UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ISIS COSTA DE PAULA E SOUZA

# O TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS

Arraias,TO
2022

**Isis Costa de Paula e Souza**

# O Teorema de Perron-Frobenius

Monografia avaliada e apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário Dr. Sérgio Jacintho Leonor, curso de Licenciatura em Matemática para obtenção do título de licenciada em Matemática e aprovada em sua forma final pela Orientadora e pela Banca Examinadora.

Orientador: Prof. Dr. Élis Gardel da Costa Mesquita

Arraias,TO

2022

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins**

S729t Souza, Isis Costa de Paula e .

O Teorema de Perron-Frobenius. / Isis Costa de Paula e Souza. – Arraias, TO, 2022.

42 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2022.

Orientador: Élis Gardel da Costa Mesquita

1. Teorema de Perron-Frobenius. 2. Matriz. 3. Autovalor. 4. Autovetor. I. Título

**CDD 510**



**Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).**

ISIS COSTA DE PAULA E SOUZA

# O TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor, Curso de Licenciatura em Matemática foi avaliado para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Data de aprovação 28 / 06 / 2022

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
gov.br ELIS GARDEL DA COSTA MESQUITA
Data: 30/06/2022 20:10:38-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Élis Gardel da Costa Mesquita, UFT

Orientador

Documento assinado digitalmente
gov.br EUDES ANTONIO DA COSTA
Data: 30/06/2022 20:50:43-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa, UFT

Examinadora 1

Documento assinado digitalmente
gov.br Fernando Soares de Carvalho
Data: 30/06/2022 23:06:58-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Fernando Soares de Carvalho, UFT

Examinador 2

# RESUMO

Este trabalho teve como objetivo estudar o espectro de uma determinada classe de matrizes. Mais especificamente, apresentamos uma demonstração detalhada do teorema de Perron-Frobenius no contexto desta classe de matrizes, seguindo o método desenvolvido por Weilandt. Esta é uma pesquisa que tem como metodologia a revisão bibliográfica. O teorema de Perron foi enunciado e demonstrado em 1907, o qual garante a existência de autovalor maximal e autovetor associado estritamente positivo, para a classe das matrizes quadradas com entradas positivas. Em 1912, Frobenius ampliou este resultado à classe das matrizes não negativas e irredutíveis. A forma clássica do teorema é apresentada em três partes, as quais afirmam a existência de um valor próprio maximal $r$, a existência de um vetor próprio $v$ com todas entradas positivas associado a $r$ e a influência da variação das entradas de $A$ sobre a variação de $r$. Além da teoria desenvolvida apresentar resultados interessantes, este teorema se faz muito importante em diversas aplicações em áreas tais como economia, demografia, física, probabilidade, entre outras.

**Palavras-chaves**: Teorema de Perron-Frobenius. Matriz. Autovalor. Autovetor.

# ABSTRACT

This work aimed to study the spectrum of a certain class of matrices. More specifically, we present a detailed proof of the Perron-Frobenius theorem in the context of this class of matrices, following the method developed by Weilandt. This is a research that has as its methodology the bibliographic review. Perron's theorem was stated and proved in 1907, which guarantees the existence of a maximal eigenvalue and a strictly positive associated eigenvector, for the class of square matrices with positive entries. In 1912, Frobenius extended this result to the class of non-negative and irreducible matrices. The classical form of the theorem is presented in three which state the existence of a maximal eigenvalue $r$, the existence of an eigenvector $v$ with all positive entries associated with $r$ and the influence of the variation of $A$ on the variation of $r$. In addition to the developed theory presenting interesting results, this theorem is very important in several applications in areas such as economics, demography, physics, probability, among others.

**Keywords**: Perron-Frobenius Theorem. Matrices. Eigenvalue. Eigenvector.

# LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|---|---|
| a.C. | Antes de Cristo |
| $\geq$ | Maior ou igual |
| $\leq$ | Menor ou igual |
| $>$ | Maior que |
| $<$ | Menor que |
| $=$ | Igual |
| $\neq$ | Diferente |
| $\forall$ | Para todo |
| $\in$ | Pertence |
| $\sum$ | Somatório |
| $\{x, y, \cdots, z\}$ | Conjunto |
| $\mid (x_1, \cdots, x_n) \mid$ | Vetor cujas entradas são os valores absolutos $(\lvert x_1\rvert, \cdots, \lvert x_n\rvert)$ |
| $x_i$ | Entradas ou coordenadas que compõem o vetor $x$ |
| $\mid t \mid$ | Valor absoluto de $t$ |
| min | Mínimo de uma função ou conjunto |
| max | Máximo de uma função ou conjunto |
| $A_{m\times n}$ | Matriz $A$ de ordem $m \times n$ |
| $a_{ij}$ | Entradas da matriz $A$ |
| $\det(A)$ | Determinante da Matriz $A$ |
| $\sigma(A)$ | Espectro de $A$ |
| $\rho(A)$ | Raio espectral de $A$ |
| $f_A$ | Função de Collatz-Wielandt referente à matriz $A$ |
| $\mathbb{R}$ | Conjunto dos números Reais |

| | |
|---|---|
| $\mathbb{C}$ | Conjunto dos números Complexos |
| $\mathbb{P}$ | Conjunto dos números reais não negativos |
| $E^n$ | Vetores em $\mathbb{P}^{1\times n}$ com soma 1 |

# SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Segundo Borges (2007), foi encontrado os primeiros registros da teoria de matrizes em um problema que envolvia sistemas com equações com três incógnitas cada uma. Neste sentido, o autor descrevia situações e formas de resolver o que hoje chamamos de equações de 1° grau com o auxílio de uma tabela.

A ideia da denominação como matriz surgiu com o matemático inglês James Joseph Sylvester, que junto com seu amigo Cayley introduziram no livro "Memoir on the Theory of Matrices", em 1858, algumas operações básicas com essa nova ferramenta, mas quem de fato recebeu o mérito pela teoria de matrizes foi o inglês Arthur Cayler.

Depois da introdução da teoria de matrizes no meio humano e matemático, essa noção foi amplamente explorada por muitos pesquisadores e diversos resultados foram obtidos. Em nível de graduação, parte desta teoria é abordada hoje em dia nos cursos de Álgebra Linear.

O Teorema de Perron-Frobenius fornece uma caracterização simples dos autovetores e autovalores de uma classe ampla de matrizes com entradas não negativas. O que torna este teorema importante é o fato de que vários problemas de autovalor, nesta classe de matrizes, surgem como modelos matemáticos em diversos campos das ciências e da engenharia.

Em 1907, Oskar Perron obteve resultados sobre o espectro de matrizes pertencentes à uma classe de matrizes positivas, dentre os quais, assegura que tais matrizes possuem um autovalor maximal, simples e estritamente positivo, cujo módulo é o raio espectral e não há nenhum outro autovalor com mesmo módulo, com autovetor associado possuindo componentes estritamente positivas. Em 1912, Ferdinand Georg Frobenius estende este resultado de Perron, agora válidos para matrizes não negativas e irredutíveis. Tudo isso de acordo com Gomes (2006), Silva(2007) e Artuso (2021).

Nosso trabalho delimitou o estudo teórico do Teorema Perron-Frobenius. Este teorema é um resultado da Álgebra Linear o qual nos permite obter informações sobre o espectro de matrizes em uma determinada classe e com vários desdobramentos em diversas áreas da matemática e das ciências.

Nosso problema de pesquisa é entender, a partir deste teorema, o comportamento dos dados espectrais (autovalores e autovetores) de uma classe de matrizes quadradas, utilizando as técnicas desenvolvidas pelo matemático Helmut Wielandt em 1950 no seu trabalho “Unzerlegbare nicht-negative Matrizen” apresentadas nos trabalhos Madrid (2009), Gomes (2006) e Artuso (2021).

