UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JULIANA BARCELOS PEREIRA

TRANSFORMADA DE FOURIER: DEFINIÇÕES, PROPRIEDADES E APLICAÇÕES EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

ARRAIAS-TO
2021

JULIANA BARCELOS PEREIRA

TRANSFORMADA DE FOURIER: DEFINIÇÕES, PROPRIEDADES E APLICAÇÕES EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Monografia apresentada à UFT − Universidade Federal do Tocantins − Câmpus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor para obtenção de título de Licenciada em Matemática, sob orientação do Profa. Dra. Gisele Detomazi Almeida.

Orientador: Profa. Dra. Gisele Detomazi Almeida.

ARRAIAS-TO
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

P436t Pereira, Juliana Barcelos Pereira.

Transformada de Fourier: Definições, Propriedades e Aplicações em Equações Diferenciais Parciais . / Juliana Barcelos Pereira Pereira. – Arraias, TO, 2021.

40 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2021.

Orientadora : Gisele Detomazi Almeida

1. Transformada De Fourier. 2. Série de Fourier . 3. Equação do Calor . 4. Equação da Onda . I. Título

CDD 510

JULIANA BARCELOS PEREIRA

TRANSFORMADA DE FOURIER: DEFINIÇÃO, PROPRIEDADES E APLICAÇÕES EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Monografia foi avaliada e apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor, Curso de Licenciatura em Matemática para obtenção do título de Licenciada em Matemática e aprovada em sua forma final pela Orientadora e pela Banca Examinadora.

Data de aprovação: 20/ 12 /2021

Banca Examinadora

____

Profa. Dra. Gisele Detomazi Almeida, UFT

____

Prof. Dr. Elis Gardel da Costa Mesquita, UFT

____

Prof. Dr. Mateus Pereira Lobo, UFT

Arraias, 2021

À minha mãe, meu pai e minhas irmãs, que sempre me apoiaram.

AGRADECIMENTOS

Eu costumava dizer que tenho sorte, mas certo dia alguém me disse que sorte não existe, mas sim que tenho muitas pessoas que me amam, e isso fez total sentido para mim. Sendo assim, quero agradecer primeiramente a Deus, por conceder a minha vida, e colocar nela tantas pessoas que me amam.

A minha orientadora Gisele, por todo apoio, atenção e conhecimento que me proporcionou ao longo do trabalho.

A Universidade Federal do Tocantins, bem como todos seus funcionários que foram indispensáveis para a minha formação.

A banca que contribuiu para melhoria do meu trabalho.

A todos os professores da Universidade Federal do Tocantins que me ajudaram a crescer como profissional e também como pessoa.

À minha família por sempre ser meu ponto de apoio e refúgio, em especial, a minha mãe, e as minhas imãs Jaqueline e Fernanda que são mais que imãs para mim, são o sentido da minha vida, amo vocês, e a minha tia Joaquina e madrinha Helena. Ao meu pai que mesmo não estando aqui fisicamente deixou para mim muitas palavras de incentivo e vontade de concluir o que um dia foi o objetivo dele.

Aos amigos que conheci durante todo este percurso na faculdade, Bruno, Camila, Fernanda, Gabriel, Pedro e Tatiane.

Aos amigos de longa data que sempre estiveram a disposição para me ajudar e me acalmar nos momentos de angústia, Raissa, Rafael, Gian, Denise e Bruna.

Á minha segunda família que me acolheu de tal forma que não consigo explicar como os amo, Luís Marles e Patrícia.

“Não se apavore, nem se desanime, pois o Senhor, o seu Deus, estará com você por onde você andar.”

(Josué 1:6-9)

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é apresentar a Transformada de Fourier como método para resolver algumas aplicações de Equações Diferenciais Parciais. Neste sentido, este é composto por algumas definições importantes como: Definição da Série de Fourier bem como seus coeficientes, definição da Transformada de Fourier e algumas de suas propriedades como a Linearidade, Translação, Dilatação, entre outras e também a definição de Convolução de Funções que é uma ferramenta importante quando tratamos das Equações Diferenciais Parciais. Em particular estudamos duas aplicações que foram a Equação da Onda e a Equação do Calor. Para uma maior especificidade dessas soluções e a fim de apresentar ao leitor mais sugestões de soluções, buscamos resolvê-las fazendo o uso de duas técnicas. Assim, apresentamos a primeira solução via Série de Fourier e seus coeficientes e em seguida apresentamos a solução usando a Transformada de Fourier. Para o desenvolvimento deste trabalho, utilizamos a pesquisa exploratória que tem como objetivo proporcionar para o estudante uma maior familiaridade com o conteúdo.

Palavras-chave: Transformada de Fourier, Série de Fourier, Equação da Onda, Equação do Calor.

ABSTRACT

The main objective of this work is to present the Fourier Transform as a method to solve some applications of Partial Differential Equations. In this sense, it comprises some important definitions such as: Definition of the Fourier Series as well as its coefficients, definition of the Fourier Transform and some of its properties such as Linearity, Translation, Dilation, among others, and also the definition of Convolution of Functions that is an important tool when dealing with Partial Differential Equations. In particular, we studied two applications that were the Wave Equation and the Heat Equation. For a greater specificity of these solutions and in order to present the reader with more suggestions for solutions, we sought to resolve them using two techniques. Thus, we present the first solution via Fourier Series and its coefficients and then we present the solution using the Fourier Transform. For the development of this work we used exploratory research that aims to provide the student with greater familiarity with the content. greater familiarity with the content.

Keywords: Fourier Transform, Fourier series, Wave Equation, Heat Equation.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência que se desenvolveu pautada nas necessidades dos seres humanos, foi neste sentido que surgiu a precisão de contar e determinar quantidades e, em consequência, os números, com a geometria, álgebra em outras áreas da matemática não ocorreu diferente, de acordo com o surgimento de determinada necessidade os mistérios dentro da Matemática foram sendo desfeitos. Segundo Pupin (2011), Joseph Fourier (1768-1830), no século XVII, foi o primeiro físico e matemático a conseguir demonstrar que qualquer forma de onda pode ser representada por uma somatória de senóides e cossenóides de diferentes frequências, amplitudes e fases, vale ressaltar que outros grandes estudiosos como Euler e Bernoulli também chegaram a estudar tal conceito, contudo não tiveram o mesmo nível de rigorosidade que Fourier.

Durante os estudos envolvendo equações da onda na disciplina de Equações Diferenciais Parciais, surge a necessidade de conhecermos, e até calcularmos, os Coeficientes de Fourier, com o objetivo de determinarmos soluções das equações relacionadas e também propriedades de tais equações. Como tem sido cada vez maior o interesse no estudo deste tipo de problema devido à sua grande aplicabilidade, decidimos aprofundar nossos conhecimentos sobre esta importante e útil ferramenta.

Segundo (Cavalvanti & Cavalcanti, 2009), "a Transformada de Fourier juntamente com o produto de convoluções fornece-nos um poderoso e útil instrumento no estudo das Equações Diferenciais Parciais."Assim, considerando a importância em conjuntos especiais, como, por exemplo, nos Espaços de Sobolev, e por resultados como os de positividade sobre os Coeficientes de Fourier, que nos fornecem informações sobre funções pertencentes à classe Polya Frequency 2 (PF2 daqui para frente), de onde podemos obter informações sobre a concavidade de tais funções e, consequentemente, conhecer propriedades espectrais relevantes para diversos problemas matemáticos.

