UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

VICTOR DE JESUS ARAUJO

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DOS FRACTAIS

Araguaína/TO

2021

VICTOR DE JESUS ARAUJO

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DOS FRACTAIS

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins-Campus Universitário de Araguaína, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior

Araguaína/TO
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

A663i Araujo, Victor de Jesus.
Uma Introdução ao Estudo dos Fractais. / Victor de Jesus Araujo. – Araguaína, TO, 2021.
37 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2021.
Orientador: Jose Carlos de Oliveira Junior

1. Panorama Histórico. 2. Dimensão Euclidiana x Dimensão Fractal. 3. Discussões, Exemplos e Resultados. 4. Aplicações. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automatica de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

VICTOR DE JESUS ARAUJO

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DOS FRACTAIS

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins-Campus Universitário de Araguaína, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado/a em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior

Data de aprovação: 12/08/2021.

Banca Examinadora

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior, UFT

Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hancco, UFT

Profa. Dra. Renata Alves da Silva, UFT

Araguaína, 2021

Esta monografia é dedicada a Deus, aos meus pais, a minha irmã e aos meus amigos, pilares da minha formação como ser humano.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida e por todas as bençãos concedidas fazendo com que eu chegasse até aqui, pois sem ele nada seria possível.

Aos meus pais, Maria de Araújo Silva e José de Jesus, que nunca me deixaram desistir, sempre me deram força e me incentivaram a ir em busca dos meus sonhos. E à minha irmã, Valéria, por me entender, me ajudar em tudo e ser uma pessoa da qual eu posso contar.

Ao meu professor orientador José Carlos de Oliveira Junior que aceitou me orientar e trilhar essa caminhada final comigo me incentivando em todos os momentos. Obrigado por todas as orientações, brincadeiras e por acreditar no meu potencial.

Aos meus amigos Camila Mendes, Denize Fernandes, Juliana Rodrigues, Lucas Rocha, Rodrigo Alves, Ricardo Araújo e Vitor Augusto pela paciência, incentivo e compreensão durante todos esses anos de curso; eu sou extremamente grato.

Aos meus amigos do curso, Aniscleide Palmeira, Atalia de Araujo, Morgana Valadares, Thafne Sirqueira e Wesley Coelho pela jornada compartilhada, pelas noites mal dormidas, pelo companheirismo e por sempre se fazerem presentes dentro e fora da Universidade.

E, por fim, mas não menos importante, a todos os professores do Colegiado de Matemática do Campus de Araguaína – Cimba pelos ensinamentos, pela paciência, por serem profissionais nos quais podemos nos inspirar, por ensinar da melhor forma que foi possível, mesmo diante de uma pandemia; eu sou grato a vocês.

Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, litorais não são círculos, a casca da árvore não é lisa e tampouco a luz viaja em linha reta.

Benoit Mandelbrot

RESUMO

Esse trabalho apresenta um estudo introdutório acerca dos fractais que são figuras irregulares com certas características. Alguns personagens que contribuíram com diversas descobertas para geometria fractal foram Benoit Mandelbrot, George Cantor, Wanclaw Sierpinski, Helge Van Kock, Felix Hausdorff. Inicialmente foi explicitado um panorama histórico sobre Benoit Mandelbrot considerado o pai da Geometria Fractal. Foram elucidadas as características primordiais de um fractal, dentre as quais estão a autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão fractal, e as mesmas foram classificadas como fractais determinísticos, fractais gerados por computador ou até mesmo fractais aleatórios. Esta pesquisa dá ênfase à dimensão fractal, pois tem como objetivo conceituar e exemplificar a respeito da existência de objetos de dimensão decimal e curva de comprimento infinito. Dessa forma, foram trazidas essas discussões e explanados exemplos utilizando fractais conhecidos como, por exemplo, o Conjunto de Cantor, a Curva de Koch, o Triângulo de Sierpinski e a Curva de Peano, e posteriormente foi abordado a aplicabilidade na medicina para diagnosticar algumas doenças e tipos de câncer e/ou utilizar na sala de aula como motivação para ensinar progressões geométricas, evidenciando a versatilidade no ensino dos fractais.

Palavras-chaves: Fractais. Benoit Mandelbrot. Dimensão Fractal.

ABSTRACT

This work presents an introductory study about fractals that are irregular figures with certain characteristics. Some characters who contributed several discoveries to fractal geometry were Benoit Mandelbrot, George Cantor, Wanclaw Sierpinski, Helge Van Kock, Felix Hausdorff. Initially, a historical overview of Benoit Mandelbrot, considered the father of Fractal Geometry, was explained. The primordial characteristics of a fractal were elucidated, among which are the self-similarity, infinite complexity and fractal dimension, and they were classified as deterministic fractals, computer generated fractals or even random fractals. This research emphasizes the fractal dimension, as it aims to conceptualize and exemplify the existence of objects with a decimal dimension and an infinite-length curve. Thus, these discussions were brought and examples were explained using known fractals such as, for example, the Cantor Set, the Koch Curve, the Sierpinski Triangle and the Peano Curve, and later the applicability in medicine to diagnose some diseases was addressed and types of cancer and/or use it in the classroom as a motivation to teach geometric progressions, showing the versatility in teaching fractals.

Keywords: Fractals. Benoit Mandelbrot. Fractal Dimension.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O mundo que conhecemos sempre foi regido por leis, regras, princípios, padrões, conceitos e definições. Sendo assim, historicamente falando, foi perceptível a necessidade de estudar tudo à nossa volta, o que a todo momento gerava uma informação nova e/ou uma nova descoberta, um novo conceito. No estudo dos fractais, não é diferente. Assim como afirma Mandelbrot (1977 apud Stewart, 1991, p.232) em *The Fractal Geometry of Nature*: "Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, litorais não são círculos, a casca da árvore não é lisa e tampouco a luz viaja em linha reta". Portanto, com um olhar mais rigoroso sobre as formas da natureza, a Geometria tradicional, como a geometria euclidiana, já não é capaz de pautar essas novas descobertas expostas na frase de Mandelbrot.

Os fractais foram considerados nos últimos séculos por diversos pesquisadores e em diferentes objetos, mostrando a sua vasta área de estudo e suas aplicabilidades no que diz respeito à modelagem dos fractais que podem ser descritos matematicamente. Eles podem ser aplicados, por exemplo, na Topologia, na Teoria dos Números e nos Sistemas Dinâmicos, e estão ligados também a uma outra ciência denominada caos, que, em um certo sentido, estuda irregularidades, aleatoriedades, imprevisibilidades e ainda aquilo que é caótico. O termo "fractal" deriva do latim que significa "irregular, quebrado" criado por Benoit Mandelbrot em 1975.