O trabalho esta dividido em 5 capítulos mais as referencias. Encontra-se no primeiro a introdução, uma breve explanação sobre o teorema de Perron-Frobenius, problema de pesquisa, objetivo, metodologia e estrutura organizacional.

O segundo capítulo é voltado para um estudo básico sobre matrizes, no qual apresentamos alguns tipos de matrizes, definimos algumas operações, definição de determinante, os autovalores e autovetores associados, o raio espectral e espectro de uma matriz. Além disse, estabelecemos algumas notações que nos permite comparar duas matrizes ou dois vetores.

No capítulo 3 apresentamos a classe das matrizes não negativas e irredutíveis a qual é o contexto no qual trabalharemos. Para isto, definimos uma matriz redutível. A seguir, apresentamos alguns resultados básicos da teoria das matrizes não negativas e irredutíveis, resultados estes que serão aplicados na demonstração do principal teorema de nosso trabalho.

O quarto capítulo apresenta o teorema de Perron e na sequência o teorema de Perron-Frobenius. Apresentamos uma prova detalhada para este teorema, bem como alguns exemplos de matrizes não negativas, sem a hipótese de irredutibilidade, para as quais há falha na aplicação do teorema de Perron-Frobenius.

Por fim, o capítulo 5 traz as considerações finais no qual apresenta os resultados alcançados neste trabalho.

# 2 MATRIZES

Esse capítulo tem como objetivo deixar mais claro o objeto de estudo, familiarizando o conteúdo aos leitores. Uma vez que o Teorema de Perron Frobenius trata de resultados em matrizes, será encontrado nesse um histórico, definição, tipos, classificações, algumas operações e outros conceitos necessários para o entendimento e estudo do teorema. Esse foi escrito usando as referências Iezzi e Hazzan (2004), Lawson (1997), Silva (2007), Callioli, Domingues e Costa (1990), Busby e Anton (2006), Steinbruch e Winterle (1987), Alves (2002), Serranho (2017), Lay (1999) e Borges (2007).

**Definição 1.** *Dados dois números $m$ e $n$ naturais e não nulos, chama-se matriz de ordem $m$ por $n$ (indica-se $A_{m\times n}$) toda tabela $A$ formada por números reais distribuídos em $m$ linhas e $n$ colunas.*

$$A_{m\times n} = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix}.$$

*Todo* elemento *ou* entrada *da matriz $A$ é representado por $(a_{ij})$, $i \in \{1,2,3,...,m\}$ e $j \in \{1,2,3,...,n\}$.*

## 2.1 Alguns tipos de Matrizes

O universo matricial é bem diverso e extenso, porém é importante o estudo de algumas matrizes em especial para o entendimento do Teorema de Perron-Frobenius, são essas:

**Definição 2.** *Uma* matriz quadrada *é aquela do tipo $n\times n$, ou seja, possui números iguais de linhas e colunas*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

É intitulada como *diagonal principal* de uma matriz quadrada o conjunto de todas as entradas em que $i = j$ e $1 \leq i, j \leq n$. Ou seja, a diagonal principal de $A$ é o conjunto $\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}\}$. É intitulada como *diagonal secundária* de uma matriz quadrada o conjunto de todas entradas em que $i + j = n + 1$ e $1 \leq i, j \leq n$. Ou seja, a diagonal secundária de $A$ é composta por: $\{a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \cdots, a_{n1}\}$.

**Definição 3.** Matriz diagonal *é uma matriz $A$ quadrada que possui os elementos fora da diagonal principal nulos*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & a_{ij} \end{pmatrix}.$$

**Definição 4.** Matriz nula *é aquela que possui todas entradas iguais a* $0$. *Usaremos o símbolo $O$ para designar uma matriz nula cuja ordem é especificada de acordo com o contexto, ou seja,*

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

**Definição 5.** Matriz coluna *possui $m$ linhas e apenas umas coluna* $(n = 1)$

$$A_{m\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \end{pmatrix}.$$

**Definição 6.** Matriz linha *possui $n$ colunas e apenas umas linha* $(m = 1)$*.*

$$A_{1\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \end{pmatrix}$$

**Definição 7.** Matriz identidade *é uma matriz diagonal que possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1. Usaremos a notação $I_n$ para designar uma matriz identidade de ordem $n$,*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Para definir alguns tipos de matrizes foram utilizados operações como multiplicação de matrizes, manipulações que serão explanadas a seguir.

## 2.2 Algumas operações com Matrizes

Após o estudo dos tipos de matrizes faz necessário o estudo das operações com este objeto matemático.

Para todos os exemplos desse subtópico consideraremos as matrizes quadrada $A$ e $B$ como sendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 7 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

**Definição 8.** *A partir de duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, tem-se que a soma de $A+B$ se da pela adição de elemento da mesma posição, ou seja, $A+B = C = (c_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij})$*

**Exemplo 1.** *Tomando as matrizes A e B definida em 2.1, teremos que*

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 7 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 6+2 & 9+9 \\ 4+7 & 8+2 & 2+4 \\ 2+2 & 3+4 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 18 \\ 11 & 10 & 6 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Note que não é possível adicionar duas matrizes com números de colunas ou de linhas diferentes, ou seja, tendo $A_{m\times n}$ e $B_{x\times y}$, para que seja possível a soma $A+B$ é necessário que $m = x$, $n = y$, isso porque se $m \neq x$ e/ou $n \neq y$, as matrizes terão entradas em uma que não possuirão na outra impedindo assim a operação.

Uma vez que pode-se definir a subtração como o oposto da adição, é validado dizer que a subtração de duas matrizes se da mesma forma em que se adiciona.

**Exemplo 2.** *Tomando novamente a mesma matriz A e B de 2.1, teremos que*

$$A+(-B) = A-B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 7 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 & 6-2 & 9-9 \\ 4-7 & 8-2 & 2-4 \\ 2-2 & 3-4 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Definição 9.** *Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ e um número real $k$, é chamado o produto $kA$ a matriz $B = (b_{ij})$, significa que para formar a matriz $B$ todos os elementos de $A$ serão multiplicados, um a um, por $k$, $kA = k(a_{ij}) = (b_{ij})$*

**Exemplo 3.** *Tomando a matriz A definida em* (2.1) *e um escalar $k = 3$, teremos que*

$$kA = 3A = 3\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 6 & 3\cdot 9 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 8 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 3 & 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 18 & 27 \\ 12 & 24 & 6 \\ 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Definição 10.** *Dado as matrizes $A_{m\times n} = a_{ij}$ e $B_{n\times p} = (b_{jk})$, teremos que $AB = C_{m\times p} = (c_{ik})$, tal que: $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{in} + b_{nk}, \forall i \in \{1,2,3,...,m\}$ e $k \in \{1,2,3,...,p\}$, ou seja, $A \times B$ é obtida pela adição das multiplicações dos elementos da coluna de $A$ com os elementos das linhas de $B$.*

**Exemplo 4.** *Dado as matrizes A e B definidas em* (2.1)*, teremos que*

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1.3+6.7+9.2 & 1.2+6.2+9.4 & 1.9+6.4+9.1 \\ 4.3+8.7+2.2 & 4.2+8.2+2.4 & 4.9+8.4+2.1 \\ 2.3+3.7+2.2 & 2.2+2.3+2.4 & 2.9+3.4+2.1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3+42+18 & 2+12+36 & 9+24+9 \\ 12+56+4 & 8+16+8 & 36+32+2 \\ 6+21+4 & 4+6+8 & 18+12+2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 63 & 50 & 42 \\ 72 & 32 & 70 \\ 31 & 18 & 32 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