Neste sentido visamos conhecer as Transformadas de Fourier e suas propriedades, apresentando para o leitor uma fonte de informações e pesquisa sobre este assunto, e algumas de suas aplicações relacionadas ainda às Equações Diferenciais Parciais.

Além das Aplicações da Equação da onda e Equação do Calor, podemos encontrar muitas outras que fazem uso da Transformada de Fourier para determinar suas soluções, como é o caso da Resolução de circuitos elétricos especiais, presente no trabalho de Araújo e Márquez (2017).

Este projeto justifica-se pela importância em conhecer métodos mais simples para resolver questões dentro da Matemática, principalmente envolvendo EDP’s. Dessa forma, as transformadas de Fourier aparecem como uma alternativa para resolver problemas que envolvem ondas por exemplo. É comum expressarmos o domínio de determinada função usando para isso o tempo e o espaço, entretanto alguns problemas necessitam de algo mais particular para que possam ser manipulados de maneira conveniente. As Transformadas de Fourier permitem acessarmos propriedades em domínios de funções que tragam tais facilidades.

Este tipo de recurso é bastante utilizado em aplicações na área de telecomunicações, eletricidade, processamento digital, processamento de áudio e voz, processamento de música, modulação de sinal, entre outros.

De maneira mais geral, o objetivo deste trabalho é conhecer a Transformada de Fourier e suas propriedades e, ainda, analisar suas aplicações em EDP's conhecidas.Pensando de modo mais específico iremos compreender conceitos, definições a respeito da série e Transformada de Fourier, fazer um breve apanhado sobre a relação entre a série e a Transformada de Fourier, apresentar diferentes campos de aplicações em que podemos utilizar esta ferramenta, resolver exercícios sobre tais conceitos e, por fim, apresentar e analisar aplicações onde são utilizadas a Transformada de Fourier para diferentes finalidades.

Este trabalho está dividido em três capítulos. O capítulo 2 é composto por alguns resultados preliminares, ou seja, conceitos que serão necessários para entender as aplicações que serão desenvolvidas nos capítulos a seguir.

O capítulo 3 é composto pela equação do calor, sendo que ele será desenvolvido em dois momentos distintos a na primeira parte buscamos a solução do problema usando os coeficientes de Fourier, enquanto na segunda usamos a Transformada de Fourier.

Iniciamos o capítulo 4 com a equação da onda, e o desenvolvemos de maneira semelhante com o capítulo anterior, ou seja, de duas maneiras distintas, cujos métodos são os mesmos usados para a equação do calor.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

O objetivo deste trabalho é apresentar para o leitor algumas aplicações das Equações Diferenciais Parciais, contudo para que seja possível resolvermos estes problemas de EDP faz-se necessário conhecer algumas definições.

Assim este capítulo é composto pela definição e algumas propriedades mais relevantes para o trabalho, acerca da Série de Fourier, Transformada de Fourier e Convolução de Funções. Os teoremas, definições e propriedades apresentados neste capítulo têm como principais referências Santos (2011), Pupin (2011) e Iório (2010), Lima (2018).

2.1 Série de Fourier

A Série de Fourier é uma forma de série trigonométrica desenvolvida por Jean Baptiste Joseph Fourier, que auxilia na representação de funções periódicas e infinitas. Este tipo de série permite visualizar e resolver funções que representadas de outra maneira seriam mais complexas.

Este conhecimento matemático, além de ser usado para encontrar soluções de Equações Diferenciais, pode ser usado também na engenharia elétrica, análise de vibrações, física quântica, entre outras áreas.

Nesta seção apresentaremos a definição da Série de Fourier e também as fórmulas de seus coeficientes.

A Séries de Fourier é uma forma de série trigonométrica usada para representar funções periódicas, ou seja, funções que tem um mesmo comportamento dentro de um intervalo distinto, além disso a série de Fourier é expressa em funções trigonométricas simples de senos e cossenos que em particular são periódicas.

Definição 2.1.1. *Para toda função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes, a série de Fourier a função f é definida por*

$$SF(f(x)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

L representa o período onde a função está definida. É importante ressaltar que a série de Fourier converge em praticamente todos os pontos, exceto em seus pontos de descontinuidade.

Para encontrar a série de Fourier de determinada função, primeiro devemos determinar $a_0,\ a_n,\ b_n$, também conhecidos como coeficientes da série de Fourier, dados por

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx,\\
a_n &= \int_{-L}^{L} f(x)\cos\cdot\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.
\end{aligned}
$$

Abaixo iremos demonstrar como encontramos estes coeficientes. Começaremos aplicando a integral dos dois lados da série de Fourier,

$$
\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{L}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + b_n\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx. \tag{2.1}
$$

Analisando agora as integrais de modo separado, podemos concluir que a integral $b_n\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$ terá resultado zero, uma vez que a função sen assume valores iguais a zero em intervalos simétricos. Desta forma daremos continuidade buscando resolver as outras integrais. Iniciaremos pela segunda integral de 2.1,

$$
\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.
$$

Chamando $\frac{n\pi x}{L} = u$, calculando a derivada em relação a x, e substituindo na integral, ficamos com

$$
\begin{aligned}
\int_{-L}^{L}\cos(u)\frac{L}{n\pi}du &= \frac{L}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Bigg]_{-L}^{L},\\
&= \frac{L}{n\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi L}{L}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi - L}{L}\right)\right],\\
&= \frac{L}{n\pi}(\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen}(-n\pi)) = 0.
\end{aligned}
$$

Como podemos perceber estamos calculando o sen dentro de um intervalo simétrico, logo ele será zero.

Voltando a 2.1, e resolvendo a primeira integral, conseguimos

$$
\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} f(x)dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} dx =\\
\int_{-L}^{L} f(x)dx &= \frac{a_0}{2}L - (-L) = a_0 L,\\
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx.
\end{aligned}
$$

Desta forma conseguimos determinar o primeiro coeficiente a_0.

Para calcular os coeficientes a_n e b_n, usaremos algumas integrais auxiliares, como

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx. \tag{2.2}$$

Vamos considerar o caso em que $n \neq m$. Para resolver esta integral, é necessário utilizar as substituições trigonométricas,

$$\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B,$$
$$\cos(A-B) = \cos A \cdot \cos B + \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B,$$

Somando as duas sentenças anteriores, temos

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\Big[\cos(A+B) + cos(A-B)\Big]. \tag{2.3}$$

De 2.2, chamaremos $A = \dfrac{n\pi x}{L}$ e $B = \dfrac{m\pi x}{L}$.

