UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUCAS DE SOUSA MATOS

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MINIMIZAÇÃO COM USO DO CÁLCULO VARIACIONAL

Arraias-TO
2022

Lucas de Sousa Matos

Resolução de problemas de minimização com uso do cálculo variacional

Monografia apresentada à UFT − Universidade Federal do Tocantins − Câmpus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor para obtenção de título de Licenciado em Matemática, sob orientação da Profa. Dra. Gisele Detomazi Almeida.

Arraias-TO
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

M433r Matos, Lucas de Sousa.
Resolução de Problema de Minimização com uso do Cálculo Variacional. / Lucas de Sousa Matos. – Arraias, TO, 2022.
39 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2022.
Orientadora : Gisele Detomazi Almeida

1. Limites. 2. Derivadas. 3. Estudo da variação das funções. 4. Problema de minimização. I. Título

CDD 510

Lucas de Sousa Matos

Resolução de problemas de minimização com uso do cálculo variacional

Monografia apresentada à UFT − Universidade Federal do Tocantins − Câmpus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor para obtenção de título de Licenciado em Matemática, foi avaliado e aprovado em sua forma final pelo Orientador e Banca examinadora..

Data de aprovação: 07/07/2022

Banca examinadora:

Prof.ª Dra. Gisele Detomazi Almeida, UFT.

Prof.º Dr. Fernando Soares de Carvalho, UFT.

Prof.º Dr. Thiago Rodrigues Cavalcante, UFT.

Dedico o presente trabalho à toda minha família,
em especial a Wandecléia, minha esposa .

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a Deus por ter me abençoado durante todo esse percurso na graduação.

Quero agradecer também à minha esposa Wandecléia Pereira Dias, que esteve ao meu lado me apoiando e incentivando a nunca desistir deste sonho.

Também quero agradecer à minha Mãe, ao meu padrasto e toda a minha família que me apoiaram.

Agradeço também à minha Professora orientadora Dr. Gisele Detomazi Almeida pelos conselhos, apoio e comprometimento com este trabalho. Ao professor Dr. Thiago Rodrigues Cavalcante e professor Dr. Fernando Soares de Carvalho pelas contribuições.

Quero agradecer, de coração, aos meus amigos Thiago Rodrigues Furtado e Joyce Kelly dos Santos Aires que estiveram comigo durante todo esse percurso na graduação.

Por fim, quero agradecer a todos que de alguma forma me ajudaram na realização deste sonho.

"Confie no Senhor de todo o coração e não se apoie na sua própria inteligência. Lembre de Deus em tudo o que fizer, e ele lhe mostrará o caminho certo."

(Provérbios 3:5-6)

RESUMO

O presente trabalho, tem como objetivo apresentar algumas aplicações, em problemas do cotidiano, de problema de minimização com uso do cálculo variacional. Para realizar este objetivo, fizemos uma pesquisa puramente bibliográfica com a intenção de conhecer melhor esses conceitos. Para o cálculo variacional, alguns conceitos são importantes como limites e derivadas, pois servirão de base para o desenvolvimento deste trabalho e, como apresentaremos alguns problemas de minimização, sendo assim torna-se fundamental o estudo da variação das funções tais como: valores de máximos e mínimos, ponto crítico, testes das derivadas e concavidades dos gráficos das funções, entre outros resultados do cálculo.

Palavras-chave: Cálculo Variacional. Problema de Minimização. Derivadas. Limites.

ABSTRACT

The present work aims to present some applications, in everyday problems, of the minimization problem using variational calculus. For this purpose, we did a purely bibliographic research with the intention of getting to know these concepts better and bringing some problems as examples. For variational calculus, some concepts are important such as limits and derivatives, as they will serve as a basis for the development of this work and, as we will present some minimization problems, thus making it fundamental to study the variation of functions such as: maximum and minimum values , critical point, tests of the derivatives and concavities of the graphs of the functions, among other results of the calculation.

Keywords: Variational Calculus. Minimization Problem. Derivatives. Limits.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Cálculo Variacional é utilizado dentro da área Matemática para resolução de problemas que consistem em encontrar funções com propriedades otimizadoras, isto é funções que tragam os melhores resultados diante de um problema. A otimização na Matemática tem como objetivo encontrar solução que maximize ou minimize resultado conforme a conveniência do problema em um determinado intervalo. O Cálculo Variacional é utilizado em várias áreas do conhecimento como: Física, Engenharia, Matemática, Economia, entre outras.

De acordo com Barros (2016), o conhecimento em relação otimização pode ser encontrado desde a Grécia antiga, através da obra Eneida, escrita pelo poeta romano Virgílio, por tema "Lenda de Dido" que foi publicada após sua morte em 19 a.C. A lenda relata que Dido era uma princesa fenícia que morava na cidade de Tiro, que se posicionava às margens do Mediterrâneo, na qual nos dias de hoje é o Líbano. Seu irmão, assassinou seu marido, para furtar os seus tesouros, e temendo por sua própria morte, Dido fugiu com objetivo de fundar uma nova cidade (Cartago). Sendo assim, no lugar escolhido para a cidade, ela buscou negociar os terrenos que pertenciam ao rei local, com finalidade de se estabelecer naquela região. Todavia, o rei delimitou que só venderia os terrenos que conseguisse abranger com couro de boi.

Dido e seu grupo resolveram cortar o couro de maneira que as tiras ficaram tão finas quanto possível e com essas tiras eles traçaram um semicírculo no chão, à beira do mar Mediterrâneo. O relato demonstra que os povos antigos já tinham o conhecimento sobre a solução do Problema Isoperimétrico que segundo Adala (2013), "Dado um comprimento fixo, dentre todas as figuras planas, fechadas, convexas e de perímetro igual a esse comprimento, o círculo é a que possui maior área".

Segundo Adala (2013), o conhecimento sobre otimização também está presente através das regiões registradas nos mapas de algumas cidades como por exemplo, podemos citar as cidades de : Colônia-Alemanha (semicircular), Paris-França (semicircular), Braga-Portugal (circular). Dessa forma, nota-se que era bastante utilizado o resultado do problema isoperimétrico com objetivo de obter a área máxima com um perímetro mínimo.

Com avanço do cálculo matemático, no ano de 1696 Jean Bernoulli propôs o "Problema da Braquistócrona", este problema se trata de,

> Dados dois pontos A e B em um plano vertical, fazer corresponder a uma partícula móvel M a trajetória AMB pela qual a partícula, descendo sobre o seu próprio peso, passa do ponto A para o ponto B no espaço de tempo mais

curto (Bernoulli apud Castro (2020)).

Jean Bernoulli e seu irmão Jacques Bernoulli propôs e discutiu os problemas das figuras isoperimétricas (caminho plano fechado de dada espécie e perímetro fixo que abarcam uma área máxima). De acordo com Boyer, (1997) os irmãos Bernoulli são considerados por muitos como os inventores do Cálculo Variacional.

Para o Cálculo Variacional, alguns conceitos são importantes como limites, derivadas que utilizaremos como base para o desenvolvimento deste trabalho. Como o nosso propósito é apresentar problemas de minimização, que podem ser solucionados com uso do Cálculo Variacional, torna-se fundamental o estudo da variações das funções, tais como: valores de máximos e mínimos, ponto crítico, testes das derivadas e concavidades dos gráficos das funções.

Para desenvolvimento desta pesquisa, trabalharemos com funções reais de variável real, entretanto foi feito um estudo na dissertação de Soares (2016) , em que o autor trabalha o conceito de Cálculo Variacional com funções definidas sobre algum espaço funcional, dando ênfase à equação de Euler-Lagrange, com objetivo de estudo com aplicação ao problema de Sturm-Liouville. Também realizamos um estudo na dissertação de Ferreira (2019), que trabalha a noção de Cálculo Variacional com objetivo de discutir e resolver alguns problemas de otimização com uso do Cálculo Variacional, com ênfase na braquistócrona. Observe que os trabalhos apresentados, utilizam métodos mais avançados em que as funções estão definidas sobre algum espaço funcional, de forma simplificada, funcional são espaço onde os elementos são funções. Embora tivemos acesso a esse tipo de trabalho, não aprofundamos, porque não é o nosso objetivo.

O objetivo deste trabalho é expor algumas aplicações de problemas de minimização do nosso cotidiano de forma a instigar outros discentes a buscarem mais sobre tal conteúdo. Para essa finalidade, o método de investigação utilizado nesta pesquisa, é a abordagem qualitativa com caráter exploratório e para o desenvolvimento deste trabalho, será utilizado a pesquisa bibliográfica.

