UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**CARLOS EDUARDO COSTA MAGALHÃES**

# O TEOREMA DE PITÁGORAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Araguaína-TO
2020

**CARLOS EDUARDO COSTA MAGALHÃES**

# O TEOREMA DE PITÁGORAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Msc. André Luiz Ortiz da Silva.

Araguaína-TO
2020

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins**

C837t Costa Magalhães, Carlos Eduardo.
O TEOREMA DE PITÁGORAS E ALGUMAS APLICAÇÕES. / Carlos Eduardo Costa Magalhães. – Araguaína, TO, 2020.
34 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2020.
Orientador: Prof. Msc. André Luiz Ortiz da Silva

1. A importância do teorema de Pitágoras. 2. Uma breve historia de Pitágoras. 3. Demonstração do teorema de Pitágoras. 4. Aplicações do teorema de Pitágoras. I. Título

**CDD 510**



**Elaborado pelo sistema de geração automatica de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).**

CARLOS EDUARDO COSTA MAGALHÃES

**O TEOREMA DE PITÁGORAS E ALGUMAS APLICAÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em _____/_____/________.

BANCA EXAMINADORA

_______________________________________________

Prof. Msc. André Luiz Ortiz da Silva.

_______________________________________________

Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hancco

_______________________________________________

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Júnior

“Dedico este trabalho de pesquisa aos meus pais. Sua grande força foi a mola propulsora que permitiu o meu avanço, mesmo durante os momentos mais difíceis. Agradeço do fundo do meu coração.”

## AGRADECIMENTOS

Á Deus que até aqui me ajudou e me deu forças.

Aos meus Pais que estiveram sempre do meu lado nas horas mais difíceis, palavras são poucas para agradecer eles por tudo.

Aos meus colegas e amigos de turma que sempre ajudavam uns aos outros sem medir esforços, muito obrigado pessoal vocês são pessoas muito especiais para mim.

A cada um dos professores que sempre procuraram meios de nos ajudar e nos torna pessoas melhores que nunca se deixa levar pelos pensamentos alheios.

Ao Prof. Msc. André Luiz Ortiz da Silva em especial sendo meu orientador que sempre esteve muito presente nesse trabalho fazendo de tudo pra que esse trabalho fosse entregue.

*"Ninguém caminha sem aprender a caminhar, sem aprender a fazer o caminho caminhando, refazendo e retocando o sonho pelo qual se pôs a caminhar."*

(Paulo Freire)

## RESUMO

Neste trabalho de conclusão de curso é apresentado o teorema de Pitágoras e algumas aplicações com o papel de facilitar a interação no cotidiano escolar e social e evidenciar como ele transformou a sociedade dando novas características e soluções de problemas. Inicialmente são colocados apontamentos que nos mostram a importância de Geometria para o desenvolvimento da humanidade principalmente nas séries iniciais, e também um pouco da história de Pitágoras que pra muitos não passa de lendas/mitos da época. Na sequência, serão descritas algumas demonstrações do teorema baseando-se no pensamento de grandes autores. As aplicações apresentadas são exemplos utilizados no ensino escolar e no cotidiano das pessoas, de forma que deixem mais claras as ideias com base nas resoluções apresentadas no decorrer deste estudo. Com isso auxiliar os estudantes e trazer um norteamento concreto sobre o teorema de Pitágoras, como se demonstra, como se aplica, e que sirva de fonte de pesquisas.

**Palavras-chave:** Teorema de Pitágoras, Demonstrações, Aplicações.

## ABSTRACT

In this course conclusion work, the Pythagorean theorem and some applications with the role of facilitating interaction in school and social daily life and showing how it transformed society giving new characteristics and problem solutions are presented. Initially notes are placed that show us the importance of Geometry for the development of humanity mainly in the initial series, and also a little of the history of Pythagoras, which for many is nothing more than legends / myths of the time. In the sequence, some demonstrations of the theorem will be described based on the thinking of great authors. The applications presented are examples used in school education and in the daily lives of people, so that they clarify the ideas based on the resolutions presented in the course of this study. With this help the students and bring concrete guidance on the Pythagorean theorem, as shown, how it applies, and that serves as a source of research.

**Keywords:** Pythagorean Theorem, Demonstrations, Applications.

## SUMÁRIO

# 1. INTRODUÇÃO

Essa monografia aborda um dos conceitos mais conhecidos na geometria, entre vários assuntos que se referem ao tema que foi escolhido para ser apresentado foi, “O Teorema de Pitágoras e Algumas Aplicações”.

Foi colocada como problemática a seguinte pergunta: O que é o Teorema de Pitágoras e quais as suas aplicações? Com isso foram feitas várias indagações sobre, por exemplo: Quais são as maneiras de demonstrar o teorema? Como esse teorema auxilia nas resoluções de exercícios? Como podemos utilizar esse teorema em nosso cotidiano?

Auxiliar os estudantes e trazer uma ideia concreta sobre o teorema de Pitágoras, como se demonstra, como se aplica, e que sirva de fonte de pesquisas. Destacando-se em Efetuar Aprimoramento das ideias; no desenvolvimento de fonte de pesquisa e ressaltando algumas aplicações.

Isso tudo para procurar facilitar a compreensão de forma que suas demonstrações e suas aplicações esclareçam mais ainda a ideia do teorema. A metodologia que será utilizada para estruturar a pesquisa que terá materiais de pesquisa bibliográficos, uma abordagem qualitativa isso pelo método que será feito o levantamento dos dados.

Com intuito de facilitar a apresentação do teorema de Pitágoras e suas aplicações, este trabalho foi organizado da seguinte forma.

No Capítulo 2 apresentamos a importância da Geometria sendo fundamental para o ensino/aprendizagem dos alunos, seu destaque são as séries iniciais dando uma nova visão de mundo já no início da sua trajetória estudantil, trazendo também como ela teve um papel influente para o desenvolvimento da humanidade sendo um dos principais estudos que revolucionaram a ciência no decorrer da história. É citada a trajetória de Pitágoras mesmo sendo tratada como uma lenda ou mito. Feita a apresentação de demonstrações mais conhecidas do Teorema de Pitágoras para que todas as dúvidas sejam sanadas com apoio dessa obra.