**Definição 11.** *Dada uma matriz quadrada $D_{n\times n}$, dizemos que ela é inversível se existe uma outra matriz quadrada $D^{-1}_{n\times n}$ tal que $DD^{-1} = DD^{-1} = I_n$. Se $D$ não é inversível então disse que é singular.*

**Exemplo 5.** *Tomando as matrizes* $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 31 & -19 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ *, tem que*

$$
\begin{aligned}
DD^{-1} &= \begin{pmatrix} 1+0+0 & 31+4+35 & -19-2+21 \\ 0+0+0 & 0+6-5 & 0-3+3 \\ 0+0+0 & 0+10-10 & 0-5+6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

*Por outro lado*

$$
\begin{aligned}
D^{-1}D &= \begin{pmatrix} 1+0+0 & 2+93-95 & 7+31-38 \\ 0+0+0 & 0+6-5 & 0+2-2 \\ 0+0+0 & 0-15+15 & 0-5+6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

*Logo $DD^{-1} = DD^{-1} = I_3$, assim $D$ é inversível.*

**Definição 12.** *Dada um matriz $A_{m\times n} = (a_{ij})$ chama-se transposta de $A$ a matriz $A^T_{n\times m} = (b_{j,i})$ tal que $(a_{ij}) = (b_{ji})$, para todo $i$ e todo $j$, ou seja, de forma ampla toda linha de $A$ se transforma em coluna em $A^T$ e toda coluna de $A$ se transforma em linha em $A^T$.*

**Exemplo 6.** *Tomando a matriz $B$ dada em (2.1), teremos que* $B^T = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

**Definição 13.** *Uma matriz quadrada $G = (g_{ij})$ é simétrica se $G^T = G$, sendo $G^T$ a transposta de $G$.*

**Exemplo 7.** *Considerando a matriz* $G = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 5 & 4 & 17 \\ 11 & 17 & 6 \end{pmatrix}$, *teremos que* $G^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 5 & 4 & 17 \\ 11 & 17 & 6 \end{pmatrix}$ *Dessa forma, como $G = G^{-1}$, $G$ é simétrica.*

**Definição 14.** *A matriz $A_{n\times n}$ é semelhante a $B_{n\times n}$ se, e somente se, existe uma outra matriz $D$ invertível, tal que:*

$$A = D^{-1}BD.$$

**Definição 15.** *Se $A$ uma matriz quadrada e $k$ um número real, então* $A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k}$, *ou seja, a matriz $A$ pode ser multiplicada por si mesma $k$ vezes e essa operação é representada por $A^k$ e é chamada a potência $k$ da matriz $A$.*

**Exemplo 8.** *Tomando a matriz $A$ dada em (2.1), teremos que*

$$\begin{aligned} A^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 43 & 81 & 39 \\ 40 & 94 & 56 \\ 18 & 42 & 28 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 445 & 1023 & 627 \\ 528 & 1160 & 660 \\ 242 & 528 & 302 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Definição 16.** *Sejam $A, B$ matrizes quadradas. Dizemos que $A > B$ se, e somente se, $a_{ij} \geq b_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$.*

**Exemplo 9.** *Tomando a matriz* $A_{2\times 2} = a_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ *e a matriz* $B_{2\times 2} = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, *note que $A \geq B$ uma vez que, analisando entrada a entrada, $a_{11} = 3 > 2 = (b_{11})$, $a_{12} = 4 = (b_{12})$, $a_{21} = 7 = (b_{21})$ e $a_{22} = 1 > 0 = (b_{22})$.*

### 2.2.1 Determinantes

Podemos definir o determinante de uma matriz $A$ de ordem $n \times n$ com $n \leq 3$ como:

i) Se $n = 1$ então o determinante de $A = \det A = a_{11}$.

ii) Se $n = 2$ então $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

iii) Se $n = 3$ então $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

De modo geral,

**Definição 17.** *Para $n \geq 2$, o determinante de uma matriz $A_{n\times n} = (a_{ij})$, é o somatório de $n$ termos da forma $\pm a_{1j} \det A_{1j}$ com os sinais de mais ou menos se alterando, os elementos $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}$ são da primeira linha de $A$ e $A_{1j}$ é a matriz que se obtém eliminando da matriz original a linha 1 e a coluna $j$. Em símbolos,*

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det A_{1j}.\end{aligned}$$

**Exemplo 10.** *Tomando a matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ *calcularemos seu determinantes.*

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + a_{13}\det A_{13} \\ &= 1\det\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - 5\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\det\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= 1(0-2) - 5(0-0) + 0(-4-0) \\ &= -2.\end{aligned}$$

## 2.3 Autovalores e Autovetores de Matrizes

Pode ser observado que além das matrizes o Teorema de Perron-Frobenius usa como outros objetos de estudo os dados espectrais, ou seja, os autovalores e autovetores de uma matriz, assim se faz necessário o entendimento também desses conceitos.

Um vetor pode ser notado como $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Observe que o vetor $x$ é então uma matriz linha. Note ainda que

$$x^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}. \tag{2.2}$$

Denotaremos o vetor nulo com símbolo $\mathbf{0}$.

Neste trabalho, um de nossos objetivos é estudar uma teoria que garanta a existência de autovalores maximais e seus respectivos autovetores. Dito isto, passamos às definições formais.

**Definição 18.** *Um* autovetor *ou* vetor próprio *de uma matriz $A$ é um vetor não nulo $u$ que satisfaz*

$$Au = (\lambda I)u, \tag{2.3}$$

*para algum escalar $\lambda$. O escalar $\lambda$ é chamado de* autovalor *ou* valor próprio *de $A$ e dizemos que o autovetor $u$ é associado a $\lambda$.*

Seja $A$ uma matriz, $I$ a matriz identidade, $\lambda$ e $v$ autovalor e autovetor, respectivamente, de $A$. Então

$$\begin{aligned} Av &= (\lambda I)v \\ Av - \lambda I v &= \mathbf{0} \\ (A - \lambda I)v &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Para que esse sistema admita uma solução não nula, ou seja, $v \neq \mathbf{0}$, deve-se ter que:

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{2.4}$$

Dessa forma, origina-se a *equação característica* (2.4) de $A$ e as raízes serão os autovalores de $A$. Por outro lado, o determinante $\det(A - \lambda I)$ é o *polinômio característico*. Melhor definindo:

**Definição 19.** *O polinômio $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ chama-se o* polinômio característico *da matriz $A$.*

Note que as raízes do polinômio característico são os autovalores de $A$.

**Definição 20.** *A multiplicidade de $\lambda$ como raiz do polinômio característico é a* multiplicidade algébrica *do autovalor $\lambda$.*

**Exemplo 11.** *Seja uma matriz quadrada* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $\lambda$ *um número real, então*

$$
\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \det\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)[(2-\lambda)(2-\lambda)-1] - (-1)[(-2+\lambda)-1] + 1[(-1)-(2-\lambda)] \\
&= (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3)+\lambda-3+\lambda-3 \\
&= -\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6+\lambda-3+\lambda-3 \\
&= -\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda.
\end{aligned}
$$

*Logo, o polinômio característico de A será* $p(\lambda) = -\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda$ *e a equação característica será* $-\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda = 0$*, em que os autovalores de A são* $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 3$*.*

*A partir dos autovalores de A podemos então encontrar os autovetores associados a estes.*

*Tomando* $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix}^T$ *o vetor não nulo associado a* $\lambda_1 = 0$ *temos que*

$$(A - 0I)v = \boldsymbol{0}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - y_1 + z_1 \\ -x_1 + 2y_1 + z_1 \\ x_1 + y_1 + 2z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - y_1 + z_1 = 0 \\ -x_1 + 2y_1 + z_1 = 0 \\ x_1 + y_1 + 2z_1 = 0 \end{cases}$$

*Para calcular esse sistema, usaremos o método de Gauss. Inicialmente manipularemos as linhas da matriz ampliada associada ao sistema*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} L_1' \longleftarrow L_1 \\ L_2' \longleftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3' \longleftarrow L_1 - 2L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Isso implica o novo sistema equivalente*

$$\begin{cases} 2x_1 - y_1 + z_1 = 0 \\ 3y_1 + 3z_1 = 0 \\ -3y_1 + -3z_1 = 0. \end{cases}$$

*Pelas duas últimas equações do sistema, temos que* $y_1 = -z_1$. *Com essa informação, substituindo na primeira equação temos*

$$2x_1 - (-z_1) + z = 0 \Rightarrow 2x_1 + 2z_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -z_1 = y_1.$$

*Assim* $v_1 = (-z, -z, z) = z(-1, -1, 1)$.