Nesta perspectiva, apresentaremos no segundo capítulo os resultados preliminares que servirão de base para desenvolvimento dos capítulos enunciados posteriormente. Tais como, definições de limites e derivadas e suas propriedades, definições e exemplos de funções contínuas, bem como teoremas importante e, por fim o Teorema do Valor Médio.

O terceiro capítulo tem como objetivo o estudo da variação das funções, que será fundamental para que possamos resolver os problemas de minimização, para isso será necessário o estudo do valores máximo e mínimo, função crescente e decrescente , teste da primeira e segunda derivada, ponto crítico , concavidade e ponto de inflexão.

O quarto capítulo tem como finalidade resolver alguns problemas de minimização com uso do Cálculo Variacional, sendo assim colocaremos em prática toda teoria estudada anteriormente. O primeiro problema tem como objetivo encontrar o percurso que torna a viagem mais rápida o possível. O problema dois tem como finalidade encontrar o custo mais barato para construção de um contêiner. O problema três tem como intuito encontrar um ponto, para a construção de um oleoduto, de forma que o custo da construção seja minimizado. O último problema tem como objetivo encontrar a área superficial mínima de um sólido geométrico.

Alguns conceitos de limites e derivadas, como por exemplo, limites e derivadas laterais, serão tratados como conhecidos neste trabalho. Além disso, as demonstrações das propriedades de limites, funções contínuas e derivadas podem ser encontradas nos livros de Flemming e Gonçalvez (2006) ou Stewart (2013). Os teoremas de Rolle, valor extremo, testes das derivadas , não serão demonstrados, pois envolve conceitos que fogem dos objetivos deste trabalho. Mas, podem ser encontrados nos livros de Leithold (1994) ou Guidorizzi (2008).

As figuras presentes neste trabalho foram produzidas no Geogebra Classic versão: 6.0.541.0.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

O capítulo que se inicia tem como objetivo apresentar os conceitos matemáticos utilizados para essa pesquisa, tais como: limites, derivada, regra da cadeia, derivada de ordem superior e teorema do valor médio, que são essenciais para o desenvolvimento dessa pesquisa.

As propreidades, teoremas e definições apresentadas têm como principais referências Guidorizzi (2008), Leithold (1994), Stewart (2013), Flemming e Gonçalvez (2006) e Anton, Bivens e Davis (2007).

Em todos os casos consideramos funções com domínio sendo um intervalo $D \subset \mathbb{R}$ e o contradomínio conjunto dos números reias, isto é, $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2.1 Limite

O Cálculo Variacional é utilizado dentro da área Matemática para resolução de problemas que consistem em encontrar funções com propriedades otimizadoras, ou seja funções que tragam os melhores resultados diante de um problema. Sendo assim, o problema de otimização, de modo geral, tem como finalidade maximizar ou minimizar uma função em determinado domínio. Com isso, para resolver esses problemas, torna-se essencial o estudo da derivada. Para derivar, primeiro precisamos ter o conhecimento do conceito de "limite", portanto, essa ideia tem um papel muito importante, pois todos os demais conceitos do Cálculo são baseados nela.

Iremos fazer um estudo sobre as definições e propriedades de limites. Os resultados apresentados, serão utilizados como base para o desenvolvimento deste trabalho.

Definição 2.1.1. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio número a. O limite de f(x) quando x tende a a será L, é escrito como*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se a seguinte afirmativa for verdadeira: Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

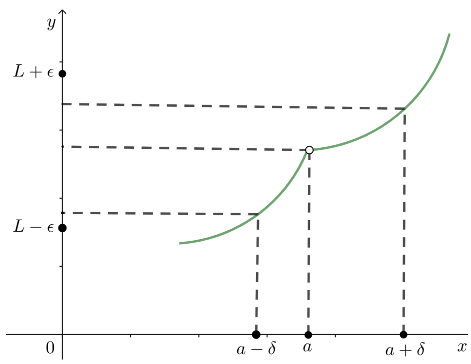
Segundo Leithold (1994, pg. 58), essa definição afirma que "os valores da função $f(x)$ tendem a um limite L quando x tende a um número a, se o valor absoluto da diferença entre $f(x)$ e L se torna tão pequeno quanto desejamos, tomando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a".

Com isso, dizer que tal limite existe, ou ainda que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

significa dizer que assumindo que valores do domínio estejam suficiente próximo de a, conseguiremos obter uma imagem da função $f(x)$ suficientemente próximo de L.

Figura 1: Representação geométrica de limite



Fonte: Adaptado de Leithold (pg.59, 1994.)

Dessa forma, se escolher um $\epsilon > 0$ e exigir que a um dado intervalo do domínio todos os valores da função caiam no intervalo $(L-\epsilon, L+\epsilon)$, logo, o que você deve fazer é procurar um $\delta > 0$ de modo que $f(x)$ quando avaliado no intervalo $(a-\delta, a-\delta)$ satisfaça nossa condição. Se isso for possível para qualquer escolha de ϵ, então podemos dizer que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Nesse caso o limite é o ponto do domínio, mas não é diferenciável neste ponto.

Como já temos conhecimento sobre a definição formal de limite, então agora iremos conhecer as suas propriedades.

Teorema 2.1.1. ***(Propriedades de Limites)***

Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções e $c \in \mathbb{R}$ uma constante, considere que existam os limites,

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ e } \lim_{x \to a} g(x).$$

Então, as seguintes propriedades são válidas

1.*O limite de uma soma é a soma dos limites.*

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

2. *O limite de uma diferença é a diferença dos limites.*

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x).$$

3. *O limite de uma constante multiplicado pela função é a constante que multiplica o limite desta função.*

$$\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x).$$

4. *O limite de um produto é o produto dos limites.*

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) . \lim_{x\to a} g(x).$$

5. *O limite de um quociente é o quociente dos limites.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

se $g(x) \neq 0$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

2.2 Funções contínuas

Nesta seção, definiremos o conceito de função contínua e algumas propriedades inerente a elas. Uma função ser contínua em seu domínio, ou em algum intervalo específico é hipótese importante de muitos teoremas em diversas áreas da Matemática. Para tornar essa ideia mais precisa, apresentamos as definição a seguir.

Definição 2.2.1. *Uma função* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua no ponto* $a \in \mathbb{R}$*, se forem satisfeitas as seguintes condições:*

I) $f(a)$ *existe ; ou seja,* $a \in D$*; e* $f(a) \in \mathbb{R}$

II) $\lim_{x\to a} f(x)$ *existe*

III) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Se uma ou mais de uma dessas condições não forem satisfeitas, a função f será descontínua em a.

Intuitivamente, podemos identificar que um gráfico de uma função pode ser representado como uma curva **contínua** se não apresentar quebras ou "buracos". Dizemos que um gráfico de uma função é **descontínua** em um determinado ponto a se o seu gráfico apresentar salto, degrau ou quebras.

Teorema 2.2.1. ***(Propriedade de Funções Contínuas)*** *Sejam* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funções contínuas em um determinado ponto* $a \in D$*, então*

I) f + g será contínua em a;

II) f - g será contínua em a;

III) f . g será contínua em a;

IV) $\frac{f}{g}$ *será contínua em a, desde que* $g(a) \neq 0$.

Exemplo 2.2.1. As funções apresentadas abaixo são contínuas em todos os pontos de seus domínios:

I) **Funções Polinomiais**: Uma função f é denominada polinômio se

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 + x^2 + a_1 x + a_0,$$

onde n é um número inteiro não negativo e os números $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ são constantes chamadas de coeficientes do polinômio.

II) **Funçoes Racionais:** Uma função racional f é a razão de dois polinômios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se Q(x) $\neq$ 0. Onde P e Q são polinômios.

III) **Funções Logarítmicas:** Uma função é denominada logarítima se $f(x) = log_a x$, onde a base a é uma constante positiva com $a \neq 1$.

Como trabalharemos com máximo e mínimo e ponto crítico de uma função, para isso precisamos saber derivar, pois é através dos testes das derivadas que saberemos se o gráfico tem um ponto de máximo ou mínimo local. Portanto, na próxima seção será exposto a definição de derivada e algumas propriedades.

2.3 Derivada

Derivada se faz presente em diversas áreas do conhecimento e aplicações que estão presentes no nosso cotidiano. Na Física, a derivada pode ser vista na velocidade no movimento retilíneo, visto que é a medida da taxa de variação da distância com relação ao tempo. Para a Biologia, a taxa de crescimento de bactérias é um exemplo de aplicação. A taxa de variação de uma reação química também pode ser encontrada através da derivada. A derivada também está presente no cotidiano das pessoas através, por exemplo, na taxa de crescimento populacional e econômica de um país, na taxa de variação de temperaturas, na taxa de redução da mortalidade infantil, na taxa da velocidade de corpos ou objetos em movimento. Para entendermos como isso se dá, iremos apresentar a definição formal de derivada e suas propriedades.