Os fractais, apesar de figuras irregulares e de diferentes formas, ainda assim têm características que são importantes destacar. A autossimilaridade de um fractal, que por muitas vezes chega a não ser perceptível a olho nu, é quando uma "porção de uma figura ou de um contorno pode ser vista como uma réplica do todo, numa escala menor" (Andrade, 2008, p.2). Essa característica ocorre quando um fragmento do fractal consegue ser igual ou muito semelhante à figura completa. Uma outra característica também presente nos fractais é a sua complexidade infinita, onde a representação de um fractal se torna complicada, pois são figuras que têm detalhes infinitos mesmo que apenas um fragmento pequeno delas seja analisado. Ambas características fazem menção ao que chamamos de dimensão fractal, objeto principal de estudo desta pesquisa. Apesar da palavra dimensão estar ligada ao conceito da Álgebra Linear de dimensão de espaço vetorial, que é um número inteiro não negativo, aqui, dimensão fractal poderá assumir valores decimais, o que é contra-intuitivo. Esse conceito está associado ao número de coordenadas necessárias para descrever uma forma euclidiana. Isso ficará claro durante a elaboração desta pesquisa. Dito isso, foram utilizados para trazer contribuições para o trabalho autores (STEWART, 1991; DOLCE e POMPEO, 2005).

No Capítulo 2, é retratado um panorama histórico relatando sobre Benoit Mandelbrot e sua relação com a matemática, principalmente com a geometria fractal e trazendo pontos da geometria euclidiana para fins de compreender onde os fractais estão inseridos, e, além disso, o capítulo foi finalizado mostrando e classificando os fractais.

No Capítulo 3, foram expostas a dimensão euclidiana e a dimensão fractal a fim de comparar, mostrar e verificar as características de ambas. Assim como foi falado sobre Felix Hausdorff e a motivação que levou a definir a fórmula para mensurar a dimensão fractal.

No Capítulo 4, são apresentados exemplos aplicando essa fórmula em fractais conhecidos como Conjunto de Cantor, Curva de Koch, Triângulo de Sierpinski e a Curva de Peano.

No Capítulo 5, é falado das vastas áreas de aplicações dos fractais principalmente na medicina e na sala de aula.

Por último, é ressaltado sobre a relevância dos fractais para a sociedade.

Feitas essas considerações, pretendemos apresentar neste trabalho o conceito preciso de dimensão fractal, com exemplos claros e didáticos, objetivando responder à seguinte questão norteadora: *Existem objetos de dimensão decimal e curvas de comprimento infinito e área nula?*

2 PANORAMA HISTÓRICO

A Geometria dos Fractais está presente, por exemplo, na desordem da atmosfera, turbulência e fluidos, variação populacional de espécies, oscilações do coração e cérebro e interligações microscópicas de vasos sanguíneos. Mas tais descobertas foram desdobrando-se durante o último século por diversos matemáticos, dentre os quais o matemático polonês Benoit Mandelbrot é considerado o pai dos fractais, assim como autor do nome fractal que tem como significado o "quebrado".

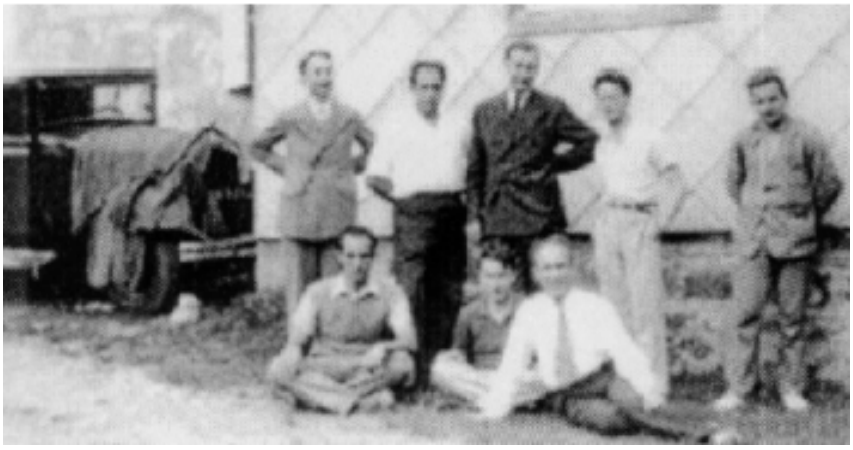
Mandelbrot nasceu em Varsóvia em 1924, advindo de uma família judia. Fugiu da Polônia em 1936 por causa dos nazistas e encaminhou-se para França onde ingressou na Escola Normal que tinha grande prestígio entre os franceses. Durante a passagem de Benoit pela escola, ele foi alvo de críticas devido ao seu interesse e facilidade na matemática e, especificamente, na geometria.

Esses talentos demonstrados por Mandelbrot chamaram atenção do grupo Bourbaki que foi um codinome coletivo criado pelo matemático russo chamado Nicolas Bourbaki em meados de 1930. O grupo era composto principalmente por matemáticos franceses como, por exemplo, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, e René Possel que consideravam que a matemática francesa necessitava adquirir um certo rigor e linearidade.

> "[...] O conteúdo apresentado em seus livros segue uma organização absolutamente linear, de modo que toda e qualquer referência a partir de um dado item só pode ser feita a um item apresentado anteriormente, no mesmo livro ou em livro anterior de Bourbaki. A lógica prevalente, portanto, é a de se estar sempre em um percurso que vai do geral para o particular, reforçando a pretendida unidade na matemática. [...]" (ALMEIDA, 2005, p. 375)

O grupo era interessado na matemática pura e objetivava publicar de forma anônima os resultados dos seus estudos a respeito da matemática, desejavam fornecer as "armas" que, de algum modo, pudessem contribuir para a evolução da sociedade mediante as vivências da época. Eles deixaram diversas contribuições importantes principalmente para a geometria, a álgebra, a teoria dos conjuntos. O grupo atuava em segredo por causa do receio de controvérsias de seus estudos, assim como seus integrantes não podiam utilizar os conhecimentos compartilhados durante os congressos para benefício próprio. Vale ressaltar que os membros eram desligados automaticamente do grupo assim que completassem 50 anos e que o grupo ainda existe e os volumes mais recentes foram publicados em 1998 e 2012.