No Capítulo 3, são tratadas as aplicações do teorema de Pitágoras com intuito de esclarecer e ensinar para que serve o teorema através de estudos e aplicações, e sirvam de ferramenta no cotidiano das pessoas em seus empregos, em suas casas e principalmente em sua carreira estudantil.

Nas Considerações finais, são feitos os apontamentos do teorema de Pitágoras com base no que foi apresentado nos capítulos 2 e 3, sobre a importância da Geometria e algumas demonstrações e aplicações no cotidiano da humanidade e como é fundamental para a vida estudantil. Sempre buscando a atenção do leitor para que venha entender o quanto é importante estudarmos sobre esse assunto que se destaca na geometria.

## 2. A IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA

Quando falamos de geometria as perguntas mais frequentes se resumem em um único questionamento; “Qual é a sua importância?”. Com isso viemos nesse capítulo abordar um pouco da sua importância no ensino e aprendizagem.

Conforme estudamos aprendemos que a Geometria teve e tem um papel muito importante para o desenvolvimento da humanidade. Na Educação Básica é onde a um destaque no desenvolvimento cognitivo, assim destacado em Brasil (2014, p. 9-10) temos que,

> [...] o raciocínio lógico-dedutivo (próprio da Álgebra e Geometria, por exemplo, e de tudo que diz respeito a provas de propriedades em todos os campos da Matemática); a visão geométrico-espacial (necessária para o aprendizado significativo da geometria e de suas aplicações). (BRASIL, 2014, p. 9-10).

Nessa mesma ideia que é possível demonstrar vários teoremas, pois proporciona uma nova visão de mundo. Com isso é possível demonstrar um dos teoremas mais famosos da Geometria o teorema de Pitágoras.

Assim como é citado em Brasil (2014, p.11) nos afirma a influência no processo de interpretação de figuras geométricas nas séries iniciais.

> No caso da visão geométrico-espacial, as estruturas que permitem o uso de tal pensamento advêm da interação com os objetos e com os movimentos no espaço físico. Podemos caracterizá-lo a partir da construção de representações mentais que possibilitam, por exemplo, reconhecer características de figuras geométricas (É um paralelepípedo? É um cubo?), interpretar relações entre objetos no espaço e estimar áreas e volumes sem medição direta; antecipar resultados de transformações de figuras planas e objetos espaciais (o que acontece quando giramos um triângulo em torno de um dos seus lados?); produzir e interpretar representações planas de objetos espaciais, plantas baixas de construções, mapas de diversos tipos, ou maquetes. (BRASIL, 2014, p.11)

Com tudo se destaca na influência da aprendizagem, pois está relacionada de forma direta no cotidiano sendo em jogos, brinquedos, objetos e etc. Dessa maneira trabalhando o cognitivo fazendo com que as crianças consigam relacionar figuras com algum tipo de objeto, o papel da educação infantil é promover atividades que desenvolvam o pensamento geométrico abordado de três formas distintas, a coordenação visual-motora, a percepção visual e a memória visual.

Isso tudo que foi abordado tem uma grande influência na construção e desenvolvimento de teoremas assim como o Teorema de Pitágoras.

Como foi citada no início desse capítulo a Geometria teve e tem um papel importante no desenvolvimento do homem, pois o homem com a procura de modificar o mundo se aprofundou no conhecimento geométrico criando postulados, teoremas que servissem de respostas para fenômenos da natureza, isso tudo resultou em grandes construções que desafiam o senso comum, pois cada uma delas tem características peculiares.

Exemplos de criações humanas mais reconhecidas na Geometria são as Pirâmides do Egito que foram projetadas pelos antigos egípcios.

**Figura 1:** Pirâmides do Egito.

**Fonte:** Vida de engenheiro (2020).

Outro exemplo bem conhecido são as pontes, obras de engenharia que constituídas de formas geométricas e que são utilizadas para o transporte de pedestres e veículos.

**Figura 2:** Ponte

**Fonte:** Vida de engenheiro (2020)

Com essas revoluções que deram destaque a importância do ensino e da aprendizagem de Geometria como ferramenta que trouxe grandes benefícios ao bem-estar da humanidade.  .

## 2.1 Uma Breve Historia de Pitágoras

Por não ter referencias que digam a vida de Pitágoras sem deixar questionamentos, sua história é bem longa na qual para muitos é bem desconhecida, e para outros Pitágoras não existiu, pensam que ele era somente uma lenda ou um mito que havia naquela época, mas segundo (BRASIL ESCOLA, 2020) **Pitágoras** foi um filósofo, matemático, astrônomo e músico grego pré-socrático que nasceu na ilha de Samos no ano aproximado de 570 a.C.

Em todas as referências sobre a sua vida, relata-se que ele realizou inúmeras viagens e peregrinações. Passando uma boa parte de sua vida no Egito aproximadamente 25 anos, aonde provavelmente, extraiu os conhecimentos matemáticos e filosóficos que fundamentariam o seu ensinamento futuro. Segundo Tartaglia Filho (2016) nos afirma que Pitágoras ao retornar de uma viagem para ilha de Samos, a qual estava enfrentando uma crise política a qual o obrigou a sair e partiu para **Magna Grécia** (atual território italiano) onde morou bastante tempo da sua vida e lá fundou a sua escola filosófica.

A escola Pitagórica que influenciava muito naquela época os seus seguidores, segundo historiadores que afirmam que tinha um caráter duplo. “De um lado, dedicava-se a questões espirituais, como por exemplo, a imortalidade da alma. E por outro lado, como parte desta espiritualização, incluía estudos de Matemática, Astronomia e Música.”( TARTAGLIA FILHO,2016, p.15).

> Por volta de 500 a.C. no momento de esplendor da escola, Pitágoras foi obrigado a fechá-la por causa de acusação que estavam apoiando a aristocracia contra o governo. Com isso foi necessário que se refugiasse em Metaponto aonde permaneceu até a sua morte. (GUEDES, 2016)

Com tudo que aconteceu nesse período Pitágoras transpôs em vida desenvolvendo produções que influenciaram seus seguidores a construir recompilação que revolucionaram a Matemática com teoremas que proporcionaram novos caminhos para humanidade.