Fazendo uma combinação de 2.2 e 2.3, e resolvendo a integral para $n \neq m$, temos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n+m)\pi x}{L} + \frac{\cos(n-m)\pi x}{L}\right] dx &= \\ \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(n+m)\pi} \cdot \operatorname{sen} \frac{(n+m)\pi x}{L} + \frac{L}{(n-m)\pi} \cdot \operatorname{sen} \frac{(n-m)\pi x}{L}\right]_{-L}^{L} &= 0. \end{aligned}$$

Agora fazendo novamente a combinação de 2.2 e 2.3, e resolvendo a integral para $m = n$, temos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n+m)\pi x}{L} + \frac{\operatorname{sen}(n-m)\pi x}{L}\right] dx &= \\ \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\frac{2n\pi x}{L} + 1\right] dx &= \\ \frac{1}{2}\left[\frac{L}{2n\pi} \cdot \operatorname{sen} \frac{2m\pi x}{L} + x\right]_{-L}^{L} &= \\ \frac{1}{2}x\Big]_{-L}^{L} &= \\ \frac{1}{2}\Big(L - (-L)\Big) &= L. \end{aligned}$$

Logo

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx =$$

$$\begin{cases} 0, se\ n \neq m, \\ L, se\ n = m. \end{cases} \tag{2.4}$$

De maneira análoga é possível resolver a integral de

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx =$$

$$\begin{cases} 0, se\ n \neq m, \\ L, se\ n = m. \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

Os cálculos feitos anteriormente servirão de auxílio para calcular a_n e b_n.

Continuaremos buscando encontrar a_n,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Multiplicando a equação anterior por $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, e fazendo também a integral

$$\int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$
$$+ b_k \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Usando o resultado de 2.4, e sabendo que as outras integrais deram 0, temos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= a_n \cdot L \\ a_n &= \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Determinando agora b_n,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Multiplicaremos agora a equação por $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$
$$+b_k\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

Usando o resultado de 2.5

$$\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = b_n\cdot L$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

Encontramos, então, que os coeficientes de Fourier são

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx,\\ a_n &= \frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx. \end{aligned}$$

2.2 Transformada de Fourier

Neste capítulo, faremos um estudo a respeito da Transformada de Fourier. Estamos acostumados a fazer gráficos de funções e em algumas situações, fazemos tais esboços em função do tempo. Contudo, algumas situações não podem ser expressas em função do tempo, apesar de dependerem também do tempo, como é o caso das frequências de rádio por exemplo, onde a Transformada de Fourier reescreve uma função que depende do tempo em uma função de frequência.

Mais acima apresentamos a definição e mais algumas informações a respeito das Séries de Fourier e estamos neste momento introduzindo a Transformada de Fourier, essas duas definições diferem-se pelo fato que a série de Fourier só é aplicável para intervalos periódicos, enquanto a Transformada é usada em casos mais gerais que são chamados aperiódicos, que é de um intervalo periódico porém, infinito.

Consideraremos a Transformada de Fourier de uma função $\hat{f}(\omega) = f(t)$ absolutamente integrável, ou seja, o módulo ou valor absoluto desta função também deve ser integrável, onde a função é denotada por $\hat{f}(.)$, como a expressão $\omega \in \mathbb{R}$.

Definição 2.2.1. *A Transformada de Fourier de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{C})$ é dada por*

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ e^{-i\omega t}dt.$$

$\forall \omega \in \mathbb{R}$ *tal que a integral acima converge.*

Iremos representar a função original por uma letra minúscula e a sua variável por x. A transformada de Fourier iremos representar pela letra correspondente com um chapeu e a sua variável por ω. Por exemplo, as transformadas de Fourier das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ serão representadas por $\hat{f}(\omega)$, $\hat{g}(\omega)$ e $\hat{h}(\omega)$, respectivamente.

Exemplo 2.2.1. Calcular a Transformada de Fourier de $X(t) = e^{-4t} \cdot U(t)$.

Para resolver este exemplo usaremos a definição formal da Transformada de Fourier que é dada por

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt.$$

Substituindo os valores da equação na definição anterior temos que

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4t} \cdot U(t) \cdot e^{-i\omega t}\ dt.$$

A função $U(t)$ é chamada função degrau, ela faz com que a Transformada assuma valor 0 para todos os valores menores que 0 e 1 para os demais valores, desta forma iremos restringir nosso intervalo de integração. Usaremos o método da substituição de variáveis para resolver esta integral.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{0}^{+\infty} e^{-4t} \cdot e^{-i\omega t}\ dt \\
\hat{f}(\omega) &= \int_{0}^{+\infty} e^{u} \cdot \frac{du}{-(4+i\omega)} \\
\hat{f}(\omega) &= \frac{-1}{4+i\omega} \cdot e^{-(4+i\omega)t} \\
\hat{f}(\omega) &= \frac{-1}{4+i\omega} \cdot [e^{-(4+i\omega)+\infty} - e^{-(4+i\omega)0}] \\
\hat{f}(\omega) &= \frac{-1}{4+i\omega} \cdot (0-1) \\
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{4+i\omega}.
\end{aligned}$$

Logo, $\dfrac{1}{4+i\omega}$ é a função expressa com domínio da frequência.

Teorema 2.2.1. ***(Linearidade)*** *Sejam* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *funções absolutamente integráveis e* $a, b \in \mathbb{R}$*, então:*

$$\hat{f}(af + bg) = a\hat{f}(f) + b\hat{f}(g).$$

Demostração

Aplicando a Transformada de Fourier em $\hat{f}(af+bg)$, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(af+bg)\cdot e^{-i\omega t}dt$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(af)e^{-i\omega t}dt+\int_{-\infty}^{=\infty}\hat{f}(bg)e^{-i\omega t}dt$$
$$=a\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(f)\cdot e^{-i\omega t}dt+b\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(g)\cdot e^{-i\omega t}dt$$
$$=a\hat{f}(f)+b\hat{f}(g).$$

Teorema 2.2.2. ***Transformada de Fourier de uma Translação*** *Sejam $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ funções absolutamente integráveis e $a,b\in\mathbb{R}$, então:*

$$\hat{f}(f(t-a))(\omega)=e^{-i\omega a}\hat{f}(f(t))(\omega).$$

onde $a\geq 0$ indica o valor da translação,ou seja, o quanto a função foi transladada.

Demostração

Começaremos aplicando Transformada de Fourier direta

$$\hat{f}[X(t-a)]=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-a)\cdot e^{-i\omega t}dt.$$

Fazendo $u=t-a$, $t=u+a$, $\dfrac{du}{dt}=1$

$$\hat{f}[X(t-a)]=\int_{-\infty}^{+\infty}X(u)\cdot e^{-i\omega(u+a)}du$$

$$\hat{f}[X(t-a)]=\int_{-\infty}^{+\infty}X(u)e^{-i\omega u}\cdot e^{-i\omega a}du$$
$$\hat{f}[X(t-a)]=e^{-i\omega a}\int_{-\infty}^{+\infty}X(u)\cdot e^{-i\omega u}du$$
$$\hat{f}[X(t-a)]=e^{-i\omega a}\cdot X(\omega).$$

Teorema 2.2.3. ***Transformada de Fourier de uma Dilatação****. Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ funções absolutamente integráveis com $a\neq 0$, então:*

$$\hat{f}(f(at))(\omega)=\frac{1}{|a|}\hat{f}(f)(\frac{\omega}{a}).$$

Demostração

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$
$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega.$$

Vamos aplicar a Transformada de Fourier em $X(at)$,

$$\hat{f}[X(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(at) \cdot e^{-i\omega t} dt.$$

Chamando $u = at$, $t = \frac{u}{a}$ e ainda $dt = \frac{du}{a}$,

$$\hat{f}[X(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) \cdot e^{-i\omega \frac{u}{a}} \frac{du}{a}$$
$$\hat{f}[X(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) \cdot e^{\frac{-i\omega}{a} \cdot u} du.$$

Ao aplicarmos a propriedade enunciada a seguir na transformada de Fourier, algumas equações diferenciais ordinárias podem ser transformadas em equações algébricas, que possuem complexidade reduzida.