*Tomando agora* $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}^T$ *o vetor não nulo associado a* $\lambda_2 = 3$ *temos que*

$$(A - 3I)v = \boldsymbol{0}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x_2 - y_2 + z \\ -x_2 - y_2 + z_2 \\ x_2 + y_2 - z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_2 - y_2 + z = 0 \\ -x_2 - y_2 + z_2 = 0 \\ x_2 + y_2 - z_2 = 0. \end{cases}$$

*Resolvendo o sistema, teremos que* $v_2 = (-y, y, 0) = y(-1, 1, 0)$.

## 2.4 Espectro e Raio Espectral

O teorema traz consigo algumas ideias sobre espectro e raio espectral, essas podem estar presente de forma implícita mas apesar disso é interessante um breve entendimento também sobre esses conceitos.

**Definição 21.** *Denotemos por $K$ o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ ou o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. O* espectro *de uma matriz $A$ é o conjunto de todos os autovalores dessa matriz, ou seja,*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in K : p_A(\lambda) = 0\}.$$

**Exemplo 12.** *Tomando a matriz $A$ definida no exemplo 11 e a resolução da equação característica no mesmo, temos que o espectro de $A$ é dado*

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}.$$

**Definição 22.** *Dizemos que o* raio espectral *de uma matriz $A$ é o número real $\rho(A)$, tal que*

$$\rho(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}. \tag{2.5}$$

**Exemplo 13.** *Tomando o resultando do exemplo 12, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, tem-se que $\rho(A) = \lambda_2$.*

# 3 MATRIZ NÃO NEGATIVA E IRREDUTÍVEL

Será apresentado neste capítulo conceitos e exemplos de matriz positivas para compreender em seguida matrizes não-negativas. E ainda a definição de matrizes de permutação para a compreensão do que é uma matriz irredutível.

## 3.1 Matriz positiva e matrizes não negativa

**Definição 23.** *Dizemos que uma matriz $A$ é* positiva *se possui todas as entradas positivas, ou seja,* $a_{ij} > 0, 1 \leq i, j \leq n$.

**Exemplo 14.** *A matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 8 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 4 & 3 \\ 5 & 9 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ *é positiva.*

**Definição 24.** *Uma matriz é dita* não negativa *se todas suas entradas são iguais ou maiores a 0, ou seja,* $a_{ij} \geq 0$, $1 \leq i,j \leq n$.

**Exemplo 15.** *A matriz* $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ *é não negativa.*

Um exemplo de matriz não negativa são as matrizes de permutação. Estas matrizes são utilizadas também na definição de matrizes irredutíveis, o que nos leva ao contexto das matrizes admissíveis para a generalização do teorema de Perron.

## 3.2 Matriz de permutação

**Definição 25.** *Seja* $\pi : \{1, 2, \cdots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \cdots, n\}$ *uma permutação. Uma matriz* $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ *é intitulada matriz de permutação se existe uma permutação* $\pi$ *tal que*

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & j = \pi(i) \\ 0, & j \neq \pi(i). \end{cases}$$

No exemplo a seguir, iremos focar no caso em que $n = 3$ na definição 25.

**Exemplo 16.** *Queremos determinar todas as permutações* $\{1, 2, 3\}$. *Para isto temos:*

- $\pi_1 = \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$
- $\pi_2 = \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,3,2\}$
- $\pi_3 = \{1,2,3\} \longrightarrow \{2,1,3\}$
- $\pi_4 = \{1,2,3\} \longrightarrow \{2,3,1\}$
- $\pi_5 = \{1,2,3\} \longrightarrow \{3,1,2\}$
- $\pi_6 = \{1,2,3\} \longrightarrow \{3,2,1\}$.

*Dessa forma, temos que as matrizes de permutação referentes respectivamente a* $\pi_1, \cdots, \pi_6$ *são:*

- $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $P_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Com essa definição pode-se então prosseguir para outra definição fundamental para esse trabalho, a definição de matrizes irredutíveis.

## 3.3 Matriz irredutível

**Definição 26.** *Uma matriz* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *é* redutível *se:*

*i)* $n = 1$ *e* $A = O$

*ou*

*ii)* $n \geq 2$ *e existem uma matriz de permutação* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e um inteiro* $r$ *com* $r \in \{1, \cdots, n-1\}$ *tal que:*

$$P^T AP = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$$

*com* $B \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $D \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ *e* $O$ *uma matriz nula de dimensões adequadas.*

**Exemplo 17.** *Considere a matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Para constatar que* $A$ *é redutível precisamos analisar se* $A$ *satisfaz i) ou ii) da definição 26.*

*i) Por definição A é de ordem 2 e não possui todos os elementos nulos, logo* $n \neq 1$ *e* $A \neq O$*. Como A não satisfaz i) seguimos para verificar ii).*

*ii) Para verificar a possibilidade do segundo item analizaremos todas as matrizes de permutação de ordem* $2 \times 2$ *para comprovar que existe P tal que*

$$P^T AP = \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

*Temos que todas as matrizes de permutação do* $\mathbb{R}^{2\times 2}$ *são:*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

*veja que*

$$P_1^T AP_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

*Assim, como existe a matriz de permutação* $P_1$ *tal que* $P^T AP$ *sejam do tipo* $\begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$, *A é redutível.*

**Definição 27.** *Uma matriz* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *será* irredutível *se não for redutível.*

**Exemplo 18.** *Considere a matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$*. Para constatar se A é irredutível, verificaremos a impossibilidade dos itens i) e ii) da definição 26.*

*i) Veja que* $n = 2$*, logo* $n \neq 1$ *e* $A \neq O$*, portanto a impossibilidade do primeiro item está verificado.*

*ii) Para verificar a impossibilidade do segundo item analizaremos todas as matrizes de permutação de ordem* $2 \times 2$ *para comprovar que não existe P tal que*

$$P^T AP = \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

*Temos que todas as matrizes de permutação do* $\mathbb{R}^{2\times 2}$ *são:*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

*note que*

$$P_1^T A P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$P_2^T A P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Assim, não existe $P$ tal que $P^T AP$ seja do tipo* $\begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

*Com a impossibilidade dos itens concluímos que $A$ é irredutível.*

**Proposição 1.** *Toda matriz positiva é irredutível.*

*Demonstração.* Faremos a prova para o caso de uma matriz positiva $A = (a_{ij})$ de ordem $3 \times 3$, ou seja, $a_{ij} > 0$ com $i, j \in \{1, 2, 3\}$. O caso geral é feito por indução sobre $n$ com uma argumentação análoga.