Figura 1: Grupo Bourbaki



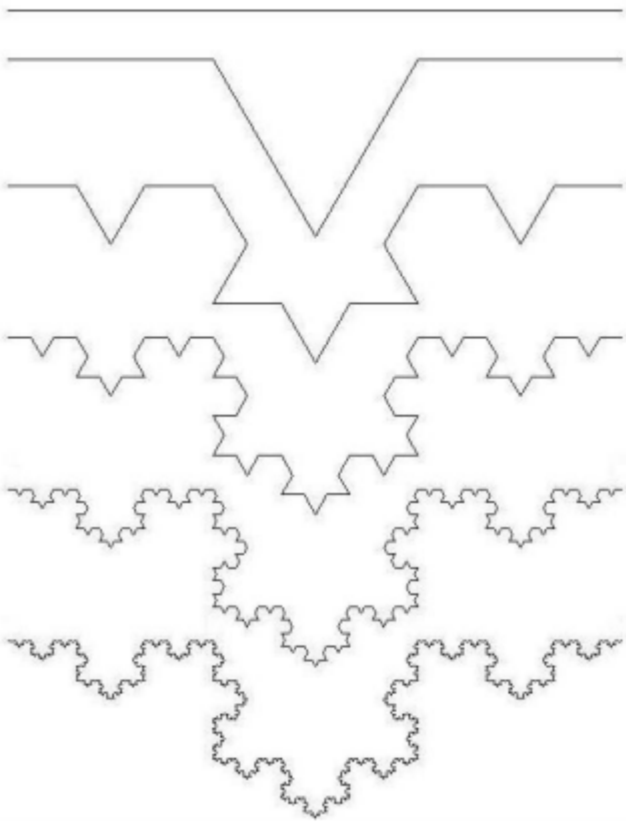
Fonte: Revista Mnemosine – USP

Posteriormente, Mandelbrot adentrou numa Escola Politécnica e passou alguns anos envolvido no grupo Bourbaki que resultou na sua transferência para os Estados Unidos, onde passou a lecionar economia e engenharia. Dentre as suas principais contribuições para a matemática, estão os fractais, denominados por Mandelbrot com intuito de nomear essas formas e objetos que não possuem dimensão euclidiana, o que fez originar a Geometria Fractal.

Euclides da Cunha (1866 - 1909) foi o matemático grego que desenvolveu os aspectos que compõe a geometria euclidiana plana constituindo pela obra “Os Elementos” que trazem definições sobre ponto, reta, plano, postulados e axiomas. Sendo assim, quando essa geometria não foi capaz de explicar ou descrever fenômenos naturais, como o crescimento das árvores, a linha de uma costa marítima, as nuvens, montanhas, é quando se faz necessário uma nova forma que consiga alcançar tais objetivos. Assim, surge a geometria fractal advinda da irregularidade, do caos, do aleatório. Tal geometria foi estudada por diversos matemáticos como Giuseppe Peano, Helge Von Koch, Waclaw Sierpinski e Benoit Mandelbrot, trazendo diversas contribuições e propriedades existentes dos fractais, por exemplo, a autossimilaridade, que é a capacidade de uma figura menor representar exatamente a figura maior, como é o caso do Triângulo de Sierpinski. Assim, quando aproximada, essa estrutura repetitiva traz consigo características que representam o todo. Outra característica presente nos fractais é a complexidade infinita, pois o fractal tem um número infinito de iterações que geram o que chamamos de dimensão fractal.

Na geometria euclidiana, as figuras ou objetos podem ter como dimensão os números 0, 1, 2, 3, ..., *n* que estão relacionados ao espaço no qual estão inseridos. Por exemplo, o ponto tem dimensão 0, uma reta tem dimensão 1, um plano tem dimensão 2, figuras sólidas tem dimensão 3 e na dimensão fractal, além dessa dimensão euclidiana, há a dimensão fractal voltada para o espaço que a figura ocupa e os infinitos detalhes que nela há, assim como ocorre na Curva de Koch. Helge Von Koch foi um matemático polonês que contribuiu com a famosa curva de Koch que é construída partindo de uma reta que, dividindo-se em três segmentos, que por sua vez os segmentos intermediários são, então, substituídos por dois segmentos semelhantes que vêm a formar os lados de um triângulo equilátero menor como na imagem abaixo:

Figura 2: Níveis da Curva de Koch

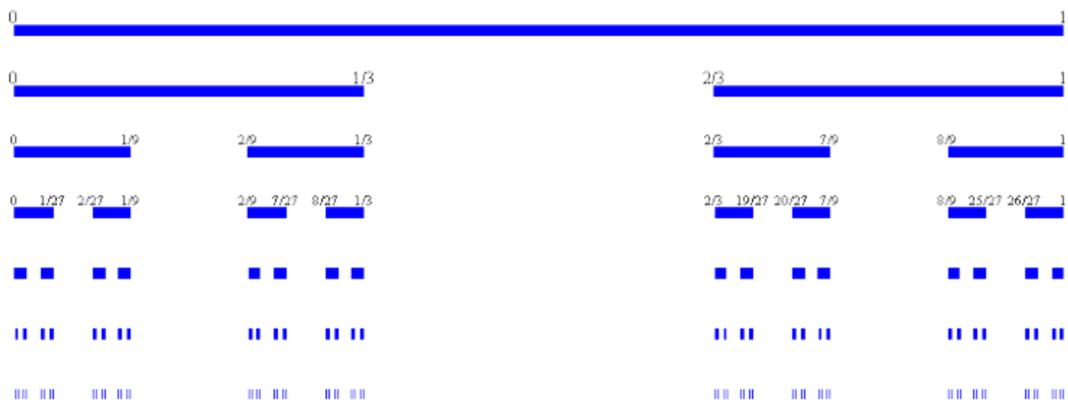


Fonte: CRUZ (2008 - p.15)

Observando a figura, podemos compreender que a Curva de Koch utiliza mais espaço que uma curva normal por causa dos detalhes que surgiram durante as iterações da figura. Isso nos mostra que, se pensarmos intuitivamente em um número que representasse a “dimensão” dessa curva, certamente esse número seria maior do que 1 (a dimensão da reta). Agora, note que a curva utiliza menos espaço que um plano e, portanto, podemos também pensar que esse número não ultrapassa 2 (a dimensão de um plano). Assim, a “dimensão”, que chamaremos em breve de dimensão fractal, da curva de Koch é um número que está no intervalo (1,2), pois sua dimensão é maior que a dimensão de uma reta (igual a 1) e menor que a dimensão de um plano (igual a 2). Logo, a figura tem uma dimensão decimal.