Teorema 2.2.4. ***Transformada de Fourier das Derivadas*** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com Transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$.*

1. *Se $f'(x)$ é seccionalmente contínua e*

$$\lim_{x \to 0} |f(x)| = 0,$$

então

$$\hat{f}(f')(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega).$$

2. *Se f' é contínua com $f''(x)$ seccionalmente contínua e*

$$\lim_{x \to 0} |f'(x)| = 0,$$

então

$$\hat{f}(f'')(\omega) = -\omega^2 \hat{f}(\omega).$$

Demonstração

1. Aplicando a Transformada de Fourier
$$\hat{f}(f')(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f'(x) dx.$$
Usando a integração por partes, iremos chamar $dv = f'(x)$ e $u = e^{-i\omega x}$, fazendo os cálculos necessários, temos que $du = -i\omega \cdot e^{-i\omega x}$ e $v = f(x)$.

   Substituindo, temos
$$e^{-i\omega x} \cdot f(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot -i\omega e^{-i\omega x} dx$$
$$= 0 - i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-i\omega x} dx.$$
A equação $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-i\omega x}$ é exatamente a Transformada de Fourier de $\hat{f}(\omega)$. Assim, concluímos a primeira parte da demonstração, pois $\hat{f}(f')(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$.

2. Para provar este item usaremos também o item (a),
$$\begin{aligned} \hat{f}(f'')(\omega) &= i\omega\hat{f}(f')(\omega) \\ &= i\omega \cdot i\omega\hat{f}(\omega) \\ &= (i\omega)^2\hat{f}\omega \\ &= \omega^2\hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

2.3 Convolução de Funções

A Transformada de Fourier associada a convolução de duas funções torna ambas ferramentas ainda mais úteis. Para um melhor entendimento adiantamos aqui a definição de convolução.

A convolução de duas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, seccionalmente contínuas, limitadas tais que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < \infty$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx < \infty$, é definida por

Definição 2.3.1. ***Convolução de Funções*** $(f * g)(x) = h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u).g(x-u)du$, *para* $x \in \mathbb{R}$.

Sabe-se que a Transformada de Fourier toma uma função $f(x)$ e leva em outra função $f(\omega)$, por exemplo. Já a convolução leva um par de funções em uma terceira função. Na Transformada de Fourier, trabalhamos com um intervalo infinito, neste sentido uma das principais características da convulação de uma função é limitar este intervalo, facilitando a resolução de determinados problemas. Ilustraremos através das propriedades abaixo o quão estas ferramentas são úteis quanto utilizadas juntas.

Considere duas funções f e g. Sejam $f * g$ a convolução das duas funções e F $\hat{h}$ a Transformada de Fourier, de forma que $\hat{f}(f)$ e $\hat{f}(g)$ sejam as Transformadas de Fourier das funções f e g. respectivamente temos que

$$\hat{f}(f * g) = \hat{f}(f) \cdot \hat{f}(g),$$

Do mesmo modo, temos

$$\hat{f}(f \cdot g) = \hat{f}(f) * \hat{f}(g).$$

Demostração

$$\hat{f}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau \right] dt.$$

Mudando o intervalo de integração

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} x_2(t-\tau) dt \right] d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(\omega) e^{-i\omega\tau} d\tau \\
&= x_2(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\
&= x_2(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) e^{-i\omega\tau} \\
&= x_2(\omega) x_1(\tau).
\end{aligned}$$

2.4 Séries Convergentes

Uma série é uma soma $s = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ com um número infinito de parcelas. Para que isto faça sentido, poremos $s = \lim_{n\to\infty}(a_1 + ... + a_n)$. Como todo limite, este pode existir ou não. Por isso há séries convergentes ou divergentes.

Definição 2.4.1. *Dada uma sequencia (a_n) de números reais, a partir dela formamos uma nova sequencia (s_n) onde*

$$s_1 = a_1, \qquad s_2 = a_1 + a_2, \qquad ..., \qquad s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, etc.$$

Os números s_n chamam-se reduzidas ou somas parciais da série $\sum a_n$. A parcela a_n é o n-ésimo termo ou termo geral da série.

Se existir limite $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ diremos que a série $\sum a_n$ é convergente e $s = \sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ será chamado a soma da série. Se $\lim s_n$ não existir, diremos que $\sum a_n$ é uma série divergente.

As vezes é conveniente considerar séries do tipo $\sum_{n=0}^{\infty}$, que começam com a_0 em vez de a_1.

3 EQUAÇÃO DO CALOR

Este capítulo é composto pelo problema da Equação do calor e sua solução será encontrada a partir de dois métodos o primeiro será via coeficientes de Fourier e o segundo via Transformada de Fourier. Vale ressaltar que a primeira solução será dada dentro de um determinado intervalo, enquanto na segunda consideraremos uma barra infinita.

Falando com uma perspectiva da física, a Equação do Calor refere-se a um modelo matemático que trata da difusão do calor em determinados sólidos. Esta equação é apresentada por meio de uma EDP. Podemos encontrar a equação do calor em diversas áreas dentro da matemática, como na estatística, a equação do calor está vinculada com o estudo do movimento browniano através da equação de Fokker–Planck. Encontramos mais a respeito desse assunto em Silva e Lima(2006). Esta aplicação tem como principais referências Santos (2011) e Iório (2010).

3.1 Equação do Calor via Série de Fourier

Nesta subseção resolveremos a Equação do Calor usando os coeficientes de Fourier,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

α, sendo a constante que depende do material que compõe a barra, chamado de difusidade térmica.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L \\ u(t,0) = T_1, \quad u(L,t) = T_2 \end{cases}$$

T_1 *e* T_2 referem-se às temperaturas nas extremidades da barra. Vamos considerar as condições de contorno com $T_1 = T_2 = 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$
$$u(x,0) = f(x), 0 < x < L \quad (Comprimento \ \ da \ \ Barra)$$
$$u(t,0) = 0, \quad u(L,t) = 0.$$

Para resolver este problema, usaremos o método da separação das variáveis, que consiste em escrever a equação do calor, como o produto entre as variáveis x *e* t. Assim

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

Sabemos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = x(x) \cdot T'(t) \text{ e } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x) \cdot T(t).$$

Substituindo a equação anterior em $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x\ 2}$, temos

$$X(x) \cdot T'(t) = \alpha^2 X''(x) \cdot T(t).$$

Fazendo a separação de variáveis, ficamos com

$$\alpha^2 = X'' \cdot T(t) = X(x) = T'(t)$$
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)}.$$

Podemos observar que o lado esquerdo da igualdade depende exclusivamente de x, enquanto o lado direito depende somente de t, para que isto seja verdade é necessário que as equações sejam iguais a uma contante que chamaremos de λ, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)},$$

de modo que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \frac{X''(x)}{\lambda X(x)}.$$

e

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \lambda = \frac{T'(t)}{\alpha^2 \lambda T(t)}.$$

Obtemos, então, duas equações diferenciais ordinárias com condições de contorno.