Para Santos (2011) a vida de Pitágoras é cheia de enigmas os quais são muito complicados de serem assumidos como verdades, pois a maioria do que é citado se trata de várias lendas e mitos que trazem questionamentos.

Uma das demonstrações que se destaca é a que Euclides faz em seu livro "Os Elementos".

> Refere-se a proposições relacionadas com o Teorema de Pitágoras. Sendo a preposição 47, escrita da seguinte forma: '' *Em todo o triângulo retângulo o quadrado feito sobre o lado oposto ao ângulo reto, é igual aos quadrados formados sobre os outros lados, que fazem o mesmo ângulo reto*. '' (TEOREMA DE PITÁGORAS: DEMONSTRAÇÕES, 2015)

## 2.2 O Teorema de Pitágoras

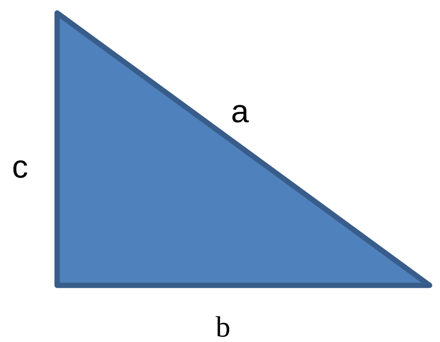
Sendo um dos Teoremas mais conhecido da Matemática na atualidade com o papel de auxiliar na fundamentação do conhecimento científico e tecnológico, a partir de sua apresentação serviu de incentivo para o espírito investigativo. Tornando-se uma grande ferramenta que ao longo do tempo para solucionar problemas, com esse destaque na investigação houve muitas apresentações desse teorema. Na literatura pode-se encontrar inúmeras demonstrações para o Teorema de Pitágoras, das quais apresentamos algumas na seção 2.3. O primeiro contato que temos na Educação Básica é o qual nos proporciona uma ideia diferente da que tínhamos antes, pois o conhecimento geométrico nos traz indagações.

O Teorema de Pitágoras por ser tão famoso há várias formas de demonstrá-lo, são tantas que tem autores que já fizeram livros e artigos de demonstrações. Assim como (SANTOS, 2011, P. 19) cita em sua obra um dos enunciados:

> Como é referido no livro "O Teorema de Pitágoras de Cintra e Cintra (2003)" a seguinte definição: "A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados são cada um dos catetos desse mesmo triângulo." ( SANTOS, 2011, p.19).

Neste caso a expressão algébrica desse enunciado é dada por $a^2 = b^2 + c^2$ sendo "a" hipotenusa, "b" cateto e "c" cateto, assim com nós monstra a figura abaixo:

**Figura 3:** Triângulo retângulo.




Fonte: Próprio Autor

Este é um triângulo retângulo o qual são atribuídos valores aos seus segmentos de reta e com isso se aplicar o Teorema de Pitágoras que foi enunciado inicialmente.

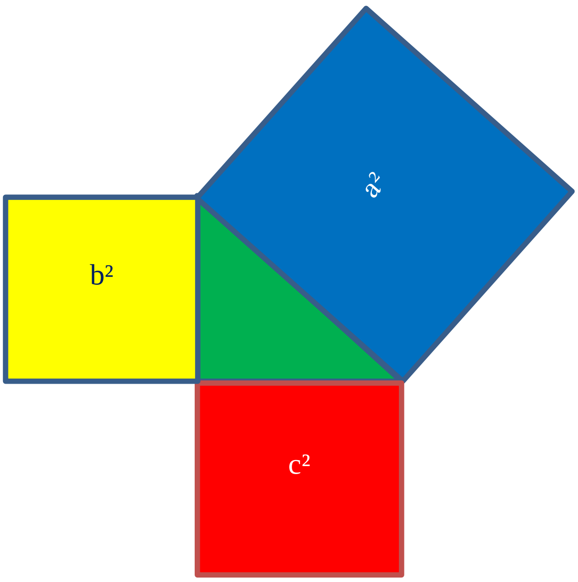
Segundo Barbosa (1993) diz que devemos ter cuidado para não repetir o enunciado, pois o mesmo é muito **imediatista**:

*“O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”.*

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Dessa forma se torna mais sucinta e fácil a compreensão desse enunciado.

**Figura 4**: Representação geométrica do Teorema de Pitágoras



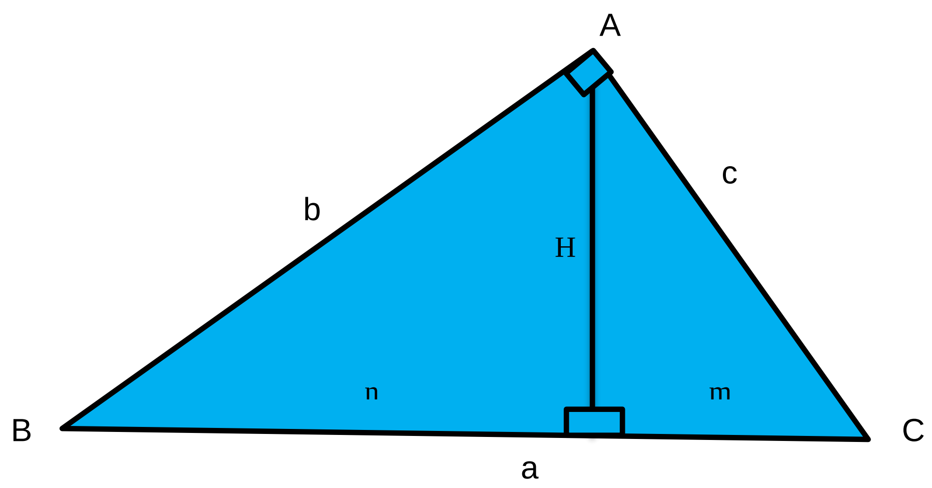

**Fonte:** Próprio Autor

Sendo **a** medida da hipotenusa e sendo **b** e **c** medidas dos catetos, o enunciado do Teorema é equivalente a afirmar que: $a^2 = b^2 + c^2$.

Uma das demonstrações do teorema de Pitágoras que utiliza a semelhança de triângulo é a mais frequente na Geometria Plana no ensino escolar.