George Cantor (1845 - 1918) foi um matemático russo que ficou conhecido por suas contribuições para teoria dos conjuntos e também para os fractais, na construção do Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor que consiste na retirada repetida de um terço central de uma sucessão de linhas que se iniciaram com um segmento de reta de comprimento unitário 1. Assim, constrói-se uma série de intervalos que reproduzem esse mesmo processo nos segmentos dando origem a segmentos cada vez menores. Por ser um processo infinito de construção, podemos observar que o conjunto de cantor tem tamanho “nulo”, pois, em cada etapa, é retirado um terço médio dos segmentos.

Figura 3: Níveis do Conjunto de Cantor



Fonte: PATRICIO (2014 - p.5)

Essas são apenas algumas das diversas percepções matemáticas famosas construídas com o decorrer dos anos. Esses conhecimentos remetem a uma característica determinística para os fractais, a dimensão fractal. Essa dimensão, que não segue os “padrões” euclidianos, rompe a forma de como enxergamos os objetos, pois tal complexidade é visível nos mais pormenores locais e elementos, como, por exemplo, nos órgãos do corpo humano, na natureza e inclusive na formação de desastres naturais, como furacões ou ondas gigantescas. Dito isso, referindo-se ao caos, é algo presente nessa geometria. A teoria do caos, que é uma ciência aplicável em várias áreas, vem contribuindo de forma significativa na compreensão do mundo em que vivemos. Na mitologia grega, antes de tudo, havia apenas o que era denominado Caos, o deus primordial que originou o nosso mundo e suas personificações denominadas deuses primordiais como Gaia (Terra ou Mãe-Terra), Tártaro (o abismo), Eros (o Amor) e Érebo (as Trevas) e suas relações originaram deuses poderosos e seus confrontos geraram desastres descomunais, ou seja, o caos concebeu tais fenômenos considerados inexplicáveis em que não há previsibilidade dando origem a Teoria do Caos que objetiva compreender, explicar e justificar fenômenos que anteriormente não havia explicação e que são imprevisíveis.

> “[...] O caos acontece na meteorologia, na irregularidade da pulsação cardíaca, no gotejar de uma torneira, nas montanhas, nas árvores, no crescimento populacional, no partir de um copo no chão, no mercado financeiro, no movimento das placas tectônicas, entre outros. Na natureza, antes vista de forma mais simplista, esses sistemas complexos são comuns [...]” (CORBELLINI, 2016, p.2)

Por meio de estudos científicos, a compreensão dos caminhos está se tornando mais elucidada de uma forma que é possível estudar o imprevisível. Essa teoria é intrínseca à geometria fractal por meio das características presentes neles. Desse modo, essa geometria é responsável por orientarmos na tentativa de trazer sentido nas estruturas complexas que trazem uma perfeição e beleza caótica despertando o interesse colossal em quem os tem como objeto de estudo.

2.1 CLASSIFICAÇÃO DOS FRACTAIS

2.1.1 FRACTAIS DETERMINÍSTICOS

Os fractais determinísticos são conjuntos gerados por transformações geométricas que ocorrem neles mesmos, onde são caracterizados pela substituição geométrica que são aplicadas a cada iteração, por exemplo, a Curva de Peano (Figura 14), a Curva de Koch (Figura 12), Triângulo de Sierpinski (Figura 13).

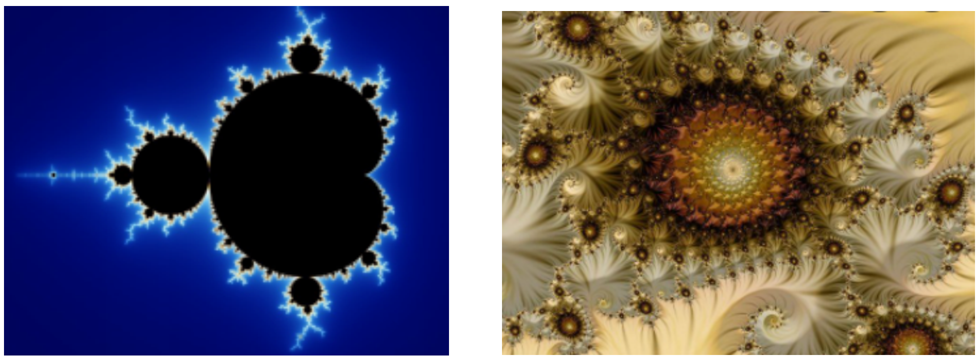
Figura 4: Fractais Determinísticos

Fonte: FERNANDES (2017)

2.1.2 FRACTAIS GERADOS POR COMPUTADORES

Esses são fractais extremamente complexos, onde a principal característica é a complexidade infinita, por exemplo, o conjunto de Mandelbrot (Figura 5, da esquerda).

Figura 5: Fractais gerados por computador



Fonte: CRUZ (2010 - p.10)

2.1.3 FRACTAIS ALEATÓRIOS

São os fractais naturais e aqueles que não apresentam rigor na sua composição, mas mostram uma semelhança estética quando se faz uma ampliação em alguma parte do fractal. Há exemplos desse fractal em toda natureza, como os relâmpagos, a couve-flor.

Figura 6: Fractais Aleatórios

Fonte: CRUZ (2010 - p.4 e 10)

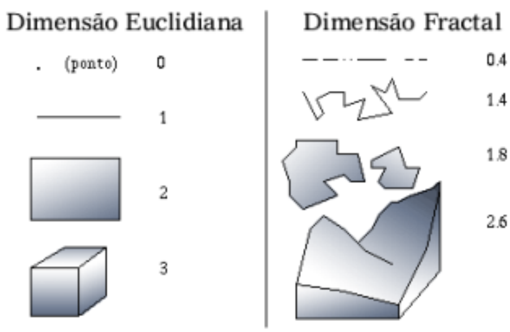
3 DIMENSÃO EUCLIDIANA x DIMENSÃO FRACTAL

A Geometria Euclidiana tem grande destaque visto que ela é a base para se realizar estudos relacionados a ângulos e distâncias entre objetos no espaço pautada pelos axiomas e postulados de autoria de Euclides, comumente conhecidos. Euclides, na sua famosa coleção de “Os Elementos” sobre a Geometria, oferece diversas proposições relacionando os elementos primitivos ponto, reta e plano e explicitando as suas interações utilizando postulados e definições. Por exemplo, para descrever uma coordenada (comprimento), utiliza-se uma linha, para descrever duas coordenadas (comprimento e largura) aplica-se um plano e para descrever três coordenadas (comprimento, largura e altura) usa-se um volume. Desse modo, o ponto tem dimensão 0, uma reta tem dimensão 1, um plano tem dimensão 2, figuras sólidas têm dimensão 3. Salientamos que, na geometria euclidiana, as dimensões são sempre ligadas a um número inteiro.