Para fixarmos a ideia, considere a matriz de permutação $P_2$ dada no exemplo 16. Queremos assim verificar a impossibilidade da ocorrência dos itens $i)$ e $ii)$ da definição 26.

i) Note que $n = 3$ e que $A > O$, assim $n \neq 1$ e $A \neq O$.

ii) Calcularemos agora

$$\begin{aligned} P_1^T A P_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2^T A P_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_3^T A P_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_4^T A P_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_5^T A P_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{32} & a_{33} & a_{31} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_6^T A P_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Como podemos ver, a ação da multiplicação de uma matriz de permutação por uma matriz $A$ e a ação da multiplicação de uma matriz $A$ por uma matriz de permutação, acarreta em uma permutação das entradas da matriz $A$. Uma vez que não temos entradas nulas, por hipótese, não podemos obter uma "submatriz"nula, $O$, na decomposição de $A$. Isto é, concluímos que não existe uma matriz de permutação $P$ tal que

$$
P^T A P = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}.
$$

□

**Proposição 2.** *Toda matriz não negativa de ordem* $3 \times 3$ *com apenas uma entrada nula é irredutível.*

*Demonstração.* Para fixarmos as ideias, vamos considerar a matriz

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}
$$

a qual possui apenas uma entrada nula, e a matriz de permutação $P_2$. Com isso,

$$
\begin{aligned}
P_2^T A P_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & 0 \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

ou seja, $P_2^T A P_2$ continua com apenas uma entrada nula. De fato, isso ocorre com todas as matrizes de permutação $P_j$, $1 \leq j \leq 6$, isto é, $P_j^T A P_j$ possui apenas uma entrada nula.

Assim, destacando as submatrizes, temos as duas decomposições possíveis para $P_2^T A P_2$ a seguir:

$$\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{23} & a_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

e como podemos ver, em nenhuma delas $O$ é a matriz nula, uma vez $a_{21}, a_{23}, a_{31}$ e $a_{21}$ são positivos. De modo geral, teremos que $O$ será composta por duas entradas e como apenas uma é nula, $O$ não será a matriz nula. Logo, $A$ é irredutível. □

**Teorema 1.** *Seja $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, uma matriz não negativa e irredutível e $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, um vetor não negativo com exatamente $k$ entradas positivas, $k \in \{1, \cdots, n-1\}$. Então o número de entradas positivas de $(I_n + A)y$ é maior que $k$.*

*Demonstração.* A demonstração do teorema 1 pode ser encontrada em Gomes (2006, p. 21). □

**Corolário 1.** *Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não negativa e irredutível. Então $(I_n + A)^{n-1} > O$, sendo $O$ a matriz nula de ordem $n$.*

*Demonstração.* A demonstração do corolário 1 pode ser encontrada em Gomes(2006, p. 23). □

**Corolário 2.** *Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não negativa. Então $(I_n + A)^{n-1} y > 0$, para qualquer $y \geq 0$, $y \neq 0$.*

*Demonstração.* A demonstração do corolário 2 pode ser encontrada em Gomes(2006, p. 23). □

**Corolário 3.** *Seja $x$ um autovetor não negativo de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não negativa e irredutível. Então $x > \boldsymbol{0}$.*

*Demonstração.* A demonstração do corolário 3 pode ser encontrada em Gomes(2006, p. 23-24). □

### 3.3.1 Função de Collatz-Wielandt

Nesta seção apresentamos a função de Collatz-Wielandt a qual desempenha um papel importante na sequência do trabalho.

Considere o conjunto $\mathbb{P} = \{t \in \mathbb{R} \,|\, t \geq 0\}$ e $E^n \subseteq \mathbb{P}^{n\times 1}$ definido por

$$E^n = \left\{ x = (x_1, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{P}^{n\times 1} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}. \tag{3.1}$$

**Exemplo 19.** *Considere o vetor* $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)^T \in \mathbb{P}$. *Note que*

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

*assim* $x \in E^3$.

**Definição 28.** *Seja* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *uma matriz não negativa e irredutível. A função* $f_A$ *de* $\mathbb{P}^{n\times 1}$ *em* $\mathbb{P}$ *definida por*

$$f_A(x) = \min_{i\in\{1,\cdots,n\}} \left\{ \frac{(Ax)_i}{x_i}, x_i \neq 0 \right\} \tag{3.2}$$

*para todo vetor* $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{P}^{n\times 1}$, $x \neq \boldsymbol{0}$, *é intitulada* função de Collatz-Wielandt *associada a* $A$.

**Exemplo 20.** *Considere a matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ *e um vetor* $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Note que*

$$\frac{(Ax)_i}{x_i} = \frac{\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)_i}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_i} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}_i}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_i}.$$

*Analisando entrada a entrada fazendo i percorrer o conjunto* $\{1,2\}$, *obtemos*

$$\left\{ \frac{(Ax)_i}{x_i} \,\Big|\, i = 1,2 \right\} = \left\{ \frac{5}{2}, 8 \right\}.$$

*A função de Collatz-Wielandt se trata do valor mínimo obtido em* $\frac{(Ax)_i}{x_i}$, *dessa forma,* $f_A(x) = \frac{5}{2}$.

O teorema a seguir estabelece algumas propriedades importantes da função de Collatz-Wielandt.

**Teorema 2.** *Seja* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *uma matriz não negativa e irredutível e seja* $f_A$ *a função de Collatz-Wielandt associada a* $A$. *Então* *i) A função $f_A$ é homogênea de grau* 0.

*ii) Se $x \in \mathbb{P}^{n\times 1}$, $x \neq 0$, e $\lambda$ é o maior número real para o qual*

$$Ax - \lambda x \geq \boldsymbol{0} \tag{3.3}$$

*então*

$$\lambda = f_A(x).$$

*iii) Se $x \in \mathbb{P}^{n\times 1}$, $x \neq 0$ e $y = (I_n + A)^{n-1}x$ então*

$$f_A(y) \geq f_A(x).$$

*Demonstração.* A demonstração do teorema 2 pode ser encontrada em Gomes(2006, p. 26-28). □

**Proposição 3.** *Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não negativa e irredutível e seja $f_A$ a função de Collatz-Wielandt associada a $A$. Então*

$$Ax - f_A(x)x \geq \boldsymbol{0},\ \forall\, x \in \mathbb{P}^{n\times 1}. \tag{3.4}$$

*Demonstração.* Considere $x \in \mathbb{P}^{n\times 1}$. Pela definição 28 podemos afirmar que

$$f_A(x) = \min_{i\in\{1,\cdots,n\}} \left\{ \frac{(Ax)_i}{x_i}, x_i \neq 0 \right\} \leq \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

Logo,

$$x_i f_A(x) \leq (Ax)_i.$$

Portanto, segue da definição 16

$$x f_A(x) \leq (Ax),$$

e consequentemente

$$Ax - x f_A(x) \geq 0.$$

□

**Teorema 3.** *Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não negativa e irredutível. Então a função $f_A$ atinge o seu máximo em $E^n$. Isto é,*

$$\max_{x\in E^n}\{f_A(x)\} = f_A(x_0)$$

*para algum $x_0 \in E^n$.*

*Demonstração.* A demonstração do teorema 3 pode ser encontrada em Gomes(2006, p. 29). □

# 4 O TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS

Este capítulo e a demonstração do teorema de Perron-Frobenius foram desenvolvidos a partir de estudos das referências desse trabalho tendo como principal Gomes (2006) e usando as definições, propriedades e teoremas expostos no capítulo 2 e 3.

De acordo com Madrid (2009), Gomes (2006) e Artuso (2021), em 1907, Perron enunciou seu teorema a respeito dos autovalores e autovetor de uma matriz positiva.