> Nos cursos tradicionais de geometria plana, como nos livros sem apreensão educacional, a prova empregada é por semelhança de triângulos.
> No triângulo ***ABC***, retângulo em ***A*** assim como nos mostra na (Figura 5), a altura ***AH*** sendo (perpendicular a ***BC***) referente à hipotenusa origina dois triângulos semelhantes ao triângulo maior, em vista da congruência dos ângulos (***BÂH =C***, complemento d e ***B***, ***CÂH =B***, complemento de ***C***).
> Portanto, temos proporcionalidade entre os lados homólogos, uma para cada triângulo parcial ou total como podemos observa na figura. ( BARBOSA, 1993, p.93)

**Figura 5:** Triângulo retângulo na semelhança de triângulos




**Fonte:** Próprio Autor.

As relações de um triângulo por semelhança são:

$$1.\ a^2 = b^2 + c^2$$

$$2.\ \frac{a}{c} = \frac{b}{H} \rightarrow b * c = a * H$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \rightarrow c^2 = a * m$$

$$\frac{b}{H} = \frac{c}{m} \rightarrow c * H = b * m$$

$$3.\ \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \rightarrow b^2 = a * n$$

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{H}} \rightarrow b * c = \mathrm{a} * H$$

$$\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{H}} \rightarrow b * H = c * n$$

$$4.\ \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{n}} \rightarrow b * H = c * n$$

$$\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{H}} \rightarrow c * H = b * m$$

$$\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{H}} \rightarrow H^2 = m * n$$

Resumindo as relações repetidas acima, temos:

$$(1)\ b^2 = \mathrm{a} * n$$

$$(2)\ c^2 = \mathrm{a} * m$$

$$(3)\ H^2 = m * n$$

$$(4)\ b * c = \mathrm{a} * H$$

$$(5)\ c * H = b * m$$

$$(6)\ b * H = c * n$$

Essas expressões acima são conhecidas como relações Métricas que Euclides usou para demonstrar o teorema de Pitágoras.

> Esta demonstração é, atualmente, a mais utilizada nas escolas por conta de poder mostrar, o Teorema de Pitágoras de forma bastante simples, como também encontrar outras relações do triângulo retângulo. Além das duas relações, que deram origem à demonstração do teorema, obtemos a relação **2**, **3** e **4** acima. (GOOGLE, 2011).

## 2.3 Demonstrações do Teorema de Pitágoras

Uma demonstração do teorema de Pitágoras usando as relações Métricas feita por Dolce; Pompeo (2013, p. 224) em seu livro temos: ***"A Soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa".***

Demonstração:

Para provarmos usando as relações basta somar os membros (1) e (2):

$$(1)\ b^2 = a * n \ \ e\ (2)\ \ c^2 = a * m$$

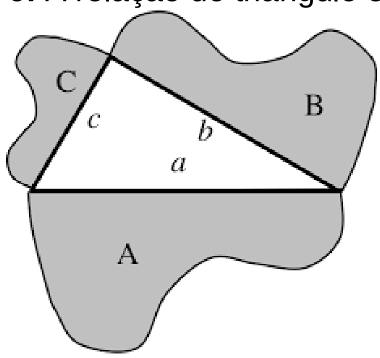
Somando membro a membro de (1) e (2) temos:

$$b^2 + c^2 = a * n + a * m \rightarrow b^2 + c^2 = a * (n + m)$$

$$\rightarrow b^2 + c^2 = a * a \rightarrow b^2 + c^2 = a^2.$$

A seguir apresentamos a generalização do Teorema de Pitágoras, que de acordo com Oliveira (2013), foi feita pelo "matemático húngaro de Budapeste, Polya, que usou o Teorema de Pitágoras para comprovar esta importante relação entre áreas vale para quaisquer figuras semelhantes desenhadas sobre a hipotenusa e sobre os catetos de um triângulo retângulo".

**Figura 6:** A relação do triângulo e a área




**Fonte:** Oliveira (2013, p. 38).

No triângulo retângulo, a medida da hipotenusa é a, e as medidas dos catetos são b e c, e as medidas semelhantes de áreas são expressas por A**,** B e C.

Segundo Santos; Santos; Oliveira (2015, p. 41) se duas figuras são semelhantes, a razão entre as medidas de suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Então:

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2; \frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \textit{ e assim } \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}$$

Pela propriedade das proporções, conclui-se:

$$\frac{A}{a^2} = \frac{(B + C)}{(b^2 + c^2)}$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$ (relação de Pitágoras), tem-se que A = B + C

Uma demonstração do teorema de Pitágoras feita pelo ex-presidente dos Estados Unidos James abram Garfield, que segundo Lima (1998) foi assassinado em 1981 permanecendo no poder somente por quatro meses, era general e amava Matemática.

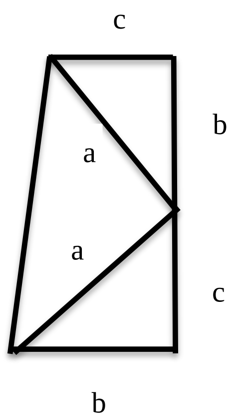
> Analisando um trapézio com três triângulos retângulos de lados: **a** hipotenusa, **b** e **c** os catetos. Onde, área do trapézio com base b, c e altura b + c é igual á semissoma das bases vezes a altura. Com isso temos que a área é igual á soma da área de três triângulos retângulos. (SANTOS, 2011, p. 18).

A demonstração do Presidente James segundo (SANTOS, 2011, p. 18) temos:

$$\frac{(\mathrm{b}+\mathrm{c})}{2} * (\mathrm{b}+\mathrm{c}) = \frac{a^2}{2} + \frac{\mathrm{b} * \mathrm{c}}{2} + \frac{\mathrm{b} * \mathrm{c}}{2}$$

Simplificamos, temos $a^2 = b^2 + c^2$.