A dimensão fractal, por sua vez, é complexa devido a constante variância das figuras e objetos que dificultam trazer definições precisas que pautem essa dimensão. Nela, contém características que dificultam sua compreensão como a complexidade infinita e a autossimilaridade.

Na tentativa de definir o que seria a dimensão fractal, podemos descrever fractais como figuras contínuas que têm uma variação do comprimento de escala, levando sucessivas configurações idênticas à configuração inicial em todo seu domínio e podendo ser calculada por meio da ocupação da estrutura no espaço que a contém. A figura a seguir compara algumas dimensões euclidianas com dimensões fractais (calcularemos algumas delas nas próximas seções). Note a diferença entra as duas.

Figura 7: Dimensão Euclidiana X Dimensão Fractal



Fonte: FERNANDES (2007 - p.22)

Compreendendo a dificuldade de mensurar e calcular certas figuras e objetos que não se encaixam nos padrões euclidianos, se fez necessário desenvolver técnicas e métodos que consigam abranger a complexidade dos fractais. Desse modo, surge o matemático Felix Hausdorff (1868-1942), conhecido pelos trabalhos na área da topologia e dimensão fractal. Intuitivamente, para compreender a dimensão fractal (chamada também de Hausdorff), definimos

$$N = \frac{1}{r^D}, \qquad (1)$$

onde

N = número de partes que o objeto foi subdividido,

r = fator de redução (escala reduzida),

D = dimensão fractal.

Para exemplificar, considere um segmento de reta e vamos mostrar que a dimensão fractal dele coincide com a dimensão euclidiana, isto é, $D = 1$. De fato, divida em 3 partes iguais o segmento. Logo, cada parte será $\frac{1}{3}$ do segmento original (Veja figura 8). Assim, vamos ter N = 3, r = $\frac{1}{3}$ e pela relação estabelecida em (1) e por tratarmos de um segmento de reta (comprimento), segue que

$$3 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^D}$$

Figura 8: Segmento de Reta

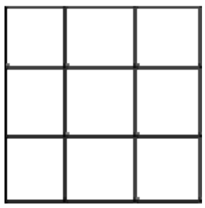
Fonte: Autoria Própria

Portanto, a fórmula (1) generaliza a noção de dimensão para o caso do segmento de reta. Note que a escolha da divisão por 3 partes iguais foi aleatória. Poderíamos ter escolhido dividir o segmento em 4, 5 ou N partes iguais. Independentemente da escolha, $D = 1$.

Agora, considere um quadrado e o divida em 9 quadrados menores internos que terão lado igual a $\frac{1}{3}$ do original. Analogamente, (Veja figura 9) N = 9, r = $\frac{1}{3}$ e pela relação estabelecida em (1) e por tratarmos de um quadrado (comprimento e altura), obtemos

$$9 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^D}$$

Figura 9: Quadrado



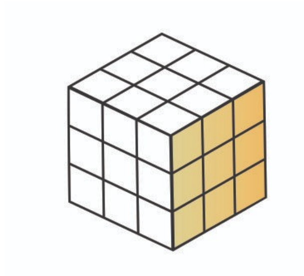
Fonte: Autoria Própria

Portanto, novamente, a fórmula (1) generaliza a noção de dimensão para, agora, o caso de um plano. Note que a escolha da divisão por 9 partes iguais foi também aleatória. Poderíamos ter escolhido dividir o quadrado em 4, 9, 16, 25 ou N partes iguais. Independentemente da escolha, $D = 2$.

Utilizando um cubo divido em 27 cubos de arestas iguais a $\frac{1}{3}$ do original. Analogamente, N = 27, r = $\frac{1}{3}$ e pela relação estabelecida em (1), obteremos

$$27 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^D}$$

Figura 10: Cubo



Fonte: Autoria Própria

Sabendo que $N = \frac{1}{r^D}$ equivale a $N = \left(\frac{1}{r}\right)^D$ e, aplicando logaritmo de ambos os lados, teremos

$$\log(N) = \log\left(\frac{1}{r}\right)^D \Rightarrow \log(N) = D \cdot \log\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}.$$

Sendo assim, dizemos que a dimensão fractal ou dimensão de Hausdorff de um fractal é dada por $D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$.

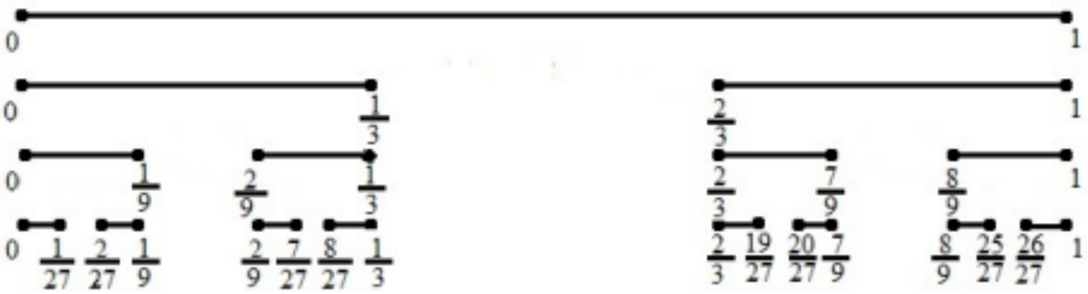
Agora, iremos aplicá-la em alguns fractais que foram citados com a finalidade de compreender, matematicamente falando, a dimensão de tais figuras.

4 DISCUSSÕES, EXEMPLOS E RESULTADOS

4.1 CONJUNTO DE CANTOR

Segundo Negri (2014), o Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor foi apresentado em 1883 e considerado um conjunto monstruoso. Além disso, foi considerado uma das primeiras figuras conhecidas como fractal. Ele é um subconjunto infinito constituído pela retirada sucessiva do terço médio do segmento de reta do intervalo unitário [0,1] infinitamente.

Figura 11: Conjunto de Cantor



Fonte: NEGRI (2014 - p.23)

Vamos considerar o intervalo $I_0 = [0,1]$, no nível 0. No nível 1, teremos uma união de dois intervalos fechados, $I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, de comprimento igual a $\frac{1}{3}$ cada. No nível 2, teremos uma união de 4 intervalos fechados, $I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$, e de comprimento $\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ cada. Esse processo ocorrerá infinitamente, ou seja, obteremos no nível *n* um número de 2^n intervalos fechados e de comprimento $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ cada. Dito isso, subtende-se que o Conjunto de Cantor pode ser definido por $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$.