Definição 2.3.1. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de seu domínio. O limite*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p},$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por $f'(p)$ (leia: f linha de p). Deste modo

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Se admite derivada em p, então diremos que f é diferenciável em p.

Como já temos conhecimento sobre a definição formal de Derivada, então agora iremos conhecer algumas propriedades.

Teorema 2.3.1. ***(Propriedades de Derivadas)***

Sabendo que $c \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{R}$, $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções, sejam essas funções diferenciáveis.

1. *Derivada de uma constante:*

$$\text{Se } f(x) = c \text{ então } f'(x) = 0. \tag{2.1}$$

2. *Derivada do produto de uma constante por uma função:*

$$[cf(x)]' = cf'(x) \tag{2.2}$$

3. *Derivada da soma ou subtração:*

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x). \tag{2.3}$$

4. *Derivada do produto:*

$$[f(x)g(x)]' = g(x)f'(x) + f(x)g'(x). \tag{2.4}$$

5. *Derivada do quociente*

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}, \tag{2.5}$$

sendo $g(x) \neq 0$.

6. *Regra da potência:*

$$\left[x^n\right]' = n\, x^{n-1}. \tag{2.6}$$

7. *Regra da Cadeia*

Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se g for diferenciável em $x \in D$ e f for diferenciável em g(x), assim a função composta F=f$\circ$g, definidas por F(x)= f(g(x)), será diferenciável em $x \in D$ e F' será dada pelo produto,

$$F'(x) = f'(g(x)).g'(x). \tag{2.7}$$

Teorema 2.3.2. ***(Propreidade de Derivadas de Ordem Superior)***

Segundo Guidorizzi (2008, pg. 161) "Sejam uma função f e A o conjunto dos pontos x para os quais $f'(x)$ existe. A função $f' : A \to \mathbb{R}$ dada por $x \to f'(x)$, denomina-se função derivada ou, simplemente, derivada de f; diremos , ainda, que f' é derivada de 1^a ordem de f ".

Para a derivada de 2^a ordem é utilizado $f''(x)$ ou $f^{(2)}$ e é análoga para as derivadas de ordens superiores a 2 de f.

Para uma melhor compreensão, será apresentado um exemplos de derivadas de ordem superiores.

Exemplo 2.3.1. . Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 6x^3 - 18x + 25$. Determine f', f'' e f'''.

$$f'(x) = (6x^3 - 18x + 25)'$$

utilizando as propriedades (2.1) e (2.6) , temos que:

$$f'(x) = 6.3x^{3-1} - 6.x^{1-1} + 0,$$

sendo assim

$$f'(x) = 18x^2 - 18,$$

agora vamos encontrar a derivada da segunda ordem. Utilizando as propriedades (2.1) e (2.6) , temos que:

$$f''(x) = 18.2x^{2-1} - 0,$$

dessa forma, temos que

$$f''(x) = 36x,$$

agora vamos encontrar a derivada de terceira ordem. Utilizando as propriedades (2.6), temos que:

$$f'''(x) = 36x^{x-1} = 36.$$

portanto , temos que

$$f'''(x) = 36.$$

Veremos que muitos dos resultados apresentados neste trabalho tem como base o Teorema do Valor Médio (TVM) . Entretanto, apresentaremos primeiro o Teorema de Rolle que será utilizado na demonstração e, posteriormente, abordaremos o TVM.

Teorema 2.3.3. ***(Teorema de Rolle)*** *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:*

1. *f é contínua no intervalo fechado [a, b].*

2. *f é derivável no intervalo aberto (a, b).*

3. *f(a)=f(b).*

Então, existe um número c em (a, b) tal que f'(c)=0.

Teorema 2.3.4. ***(Teorema do Valor Médio-TVM)*** *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:*

1. *f é contínua no intervalo fechado [a, b].*

2. *f é derivável no intervalo aberto (a, b).*

Então, existe um número c em (a, b) tal que

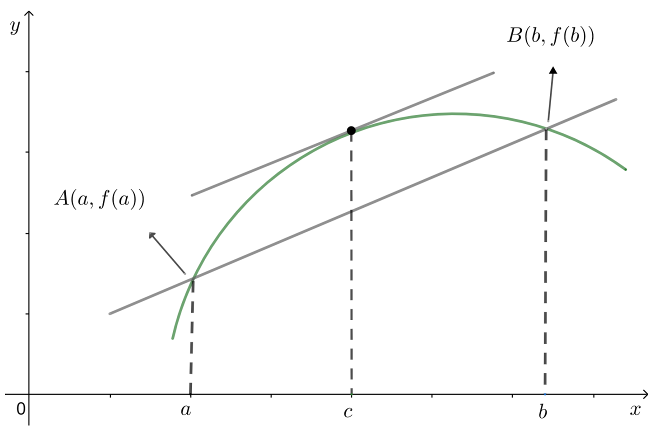
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

De acordo com Stewart (2013) o TVM foi enunciado pela primeira vez por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

> Ele foi uma criança prodígio e se tornou professor em Turin na idade de 19 anos. Lagrange fez grandes contribuições à teoria dos números, à teoria das funções, à teoria das equações, e às mecânicas analítica e celeste. Em particular, aplicou o cálculo na análise da estabilidade do sistema solar. A convite de Frederico, o Grande, ele sucedeu Euler na Academia de Berlim e, após a morte de Frederico, Lagrange aceitou o convite do rei Luís XVI para viver em Paris, onde lhe foi dado um apartamento no Louvre. Lá, tornou-se professor da École Polytechnique. A despeito das armadilhas da fama e da luxúria, ele era um homem bondoso e quieto, que vivia somente para a ciência. (STEWART, 2013, pg. 220).

Antes de demonstrar o TVM de forma algébrica, iremos interpretá-lo geometricamente.

Figura 2: Representação geométrica do TVM



Fonte: Adaptado de Leithold (pg.233, 1994.).

No gráfico da Figura 2, construímos o esboço da função $f, [f(b) - f(a)]/(b - a)$ é a inclinação do segmento de reta que liga os pontos $A(a, f(a))$e $B(b, f(b))$. O TVM afirma que existe um ponto sobre a curva entre A e B, onde a reta tangente é paralela à reta secante por A e B; isto é, existe um número c em (a,b), tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Demonstração do Teorema 2.3.4.
Uma equação da reta que passa por A e B na Figura 2 dada por

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \Leftrightarrow y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a).$$

Seja, agora, $F(x)$ a medida da distância vertical entre o ponto $(x, f(x))$ do gráfico da função f e o ponto correspondente sobre a reta secante A e B; então,

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a). \tag{2.8}$$

Vamos mostrar que a função F satisfaz três condições da hipótese do Teorema de Rolle.

A função F é contínua no intervalo fechado $[a,b]$, pois é a soma de f com uma função polinomial linear, ambas as quais são contínuas no intervalo. Portanto, a condição (1) está satisfeita por F. A condição (2) está satisfeita por F, pois f é derivável em (a,b). De (2.7), prossegue $F(a) = F(b)$=0. Ou seja,

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) - f(a) = 0$$

e

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) - f(a) \implies f(b) - (f(b)-f(a)) - f(a) \implies$$
$$f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0.$$

Em vista disso, temos que a condição (3) do Teorema de Rolle está satisfeita por F. Da conclusão do Teorema de Rolle, temos que existe um c intervalo aberto (a,b), tal que $F'(c)$=0. Mas

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Assim,

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Então, existe um número c em (a,b), tal que $F'(c) = 0$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

3 ESTUDO DA VARIAÇÃO DAS FUNÇÕES

Este capítulo tem como objetivo o Estudo da Variação das Funções, que será utilizado como base para que possamos resolver os problemas de Minimização.

As propreidades, teoremas e definições apresentadas nesse capítulo tem como principais referências Guidorizzi (2008), Leithold (1994), Stewart (2013), Flemming, Gonçalvez (2006) .

3.1 Valores máximo e mínimo de uma função

O Cálculo variacional, tem como finalidade maximizar ou minimizar uma função em determinado domínio, na qual desempenha um papel muito importante para resolver problemas do nosso cotidiano, como por exemplo: minimização da quantidade de energia usada em uma fábrica; melhor caminho para chegar a um local, pelas cidades; melhorar a potência de um motor, minimizando o consumo; entre outras aplicações. Os problemas apresentados podem ser restritos em encontrar os valores de máximo e mínimo de uma função.

Nessa seção, serão apresentadas as definições e teoremas para análise de funções e seus gráficos. Primeiramente, serão introduzidos as definições de máximo e mínimo global e locais e, logo após, será apresentado o teorema do valor extremo e teorema de Fermat e finalizaremos com a definição de ponto crítico .