**Figura 7:** O Trapézio do Presidente James

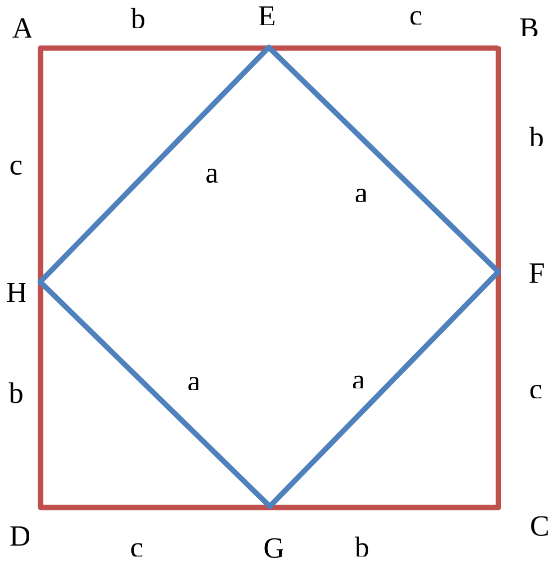



**Fonte:** Próprio Autor

Como essas demonstrações acima existem vários exemplares em que são utilizados muitos conceitos para serem provados.

Uma desses exemplos é a maneira de mostrar o teorema de Pitágoras usando um quadrado ABCD com lado medindo *(b + c), com o quadrado EFGH inscrito com lado medindo a,* como temos na figura:

**Figura 8:** Quadrado inscrito em outro quadrado




**Fonte:** Próprio Autor

Segundo LUIZ (2019) apresenta em seu trabalho essa demonstração do teorema de Pitágoras usando os quadrados, com isso temos:

O ponto de partida necessário pra demonstrar é determinar a área do quadrado ABCD.

$$\acute{A}rea\ do\ quadrado = L^2$$

Substituído o lado do quadrado ABCD, temos:

$$\acute{A}rea\ do\ quadrado\ ABCD\ =\ (b\ +\ c)2\ =\ b2\ +\ 2bc\ \ +\ c2$$

O **passo seguinte** consiste em determinar a área do quadrado EFGH.

$$\acute{A}rea\ do\ quadrado\ EFGH\ =\ a^2$$

É possível notar que existem quatro triângulos congruentes:

$$AEH \equiv BEF \equiv CFG \equiv DGH$$

Para calcular a área desses triângulos usamos essa formula:

$$\acute{A}rea\ do\ Tri\hat{a}ngulo\ = \frac{b \cdot c}{2}$$

Vamos ao cálculo da área do quadrado EFGH utilizando a área do quadrado ABCD. Veja que, se considerarmos a área do quadrado ABCD e retirarmos a área dos triângulos, que são as mesmas, sobra somente o quadrado EFGH, então:

$$\acute{A}ria\ do\ quadrado\ EFGH\ =\ \acute{A}rea\ do\ quadrado\ ABCD - 4\ \cdot\ \acute{A}rea\ do\ Tri\hat{a}ngulo$$

Substituindo os valores encontrados acima, vamos obter que:

$$a^2 = b^2 + \ 2bc + c^2 - 4 \cdot \frac{bc}{2}$$

$$a^2 = b^2 + 2bc + c^2 - 2bc$$

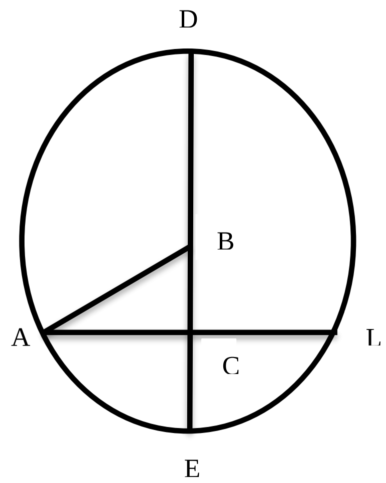
$$a^2 = \ b^2 \cancel{+ \ 2bc} \ + \ c^2 \cancel{- \ 2bc}$$

$$a^2 = \ \ b^2 + \ c^2$$

Outra demonstração do teorema de Pitágoras baseada nas relações métricas da circunferência, publicada por Kilhian (2015) usando um triângulo retângulo **ABC**, de hipotenusa $\overline{AB}$. A partir dele, construiremos uma circunferência de centro **B** e raio o segmento $\overline{AB}$.

Após isso, é prolongado os catetos $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ de modo se tornem duas cordas da circunferência $\overline{AL}$ e $\overline{DE}$ respectivamente. Pelo Teorema das Cordas, segue que:

**Figura 9**: Circunferência e suas relações.




**Fonte:** Próprio Autor

$$\overline{AC} * \overline{CL} = \overline{DC} * \overline{CE} \quad (1)$$

Mas veja que:

$$\overline{AC} = \overline{CL}$$

$$\overline{DC} = \overline{DB} = \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

$$\overline{CE} = \overline{BE} - \overline{BC} = \overline{AB} - \overline{BC}$$

Substituindo as três últimas expressões em (1), obtemos:

$$\overline{AC}^2 = (\overline{AB} + \overline{BC}) * (\overline{AB} - \overline{BC}) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$$

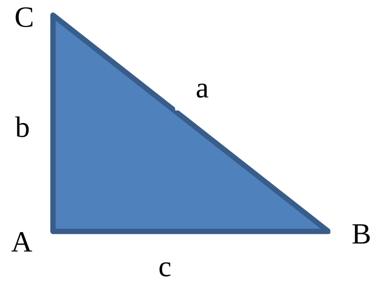
Logo,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

Uma demonstração de teorema de Pitágoras que foi feita usando a formula de Heron que de acordo com Santos (2011,p.20) temos que:

A formula de Heron é sobre área de um triângulo em função ao semiperímetro p de lado a, b e c dadas por: Considerando um triângulo retângulo ABC de lados a, b e c assim com é representado na figura 10.

**Figura 10:** Triângulo Retângulo




**Fonte:** Próprio Autor.

Pela formula de Heron a área desse triângulo á dada seguinte maneira:

$$\grave{A}rea\ do\ tri\hat{a}ngulo\ ABC = \sqrt{p(p-a)(p-b)\ (p-c)}$$

Efetuando o produto dentro do radical, com $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, obtemos que:

$$\grave{A}rea\ do\ tri\hat{a}ngulo\ ABC = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

Por outro lado a ária de um triângulo pode ser dada por:

$$\grave{A}rea\ do\ Tri\hat{a}ngulo = \frac{b * c}{2}$$

Comparando as duas equações têm que:

$$\frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4} = \frac{b * c}{2}, ou\ seja;$$

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 4b^2c^2$$

Efetuando as simplificações nessa ultima expressão temos:

$$(b^2 + c^2 - a^2 = 0), logo\ temos; a^2 = b^2 + c^2.$$

Com o apoio do que foi apresentado nesta sessão pode-se perceber o papel fundamental do teorema de Pitágoras em auxiliar no desenvolvimento de novos conceitos e proposições.

