u')^2 d\mu + \frac{1}{2}\int_{(0,1)} s^2u^2 d\mu - \frac{2}{7}\int_{(0,1)} t^2 s^{7/2}|u|^{7/2} d\mu \\
&= \frac{s^2}{2}\int_{(0,1)} (u')^2 d\mu + \frac{s^2}{2}\int_{(0,1)} u^2 d\mu - \frac{2s^{7/2}}{7}\int_{(0,1)} t^2|u|^{7/2} d\mu \\
&= \frac{s^2}{2}\left(\int_{(0,1)} (u')^2 d\mu + \int_{(0,1)} u^2 d\mu\right) - \frac{2s^{7/2}}{7}\int_{(0,1)} t^2|u|^{7/2} d\mu \\
&= \frac{s^2}{2}M - \frac{2s^{7/2}}{7}N.
\end{aligned}$$

Como as potências maiores prevalecem no infinito, então, quando $s \to +\infty$, $J(su) \to -\infty$. $\square$

Agora, vamos colocar o nosso problema nas condições do Teorema 4.1. Considere $E = H^1(0,1)$. Como dito na Proposição 3.16, $E = H^1(0,1)$ é um espaço de Banach. Além disso, J é um funcional de classe C^1 (possui derivada e sua derivada é contínua) e $J(0) = 0$, pois

$$J(0) = \frac{1}{2}\int_{(0,1)} (0')^2 d\mu + \frac{1}{2}\int_{(0,1)} 0^2 d\mu - \frac{2}{7}\int_{(0,1)} t^2|0|^{7/2} d\mu = 0.$$

Dos itens 1) e 2), mostramos que o funcional J está associado à edo (P), e do item 3), toda sequência de Palais-Smale para J é uma sequência limitada, o que é suficiente para satisfazer a condição de Palais-Smale. Já no item 4), achamos um $\gamma > 0$ tal que $J(u) \geq \gamma$ quando $\|u\|_{H^1} = \rho > 0$. E, por último, dado qualquer $u \neq 0$, o item 5) garante que existe $s > 0$, suficientemente grande, tal que $J(su) < 0$. Assim, coincide $su = e \in H^1(0,1)$ e tal que $e \notin B_\rho(0)$, isto é, $\|e\|_{H^1} > \rho$. Portanto, estamos dentro das condições do Teorema do Passo da Montanha, que garante que existe um ponto crítico do funcional J que é uma solução fraca para a edo (P). Ou seja,

$$\exists u_0 \in H^1(0,1) \mid J'(u_0)\varphi = 0$$

e

$$J(u_0) = c = \inf_{\alpha\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J(\alpha(t)),$$

onde $\Gamma = \{\alpha \in C([0,1], E) |\ \alpha(0) = 0, \alpha(1) = e\}$. Além disso, $u_0 \neq 0$, do contrário, teríamos $c = J(u_0) = J(0) = 0$, o que é absurdo, pois $c \geq \gamma > 0$. Dessa forma, u_0 é uma solução fraca não nula da edo (P) e c é o nível dessa solução. Isso resolve a equação (P) no sentido fraco.

Para finalizar o trabalho, deixamos um exercício para o leitor interessado.

Resolva, via Métodos Variacionais, a seguinte edo.

$$\begin{cases} -u'' + u = \cos(t)u|u|^{3/2} + f(t)u^7, t \in (-\pi, \pi) \\ u(-\pi) = u(\pi) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

onde $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ é uma função limitada.

Capítulo 5
Considerações Finais

Nessa investigação, procuramos introduzir os métodos variacionais através de sua aplicação na resolução de edo's. Assim, esta pesquisa teve como objetivo principal resolver uma classe de edo's pelos métodos variacionais. Para isso, apresentamos conceitos importantes de Teoria da Medida e Análise Funcional para a construção do nosso objeto de estudo.

Ressalta-se que esse trabalho é fruto do PIBIC (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica), realizado no período de 01 de agosto de 2020 a 31 de julho de 2021. Dessa forma, essa monografia é resultado de um ano de pesquisa, onde procuramos destacar os pontos principais do estudo com o intuito de responder nossa problemática.