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad X(0), X(L) = 0 \\ T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

$X(0) = 0$ *e* $X(L) = 0$, pois a temperatura da barra nas extremidades é 0.

$$0 = u(0,t) = X(0) \cdot T(t) \ e \ 0 = u(L,t) = X(L) \cdot T(t).$$

Temos a seguinte EDO, $X'' - \lambda X(x) = 0$, para resolvê-la iremos encontrar primeiro as soluções para sua equação característica, dada por:

$$X''(x) = \lambda X(x) = r^2 - \lambda = 0.$$

Resolvendo a equação anterior, observamos que ela pode ter soluções $r = \pm\sqrt{\lambda}$. como λ se trata de uma variável, vamos analisar os três possíveis valores que λ pode assumir.

Se: $\lambda > 0$, então a equação possui duas raízes reais distintas, logo a solução para a EDO é dada por:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda x}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda x}}.$$

Se: $\lambda = 0$, então a equação possui duas raízes reais iguais, logo a solução para a EDO, é dada por:

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \cdot e^{0x} + C_2 \cdot e^{0x} \\ X(x) &= C_1 + C_2(x) \\ X(x) &= C_1 + C_2(x). \end{aligned}$$

Se: $\lambda < 0$, então a equação possui duas raízes complexas e sua solução será

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen}(-\sqrt{\lambda} x) + C_2 \cos(-\sqrt{\lambda} x).$$

Vamos então analisar os casos apresentados anteriormente

Se $\lambda > 0$, temos que a solução é dada por:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda x}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda x}}.$$

Fazendo $x = 0$ e $X = 0$, temos

$$0 = C_1 + c_2.$$

ou seja,

$$C_2 = C_1.$$

Assim, podemos escrever a solução de uma outra maneira,

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} - C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x},$$

$$X(x) = C_1 \left(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x} \right).$$

Fazendo $x = L$ e $X = 0$, ficamos com

$$C_1 \left(e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L} \right) = 0.$$

Se $x_1 \neq 0$, então

$$e^{\sqrt{\lambda}L} = e^{\sqrt{-\lambda}L}.$$

O caso anterior só é possível se $\lambda = 0$, o que não pode ser verdade já que consideramos $\lambda > 0$.

Se: $\lambda = 0$

A solução para este caso é dada por

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Fazendo $x = 0$ e $X = 0$, temos

$$0 = C_1 + C_2 0$$

$$C_1 = 0.$$

Assim $X(x) = C_2 x$, fazendo agora $x = L$ e $x = 0$

$$C_2 L = 0$$

$$C_2 = 0.$$

Esta solução não nos interessa, pois é trivial.

Se: $\lambda < 0$

A solução para este caso é dada por:

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen}(-\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(-\sqrt{\lambda}x)$$

$$0 = C_1 \operatorname{sen}(-\sqrt{\lambda}0) C_2 \cos(-\sqrt{\lambda}0)$$

$$C_2 = 0.$$

Logo,

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen}(-\sqrt{\lambda}0).$$

Fazendo agora $x - L$ e $X = 0$,

$$C_1 \operatorname{sen}(-\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

Se $c_1 \neq 0$, então $-\sqrt{\lambda}L = n\pi$, para $n = 1, 2, 3...$, pois o seno assumirá valores iguais a zero para todos esses números. Com as análises feitas anteriormente para as condições de contorno, $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$, percebemos que somente para $\lambda < 0$ não obtivemos soluções triviais, ou seja, iguais a zero. Além disso para $\lambda < 0$, $\lambda = \dfrac{-n^2\pi^2}{L^2}$, $n = 1, 2, 3...$

Substituindo-se estes valores de λ concluímos que o problema de valores de fronteiras tem soluções fundamentais, dadas por

$$X_n(x) = -\frac{-n^2\pi^2}{L^2}.$$

Na equação $T'(t) - \alpha^2\lambda T(t) = 0$, temos

$$T'(t) \neq \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} T(t) = 0,$$

que tem solução fundamental $T_n(t) = e^{\frac{-\aleph n^2\pi^2}{L^2}}$ para $n = 1, 2, 3...$

Logo, o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \end{cases}$$

tem as seguintes soluções fundamentais $u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{L} e^{\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$ para $n = 1, 2, 3...$

3.2 Equação do calor em uma barra infinita

Queremos encontrar a função que descreva a temperatura da barra, isto em função da posição e do tempo. Assim, resolveremos o problema de valor inicial abaixo.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Vamos supor que exista a transformada de Fourier da solução$u\quad(x,t)$ em relação à variável x e suas derivadas $\dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Além disso, vamos supor que $\lim_{x\to\pm\infty}|u(x,t)|=0$, $\lim_{x\to\pm\infty}|\frac{\partial u}{\partial x}|=0$, e $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<\infty$.

Para solucionar o problema da equação do calor para a barra infinita, iremos aplicar a Transformada de Fourier para a variável x.

A Transformada de Fourier é dada por:

$$u(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}dx.$$

Desta forma a variável de integração será x, e tanto ω, como t iremos considerar como constantes.

Aplicando a Transformada em $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, temos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-i\omega x}dx.$$

Podemos observar que temos uma derivada parcial, em relação a t, porém t é constante e podemos colocá-la para fora da integral, assim:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}dx\right)=\frac{\partial u}{\partial t}(\omega,t).$$

Aplicando a Transformada em $\alpha^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$, temos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)e^{-i\omega x}dx.$$

Usando a propriedade da linearidade podemos retirar a constante α^2 da integral

Usando agora a propriedade da Transformada de Fourier das Derivadas, podemos escrever nossa equação como

$$-\omega^2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}dx\right)=-\omega^2\hat{u}(\omega,t).$$

Assim, ficamos com

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t)=-\alpha\omega^2\hat{u}(\omega,t) & \omega\in\mathbb{R},t>0\\ \hat{u}(x,0)=\hat{f}(\omega) & \omega\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Se fixarmos ω, teremos uma equação diferencial ordinária.

Escrevemos

$$y(t) = \hat{u}(\omega, t)$$
$$y'(t) = \hat{u}(\omega, t)$$

$$\begin{cases} y' = -k\omega^2 y \\ y(0) = \hat{f}(\omega) \end{cases}$$

A equação anterior é uma Equação Diferencial Ordinária, e além disso linear e homogênea, que pode ser resolvida usando o método de separação de variáveis.

$$\begin{gathered} y' = -k\omega^2 y \\ \frac{1}{y} \cdot y' = -k\omega^2 \\ \int \frac{1}{y} \cdot y' = \int -k\omega^2 dt \\ \ln y(t) = -k\omega^2 t + c(\omega) \\ e^{\ln y(t)} = e^{-k\omega^2 t} \\ y(t) = A(\omega) \cdot e^{-k\omega^2 t} \\ \hat{u}(\omega, t) = A(\omega) e^{-k\omega^2}, \quad \hat{u}(\omega, 0) = A(\omega) = \hat{f}(\omega) \\ \hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) e^{-k\omega^2 t}. \end{gathered}$$

Conseguimos encontrar então a transformada de $\hat{u}(x,t)$, contudo estamos buscando a função $u(x,t)$ que descreve a temperatura em cada ponto da barra. Para isto, iremos aplicar a transformada inversa de Fourier, e temos:

$$\begin{gathered} \hat{f}(\hat{u}(x,t)) = \hat{f}(\hat{f}(\omega) e^{-k\omega^2 t}) \\ u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-k\omega^2 t} \cdot e^{-i\omega x} d\omega. \end{gathered}$$