# 3. APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Com base na seção 2.3 que enuncia o Teorema de Pitágoras nesta serão apresentadas as aplicações de formas diferentes. As aplicações do teorema serão feitas com uma proposta de relacionar a realidade da vida e prática, no cotidiano com o intuito de resolução de problemas. De acordo com (PCN, 1998).

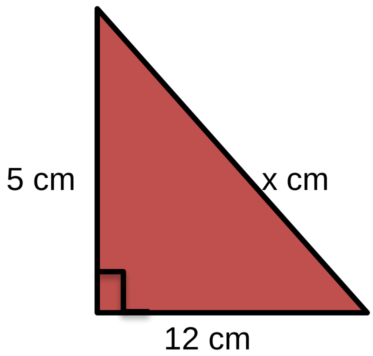
> A Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, e diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL, 1998).

**Exemplo 1:** Este é um exemplo clássico em que é aplicado o teorema de Pitágoras na sua fórmula mais simples **$a^2 = b^2 + c^2$**.

Calcula o valor de x em cada um dos triângulos retângulos:

a) Aplicação do teorema de Pitágoras:

**Figura 11:** Triângulo Retângulo




**Fonte:** Próprio Autor

**Resolução:**

a) Substituir em $a^2 = b^2 + c^2$, temos:

$$x^2 = 12^2 + 5^2 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x^2 = 144 + 25 \leftrightarrow$$

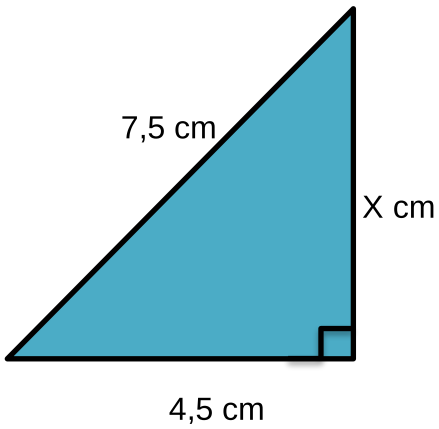
$$\leftrightarrow x^2 = 169 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \sqrt{169} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x = 13\,cm.$$

b) Aplicação do teorema de Pitágoras:

**Figura 12:** Triângulo Retângulo




**Fonte:** Próprio Autor

**Resolução:**

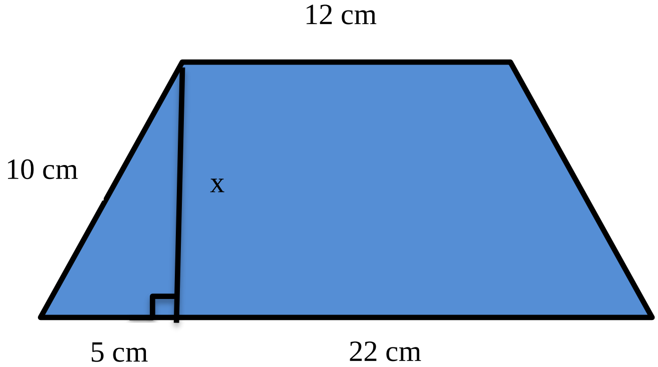
b) Aplicando em $a^2 = b^2 + c^2$, temos:

$$7{,}5^2 = 4{,}5^2 + x^2 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow 56{,}25 = 20{,}25 + x^2 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x^2 = 56{,}25 - 20{,}25 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x^2 = 36 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x = \sqrt{36} \leftrightarrow x = 6\,cm.$$

**Exemplo 2:** Neste segundo exemplo utilizaremos o teorema para auxiliar no cálculo da área das seguintes figuras.

a) Nesta aplicação vamos utilizar o teorema de Pitágoras para auxiliar no cálculo de área de um trapézio Isóscele.

**Figura 13:** Trapézio isósceles




**Fonte:** Próprio Autor

**Resolução:** É necessário encontrar a altura do trapézio e com isso vamos utilizar $a^2 = b^2 + c^2$, encontrando a altura substituímos na equação da área do trapézio que é $A = \frac{(B+b)}{2} * h$.

$10^2 = x^2 + 5^2 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow 100 = x^2 + 25 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x^2 = 100 - 25 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x^2 = 75 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \mathrm{x} = \sqrt{75} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \mathrm{x} = 8{,}66 \mathrm{~cm}.$

$\mathrm{A} = \frac{22+12}{2} * 8{,}66 \leftrightarrow$

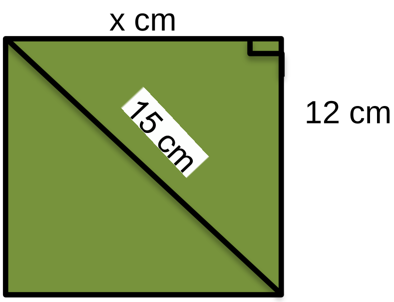
$\leftrightarrow \mathrm{A} = \frac{34}{2} * 8{,}66 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow A = 17 * 8{,}66 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow A = 147{,}22\, cm^2$

b) Aplicação do teorema de Pitágoras para calcular a área do quadrado da Figura 11;

c) **Figura 14:** Quadrado




**Fonte:** Próprio Autor

**Resolução:**

$15^2 = x^2 + 12^2 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow 225 = x^2 + 144 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x^2 = 225 - 144 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x^2 = 81 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x = \sqrt{81} \leftrightarrow x = 9\, cm$

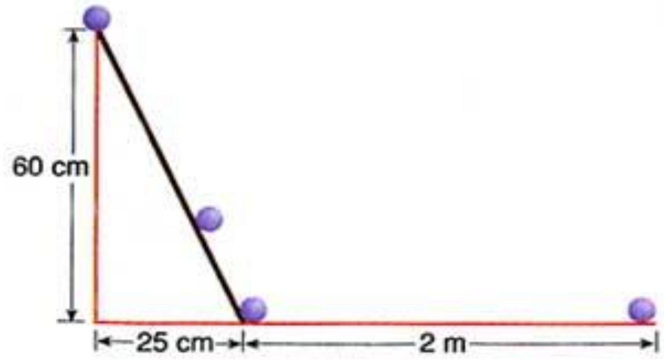
$A = b * h \leftrightarrow$

$\leftrightarrow A = 12 * 9 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow A = 108\, cm^2$

**Exemplo 3:** Já neste caso será utilizado o teorema para calcular a distância: Exemplo retirado do site Brainly, o Qual é pedido a distância percorrida pela berlinde.