**Teorema 4** (Perron)**.** *Seja $A$ uma matriz quadrada positiva de ordem $n$. Então:*

*i) $A$ admite um autovalor $r$ tal que $|\lambda| < r$ para quaisquer outros autovalores $\lambda$ de $A$.*

*ii) Existe um autovetor com todas as entradas positivas associado ao autovalor $r$.*

*iii) O valor de $r$ aumenta quando qualquer entrada de $A$ aumenta.*

*Demonstração.* A demonstração do teorema 4 pode ser encontrada em Silva(2007, p. 14-18). □

A partir daí, Frobenius, entre 1908 e 1912, estendeu este mesmos resultados para matrizes quadradas irredutíveis, cujas entradas são não negativas.

**Teorema 5** (Perron-Frobenius)**.** *Seja $A$ uma matriz quadrada, irredutível e não negativa de ordem $n$. Então:*

*i) $A$ admite um autovalor $r$ tal que $|\lambda| < r$ para quaisquer outros autovalores $\lambda$ de $A$.*

*ii) Existe um autovetor com todas as entradas positivas associado ao autovalor $r$.*

*iii) O valor de $r$ aumenta quando qualquer entrada de $A$ aumenta.*

Note que pelo Definição 24 e pela proposição 1 temos que toda matriz positiva é não negativa e irredutível, o que significa que realmente temos uma extensão do resultado.

**Lema 1.** *Considere uma matriz quadrada $A$ de ordem $n$ e um operador do tipo $(I_n + A)^{n-1}$. $A$ comuta com $(I_n + A)^{n-1}$.*

*Demonstração.* Tomando $n = 1$, uma vez que $I$ comuta com qualquer matriz, temos

$$\begin{aligned} A(I+A)^0 &= AI \\ &= IA \\ &= (I+A)^0 A. \end{aligned}$$

Considerando agora $n = 2$, uma vez que $A$ comuta com ela mesmo, temos

$$\begin{aligned} A(I+A)^1 &= A + A^2 \\ &= IA + AA \\ &= (I+A)^1 A. \end{aligned}$$

Agora para $n = 3$, com o mesmo argumento anterior, temos

$$\begin{aligned} A(I+A)^2 &= A(I + 2IA + A^2) \\ &= AI + 2AIA + A^3 \\ &= IA + 2IAA + A^3 \\ &= (I + 2IA + A^2)A \\ &= (I+A)^2 A. \end{aligned}$$

De modo geral, pelo binômio de newton, para qualquer $n \geq 1$ temos

$$\begin{aligned} A(I+A)^{n-1} &= A\left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} I^{n-1-k} A^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A(I^{n-1-k}A^k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} I^{n-1-k} A^{k+1} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} I^{n-1-k} A^k\right) A \\ &= (I+A)^{n-1} A. \end{aligned}$$

Para a prova formal, utilizamos o argumento de indução sobre $n$. Neste caso, a hipótese de indução é

$$A(I+A)^n = (I+A)^n A$$

para algum $n$ natural. Queremos verificar que

$$A(I+A)^{n+1} = (I+A)^{n+1} A.$$

Usando que $A(I+A) = (I+A)A$ e a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} A(I+A)^{n+1} &= A((I+A)(I+A)^n) \\ &= (I+A)A(I+A)^n \\ &= (I+A)(I+A)^n A \\ &= (I+A)^{n+1} A. \end{aligned}$$

□

**Observação 1.** *Denotamos por* $|A|$ *a matriz cujas entradas* $(i,j)$ *são os* $|a_{ij}|$*, em que* $A = (a_{ij})$*. E também usaremos a notação* $|y| = (|y_1|, \cdots, |y_n|)$*, para* $y = (y_1, \cdots, y_n)$*.*

## 4.1 Demonstração do teorema

A demonstração do Teorema se dará por meio dos seguintes Lemas.

**Lema 2.** *Seja $A$ uma matriz quadrada, irredutível e não negativa de ordem $n$. Então existe um número real positivo $r$ e um vetor $x_0 \in E^n$ tais que $Ax_0 = rIx_0$.*

*Demonstração.* Pelo o Teorema 3 podemos definir

$$r = \max_{x \in E^n} \{f_A(x)\}. \tag{4.1}$$

Também pelo Teorema 3, sabemos que existe $x_0 \in E^n$ tal que

$$r = \max_{x \in E^n} \{f_A(x)\} = f_A(x_0). \tag{4.2}$$

Considere

$$u = (u_1, \cdots, u_n)^T \in \mathbb{P}^{n \times 1}$$

tal que

$$u = \left(\tfrac{1}{n}, \cdots, \tfrac{1}{n}\right)^T,\ n \in \mathbb{P} \cap \mathbb{N},\ n \neq 0.$$

Note que, $u_i = \frac{1}{n}$ e, sendo $u$ definido dessa forma, temos

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = n\frac{1}{n} = 1,$$

ou seja, $u \in E^n$.

Agora, pela equação (4.1) e pela definição 28, temos

$$\begin{aligned} r &\geq f_A(u) \\ &= \min_{i \in \{1, \cdots, n\}} \left\{ \frac{(Au)_i}{u_i}, u_i \neq 0 \right\} \\ &= \min_{i \in \{1, \cdots, n\}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

**Afirmação 1.** *Afirmamos que $r > 0$.*

*Demonstração.* De fato, veja que $a_{ij} \geq 0$, pois $A$ é não negativa por hipótese e pelo menos um $a_{ij}$ é estritamente positivo, pois caso contrário $A = O$ a qual é redutível. Logo, concluímos que

$$r > 0.$$

□

Por outro lado, pela equação (3.4) temos que

$$Ax_0 - f_A(x_0)x_0 \geq \mathbf{0},$$

e utilizando a equação (4.2), segue que

$$Ax_0 - rx_0 \geq \mathbf{0}. \tag{4.3}$$

**Afirmação 2.** *Afirmamos que* $Ax_0 - rx_0 = \mathbf{0}$.

*Demonstração.* De fato, suponha que $Ax_0 - rx_0 \neq 0$. Sabemos do corolário 2 que

$$(I_n + A)^{n-1} y > \mathbf{0}$$

quando $y \geq \mathbf{0}$. Como $Ax_0 - rx_0 \geq \mathbf{0}$ e ainda $Ax_0 - rx_0 \neq \mathbf{0}$, consideremos $y = Ax_0 - rx_0$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &< (I_n + A)^{n-1}(Ax_0 - rx_0) \\ &= (I_n + A)^{n-1} Ax_0 - (I_n + A)^{n-1}(rx_0) \\ &= A(I_n + A)^{n-1} x_0 - r(I_n + A)^{n-1}(x_0), \end{aligned}$$

pois $A$ comuta com $(I_n + A)^{n-1}$ como mostrado no Lema 1.

Para simplificar a notação, seja $v_0 = (I_n + A)^{n-1} x_0$. Assim, a inequação acima fica

$$Av_0 - rv_0 > \mathbf{0}.$$

Ou equivalentemente,

$$Av_0 > rv_0.$$

Pela definição 16, temos, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$(Av_0)_i > r(v_0)_i,$$

o que equivale a

$$\frac{(Av_0)_i}{(v_0)_i} > r,$$

desde que $(v_0)_i \neq 0$. Agora, tomando o mínimo, obtemos

$$f_A(v_0) = \min_{i \in \{1, \cdots, n\}} \left\{ \frac{(Av_0)_i}{(v_0)_i} \, , \, (v_0)_i \neq 0 \right\} > r,$$

o que contradiz a maximalidade de $r$.

Portanto, concluímos então que

$$Ax_0 - rx_0 = \mathbf{0}. \tag{4.4}$$

□

Portanto, a demostração do Lema 2 segue. □

Neste momento, demonstramos a existência do autovalor positivo para $A$, bem como a existência do autovetor associado.