Definição 3.1.1. *Seja c um número no domínio D de uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Então f é o*

1) valor ***máximo global*** *de f em D se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em D.*

2) valor ***mínimo global*** *de f em D se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em D.*

Em alguns casos os pontos de máximo ou mínimo global às vezes são chamados de máximo ou mínimo absoluto. Os valores máximos e mínimos de f são chamados de valores extremos de f.

Definição 3.1.2. *Seja $c \in D$. Então, c é*

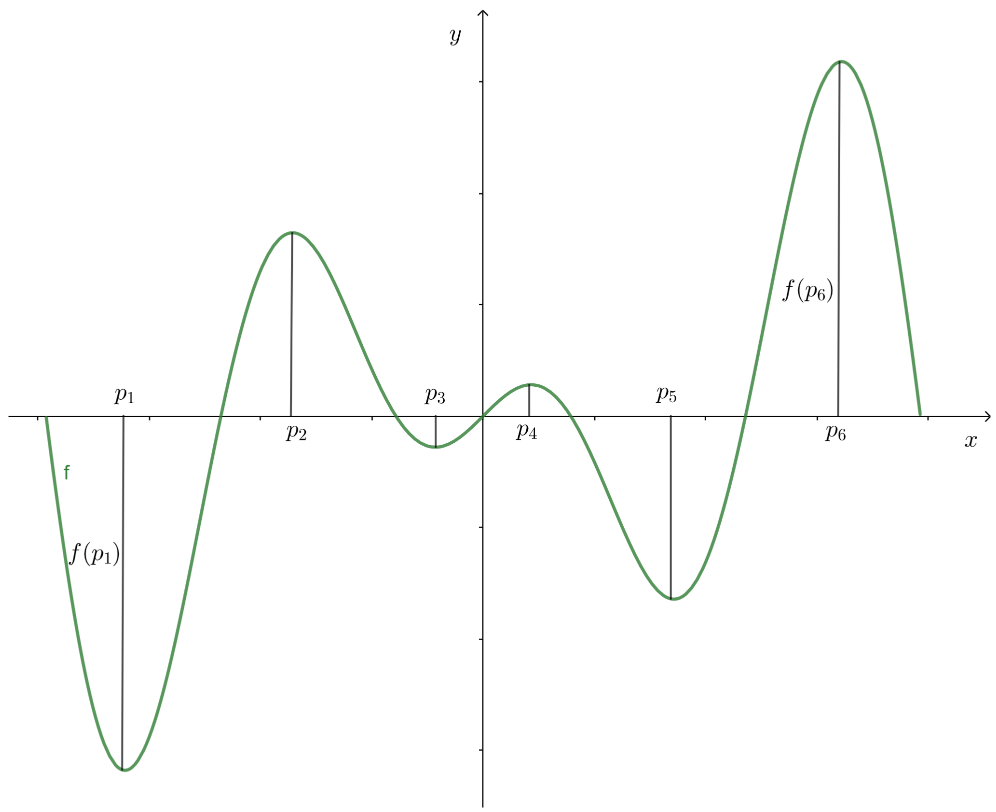
1) valor ***máximo local*** *de f se $f(c) \geq f(x)$ quando x está próximo de c.*

2) valor ***mínimo local*** *de f se $f(c) \leq f(x)$ quando x está próximo de c.*

Os pontos de máximo ou mínimo local às vezes são chamados de máximo ou mínimo relativo.

No gráfico da Figura 3, veremos como indentificar os valores de máximo e mínimo local e global atrvés da análise do gráfico.

Figura 3: Ponto de Máximo e Mínimo



$f(x) = xcos(x)$

Fonte: Autor.

p_2, p_4, p_6 são pontos de máximo local; $f(p_6)$ é valor de máximo global de f.

p_1, p_3, p_5 são pontos de mínimo local; $f(p_1)$ é valor de mínimo global de f.

Teorema 3.1.1. ***(Teorema do Valor Extremo)*** *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a,b]$.*

Teorema 3.1.2. ***(Teorema de Fermat)*** *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiver um máximo ou mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.*

Demonstração do Teorema 3.2.1.

Suponha, para fixar ideias, que f tenha um máximo local em c. Portanto, de acordo com a definição (3.1.2), $f(c) \geq f(x)$ se x for suficientemente próximo de c. Isso implica que, se h for suficientemente pequeno próximo de 0, com h sendo positivo ou negativo, temos que

$$f(c) \geq f(c+h)$$

e, com isso,

$$f(c+h)-f(c)\leq 0.$$

Agora vamos dividir ambos os lados dessa desigualdade por um número positivo. Dessa forma, se $h>0$ e h for suficientemente pequeno, temos que

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0.$$

Tomando o limite à direita de ambos os lados, teremos

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq \lim_{h\to 0^+} 0=0$$

Mas, uma vez que $f'(c)$ existe, logo

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Com isso, mostramos que $f'(c)\leq 0$.

Se $h<0$, consequentemente o sentido da desigualdade é invertido quando dividimos por h:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geq 0 \qquad\qquad h<0,$$

portanto, tomando o limite à esquerda, logo

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geq 0.$$

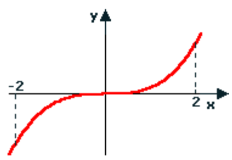
Provamos que $f'(c)\geq 0$ e que $f'(c)\leq 0$. Uma vez que ambas as desigualdades devem ser verdadeiras, a única possibilidade é que $f'(c)=0$.

A demonstração só foi feita para o caso de um máximo local. Porém, para o caso de mínimo local pode ser feita de forma análoga.

Definição 3.1.3. ***(Ponto Crítico)*** *Se c um número no domínio da função $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se f'(c)=0 ou f'(c) não existe, então c será chamado de* ***ponto crítico*** *de f.*

Se f tiver um máximo ou mínimo local em c, então c é um Ponto crítico de f. Entretanto, existe ponto crítico que não é ponto de máximo e nem mínimo.

Figura 4: Gráfico da função f



$f(x)=x^3$

Fonte: https://shre.ink/mFKD

Na Figura 4 temos uma função $f(x) = x^3$ definida sobre D=(2,2). Temos que $f'(x) = (x^3)'$ resulta em $f'(x) = 3x^2$. O ponto crítico dessa função é $x = 0$. Entretanto, a derivada neste ponto à direita e à esquerda resulta em $x = 0$, logo não podemos definir se esse ponto é ponto de máximo ou mínimo local. Esse ponto também é conhecido como ponto de sela, ou seja o ponto onde a função muda de concavidade. Para o leitor interessado em conhecer essa definição sugere-se consultar Stewart (2013, pg. 850).

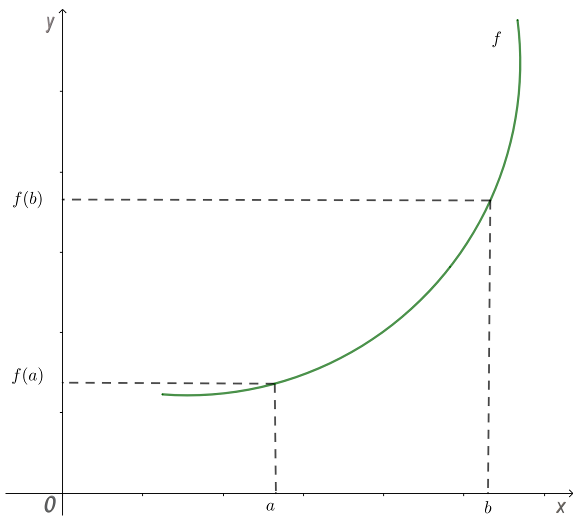
3.2 Função crescente e decrescente e os testes das derivadas

Nesta seção, serão expostos algumas definições e teoremas em relação à função crescente e decrescente e os testes das derivadas. Inicialmente, serão introduzidos os conceitos de funções crescentes e decrescentes.