**Figura 15:** Distancia percorrida pela berlinde




**Fonte:** Brainly

**Resolução:**

$$h^2 = 25^2 + 60^2 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow h^2 = 625 + 3600 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow h^2 = 4225 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow h = \sqrt{4225} \leftrightarrow h = 65\,cm$$
$$d = 65 + 200 \leftrightarrow d = 265\,cm$$

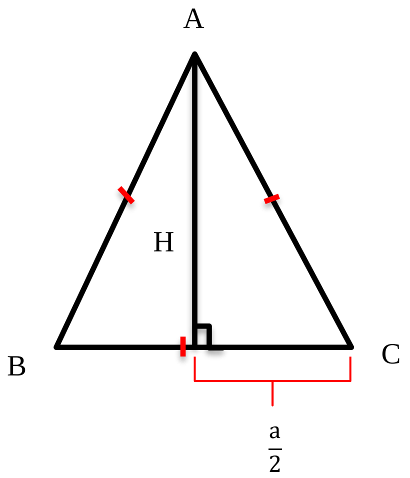
Resposta: A distância percorrida pelo berlinde é de: 265 cm = 2,65 m.

Uma aplicação do teorema de Pitágoras em um triângulo equilátero que foi feita por Dolce e Pompeo (2011, p. 239) à aplicação em seu livro “199: altura do triângulo equilátero”.

Dado um triângulo equilátero de lado a, calcular sua altura h.

Sendo ABC um triângulo equilátero de lado a e M é o ponto médio de teorema de Pitágoras no ∆AMC.

**Figura 16:** Triângulo equilátero.




**Fonte:** Próprio Autor.

Demonstração:

$$H^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 = a^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow H^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow H^2 = \frac{3a^2}{4} \rightarrow$$

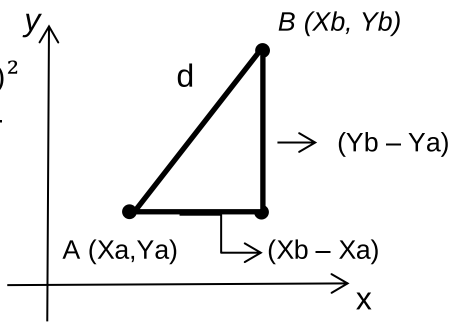
$$\rightarrow H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Na Geometia Analítica ocorre também uma aplicação do teorema de Pitágoras para calcular a distância entre dois pontos distintos conforme Brasil Escola (2015) temos:

**Exemplo 5:**

$$d^2 = (Xb - Xa)^2 + (Yb - Ya)^2$$

$$\mathrm{d} = \sqrt{(\mathrm{Xb} - \mathrm{Xa})^2 + (\mathrm{Yb} - \mathrm{Ya})^2}$$



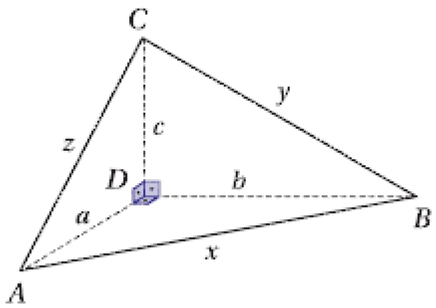
Temos uma aplicação do teorema de Pitágoras em uma demonstração do teorema que RPM79 (2017) que diz “Num tetraedro com um triedro trirretângular, o quadrado da área da face oposta a esse triedro é igual à soma dos quadrados das áreas das outras faces.”

O enunciado pode ser considerado uma extensão do teorema de Pitágoras para poliedros. As faces laterais do tetraedro fazem o papel dos catetos do triângulo retângulo e a face oposta ao triedro trirretângular corresponde à hipotenusa do triângulo.

Demonstração

Sejam $S(ABC),\ S(ABD),\ S(ACD)$ e $S(BCD)$ as áreas dos triângulos $ABC,\ ABD,\ ACD$ e $BCD$, respectivamente.

Figura 17: Triedro trirretângular




Fonte: RPM 79

Como na figura 17, *x*, *y*, *z*, *a*, *b* e *c* são as medidas das arestas *AB*, *BC*, *AC*, *AD*, *BD* e *CD*, respectivamente. Então,

$$S(ABD) = \frac{ab}{2}, S(BCD) = \frac{bc}{2}, S(ACD) = \frac{ac}{2},$$

Já que os triângulos são retângulos. Pela fórmula de Heron temos:

$$S(ABC) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}\text{, sendo } p = \frac{x+y+z}{2}$$

Elevando essas áreas ao quadrado, obtemos:

$$S(ABD)^2 = \frac{a^2b^2}{4}, S(BCD)^2 = \frac{b^2c^2}{4}, S(BCD)^2 = \frac{a^2c^2}{4} \text{ e } S(ABC)^2 = p(p-x)(p-y)(p-z).$$

Substituindo o valor de *p*, ficamos com;

$$S(ABC)^2 = \left(\frac{x+y+z}{2}\right)\left(\frac{y+z-x}{2}\right)\left(\frac{x+z-x}{2}\right)\left(\frac{x+y-z}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{16}[(x+y+z)(x+y-z)][(y+z-x)(x+z-y)].$$

$$\frac{1}{16}(x^2+2xy+y^4-z^2)(2xy-x^2-y^2+z^2).$$

$$\frac{1}{16}(-x^4+x^2y^2-y^4+2y^2z^2+2x^2z^2-z^4)$$

Como $x^2 = a^2 + b^2$, $y^2 = b^2 + c^2$ e $z^2 = a^2 + c^2$, segue que

$$S(ABC)^2 = \frac{1}{16}(4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2)$$

Logo,

$$S(ABC)^2 = \left(\frac{a^2b^2}{4} + \frac{b^2c^2}{4} + \frac{a^2c^2}{4}\right) = S(ABD)^2 + S(BCD)^2 + S(ACD)^2.$$

A partir dos exemplos da aplicação do Teorema de Pitágoras apresentados nesse capítulo é possível que ele possa ser uma ferramenta útil na resolução de problemas de Geometria Euclidiana Plana e também de Geometria Analítica.