Assim, desta definição, podemos concluir que o número de intervalos que constituem o Conjunto de Cantor é infinito, pois quando $n \to \infty$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty,$$

e o comprimento dos segmentos é dado por $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ que tende a zero para infinitos níveis, pois $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. Assim, o conjunto de Cantor é um conjunto formado por diversos pontos dispersos, fazendo sentido ao nome “Poeira de Cantor”. Para calcularmos o comprimento de L, devemos multiplicar o número de níveis pelo comprimento de cada um deles. Portanto,

$$L = \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Logo, o comprimento do Conjunto de Cantor tende a zero. Para calcular a dimensão do Conjunto de Cantor, temos

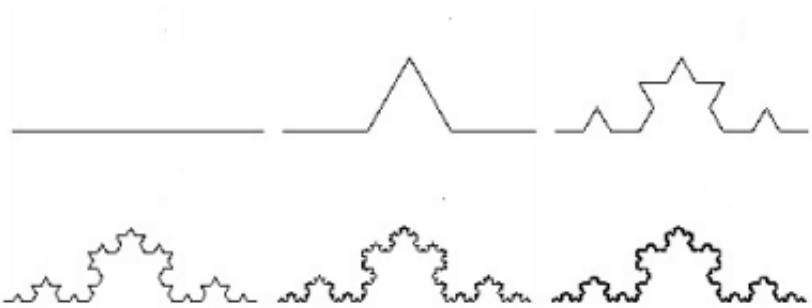
$$D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\log(2^n)}{\log(3^n)} = \frac{\log(2)}{\log(3)} \cong 0{,}630929753.$$

Assim, concluímos que o Conjunto de Cantor tem dimensão entre 0 e 1, a saber, igual a $0{,}630929753$, e comprimento tendendo a zero.

4.2 A CURVA DE KOCH

A Curva de Koch é apresentada em meados de 1904 e consiste num segmento de reta l, o qual é particionado em 3 partes iguais e retirado um terço médio e substituído por um triângulo equilátero, mas sem sua base, ou seja, a nova figura formada tem 4 segmentos de reta.

Figura 12: A Curva de Koch



Fonte: NEGRI (2014 - p.31)

Esse processo será repetido *n* vezes que podem ser observados no quadro a seguir:

Quadro 1: Níveis da Curva de Koch

Nível	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento da curva
1	$4 = 4^1$	$\frac{1}{3}l = \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot l$	$\frac{4}{3}l = \left(\frac{4}{3}\right)^1 \cdot l$
2	$16 = 4^2$	$\frac{1}{9}l = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot l$	$\frac{16}{9}l = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot l$

...	...	...	...
n	4^n	$\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot l$	$\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot l$

Assim, podemos concluir que o comprimento da Curva de Koch é dado por

$$L = l \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty,$$

Ou seja, o comprimento da Curva de Koch é infinito. E, para calcular sua dimensão, sabemos que N = 4, devido que em cada nível da figura ela é a união de quatro partes iguais (escalas diferentes) do nível anterior e $r = \frac{1}{3}$ dessa parte anterior. Assim, temos,

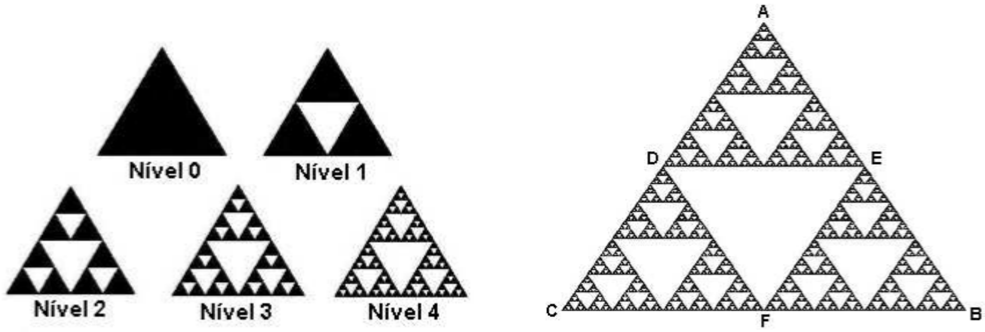
$$D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} \cong 1{,}261859507.$$

Logo, concluímos que o a Curva de Koch tem dimensão entre 1 e 2, a saber, aproximadamente $1{,}261859507$ e comprimento igual a infinito.

4.3 TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

O Triângulo de Sierpinski foi exposto pelo famoso matemático polonês Wanclaw Sierpinski (1882-1969). Obteve prestígio com suas contribuições na topologia, teoria dos conjuntos e na teoria fractal, com o mais conhecido: o Triângulo de Sierpinski. A construção desse fractal ocorre num triângulo no qual é demarcado o ponto médio de cada lado do triângulo e que por sua vez os 3 pontos médios vão gerar um triângulo central com vértices nos pontos médios do triângulo que os originou. Esse processo, gerou 4 triângulos congruentes dos quais o triângulo central que está invertido é removido. Dito isso, de forma iterativa esse processo ocorrerá repetidamente nos triângulos que resultaram dos níveis anteriores, como mostra a seguir

Figura 13: O Triângulo de Sierpinski



Fonte: ASSIS (2008 - p.4)

Sendo assim, no nível 1, teremos 3 triângulos cujo o lado foi diminuído $\frac{1}{2}$ do original. Já no nível 2 que é constituído de 9 triângulos de lado reduzidos em $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ do triângulo original. Analogamente para os níveis posteriores, no nível *n,* teremos 3^n triângulos com lados medindo $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ do triângulo original. Dito isso, o comprimento do Triângulo de Sierpinski é dado por

$$C = \lim_{n\to\infty} 3^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \infty,$$

Logo, seu comprimento tende ao infinito. Sabemos que para calcular a dimensão do Triângulo de Sierpinski, N será o número de “partes” que o objeto foi subdivido, N = 3^n, o fator de redução será $\frac{1}{2}$, obteremos

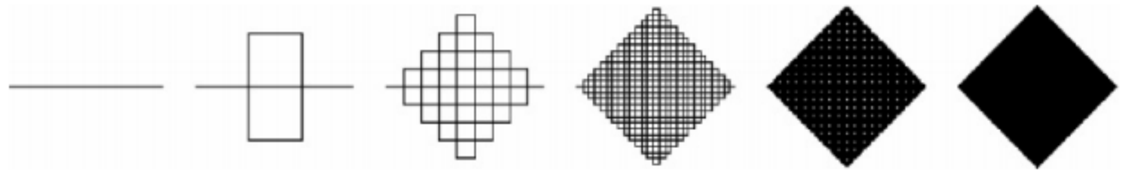
$$D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\log(3^n)}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{2^n}}\right)} = \frac{\log(3)}{\log(2)} \cong 1{,}585.$$

Assim, a dimensão fractal do Triângulo de Sierpinski está entre 1 e 2, mais especificamente, aproximadamente 1,585.