Quanto aos procedimentos, essa pesquisa se designa como bibliográfica e exploratória. Além disso, utilizamos a abordagem qualitativa para responder à seguinte problemática: Como resolver equações diferenciais ordinárias utilizando os métodos variacionais?

Inicialmente, encontramos um funcional associado a uma edo e verificamos a existência de pontos críticos. Caso existam, denominam-se solução fraca da edo em questão. Destaca-se que uma solução fraca coincide com um ponto crítico, o que implica dizer que os métodos variacionais se preocupam em encontrar tais pontos críticos, ou seja, o ponto no qual a derivada do funcional é nula. Além disso, por curiosidade, existem edo's que podem ser solucionadas tanto pelos métodos tradicionais de resolução como pelos variacionais.

O principal resultado do trabalho é o Teorema do Passo da Montanha, que é conhecido como teorema do tipo minimax, para encontrar pontos críticos. Logo, no caso em que todas as condições do teorema são satisfeitas, a edo possui solução fraca. Para transformar a solução fraca em uma solução forte (clássica), é necessário o estudo de outra teoria, o que não é o objetivo desse trabalho.

Para determinar a solução da edo norteadora, é necessário estender o espaço onde buscamos solução, pois o espaço das funções de classe C^2 é muito restrito, sendo preciso procurar em um espaço maior, denominado espaço de Sobolev, de modo específico, o $H^1(\Omega)$. Com esse intuito, estudamos os conceitos de medida e espaço de Lebesgue, já que uma nova definição de derivada é apresentada: a derivada fraca. Essa definição estende a definição usual, a saber, toda função que possui derivada no sentido clássico tem derivada no sentido fraco e ambas coincidem. No entanto, não vale o contrário.

Durante a pesquisa, observamos que há poucos materiais, nível de graduação, que abordam os métodos variacionais e sua aplicação na resolução de edo's, sendo a maioria trabalhos de natureza avançada voltados para a pós-graduação. Com isso, essa monografia pode servir como material de pesquisa para quem pretende começar os estudos sobre os métodos variacionais e suas aplicações.

Ademais, o trabalho foi estudado em intervalos na reta, podendo, a quem se interessar, estender o estudo das equações em $\mathbb{R}^n$, por exemplo. Além de aplicar os métodos variacionais em outros tipos de equações, que não sejam necessariamente edo's.

Portanto, com essa pesquisa, esperamos que o leitor conheça um outro método de resolução de edo's que seja diferente dos métodos clássicos aprendidos em cursos superiores.

Por fim, conclui-se que a temática escolhida foi bastante desafiadora, proporcionando aprender novos conceitos não vistos na graduação e, ao mesmo tempo, possibilitando formar uma base consolidada de estudos avançados na área de Matemática.

Referências

[1] LIMA, Gabriel Loureiro de. **Cálculo variacional:** problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos. 2004. 197 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, 2004.

[2] VIRGÍLIO. **Eneida**. Tradução (Manuel Odorico Mendes). São Paulo: Atena Editora, 1956.

[3] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução (Hygino H. Domingues). 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 1997.

[4] FLORES, Ana Paula Ximenes. **Cálculo variacional:** aspectos teóricos e aplicações. 2011. 69 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidaade Estadual Paulista, Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Rio Claro, 2011.

[5] SOUSA JÚNIOR, José Ribamar Alves de. **O Cálculo Variacional e o Problema da Braquistócrona**. 2010. 44 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2010.

[6] PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico:** métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013, 276 p. 2013. E-book. ISBN 978-85-7717-158-3. Disponível em: <https://www.feevale.br/institucional/editora-feevale/metodologia-do-trabalho-cientifico—2-edicao >. Acesso em: 15 maio. 2021.

[7] MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

[8] LIMA, Elon Lages. **Análise Real volume 1**: funções de uma variável. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[9] BARTLE, Robert G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. New York: John Wiley & Sons, 1995.

[10] COELHO, Emanuela Régia de Sousa. **Introdução à Integral de Lebesgue**. 2012. 59 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 2012.