## 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Está monografia sobre o belíssimo Teorema de Pitágoras que ajudou a resolver muitos problemas da humanidade desde a época das Pirâmides do Egito e até hoje na construção civil de forma atribui valores que proporcionaram o desenvolvendo cientifico e tecnológico. Foram colocados como proposta as resoluções das problemáticas que foram postas no início, tendo como ênfase as várias formas de demonstrações e as aplicações em exercícios e no cotidiano da sociedade.

Este trabalho de conclusão de curso foi feito com o intuído de ser utilizado como fonte de pesquisa para os demais alunos, de forma que facilite no estudo do teorema de Pitágoras, sendo abordado por vários autores que construíram inúmeras aplicações que propiciam uma ampla compreensão.

Como foi referida nos capítulos acima essa obra de Pitágoras sempre estará marcada na história da matemática e no desenvolvimento da sociedade, pois serviu de ferramenta para a educação que desenvolve o sistema cognitivo dos alunos, capacitando-os com a habilidade de investigar o meio em que vivem.

E neste trabalho buscamos apresentar de formas distintas e simples o que grandes autores conhecidos citam e referenciam sobre o teorema, tudo isso para facilitar os leitores para que venham compreender a ideia geral.

## REFERENCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Formação de professores do ensino médio, Etapa II - Caderno V**: Matemática. Curitiba, PR: Ministério da Educação: Setor de Educação, 2014. 9-10-11 p.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões pitagóricos:** geométricos e numéricos. São Paulo: Atual, 1993, p. 93.

CINTRA, C. de O.; CINTRA, R. J. de S. **O teorema de Pitágoras**. 1. ed. Recife: O Autor, 2003. 93p.

DOLCE, Osvaldo. POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar.** 9. ed. São Paulo. 2013. 224 p.

GUEDES, Girlan Paiva. **Os caminhos de Pitágoras** [manuscrito]/ Girlan Paiva Guedes-2016. P.27. :il.color. Trabalho de conclusão de Curso (Graduação em Matemática)- Universidade Estadual da Paraíba, Centro de ciências e tecnologia, 2016.

Vida de Engenheiro. **Figuras 1 e 2**. Disponível em: <https://vidadeengenheiro.wordpress.com/2011/04/29/aplicacoes-da-geometria/>
Acesso em: 12 nov. 2020.

BRASIL ESCOLA. **APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS.** Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/>
Acesso em: 12 nov. 2020.

BRAINLY. **O TEOREMA DE PITÁGORAS. Figura 4**. Disponível em: <https://brainly.com.br/tarefa/27336431/> Acesso em: 07 de set. 2020.

BRAINLY. DISTANCIA PERCORRIDA PELA BERLINDE, Figura 12. Disponível em: https://brainly.com.br/tarefa/240516. Acesso em 16 de Dez 2020.

Educação da FCUL. **TEOREMA DE PITÀGORAS**. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm28/torema.htm> . Acesso em: 02 de dez. 2020.

OBMEP. **Teorema de Pitágoras e Áreas.** Figura 6, disponível em: <http://www.obmep.org.br/>. Acesso em: 04 de dez. 2020.

LUIZ, Robson. **"Teorema de Pitágoras";** *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/teorema-pitagoras.htm. Acesso em 17 de dezembro de 2020.

BRAINLY. Disponível em: <https://brainly.com.br/tarefa/28952834>. Acesso em: 02 de dez. 2020.

GOOGLE. CLUBE PITAGÓRICO. **Demonstrações do Teorema de Pitágoras**. Disponível em: https://sites.google.com/site/clubepitagorico/home/demonstracao-do-teorema-de-pitagoras#:~:text=Esta%20demonstra%C3%A7%C3%A3o%20%C3%A9%2C%20atualmente%2C%20a,%3D%20ah%20e%20h%C2%B2%3D%20mn//. Acesso em : 04 de Dez. de 2020.

GOOGLE. RPM79, **Teorema de Pitágoras no Espaço**. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/79/5.html#:~:text=O%20teorema%20de%20Pit%C3%A1goras%20%C3%A9,os%20estudantes%20do%20ensino%20b%C3%A1sico.&text=A%20intui%C3%A7%C3%A3o%20sugere%20que%20um,como%20mostra%20a%20figura%201. Acesso em: 17 de Dez. de 2020.

SANTOS, Ana Maria Quaresma dos. SANTOS, Fabio Henrique da costa. OLIVEIRA, Reinaldo Melo de. **Teorema de Pitágoras:** Demonstrações. 2015. 41p. Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática a Distancia) Universidade Federal do Amapá, Amapá, 2015.

SANTOS, Marconi Coelho dos. **Teorema de Pitágoras** [manuscrito]: suas diversas demonstrações / Marconi Coelho dos Santos. – 2011.

TARTAGLIA FILHO, Leonardo. **Teorema de Pitágoras, aplicações de demonstrações em sala de aula.** 2016. 138 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/8566/DissLTF.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 02 Dez. 2019.

OLIVEIRA, Alfredo Luiz Chaves de. **O Teorema de** Pitágoras: Demonstrações e Aplicações**.** 2013. 40 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciência e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, Cidade, 2013.

KILHIAN, Kleber. Prova do Teorema de Pitágoras, baseado nas relações métricas da circunferência. 2015. Disponível em: URL: https://www.obaricentrodamente.com/2015/03/prova-do-teorema-de-pitagoras-relacoes-circunferencia.html. Acesso em: 16 Dez 2020