Definição 3.2.1. *Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida num intervalo será **crescente** naquele intervalo, se somente se, $f(a) < f(b)$ sempre que $a < b$, onde a e b são quaisquer números no intervalo.*

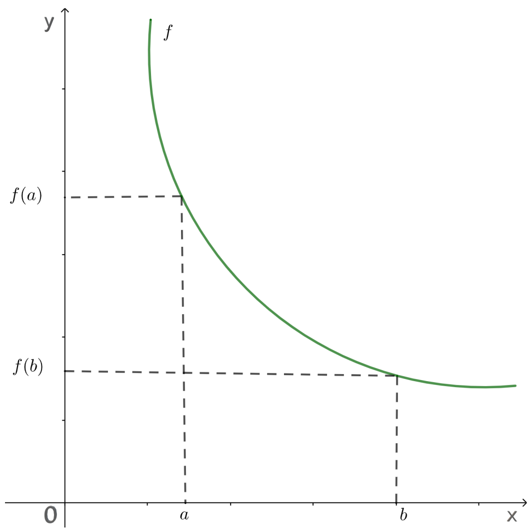
Definição 3.2.2. *Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida num intervalo será **decrescente** naquele intervalo, se somente se, $f(a) > f(b)$ sempre que $a < b$, onde a e b são quaisquer números no intervalo.*

Figura 5: Gráfico função crescente



Fonte: Autor

Figura 6: Gráfico função Decrescente



Fonte: Autor

O gráfico da Figura 5, no intervalo em que $a < b$ resulta em $f(a) < f(b)$ e, portanto a função f é crescente nesse intervalo. Na função representada na Figura 6 temos que no intervalo $a < b$ resulta em $f(a) > f(b)$ e, com isso o gráfico da função é decrescente nesse intervalo.

Se uma função é crescente ou decrescente em um determinado intervalo, essa função é chamada de monótona neste intervalo.

O teorema a seguir é uma consequência do TVM .

Teorema 3.2.1. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo [a,b] e derivável em (a,b):*
1) Se $f'(x) > 0$ $\forall$ $x \in$ (a,b), então f será crescente em [a,b];
2) Se $f'(x) < 0$ $\forall$ $x \in$ (a,b), então f será decrescente em [a,b];

Demonstração do Teorema 3.2.1.

Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em $[a,b]$ tais que $x_1 < x_2$. Então f é contínua em $[x_1,x_2]$ e derivável em (x_1,x_2). De acordo com Teorema do Valor Médio, temos que: existe c pertencente (x_1,x_2) tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{3.1}$$

1) Por hipótese, $f'(x) > 0$ $\forall$ $x \in (a,b)$. Assim $f'(c) > 0$. Como $x_1 < x_2$, $x_2 - x_1 > 0$. Analisando a igualdade (3.1), concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, isto é, $f(x_2) > f(x_1)$. Portanto, f é crescente em $[a,b]$.

2) Neste caso, $f'(x) < 0$ $\forall$ x (a,b). Temos então $f'(c) < 0$ e $x_2 - x_1 > 0$. Verificando a igualdade (3.1), concluímos que $f(x_2) - f(x_1) < 0$ e, logo, $f(x_2) < f(x_1)$. Portanto, f é decrescente em $[a,b]$.

Teorema 3.2.2. ***(Teste da Derivada Primeira para Extremo Locais)*** *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo fechado [a,b] $\subset D$ que possui derivada primeira em todo o ponto do intervalo (a,b) exceto possivelmente num ponto c. Suponha que c seja um ponto crítico de f e D um intervalo contendo c.*

(I) Se $f'(x) > 0$ para todo x<c e $f'(x) < 0$ para todo x>c, então f tem um valor máximo local em c.

(II) Se $f'(x) < 0$ para todo x<c e f'(x)>0 para todo x>c, então f tem um valor mínimo local em c.

Teorema 3.2.3. ***(Teste da Derivada Segunda para Extremo Locais)*** *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável num intervalo (a,b) e c um ponto crítico de acordo com a definição (3.1.3) de f neste intervalo, isto é, $f'(c) = 0$, com a<c<b . Se f admite a derivada segunda em (a,b), temos:*

(I) Se $f''(c) < 0$, f tem um valor máximo local em c.

(II) Se $f''(c) > 0$, f tem um valor mínimo local em c.

3.3 Convavidade e Pontos de Inflexão

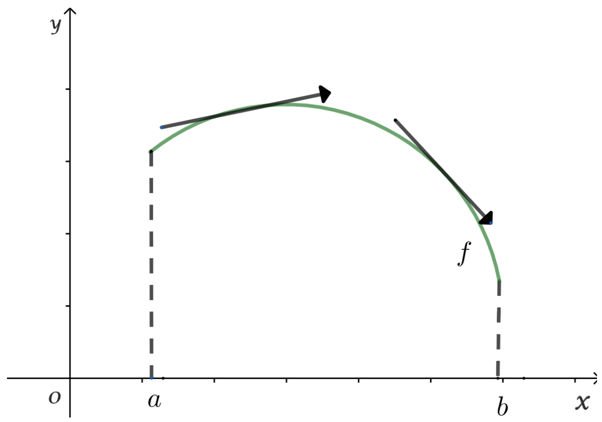
Nesta seção, serão apresentadas as definições e teoremas no que se refere a concavidade e ponto de inflexão. Primeiramente, serão introduzidos as definições de concavidade.

Definição 3.3.1. *f tem concavidade para cima no intervalo (a,b), se $f'(x)$ é crescente neste intervalo.*

Definição 3.3.2. *f tem concavidade para baixo no intervalo (a,b), se $f'(x)$ é decrescente neste intervalo.*

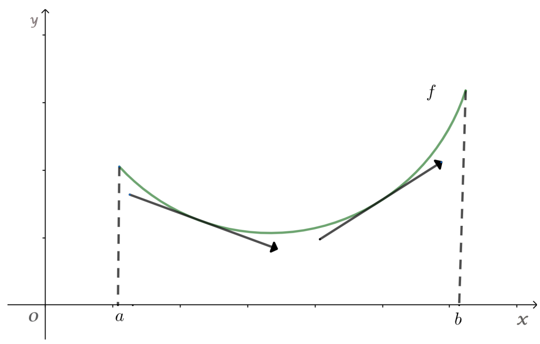
Nas figuras a seguir serão mostrados exemplos graficamente.

Figura 7: Concavidade para baixo



Fonte: Autor

Figura 8: Concavidade para cima



Fonte: Autor

No gráfico da Figura 8 as retas tangentes ao gráfico f foram traçadas em vários pontos, dessa forma, no intervalo a e b o gráfico da função fica acima das retas tangentes e f terá a concavidade para cima em (a,b). No intervalo a e b no gráfico da figura 7 o gráfico da função fica abaixo das retas tangentes e f terá concavidade para baixo em (a,b).

Teorema 3.3.1. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em algum intervalo aberto contendo c que adimite derivada até a 2^a ordem nesse intervalo. então,*

I) se $f''(c) > 0$, o gráfico de f terá a concavidade para cima em (c,f(c));

II) se $f''(c) < 0$, o gráfico de f terá a concavidade para baixo em (c,f(c)).

Demonstração de (I). Temos que

$$f''(c) = \lim_{x\to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}.$$

Visto que $f''(c) > 0$,

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0.$$

Dessa forma, existe um intervalo aberto D contendo c, de maneira que

$$\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} > 0, \tag{3.2}$$

$\forall\ x \neq c$ em D.

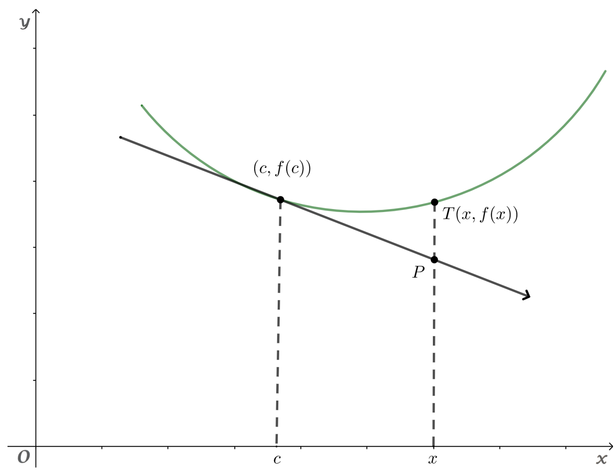
Consideremos agora a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$. Uma equação da reta tangente é

$$y = f(c) + f'(c)(x-c). \tag{3.3}$$

Seja x um número no intervalo D tal que $x \neq c$, e seja T o ponto do gráfico de f cuja abscissa é x. Através de T traçamos uma reta paralela ao eixo y e seja P o ponto de intersecção dessa reta com a tangente mostrado na Figura 9.