O problema anterior é composto pelo produto de duas funções, onde uma é a transformada e a outra é $e^{-k\omega^2 t}$. Então, para auxiliar na resolução, usaremos uma propriedade da Transformada que diz respeito à convolução de funções.

$$\hat{f}(f * g) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega).$$

Vamos aplicar novamente a transformada inversa na transformada da convolução, ou seja,

$$\hat{f}(\{(f*g) = \hat{f}(\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega))$$
$$f*g(x) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)).$$

Podemos observar que $(f*g)(x) = \sqrt{2\pi}\hat{F}^{-1}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$ é exatamente igual a $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{-k\omega^2 t}\cdot e^{-i\omega x}d\omega$, a menos da contante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ e caso exista uma função $g(\omega)$ cuja sua transformada seja $e^{-k\omega^2 t}$. Assim, podemos escrever

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f*g(x).$$

Usando o resultado

$$\hat{f}(e^{\frac{-ax^2}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{a}}e^{\frac{-\omega^2}{2a}},$$
$$\hat{f}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}e^{\frac{-\omega^2}{2a}}\right) = e^{\frac{-ax^2}{2}},$$

buscaremos escrever a função $e^{-k\omega t}$ de maneira semelhante a $\frac{1}{\sqrt{a}}e^{\frac{-\omega^2}{2a}}$.

$$e^{-k\omega^2 t} = e^{\frac{-\omega^2}{\frac{1}{kt}}}$$
$$e^{\frac{-\omega^2}{2\frac{1}{2kt}}} = e^{\frac{-\omega^2}{2a}} com \quad a = \frac{1}{2kt}$$
$$\sqrt{a}\frac{1}{\sqrt{a}}e^{\frac{-\omega^2}{2a}} = \sqrt{a}\cdot\hat{f}(e^{\frac{-ax^2}{2}})$$
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2kt}}\cdot e^{\frac{-x^2}{4kt}}.$$

Já que encontramos $g(x)$, iremos reescrever a função $u(x,t)$,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{-k\omega^2 t}\cdot e^{-i\omega x}d\omega$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot f*g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)\cdot\frac{1}{\sqrt{2kt}}\cdot e^{\frac{-(-x-s)^2}{4kt}}ds$$

Assim encontramos que a solução da Equação do Calor em uma barra infinita é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2k\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{\frac{-(x-s)^2}{4kt}}ds.$$

4 EQUAÇÃO DA ONDA

Este capítulo é composto pelo problema da Equação da Onda, Para a sua resolução escolhemos dois métodos, o primeiro método aplicado é a solução via coeficientes de Fourier e no segundo método resolvemos o problema usando a Transformada de Fourier.

A Equação da Onda é um problema recorrente dentro da matemática aplicada, é comum que este problema apareça na maioria das questões envolvendo propagação de ondas em um meio contínuo, podemos citar por exemplo as ondas acústicas, ondas da água, ondas eletromagnéticas, entre outras, que costumam basear-se no presente problema. Neste capítulo vamos nos atentar às vibrações de uma corda elástica. Esta aplicação tem como principal referência Santos (2011) e Iório (2010).

4.1 Equação da Onda Unidimensional

Queremos mostrar que cada ponto de uma corda elástica homogênea como função da posição e do tempo, $u(x,t)$, satisfaz a equação diferencial apresentada a seguir. Para nos auxiliar, inserimos também algumas condições para esta equação.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = (x,0) = g(x), 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \end{cases}$$

A terceira condição quer nos dizer que a amplitude da corda é zero nas suas extremidades. Além disso, L está associado ao comprimento da corda e $u(x,t)$ refere-se ao deslocamento vertical da corda no ponto x, em um determinado instante t, e $a > 0$ é uma constante que depende do material da corda. Não iremos considerar efeitos de amortecimento como a resistência do ar.

Para resolver este problema, usaremos o método da separação de variáveis, que consiste em escrever a Equação da Onda Unidimensional como o produto entre as variáveis x e t, assim temos

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

Sabemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x) \cdot T''(t) \tag{4.1}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x) \cdot T(t). \tag{4.2}$$

Substituindo na equação 4.1, ficamos com

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t).$$

Fazendo a Separação de Variáveis, temos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)}.$$

Vamos supor que $X(x)$ e $T(t)$ são diferentes de zero, pois se eles fossem zero o problema não iria atender as condições de contorno, exceto se $X(x)$ e $T(t)$ fossem nulas, contudo este problema teria uma solução trivial.

Podemos observar que o lado esquerdo da igualdade depende exclusivamente de x, enquanto o esquerdo depende somente de t.

Para que as duas sejam iguais entre si, é necessário que as equações sejam iguais a uma constante que chamaremos de λ, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \lambda,$$

De modo que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \Longrightarrow \frac{X''(x)}{\lambda X(x)},$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \lambda \Longrightarrow \frac{T''(t)}{\lambda a^2 T(t)}.$$

Obtemos, então, duas equações diferenciais ordinárias com as condições de contorno

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0 \\ T''(t) - a^2 \lambda T(t) = 0, \quad T'(0) = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

As condições de contorno $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ decorrem do fato de que a corda está presa nas extremidades, ou seja,

$$0 = u(0,t) = X(0) \cdot T(t) \ e \ 0 = u(L,t) = X(L) \cdot T(L).$$

Além disso se $T(t)$ fosse 0, a nossa solução seria sempre nula, o que não é interessante.

A equação 4.4, com as condições de contorno, foi resolvida no problema da equação do calor em uma barra com condições homogêneas. E tem soluções identicamente nulas se e somente se

$$\lambda = \frac{-n^2\pi^2}{L^2}, n = 1,2,3...$$

E tem soluções fundamentais

$$X(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

Se substituímos $\lambda = \dfrac{-n^2\pi^2}{L^2}, n = 1,2,3$, na equação 4.4, obtemos

$$\begin{aligned} T''(t) - a^2\lambda T(t) &= 0 \\ T'(t) - a^2(\frac{-n^2\pi^2}{L^2})T(t) &= 0 \\ T''(t) + \frac{a^2n^2\pi^2}{L^2}T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Temos agora uma EDO que podemos resolver usando uma equação característica.

$$\begin{aligned} r^2 + \frac{a^2n^2\pi^2}{L} &= 0 \\ r &= \pm\sqrt{\frac{a^2n^2\pi^2}{L}} \\ r &= \frac{an\pi i}{L}. \end{aligned}$$

Como encontramos duas raízes complexas, escrevemos a solução da EDO da seguinte forma

$$T(t) = c_1 \cdot \cos\frac{an\pi t}{L} + c_2 \operatorname{sen}\frac{an\pi t}{L}.$$

Queremos encontrar as soluções para $T(t)$, para isso iremos calcular a derivada $T'(t)$, e em seguida aplicar $T'(0) = 0$.