**Lema 3.** *O vetor $x_0$ dado no Lema 2 é positivo, isto é, $x_0 > \mathbf{0}$.*

*Demonstração.* Segue do corolário 3, pois $x_0 \in E^n$, consequentemente é não negativo, e $A$ é uma matriz quadrada, não negativa e irredutível. □

**Lema 4.** *Nas hipóteses do Lema 2, temos $r \geq |\lambda_i|$ para qualquer $\lambda_i$ autovalor de $A$, $i \in \{1, \cdots, n\}$.*

*Demonstração.* Consideremos $\lambda_i \in \sigma(A)$ e $z = (z_1, \cdots, z_n)^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $z \neq \mathbf{0}$ tais que

$$Az = \lambda_i z. \tag{4.5}$$

Desta forma, para $s$, $i \in \{1, \cdots, n\}$, utilizando a equação (4.5), a desigualdade triangular, o produto de matrizes e fato de $A$ ser não negativa, obtemos

$$\begin{aligned} |\lambda_i z_s| &= |\lambda_i||z_s| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |a_{sj}||z_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{sj}|z_j| \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$|\lambda_i||z| \leq A|z|, \tag{4.6}$$

em que utilizamos a notação

$$|z| = |(z_1, \cdots, z_n)| = (|z_1|, \cdots, |z_n|). \tag{4.7}$$

A inequação (4.6) é equivalente a

$$\frac{(A|z|)_j}{(|z|)_j} \geq |\lambda_i|, \text{visto que } (|z|)_j \neq 0,$$

e tomando o mínimo em $j$, obtemos

$$f_A(|z|) \geq |\lambda_i|.$$

Agora, pela definição de $r$, concluímos que

$$r \geq f_A(|z|) \geq |\lambda_i|.$$

□

**Lema 5.** *Seja* $A^{'} = (a^{'}_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$*, uma matriz obtida a partir da matriz* $A$ *tal que* $a^{'}_{ij} \geq a_{ij}$ *e* $a^{'}_{kr} > a_{kr}$, para alguns $k, r \in \{1, \cdots, n\}$*, ou seja,* $A^{'} \geq A$*, com* $A^{'} \neq A$*. Então* $r < r'$*, em que* $\max_{x \in E^n}\{f_{A'}(x)\} = r^{'}$.

*Demonstração.* Temos garantido pelo Teorema 3 que existe $x_0 \in E^n$ tal que

$$f_{A'}(x_0) = \max_{x \in E^n}\{f_{A'}(x)\} = r^{'}. \tag{4.8}$$

Seja $\lambda$ um autovalor de $A$. Então, $Ay = \lambda y$, para algum $y = (y_1, \cdots, y_n)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $y \neq 0$, o que significa que para qualquer $i \in \{1, \cdots, n\}$, temos

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = \lambda y_i.$$

Dessa forma, utilizando a notação em (4.7), temos

$$|\lambda||y| \leq A|y| \leq A^{'}|y|, \ |y| \neq \mathbf{0}, \tag{4.9}$$

ou seja,

$$|\lambda||y| \leq A^{'}|y|,$$

e passando à notação de coordenadas, isto equivale a

$$|\lambda| \leq \frac{(A^{'}|y|)_i}{(|y|)_i}.$$

Tomando o mínimo, ficamos com

$$|\lambda| \leq \min_{i \in \{1, \cdots, n\}} \frac{(A^{'}|y|)_i}{(|y|)_i} = f_{A'}(|y|).$$

Agora, tomando o máximo e (4.8), temos

$$|\lambda| \leq f_{A'}(|y|) \leq \max_{x \in E^n}\{f_{A'}(x)\} = r^{'}.$$

Pela argumentação feita na demonstração dos itens $i$) e $ii$) do teorema 5, sabemos que $r'$ é um autovalor de $A^{'}$. Desta forma, obtivemos que

$$|\lambda| \leq r^{'},$$

qualquer que seja o autovalor $\lambda$ de $A$, em particular, para $r$ definido em 5, $i$), temos também $|r| = r \leq r^{'}$.

Afirmamos que $r < r^{'}$. De fato, suponha que $r = r^{'}$. Então, utilizando (4.9), obtemos

$$A^{'}|y| \geq r|y| = r^{'}|y|.$$

Note que não podemos ter $A^{'}|y| > r^{'}|y|$, pois neste caso, teríamos

$$r' < f_{A'}(|y|) \leq r'$$

o que é uma contradição. Com isso, $|y|$ é um vetor próprio positivo de $A^{'}$ associado ao autovalor $r^{'}$, ou seja,

$$A^{'}|y| = r^{'}|y|.$$

Desta forma,

$$A|y| = r|y| = r^{'}|y| = A^{'}|y|,$$

o que nos permite concluir que

$$(A^{'} - A)|y| = \mathbf{0}.$$

Como por 5, item $ii$), $|y| > \mathbf{0}$, temos

$$A^{'} = A,$$

o que é um absurdo. Logo $r < r^{'}$. □

Após a demonstração dos lemas, segui a demonstração do Teorema de Perron-Frobenius.

*Demostração do Teorema 5.* O Lema 2 garante a existência do autovalor positivo $r$ e do autovetor associado $x_0$. O Lema 3, por sua vez, garante que $x_0 > \mathbf{0}$. O Lema 4 garante a maximalidade $r$ em relação aos outros autovetores da matriz $A$, enquanto o Lema 5 mostra que $r$ aumenta à medida que as entradas de $A$ aumentam. □

## 4.2 Exemplo

**Exemplo 21.** *Considere a matriz quadrada não negativa* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Note que $A$ é positiva pois $a_{ij} > 0$, logo, pela proposição 1, $A$ é irredutível.

Encontraremos agora os autovalores $\lambda$ de $A$ calculando a equação característica.

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(2-\lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 2. \end{aligned}$$

Daí temos que $\sigma = \{\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{5-\sqrt{17}}{2}\}$

Note que a multiplicidade algébrica é 1.

Tomando o valor próprio maximal $r = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$, teremos que o autovetor associado $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ será

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \left(A - \frac{5+\sqrt{17}}{2} I\right) v \\
&= \begin{pmatrix} 3 - \frac{5+\sqrt{17}}{2} & 1 \\ 4 & 2 - \frac{5+\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(3 - \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right) x + y \\ 4x + \left(2 - \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right) y \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Consideração o sistema formado

$$\begin{cases} \left(3 - \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right) x + y = 0 \\ 4x + \left(2 - \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right) y = 0 \end{cases},$$

temos que $v = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}+1}{8} y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}+1}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$

Um vez que existe $r = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ tal que $|\lambda| < r$ para quaisquer outros autovalores de $\lambda$ de $A$ e o autovetor $v = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}+1}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$ é estritamente positivo, então os itens $i)$ e $ii)$ do teorema 5 estão satisfeitos.

Para verificar o item $iii)$ do teorema 5 consideraremos a matriz $A' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Calcularemos a equação característica para encontrar o raio espectral de $A'$, $\sigma'$.

$$\begin{aligned}
0 &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda)(2-\lambda) - 16 \\
&= \lambda^2 - 5\lambda - 10.
\end{aligned}$$

Daí temos que $\sigma' = \left\{\frac{5+\sqrt{65}}{2}, \frac{5-\sqrt{65}}{2}\right\}$

Note que os autovalores aumentaram quando uma entrada de $A$ também aumenta, assim último item do teorema 5 também é válido.

Na próxima seção iremos abordar alguns exemplos que deixam claro que apenas a exigência de não negatividade não é suficiente para obtermos os mesmos resultados no teorema de Perron.

## 4.3 Exemplos de não validade

Oskar Perron provou este teorema para matrizes positivas, e como já foi dito, Ferdinand Frobenius estendeu para uma classe maior, a classe das matrizes não negativas e irredutíveis. É importante ver que essa extensão não é válida para matrizes apenas não negativas, veja nos exemplos a seguir.