[11] CABRAL, Marco A. P. **Introdução à Teoria da Medida e Integral de Lebesgue**. 3. ed. Rio de Janeiro: [s.n], 2016. Disponível em:<labma.ufrj.br/ mcabral/livros/livro-medida/medida-V2009.pdf>. Acesso em: 30 maio. 2021.

[12] CARVALHO, Thafne Sirqueira; OLIVEIRA JUNIOR, José Carlos de. A função módulo $|x|$ possui derivada. **Open Journal Of Mathematics And Physics**, Araguaína, v. 2, n. 188, p. 1-11, nov. 2020.

[13] BREZIS, Haim. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2010.

[14] LUIZ, Nayara Caroline. **Diferenciabilidade em Espaços de Banach**. 2018. 53 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau, 2018.

[15] AGUIAR, R.; FIGUEIREDO, E. B.; HAVEROTH, G. A. Considerações sobre as derivadas de Gâteaux e Fréchet. **CQD – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 9, p. 32-48, jul. 2017.

[16] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[17] VIEIRA, Flávia Shirley Tavares. **Sequências de Cauchy em Espaços Métricos e os Espaços de Banach**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 2014.

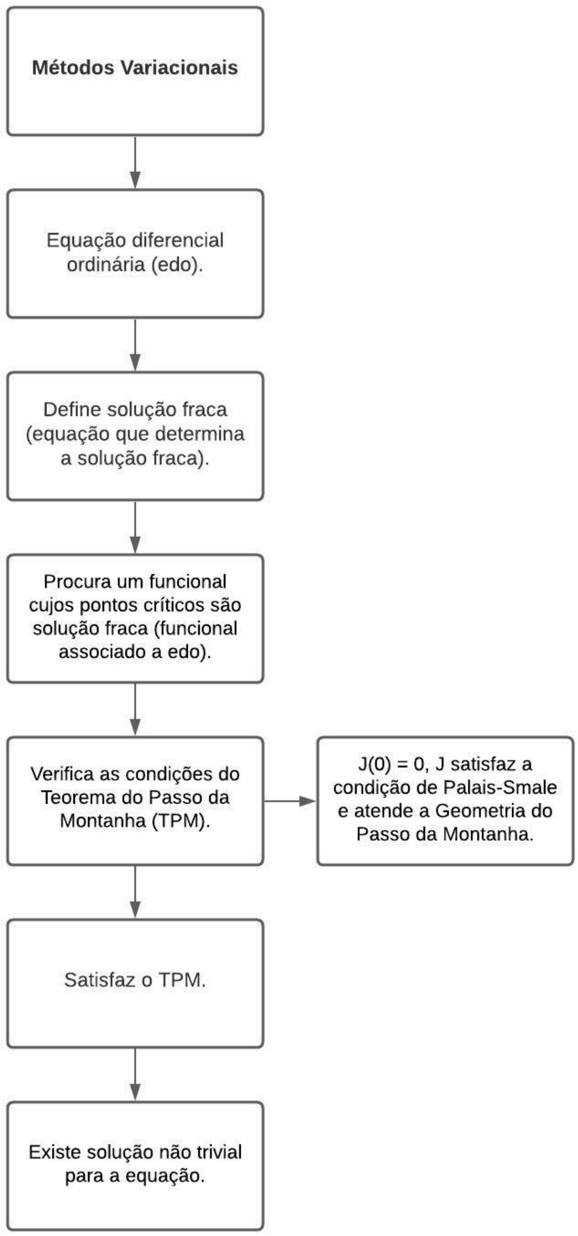
[18] JABRI, Youssef. **The Mountain Pass Theorem:** variants, generalizations and some applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[19] FURTADO, Marcelo. **Notas de EDP2**. Universidade de Brasília, Departamento de Matemática, 2012. Disponível em: <https://www.mat.unb.br/ furtado/homepage/notas-edp2.pdf>. Acesso em: 02 jul. 2021.

Apêndice

A seguir, apresentamos um diagrama que mostra um tipo de passo a passo para a resolução de uma edo via Métodos Variacionais.

Figura 2 - Passos para resolver edo pelo método variacional



Fonte: Arquivo pessoal.