Derivando em relação a t, temos

$$\begin{aligned}
T(t) &= c_1 \cos\frac{an\pi t}{L} + c_2 \operatorname{sen}\frac{an\pi t}{L} \\
T'(t) &= -c_1\frac{an\pi}{L}\operatorname{sen}\frac{an\pi t}{L} + c_2\frac{an\pi}{L}\cos\frac{an\pi t}{L}.
\end{aligned}$$

Como $c_2\dfrac{an\pi}{L}$ é constante, chamaremos $c_2\dfrac{an\pi}{L} = c_3$.
Aplicando $T'(0) = 0$,

$$\begin{aligned}
0 &= -c_1\frac{an\pi}{L}\operatorname{sen}\frac{an\pi 0}{L} + c_3\cos\frac{an\pi 0}{L} \\
0 &= 0 + c_3 \\
c_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$T_n(t) = \cos\frac{an\pi t}{L}.$$

Logo o problema

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
u(0,t) = u(L,t) = 0; \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 < x < L
\end{cases}$$

tem soluções fundamentais

$$u_n(x,t) = X_n(x)\cdot T_n(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{an\pi t}{L}\right) \; para\ n = 1,2,3...$$

Assim, a solução será dada pela Série de Fourier

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} C_n U_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} C_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{an\pi t}{L}. \tag{4.4}$$

Aplicando a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

Usando o corolário

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}dx,$$

temos a seguinte relação trigonométrica

$$\cos(A)\cdot\mathrm{sen}(B) = \frac{1}{2}\Big\{\mathrm{sen}(B-A)+\mathrm{sen}(B+A)\Big\}$$

Fazendo o uso dessa relação, vamos reescrever a solução geral do problema, e temos

$$\begin{aligned} U_n(x,t) &= \cos\frac{an\pi t}{L}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}. \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}-\frac{an\pi t}{L}\right)+\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}+\frac{an\pi t}{L}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}\,\frac{(x-at)n\pi}{L}+\mathrm{sen}\,\frac{(x+at)n\pi}{L}\right]. \end{aligned}$$

Substituindo este resultado em 4.4, temos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi(x-at)}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sen}\,\frac{n\pi(x+at)}{L}\right) \\ &= \frac{1}{2}(f(x-at)+(x+at)). \end{aligned}$$

4.2 Equação da Onda em uma dimensão

Vamos resolver o problema da equação da onda em uma dimensão dada por $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x\in\mathbb{R}$, para isto usaremos a Transformada de Fourier.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x\in\mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), x\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{4.5}$$

Vamos começar resolvendo a Equação Diferencial Parcial apresentada anteriormente. É importante ressaltar que estaremos aplicando a Transformada de Fourier no espaço, ou seja, estarmos calculando a Transformada em x.

Aplicando a Transformada de Fourier dos dois lados da igualdade, e a propriedade da Transformada de Fourier das derivadas somente do lado direito, ficamos com

$$\begin{aligned}
\hat{f}(u_{tt}) &= \hat{f}(c^2 u_{xx}) \\
\hat{u}_{tt} &= c^2(i\omega)^2\hat{u} \\
\hat{u}_{tt} &= -c^2\omega^2\hat{u} \\
\hat{u}_{tt}+c^2+\omega^2\hat{u} &= 0.
\end{aligned}$$

Podemos notar que a equação $\hat{u}_{tt}+c^2+\omega^2\hat{u}=0$ é uma EDO, uma vez que temos a derivada em relação a uma só variável que no nosso caso é t. Além disso, esta EDO é de segunda ordem linear e homogênea, e podemos resolvê-la usado a Equação Característica.

$$\begin{aligned}
\hat{u}_{tt}+c^2+\omega^2+\hat{u} &= 0 \\
r^2+c^2+\omega^2 &= 0 \\
r &= \pm\sqrt{-c^2\omega^2} \\
r &= \pm ic\omega.
\end{aligned}$$

Como o resultado é complexo, a solução será escrita em função de seno e cosseno. De modo que

$$\hat{u}(\omega,t) = A(\omega)\cos(c\omega t)+B(\omega)\operatorname{sen}(c\omega t). \tag{4.6}$$

Os coeficientes A e B podem ser funções de ω.

Usaremos o fato que $u(x,0)=f(x)$. Aplicando a Transformada de Fourier de ambos os lados, temos que

$$\begin{aligned}
\hat{f}(u(x,0)) &= \hat{f}(f(x)) \\
\hat{u}(\omega,0) &= \hat{f}(\omega).
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado anterior em 4.6, temos

$$\hat{u}(\omega,0) = A(\omega)\cos(0)+B(\omega)\operatorname{sen}(0).$$

Como $\operatorname{sen}(0)=0$, temos

$$\hat{u}(\omega,0) = A(\omega)=\hat{f}(\omega). \tag{4.7}$$

Por enquanto escrevemos nossa solução da seguinte forma

$$\hat{u}(\omega,t) \quad = \quad \hat{f}(\omega)\cos(c\omega t) + B(\omega)\operatorname{sen}(c\omega t). \tag{4.8}$$

Usando agora a segunda condição inicial do problema e aplicando nela a Transformada de Fourier, temos

$$\begin{aligned} u_t(x,0) &= g(x) \\ \hat{f}(u_t(x,0)) &= \hat{f}(g(x)) \\ \hat{u}_t(\omega,0) &= g(\hat{\omega}). \end{aligned}$$

Calculando a derivada em relação a t em 4.8, obtemos

$$\hat{u}_t(\omega,t) \quad = \quad -c\omega\hat{f}(\omega)\operatorname{sen}(c\omega t) + c\omega B(\omega)\cos(c\omega t). \tag{4.9}$$

Substituindo $u_t(\omega,0) = \hat{g}(\omega)$, em 4.9 ficamos com

$$\begin{aligned} u_t(\omega,0) &= -c\omega\hat{f}(\omega)\operatorname{sen}(0) + c\omega B(\omega)\cos(c\omega t) \\ u_t(\omega,0) &= c\omega B(\omega) = g(\omega) \\ B(\omega) &= \frac{\hat{g}(\omega)}{c\omega}. \end{aligned}$$

Como encontramos $A(\omega)$ e $B(\omega)$, podemos escrever a solução da seguinte forma

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}\cos(c\omega t) + \frac{\hat{g}}{c\omega}\operatorname{sen}(c\omega t). \tag{4.10}$$

Este resultado corresponde à solução da EDO associada com a Transformada de Fourier. Contudo a solução ainda não foi encontrada, pois queremos determinar a função $u(x,t)$ que satisfaça nosso problema. De modo que possamos dizer que $u(x,t)$ é a Transformada Inversa de $\hat{u}(\omega,t)$. Para isto daremos continuidade aplicando a Transformada Inversa de Fourier, assim temos

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{+\infty}\left[\hat{f}(\omega)\cos(c\omega t) + \frac{\hat{g}(\omega)}{c\omega}\operatorname{sen}(c\omega t)\right]e^{i\omega t}d\omega. \tag{4.11}$$

Esta é a solução integral do problema, mas é possível organizá-la de modo a simplificar a expressão. Podemos começar separando-a em duas integrais,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\omega)\cos(c\omega t)e^{i\omega t}d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{g}(\omega)}{c\omega}, \operatorname{sen}(c\omega t)e^{i\omega t}d\omega \\
u(x,t) &= \hat{f}^{-1}(\hat{f}(\omega)\cos(c\omega t)) + \hat{f}^{-1}(\frac{\hat{g}(\omega)}{c\omega}\operatorname{sen}(c\omega t)).
\end{aligned}
$$

Vamos resolver $\hat{f}^{-1}(\hat{f}(\omega)\cos(c\omega t))$ usando $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$. Desta forma, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\omega)\cos(c\omega t) &= \hat{f}(\omega)\left(\frac{e^{c\omega ti}+e^{-c\omega ti}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\hat{f}(\omega)e^{c\omega ti} + \hat{f}(\omega)e^{-c\omega ti}\right].
\end{aligned}
$$

Aplicando a propriedade $f(x-a) = \hat{f}^{-1}(e^{-i\omega a}f(\omega))$, obtemos

$$
\frac{1}{2}\Big(f(x+ct)+f(x-ct)\Big).
$$

Logo, $\hat{f}^{-1}(\hat{f}(\omega)\cos(c\omega t)) = \dfrac{1}{2}\Big[f(x+ct)+f(x-ct)\Big]$.