**Exemplo 22.** *Vamos considerar a matriz não negativa* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *e investigar seus dados espectrais de acordo com o Teorema 5.*

Calculando seu polinômio característico, obtemos

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda). \end{aligned}$$

Portanto,

$$p(x) = 0 \iff (2-\lambda)(1-\lambda) = 0,$$

ou seja, $\sigma(A) = \{1, 2\}$ e $\rho(A) = 2$.

Sendo 2 o raio espectral de $A$, calcularemos o vetor próprio associado $v$.

$$(A - 2I)v = \mathbf{0}$$

$$\left( \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -y = 0. \end{cases}$$

Portanto, $v = (x, 0) = x(1, 0)$ e, como podemos ver, $v$ não possui todas as entradas positivas, o que contradiz o item *ii*) do teorema 5. Então onde houve a falha? A falha veio do fato de a matriz $A$ não ser irredutível. Para vermos isto, considere a matriz de permutação

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Note que

$$\begin{aligned} P^T AP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, $A$ é redutível.

**Exemplo 23.** *Considere agora a matriz não negativa* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Queremos analisar seus dados espectrais à luz do Teorema 5.*

Seguindo agora a linha de raciocínio do exemplo anterior

$$\begin{aligned} p(A) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)[(3-\lambda)(1-\lambda)] \\ &= (1-\lambda)^2(3-\lambda). \end{aligned}$$

Resolvendo a equação característica resultará que $\sigma(A) = \{1,3\}$.

Tomando o autovalor maximal, calcularemos o autovetor associado $v$

$$(A - 3I)v = \mathbf{0}$$

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x = 0 \\ x = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

Assim, $v = (0, y, 0) = y(0, 1, 0)$, e, como podemos ver, $v$ não possui todas as entradas positivas, o que contraria o item $ii)$ do teorema 5.

Mais uma vez isso ocorre porque a matriz $A$ não é irredutível. Para ver isto, considere a matriz de permutação $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Note que

$$\begin{aligned} P^T A P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tomando a definição 26 $A$ é redutível.

# 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Teorema de Perron-Frobenius foi enunciado em 1912 como generalização do Teorema de Perron à classe das matrizes não negativas e irredutíveis. A forma clássica do teorema é apresentada em três partes, as quais afirmam a existência de um valor próprio maximal $r$, a existência de um a vetor próprio associado $v$ com todas entradas positivas e a influência da variação de $A$ sobre a variação de $r$.

Este trabalho teve como objetivo estudar o espectro de uma determinada classe de matrizes, mais especificamente, foi apresentado uma demonstração detalhada do Teorema de Perron-Frobenius seguindo o método desenvolvido por Weilandt. Para atingirmos este objetivo foi realizado o desenvolvimento de um estudo elementar sobre matrizes de uma forma geral e também sobre a classe das matrizes não negativas e irredutíveis, em que apresentamos algumas propriedades úteis à demostração do teorema.

A metodologia utilizada nesta pesquisa foi a revisão bibliográfica em que foram feitas diversas leituras em artigos, livros e dissertações. Contudo foi encontrado uma dificuldade de encontrar trabalhos científicos nacionais em nível de graduação que abordassem matrizes não negativas e matrizes irredutíveis.

Por fim, essa pesquisa pode ter continuidade em diversas formas por meio da aplicação do Teorema de Perron-Frobenius. Algumas sugestões de tópicos que deixamos são: o estudo da existência de transição de fase em fenômenos físicos como o modelo de Ising unidimensional; a compreensão do comportamento assintótico de matrizes estocásticas; o estudo da dinâmica populacional via matrizes de Leslie; o sistema de buscas do google.

# REFERÊNCIAS


AFONSO, Reginaldo Fabiano da Silva. **Cálculo do raio espectral de matrizes positivas e medida de Gibbs**. 2013. Dissertação (Mestrado em Ciência da Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande de Sul, Porto Alegre, 2013. Disponível em : <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/69837>. Acesso em: 12 mai. 2022.

ALVES, Carlos J. S. **Fundamentos de Análise Numérica (I)** Departamento de Matemática Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa. Av. Rovisco Pais 1, 1049-001 LISBOA, PORTUGAL. 2001/200. 284 p. Disponível em <https://www.researchgate.net/profile/Carlos-Alves-24/publication/266505037_Fundamentos_de_Ann_alise_Num_erica_I_Teoria_e_Exerc_cios/links/54f46fd80cf2f9e34f0a3e73/Fundamentos-de-Ann-alise-Num-erica-I-Teoria-e-Exerc-cios.pdf>. Acesso em: 12 mai. 2022.

ALVES, Laís Hilário; OLIVEIRA, Guilherme Saramago de; SOUSA, Angélica Silva de. A pesquisa bibliográfica: Princípios e fundamentos. **Cadernos da Fucamp**. v. 20, n. 43, p. 64-83, 2021.

AMARAL, Fernando H. N.; MENEZES, Matheus da Silva; MEZZOMO, Ivan; PAULA, Junior C. de. Aplicação do método da potência para cálculo do raio espectral e condicionamento**Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**, Vol. 5, N. 1, 2017.

ANTON, Howard; BUSBY, Robeert C. . **Algebra Linear Comtemporânea**. Tradução por Claus Ivo Doering. Porto Alegre: Bookman, 2006. 610 p.

ARTUSO, Everton. Sobre matrizes de transferência e o teorema de Perron-Frobenius. **Matemática Universitária**. v. 2, 2021.Disponível em: <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/11/sites/11/2021/11/RMU-2021_2_8.pdf>. Acesso em: 29 abr. 2022.

BORGES, Ítila Moreira. **Matrizes e aplicações**. 2007. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2007.

CALLIOLI, Carlos A.; COSTA, Roberto C.; DOMINGUES, Hygino H. . **Álgebra Linear e aplicações**. 6ª ed. rev. São Paulo: Atual, 1990.352 p.

DANIEL, James; W. NOBLE, Ben. **Álgreba Linear Aplicada**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1986. 378 p.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS. Department of Mathematics — Técnico, Lisboa. Normas de Matrizes e Condicionamento. Diponível em: <https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~calves/courses/sis-lin/capii13.html>. Acesso em: 12 mai. 2022.

GOMES, Helena Margarida dos Santos Vasconcelos. **Matrizes não negativas e decomposições matriciais**. 2006. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal, 2006. Disponível em: <https://ria.ua.pt/bitstream/10773/4854/1/2007001407.pdf>. Acesso em: 24 mai. 2022.

HAZZAN, Samuel; IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar 4**. 7ª ed. São Paulo: Atual, 2004. 232 p.

LAWSON, Terry. **Álgebra Linear**. São Paulo: Edcard Blucher LTDA, 1997. 348 p.

LAY, David C. **Álgebra linear e suas aplicações**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. - LTC, 1999. 498 p.

MADRID, Kelly Cadena. **A Teoria de Perron-Frobenius e aplicações**. 2009. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2009.

SERRANHO, Pedro. **Matemática Aplicada e Análise Numérica** Uma Introdução com Octave.Secção de Matemática, Departamento de Ciências e Tecnologia Universidade Aberta. 2017. 263 p.

SILVA, Heloísa Cristina. **Teorema de Frobenius-Perron para operadores positivos**. 2007. Monografia (Licenciatura em Matemática)- Centro Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.

SILVA, Marcus Vinícius da. Tópicos de Probabilidade e Álgebra Linear. In: Salão de Iniciação Científica, XXVIII., 2016 set. 12-16 : UFRGS, Porto Alegre, RS.

STEINBUCHE, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear**. 2ª ed. São Paulo, Pearson Makron Books, 1987. 583 p.