Para demonstrar que o gráfico de f terá concavidade para cima em $(c, f(c))$, precisamos mostrar que o ponto T está a acima do ponto P ou, equivalentemente, que a distância orientada $\overline{PT} > 0$ $\forall$ os valores de $x \neq c$ em D. $\overline{PT}$ é igual à ordenado de T menos a ordenada de P. A ordenada de T é $f(x)$ e a de P é obtido de (3.3); assim,

Figura 9: Gráfico da função f



Fonte: Adaptado de Leithold (1994, pg. 243.).

$$\overline{PT} = f(x) - [f(c) + f'(c)(x-c)],$$

$$\overline{PT} = [f(x) - f(c)] - f'(c)(x-c). \tag{3.4}$$

Do Teorema do Valor Médio , existe algum número d entre x e c, de maneira que

$$f'(d) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Ou seja, $f(x) - f(c) = f'(d)(x-c)$ para algum d e x. Substituindo essa igualdade em (3.4), temos

$$\overline{PT} = f'(d)(x-c) - f'(c)(x-c),$$

$$\overline{PT} = (x-c)[f'(d) - f'(c)]. \tag{3.5}$$

Como d está entre x e c, d está no intervalo D, e assim, tomando $x = d$ na desigualdade (3.2), obtemos

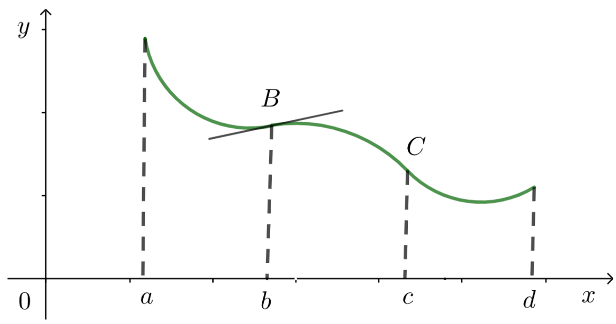
$$\frac{f'(d) - f'(c)}{d-c} > 0. \tag{3.6}$$

Para provar $\overline{PT} > 0$, vamos mostrar que ambos os fatores à direita de (3.5) têm o mesmo sinal. Se $x - c > 0$, então $x > c$. E como d está entre x e c, então $d < c$; logo, da desigualdade (3.6), $f'(d) - f'(c) > 0$. Se $x - c < 0$, então $x < c$ e assim $d < c$; dessa forma, de (5), $f'(d) - f'(c) < 0$. Concluímos que $x - c$ e $f'(d) - f'(c)$ têm o mesmo sinal; desse modo, $\overline{PT}$ é um número positivo. Posto isto, o gráfico de f é côncavo para cima em $(c, f(c))$.

A demonstração da parte (II) pode ser feita de forma análoga.

Definição 3.3.3. *Um ponto P na curva y=f(x) é chamado* ***ponto de inflexão*** *se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncavo para cima para côncavo para baixo ou vice-versa em P.*

Figura 10: Ponto inflexão



Fonte: Autor.

Na Figura 8, B e C são pontos de inflexão. Nos pontos B e C existe as derivadas $f'(B)$ e $f'(C)$. Observe que no ponto B a reta tangente corta o gráfico.

4 PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO

O nosso objetivo neste capítulo é resolver alguns problemas de minimização, que podem ser solucionados com uso do cálculo variacional, sendo assim colocaremos em prática a teoria estudada anteriormente. De acordo com Stewart (2013, pg. 247), "Muitos problemas práticos requerem minimizar um custo ou maximizar uma área, ou, de alguma forma, encontrar a melhor saída de uma situação". Neste capítulo abordaremos quatro aplicações, sendo duas com objetivo de encontrar o menor valor para construir determinado objeto, um com a finalidade de determinar a viagem mais rápida e, por fim encontrar a área superficial mínima de um sólido geométrico.

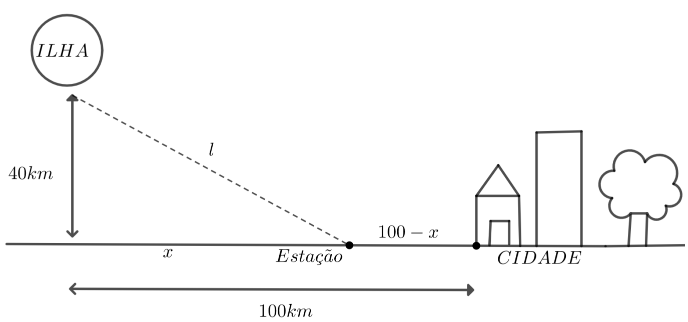
4.1 Problema de minimização

O primeiro problema (4.1.1) tem como referência Flemming e Gonçalvez (2006, pg. 225). O problema tem como propósito encontrar o percurso que torna a viagem mais rápida possível, com isso podemos ver a importância das aplicações matemáticas no cotidiano, visto que a partir do momento em que você encontra o melhor percurso, isso irá influenciar em diversos outros benefícios como por exemplo: economia de tempo, economia de combustível para automóvel, entre outros.

Problema 4.1.1. *Uma agência de turismo está organizando um serviço de barca, de uma ilha a 40 km de uma costa quase reta, para uma cidade que dista 100 km como mostra a figura a seguir. Se a barca tem uma velocidade de* $18km/h$ *e os carros têm uma velocidade média de 50 km/h, onde deverá estar situada a estação das barcas a fim de tornar a viagem a mais rápida possível?*

Icialmente, Vamos chamar de x a distância da costa até a estação das barcas. Para distância da estação até a ilha, iremos chamar de l.

Figura 11: Refresentação gráfica do problema



Fonte: Autor.

Vamos aplicar o Teorema de Pitágoras para encontrarmos l. Dessa forma

$$l^2 = 40^2 + x^2,$$

consequentemente,

$$l = \sqrt{40^2 + x^2}. \tag{4.1}$$

Queremos encontrar a função do tempo, então usaremos a fórmula da velocidade escalar média,

$$V_m = \frac{d}{\Delta t},$$

logo

$$\Delta t = \frac{d}{v_m}.$$

Observe que a distância da ilha até a cidade é dada por l mais $100 - x$. A velocida da barca é de $18km/h$ e os carros têm uma velocidade média de $50km/h$, dessa forma tempo total ficará da seguinte forma:

$$\Delta t = \frac{l}{v_{barca}} + \frac{100 - x}{v_{carro}}. \tag{4.2}$$

Vamos substituir os dados (4.1) e a distância da estação a cidade em (4.2):

$$t(x) = \frac{\sqrt{40^2 + x^2}}{18} + \frac{100 - x}{50}.$$

Encontramos a função que queremos minimizar. O nosso objetivo é encontrar a viagem mais rápida. Primeiramente, iremos derivar a função t e encontrar o ponto crítico.

$$t'(x) = \left(\frac{\sqrt{40^2 + x^2}}{18} + \frac{100 - x}{50} \right)',$$

para derivar t aplicamos a regra da derivada da soma (2.3) e Regra da Cadeia (2.3.1), posto isso:

$$t'(x) = \frac{1}{18} . \frac{2x}{2\sqrt{40^2 + x^2}} - \frac{1}{50},$$

sendo assim,

$$t'(x) = \frac{x}{18\sqrt{40^2 + x^2}} - \frac{1}{50}.$$

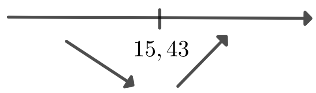
Agora, vamos encontrar o ponto crítico,

$$\frac{x}{18\sqrt{40^2 + x^2}} - \frac{1}{50} = 0 \implies \frac{x}{18\sqrt{40^2 + x^2}} = \frac{1}{50} \implies 50x = 18\sqrt{40^2 + x^2},$$

elevando os dois lados da igualdade ao quadrado, teremos:

$$50^2 x^2 = 18^2(40^2 + x^2) \implies x^2 = \frac{324.1600}{2500.324} \implies x^2 = 238,23 \implies x \approx 15,43.$$

Queremos saber se o ponto crítico é um ponto de mínimo, então iremos fazer o teste da primeira derivada. Dessa forma, iremos escolher um número $x < c$ e um número $x > c$, onde c é o ponto crítico encontrado, sendo assim escolhemos $15,42 < c$ e $15,44 > c$ e aplicamos em $t'(x)$ que resultou em $t'(15,42) < 0$ e $t'(15,44) > 0$, com isso temos que:



$$t'(x) = \frac{x}{18\sqrt{40^2 + x^2}} - \frac{1}{50}$$

observe que aplicamos o teste da primeira derivada (3.2.2), sendo assim a função decresce e cresce, então de fato o valor que encontramos é um valor mínimo. Como que queremos saber onde a estação das barcas deve estar localizada, então vamos substituir x na distância da estação até a cidade que é

$$100 - x,$$

substituindo x

$$100 - 15,43 = 84,56.$$

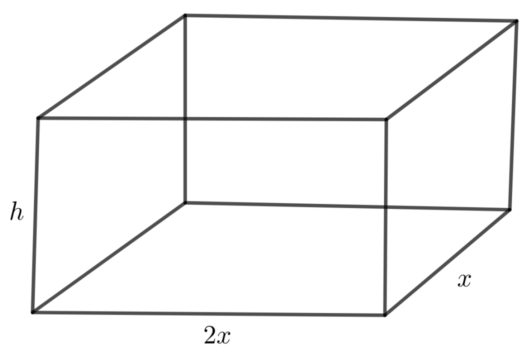
Portanto, concluímos que a estação das barcas deve ser localizada a uma distância de $84,56km$ da cidade para tornar a viagem mais rápida.