Vamos agora resolver $\hat{f}^{-1}\left(\dfrac{\hat{g}(\omega)}{c\omega}\operatorname{sen}(c\omega t)\right)$. Para isso, começaremos supondo que

$$
\begin{aligned}
h(x,t) &= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds \\
\frac{\partial h(x,t)}{\partial x} &= \frac{1}{2c}(g(x+ct)-g(x-ct)).
\end{aligned}
$$

Aplicando a Transformada de Fourier,

$$
\hat{f}\left(\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right) = \hat{f}\left(\frac{1}{2c}(g(x+ct)-g(x-ct))\right).
$$

Usando a propriedade da Transformada de Fourier da derivada, temos

$$
\begin{aligned}
i\omega\hat{h}(\omega,t) &= \frac{1}{2c}(\Big(e^{i\omega ct}\hat{g}(\omega) - e^{-i\omega ct}\hat{g}(\omega))) \\
\hat{h}(\omega,t) &= \frac{1}{c\omega 2i}(e^{i\omega ct} - e^{-ic\omega ct})\hat{g}(\omega) \\
\hat{h}(\omega,t) &= \frac{\hat{g}(\omega)}{c\omega}\left(\frac{e^{i\omega ct} - e^{-i\omega ct}}{2i}\right) \\
\hat{h}(\omega,t) &= \frac{\hat{g}(\omega)}{c\omega}\,\mathrm{sen}(c\omega t).
\end{aligned}
$$

Logo, se $h(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$, então a Transformada $\hat{h}(\omega,t)$ é dada por

$$\hat{h}(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega)}{c\omega}\,\mathrm{sen}(c\omega t).$$

Assim $h(x,t)$ é a função que estamos procurando e $\hat{h}(\omega,t)$ a função Transformada.

Portanto a solução da equação da onda em uma dimensão é

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x+ct}^{x-ct} g(s)ds.$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como foi dito na introdução a motivação para este trabalho foram alguns estudos a respeito da disciplina de EDP. Neste sentido, nossa pesquisa foi direcionada para usar a transformada de Fourier para resolver as Equações do Calor e também a Equação da Onda, para desenvolver tais aplicações fizemos estudos a respeito de conceitos como série de Fourier e seus coeficientes, transformada de Fourier, bem como suas propriedades e, além disso, pesquisamos um pouco a respeito da convolução de funções. Estudar os itens citados anteriormente possibilitou-me aumentar meu conhecimento acerca da matemática, uma vez que tais tópicos não são tratados nas disciplinas obrigatórias do curso de graduação.

Tal trabalho permitiu, também, que eu pudesse consolidar conhecimentos adquiridos durante a graduação, podendo citar aqui aprendizados do cálculo, metodologia da pesquisa, EDO, entre outros que às vezes são muito sutis. Esta pesquisa ajudou-me também com o meu desenvolvimento enquanto pesquisadora.

A matemática é uma ciência muito vasta que permite a abordagem de um mesmo problema sob muitas perspectivas distintas. O objetivo deste trabalho foi desenvolver a Equação da Onda e do Calor usando os métodos de EDP, sendo que usamos duas estratégias distintas para cada aplicação que foram os métodos da Série e Transformada de Fourier.

Assim, encontramos que a Equação do Calor usando coeficientes de Fourier tem solução:
$u_n(x,t) = X_n(x)\cdot T_n(t) = \operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{L} e^{\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t}$ para $n = 1,2,3...$

Para a equação do calor em uma barra infinita, usamos a Transformada de Fourier e encontramos:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2k\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{\frac{-(x-s)^2}{4kt}} ds.$$

Para a Equação da Onda o resultado usando os coeficientes de Fourier, foram:

$$\frac{1}{2}(\tilde{f}(x-at) + \tilde{f}(x+at)).$$

E, por fim, para a Equação do Onda usando a Transformada de Fourier, encontramos a seguinte solução:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\tilde{f}(x+ct) + \tilde{f}(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x+ct}^{x-ct} g(s)ds.$$

Existem ainda uma infinidade de outras aplicações que podemos desenvolver tendo como objetivo aprimorar nossos conhecimentos em EDP, podemos citar aqui o problema da Equação do Calor em duas dimensões, por exemplo, dada por $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2})$.

Outro importante trabalho desenvolvido em relação as EDP's é a Tese de Almeida (2021) que trata a respeito da estabilidade orbital de soluções de ondas viajantes periódicas para as equações de Kawahara e Kawahara regularizada. Natali (2007) também desenvolveu um estudo em sua Tese sobre Propriedades de Positividade e Estabilidade de Ondas Viajantes periódicas. Ambos os trabalhos citados anteriormente têm bastante relevância e são úteis para quem deseja obter conhecimentos mais avançados em relação as EDP's.

Outros conhecimentos, objetivando dar continuidade a essa pesquisa, podem ser obtidos estudando a Equação de Laplace que também se trata de uma EDP, esta é uma equação diferencial elíptica que pode ser usada em vários ramos da matemática e também da física, como astronomia, electromagnetismo, mecânica dos fluidos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Gisele Detomazi. **Estabilidade Orbital de Soluções Ondas Viajantes Periódicas Para as Equações de Kawahara e Kawahara Regularizada**. 2021. 95 f. Maringá Tese(Doutorado em Matemática). Maringá: Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas. Maringá, 2021.

ARAÚJO, J.C; MÁRQUEZ, R.M.G. Solução de um Circuito Resistor-Indutor usando Transformada de Fourier e a Integração Complexa. **(REMAT)**,Bento Gonçalves, RS, v.3, n.2, p.11, dez.2017.

CAVALCANTE, M.M; CAVALCANTE, V.N.D; KOMORNIK, V. **Introdução à Analise Funcional**. 1.ed. Maringá: EDUEM, 2011. 481p.

IÓRIO, R.J; IÓRIO, V.M; **Equações Diferenciais Parciais:**uma introdução. 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. 343p.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real, vol. 1:** Função de uma Variável. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. 198 p. (Coleção matemática universitária).

NATALI, Fábio Matheus Amorin. **Propriedades de Positividade e Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas**. 2007. 119 f. Tese (Doutorado em Matemática). Campinas Instituto de matemática, estatística e computação científica na Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2007.

PUPIN, Josiana Rovatti. **Introdução às Séries e Transformadas de Fourier e Aplicações no Processamento de Sinais e Imagens**. 2011. 82 f. Monografia (Licecnciatura em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia Departamento de Matemática, São Carlos, 2011.

SANTOS. Reginaldo de Jesus. **Equações Diferenciais Parciais**: Uma Introdução (Versão preliminar). 1. ed. Belo Horizonte. Imprensa Universitária da UFMG, 2011. 590 p.

SILVA, J.M; LIMA, J.A.S. Quatro abordagens para o movimento browniano. **Revista Brasileira de Ensino de Física**. Natal, v.29, n.1, p.11, ago. 2006.