4.5 A CURVA DE PEANO

Giuseppe Peano mostra uma construção a partir de uma linha contínua que preenche todo o plano gerando uma superfície plana por meio de um processo iterativo. Inicia esse processo com um segmento de reta de comprimento L e é substituído por 9 segmentos de $\frac{1}{3}$ do comprimento inicial. Logo, pode ser visualizado esse processo iterativo na imagem abaixo:

Figura 14: A Curva de Peano



Fonte: ASSIS (2008 - p.26)

Os níveis podem ser descritos da seguinte forma:

Quadro 2: Níveis da Curva de Peano

Nível	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento da curva
0	9^0	$\frac{1}{3^0} \cdot l$	$L = 9^0 \cdot \frac{1}{3^0} \cdot l$
1	9^1	$\frac{1}{3} \cdot l$	$L = 9^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot l$
2	9^2	$\frac{1}{3^2} \cdot l$	$L = 9^2 \cdot \frac{1}{3^2} \cdot l$
...	...	...	...
n	9^n	$\frac{1}{3^n} \cdot l$	$L = 9^n \cdot \frac{1}{3^n} \cdot l$

Sendo assim, o comprimento é dado por

$$\lim_{n\to\infty} 3^n \cdot l \ = \ l \cdot \lim_{n\to\infty} 3^n = l \ \cdot \ \infty = \ \infty.$$

Logo, a Curva de Peano tem comprimento infinito. Sabe-se que para calcular a dimensão da Curva de Peano, teremos N = 9 e r será $\frac{1}{3}$, o fator de redução, o que nos fornece

$$D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\log(9)}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{\log(9)}{\log(3)} = \frac{\log(3^2)}{\log(3)} = \frac{2 \cdot \log(3)}{\log(3)} = 2.$$

Dito isso, a Curva de Peano tem dimensão fractal igual a 2, ou seja, sua dimensão fractal é igual à sua dimensão euclidiana, a de um plano.

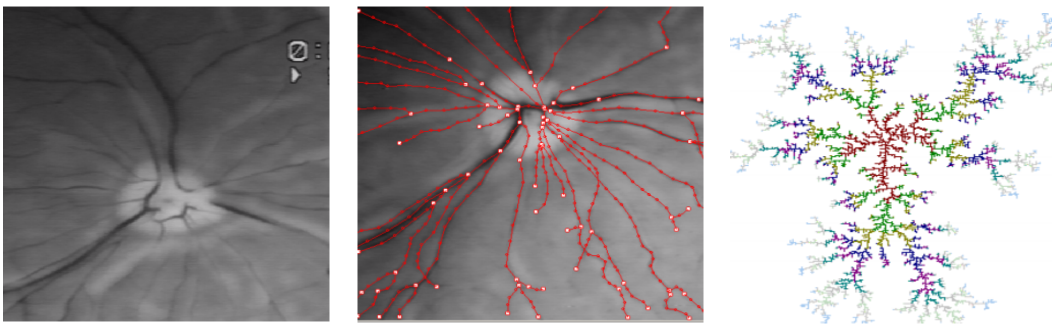
5 APLICAÇÕES

5.1 NA MEDICINA

Segundo Araujo (2004), utilizam-se fractais para analisar e descrever os padrões dos vasos retinianos em cães com visão normal para detectar anomalias que podem ter origem hereditária ou se manifestarem no decorrer da vida. Os fractais auxiliam num diagnóstico patológico mais assertivo e possivelmente num estágio inicial da doença. Para realizar esses parâmetros, utiliza-se uma característica ímpar dos fractais, a autossimilaridade. Diversas estruturas fisiológicas são autossimilares, como o sistema fisiológico de bifurcações ou proteínas que tem diferentes barreiras de energias que decorrem da energia potencial e da entropia.

Faz-se necessário utilizar métodos computacionais que auxiliarão no diagnóstico de alterações vasculares que vão ocorrer pela digitalização do fundo do olho e da rede vascular do olho dos cães como na imagem abaixo.

Figura 15: Digitalização e segmentação da rede vascular do olho



Fonte: ARAUJO (2004 - p.25)

Para mensurar essas estruturas, são utilizados diferentes métodos, como por exemplo, por contagem de caixas (*box couting*), massa-raio e correlação na qual os valores vão ser analisados, estudados e comparados com o que seria o parâmetro padrão de vascularização da retina dos animais com a visão normal. Dito isso, pode-se diferenciar processos vasculares patológicos e normais da retina e auxiliar no diagnóstico.

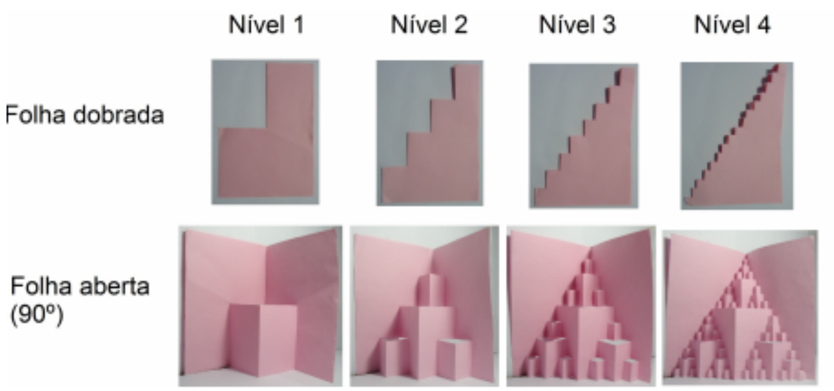
5.2 NA SALA DE AULA

Apesar das dificuldades encontradas para se definir exatamente o que é um fractal, isso não nos impossibilita de aplicá-lo de uma forma simples, prática e criativa na sala de aula com intuito de auxiliar os alunos no ensino de conteúdos que façam parte dos PCN’s (Parâmetros Curriculares Nacionais).