O problema apresentado posteriormente tem como finalidade encontrar o custo mais barato para construção de um contêiner. O problema tem como referência Stewart (2013, pg. 300).

Problema 4.1.2. *Um contêiner para estocagem retangular com uma tampa aberta deve ter um volume de* $10m^3$. *O Comprimento da base é o dobro da largura. O material para a base custa R$ 10,00 por metro quadrado. O material para os lados custa R$ 6,00 por metro quadrado. Encontre o custo dos materiais para o mais barato desses contêineres.*

Com as informações que foram fornercidas foi elaborado a figura abaixo.

Figura 12: Refresentação gráfica do problema



Fonte: Autor.

Inicialmente, precisamos de alguns dados importantes para resolução deste exercício. Queremos saber qual é a área da base e a área da lateral. Sendo assim, iremos encontrar a área da base, então

$$A_b = 2(2x^2),$$

o contêiner está com uma tampa aberta, sendo assim

$$A_b = 2x^2$$

área lateral é dada por

$$A_l = 2(2xh) + 2xh \implies Al = 6xh.$$

O problema pede para encontrar o custo mais barato, então iremos aplicar as informações obtidas pelo problema na função custo, sendo assim teremos:

$$C = C_b.A_b + C_l.A_l \implies C = 10_{Ab} + 6_{AL}. \tag{4.3}$$

O próximo passo é substituir a área da base e lateral na função custo é dada por (4.3), substituindo

$$C = 10(2x^2) + 6(6xh) \implies C = 20x^2 + 36xh. \tag{4.4}$$

Observe que temos um problema, pois a equação está em função de duas variáveis, então o nosso objetivo é colocar essa equação em função de uma única variável. O problema nos fornece que volume é dado por $10m^3$, então temos que:

$$V = 10m^3 \implies V = Ab.h \implies 10 = 2x^2.h,$$

isolando o h

$$h = \frac{10}{2x^2} \implies h = \frac{5}{x^2},$$

substituindo na função custo (4.4), teremos que:

$$C(x) = 20x^2 + 36x\frac{5}{x^2},$$

consequentemente

$$C(x) = 20x^2 + \frac{180}{x},\ x > 0. \tag{4.5}$$

Portanto, encontramos a função que queremos minimizar. Então, iremos derivar e posteriormente encontrar o ponto crítico.

$$C'(x) = \left(20x^2 + \frac{180}{x}\right)'.$$

Para derivar essa função, iremos utilizar a derivada da soma (2.3) e regra da potência (2.6), posto isso

$$C'(x) = 40x - \frac{180}{x^2} = \frac{40x^3 - 180}{x^2}.$$

Agora iremos encontrar o ponto crítico. Observe que essa função só irá anular se o numerador for nulo, dessa forma

$$40x^3 - 180 = 0 \implies 40x^3 = 180 \implies x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \approx 1,65.$$

O próximo passo é verificar se $x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$ é um ponto de mínimo, nesse caso iremos aplicar o teste da segunda derivada (3.2.3), logo

$$C''(x) = \left(40x - \frac{180}{x^2}\right)',$$

para derivar iremos utilizar derivada subtração (2.3) e derivada da potência (2.6), portanto

$$C''(x) = 40 + \frac{360}{x^3}. \tag{4.6}$$

Consequentemente, aplicaremos $x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$ em (4.6), teremos que

$$C''\left(\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\right) > 0,$$

portanto, pela definição $x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$ é um ponto de mínimo local. Como queremos saber o custo mínimo, então devemos substituir o valor de x na função custo (4.5), substituindo

$$C(1,65) = 20(1,65)^2 + \frac{180}{1,65} = 163,54.$$

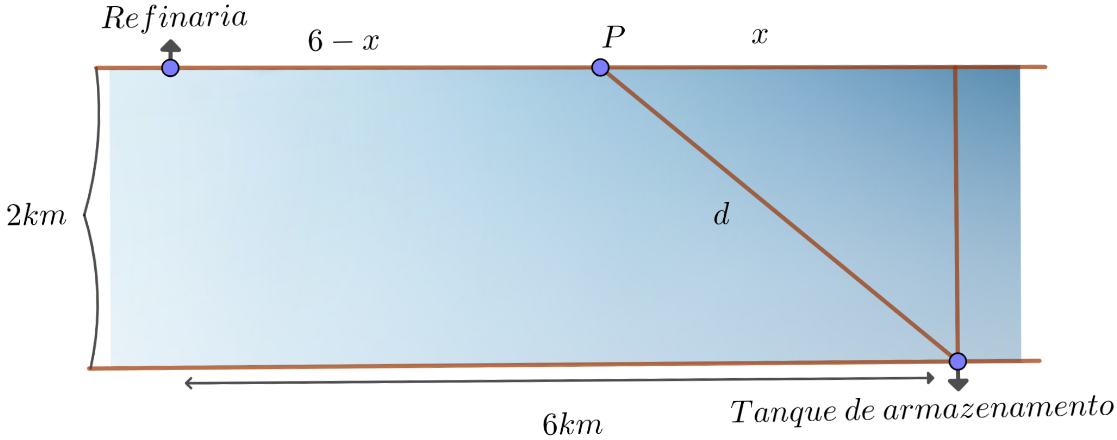
Sendo assim, o custo mais barato dos materiais para esse contêiner é R$ 163,54.

O problema exposto a seguir tem como referência a Monografia de Medeiros (2018, pg. 22). O objetivo deste problema é encontrar um ponto para a construção de um oleoduto, de forma que o custo de construção seja minimizado.

Problema 4.1.3. *Uma refinaria de petróleo está localizada na margem norte de um rio reto que tem 2 Km de largura. Um oleoduto deve ser contruído da refinaria até um tanque de armazenamento localizado na margem sul do rio, 6 Km a leste da refinaria. O custo de construção do oleoduto é US$ 400.000/km sobre a terra, até um ponto P na margem norte e e US$ 800.000/km sob rio até o tanque. Onde P deve estar localizado para minimizar o custo do oleoduto?*

Inicialmente, iremos chamar de x a distância de P ao tanque, dessa forma a distância da refinaria ao ponto P será 6-x, tendo em vista que a distância da refinaria ao tanque é $6km$. Com as informações que foram fornecidas foi elaborada a imagem abaixo.

Figura 13: Representação gráfica do problema



Fonte: Autor.

Observe que temos somente a distância da refinaria ao ponto P, então vamos encontrar a distância de P ao tanque e, para isto precisamos aplicar o Teorema de Pitágoras para encontrar o valor de d, sendo assim

$$d^2 = x^2 + 2^2$$

$$d = \sqrt{x^2+4}.$$

Foi encontrado o valor de d, então devemos aplicar as informações obtidas na função custo, pois é o que queremos minimizar. A função custo é dada por

$$C(x) = C.RP + C.PT,$$

sendo RP a distância da refinaria ao ponto P e PT a distância de P ao tanque. substuindo, teremos

$$C(x) = 400.000(6-x) + 800.000\sqrt{x^2+4}, \quad x > 0.$$

Encontramos a função que queremos minimizar, então iremos derivar a função $C(x)$ e, posteriormente encontrar o ponto crítico.

$$C'(x) = \left(400.000\,(6-x) + 800.000\sqrt{x^2+4}\right)',$$

para derivar essa função iremos aplicar derivada do produto de uma constante por uma função (2.2), regra da potência (2.6) e regra da cadeia, dessa forma:

$$C'(x) = 800.000\frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}} + 400.000(-1),$$

com isso,

$$C'(x) = \frac{800.000x}{\sqrt{4+x^2}} - 400.000.$$

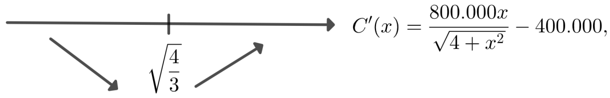
Agora, o nosso objetivo é encontrar o ponto crítico, então

$$\frac{800.000x}{\sqrt{4+x^2}} - 400.000 = 0 \implies \frac{800.000x}{\sqrt{4+x^2}} = 400.000 \implies 2x = \sqrt{4+x^2},$$

elevando os dois lados da igualdade ao quadrado, temos:

$$4x^2 = 4+x^2 \implies 4x^2 - x^2 = 4 \implies 3x^2 = 4 \implies x = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1,15.$$

O próximo e passo é consultar se $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ é um ponto de mínimo, para isso iremos aplicar o teste da primeira derivada (3.2.2). Com isso, iremos escolher um número x<c e um número x>c, onde c é o ponto crítico encontrado, sendo assim escolhemos $1,14 < c$ e $1,16 > c$ e aplicamos $C'(x)$ que resultou em $C'(1) < 0$ e $C'(2) > 0$, consequentemente teremos que:



portanto, como a função decresce e cresce então de fato $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ é um mínimo local. Como já encontramos o valor de x, então iremos substituir em $6-x$, dessa forma teremos:

$$6 - 1,15 = 4,85.$$

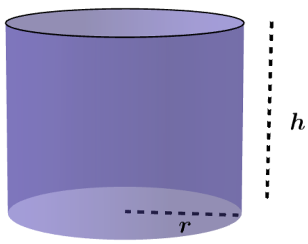
Sendo assim, o ponto P deve ser localizado a uma distância de $4,85km$ da refinaria para tornar o custo do oleoduto mais barato.

O problema apresentado, a seguir, tem como referência Thomas, Weir e Hass (2012). O objetivo deste problema é encontrar a área superficial mínima de um sólido geométrico.

Problema 4.1.4. *Encontre as dimensões de uma lata em forma de cilindro reto, sem tampa, que pode conter 1000 cm^3 e área superficial mínima.*

Com as informações fornercidas pelo problema, foi elaborado a figura abaixo.

Figura 14: Cilindro



Fonte: Autor.

Inicialmente, precisamos de alguns dados importantes para resolução deste exercício. A área da base do cilindro é dada por:

$$A_b = \pi r^2. \tag{4.7}$$

A área lateral é dada por:

$$A_l = 2\pi r h. \tag{4.8}$$

O volume do cilindro é obtido através da área da base vezes a altura, ou seja

$$V = Ab.h.$$

O volume é $1000cm^3$, então

$$1000 = A_b.h.$$

Substituindo (4.7), temos

$$1000 = \pi r^2.h.$$

Isolando h

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}. \tag{4.9}$$

A área total do cilindro é dado por:

$$A_t = 2A_b + A_l.$$

Como o cilindro é sem tampa, então

$$A_t = A_b + A_l.$$

Substituindo (4.7) e (4.8), temos que:

$$A_t = \pi r^2 + 2\pi r h.$$

Observe que temos um problema, pois a equação está em função de duas variáveis, sendo assim o nosso objetivo é colocar essa equação em função de uma única variável. Para isso, iremos substituir (4.9) na equação, logo

$$A_t = \pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} \implies A_t = \pi r^2 + \frac{2000}{r}, \quad r > 0.$$

Dessa forma, encontramos a função que queremos minimizar, então iremos derivar e posteriormente encontrar o ponto crítico.

$$A_t' = \left(\pi\, r^2 + \frac{2000}{r}\right)'.$$

Para derivar essa equação, iremos utilizar a derivada da soma (2.3) e regra da potência (2.6), posto isso

$$A_t' = 2\pi r^2 - \frac{2000}{r^2}.$$

O próximo passo é encontrar o ponto crítico (3.1.3), logo

$$2\pi r^2 - \frac{2000}{r^2} = 0 \Longrightarrow 2\pi r^2 = \frac{2000}{r^2} \Longrightarrow 1000 = \pi r^3 \Longrightarrow r^3 = \frac{1000}{\pi} \Longrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} \approx 6,82.$$

Agora, iremos verificar se $r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$ é um ponto de mínimo, nesse caso iremos aplicar o teste da segunda derivada (3.2.3), Assim

$$A_t'' = \left(2\pi\, r^2 - \frac{2000}{r^2}\right)'.$$

Para derivar essa equação, iremos utilizar a derivada da subtração 2.3 e regra da potência (2.6), consequentemente

$$A_t'' = 4\pi x + \frac{4000}{x^3}. \tag{4.10}$$

Aplicaremos $r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$ em 4.10, teremos que:

$$A_t'' = \left(\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}\right) > 0,$$

portanto, pela definição $r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$ é um mínimo local.

Sendo assim, para que o cilindro tenha uma área superficial mínima, tem que possuir altura igual o diâmetro, ou seja, com $r \approx 6,82cm$ e $h \approx 13,64cm$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho de pesquisa, foram apresentados conceitos do cálculo variacional com objetivo de resolver alguns de problemas de minimização, em situações do nosso cotidiano. Foram apresentadas quatro problemas de minimização, na qual dois tiveram como objetivo encontrar o menor valor para construir determinado objeto, um com a finalidade de determinar a viagem mais rápida e a outra teve como propósito encontrar a área superficial mínima de um sólido geométrico. De acordo com Burak (1992), "o objetivo da modelagem matemática é explicar matematicamente, os problemas presentes no cotidiano, com propósito de ajudar o ser humano a tomar as melhores decisões". Com isso, através deste trabalho, podemos concluir que a Matemática não se resume apenas em fórmulas ou definições, suas aplicações são fundamentais para auxiliar os seres humanos a escolher o melhor caminho para seguir.

Para o desenvolvimento desta pesquisa em específico, utilizamos funções reais de variável real, todavia fizemos estudos nas dissertações de Ferreira (2019), Soares (2016) e Barros (2011), em que utilizam métodos mais avançados na qual as funções estão definidas sobre algum espaço funcional. O nosso plano era trazer ao menos um exemplo mais avançado, entretanto ficamos limitados pelo tempo.

No decorrer deste trabalho, foram aprimorados os conhecimentos desenvolvidos durante a graduação através das disciplinas de Cálculo 1, Básica 2 e Geometria Analítica, entre outras. Sendo assim, através das construções dos gráficos, definições de funções e conceitos de limites e derivadas, tivemos a oportunidade de reforçar e aprofundar os conhecimentos que foram estudados.

Cabe ressaltar, que houve uma aprendizagem significativa nas realizações das construções dos gráficos, através do Geogebra, tendo em vista que tive pouco contato durante a graduação, entretanto pude construir gráficos muitos mais elaborados, através da realização deste trabalho. Também houve um aprimoramento das habilidades na execução da escrita deste trabalho no Latex.

Esta pesquisa, servirá como base de estudo para os professores e acadêmicos da graduação, com interesse no estudo de problemas de minimização com uso do cálculo variacional. Além disso, como as aplicações são inúmeras em situações bastante concretas e cotidianas, não somente na Matemática, mas em várias outras áreas do conhecimento, como por exemplo: Física, Engenharia, Economia, entre outras. Diante do exposto acima, e ainda pelo fato que as pesquisas nesta área continuam, torna-se relevante o estudo contínuo por futuros matemáticos.

REFERÊNCIAS

ADALA, Fabiana. **O Problema Isoperimétrico e Aplicações para o Ensino Médio**. 2013. Dissertação (Mestre em Matemática) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2013.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo Volume 1**. Porto Alegre: Bookman, 2007.

BARROS, Fernando. **Introdução ao estudo do Cálculo Variacional e da Curva Cicloide**. 2016. Dissertação (Mestre em Matemática) - Universidade Federal DE Minas Geraias - UFMG, Belo Horizonte-MG, 2016.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensinoaprendizagem**. Campinas-SP, 1992. Tese (Doutorado em Educação)-Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

CASTRO, Maurício. **História da Matemátização da Braquistócrona e Abordagens Didáticas**. 2020. Dissertação (Graduação) - Universidade Federal do Tocantins, Arraias-TO, 2020.

FERREIRA, José Alex. **Introdução ao Cálculo Variacional e Problemas de Otimização Aplicados no Ensino Básico**. 2019. Dissertação (Mestre em Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2019.

FLEMMING, D.; GONÇALVES, M. **Cálculo A: Funções, limite, derivação, integração**. 6. ed. Editora Pearson, São Paulo, 2006.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo Volume 1**. 5. ed. São Paulo: Grupo Gen-Editora LTC, , 2008.

LEITHOLD, louis- **O cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: Editora Harbra ltda., 1994.

MEDEIROS, Rodrigo. **Um Estudo sobre Derivadas e algumas Aplicações**. 2018. Monografia de Graduação - Universidade Federal de Goiás, Caicó-RN, 2018.

SOARES, Renato. **Cálculo Variacional com Aplicação ao Problema de Sturm-Liouville**. 2016. Dissertação (Mestre em Matemática)- Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

STEWART, James. **Cálculo Volume 1**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learging, 2013.

STEWART, James. **Cálculo Volume 2**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learging, 2013.

THOMAS, George; WEIR, Maurice; HASS, Joel. **Cálculo Volume 1**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.