Assim, é possível abordar os fractais no Ensino Médio, no ensino de álgebra, especificamente, o conteúdo de progressão geométrica, onde juntamente com a aula expositiva sobre o conteúdo, seriam utilizadas folhas de papel, régua, tesoura e cola. Seria dobrada uma folha de papel ao meio, onde seriam tomados a largura da folha como L e a medida do comprimento seria C, e, a partir daí, seria marcada a metade do comprimento da largura da parte dobrada e fazendo um corte nessa marca e a parte superior dobrada para dentro e assim por diante, e cada passo realizado seria correlacionado a um nível do fractal e seria anotado numa tabela a quantidade de “degraus” gerados, assim como, o comprimento e a altura como mostra a imagem abaixo.

Figura 16: Níveis da folha dobrada

Item	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	Nível n
Quantidade de degraus (folha dobrada)	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	2^n
Quantitade de novos volumes (folha aberta 90°)		$3^0 = 1$	$3^1 = 3$	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	3^{n-1}
Comprimento do degrau (C)	$\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$	$\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$	$\frac{1}{2^{n+1}}$
Altura do degrau (L)	1	$\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$	$\frac{1}{2^n}$



Fonte: ARAUJO (20 - p.88)

A BNCC (Base Nacional Comum Curricular) ressalta as competências e as habilidades as quais devem ser desenvolvidas no estudante. Sendo assim, com tais atividades sendo trabalhadas em sala de aula, podemos englobar a seguinte habilidade

> "[...] (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. [...]" (BNCC, 2017, p.539)

Para melhorar a compreensão dos alunos do que está sendo feito, os resultados podem ser demonstrados num gráfico para que associem a progressão geométrica e a função exponencial e, além disso, pode ser trabalhado a dificuldade em cálculos que envolvem potência de frações baseado na BNCC.

> "[...] (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. [...]" (BNCC, 2017, p.541)

Esse é apenas um exemplo do vasto número de possibilidades de inserção dos fractais na sala de aula devido à simplicidade dos materiais utilizados, que evidencia que podem ser ferramentas importantes na aprendizagem, causando espanto e curiosidade nos estudantes devido à sua complexidade e à sua beleza e não deixando de empregar o conteúdo matemático, mas trazendo com novos olhares e aguçando o interesse para o que é simples e desconhecido naquele momento.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os fractais surgiram da necessidade de estudar e mensurar de objetos que não se encaixam nos padrões euclidianos. Desse modo, este trabalho vem pontuar características e esclarecer essa geometria fractal e suas particularidades como a autossimilaridade, a complexidade infinita e a própria dimensão fractal. Todas essas características trazem consigo uma beleza caótica e desperta a curiosidade em quem estuda ou observa os fractais.

Além disso, foram abordados o contexto histórico e os principais nomes dessa geometria como Benoit Mandelbrot, George Cantor, Wanclaw Sierpinski, Helge Van Kock e Felix Hausdorff que fizeram descobertas de suma importância para a compreensão e o comportamento dos fractais e sua dimensão, a qual foi abordada e exemplificada no decorrer do trabalho.

A geometria fractal é aplicável em diversas áreas como aqui foi explanado, apesar de não muito aprofundado. Compreender essa geometria traz grandes avanços para nossa sociedade pela forma como é maleável para se trabalhar e aplicar em áreas como a medicina, a matemática, a economia, etc.

Este trabalho buscou explicitar inicialmente a historicidade, os conceitos e definições acerca dos fractais de forma clara e objetiva, trazendo discussões, exemplos e aplicações dessa geometria e a fim de que possam ser utilizados como base para outros estudos e mostrar a importância e como estão presentes no nosso dia a dia.

7 REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Lázaro de Souto. **Ánalise Fractal da Vascularização da Retina de Cães com Visão Normal**. Orientador: Prof. Dr. Romildo de Albuquerque Nogueira. 2004. 44 f. Dissertação (Mestrado em Biometria) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2004.

ASSIS, T. *et al*. **Geometria fractal**: propriedades e características de fractais ideais. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v. 30, n. 2, p. 1-10, 2008. Disponível em: http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/302304.pdf. Acesso em: mar. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018

COBERLLINI, ÉTICA OU CAOS E PEDAGOGIA LASSALIANA. La Salle Estrela-Revista Digital, v.1, n. 5, jan-jul,2016.

CRUZ, Claudemir Mota da. **Introdução ao Estudo dos Fractais:** História, Topologia e Sistemas Dinâmicos Complexos. Orientadora: Profa. Dra. Fabíola de Oliveira Pedreira Lima. 2008. 53 f. Licenciado em Matemática, Departamento de Ciências Exatas - Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana. 2008.

CRUZ, Graciele Pereira da. **FRACTAIS:** Padrões Complexos de Incrível Beleza. São Paulo, p 1-12, 2010.

FERNANDES, L. V. **Dimensão de Hausdorff e Algumas Aplicações**. Orientador: Prof. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi. 2017. 63 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2017.

FERNANDES. Jaqueline Aparecida. **Fractais**: Uma Nova Visão da Matemática. Monografia (Graduação) – Centro Universitário de Lavras, Unilavras, 2007.

FERRARI, Paulo Celso. **Temas Contemporâneos na Formação Docente a Distância**: Uma Introdução a Teoria do Caos. Orientador: Prof. Dr. José André Peres Angotti. 2008. 135 f. Dissertação (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

FUZZO, Regis Alessandro. **Fractais:** Algumas Características e Propriedades. *In:* Encontro de Produção Científica e Tecnológica, IV EPCT. 2009, Campo Mourão. Campo Mourão: NUPEM, 2009. p. 1-13.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. São Paulo: Atlas, 2003.

MORAIS, Leonardo. **Equações de Diferenças, Caos e Fractais**. Orientador: Prof. Dr. Luciano Bedin. 2014. 117 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014.

NEGRI, M. **Introdução ao Estudo dos Fractais**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2014.

PATRICIO. Geovany Fernandes. **Introdução aos Fractais**: Os fantasmas da Matemática. Campina Grande, p. 1-10, 2014.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. E-book. ISBN 978-85-7717-158-3. Disponível em:<www.feevale.br/.../E-book%20Metodologia%20do%20Trabalho%20Cientifico.pdf>. Acesso em: mar. 2021.

RABAY, Yara Silvia Freire. **Estudo e Aplicações da Geometria Fractal**. Orientador: Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza. 2013. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

REIS, M. D. L. **Dimensão de Hausdorff**: Invariância sob transformações de bi-Lipschitz. Em Pauta, Rio de Janeiro, n. 12, p. 131-148, 1998.