UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ERICA CRISTINA DA SILVA ANDRADE

O ENSINO DE PROBABILIDADE: Uma proposta didática com o uso de materiais manipuláveis

Araguaína / TO

2021

ERICA CRISTINA DA SILVA ANDRADE

O ENSINO DE PROBABILIDADE: Uma proposta didática com o uso de materiais manipuláveis

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal do Tocantins - UFT, Campus de Araguaína, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogerio dos Santos Carneiro

Araguaína / TO

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

A553e Andrade, Erica Cristina da Silva .

O ENSINO DE PROBABILIDADE: Uma proposta didática com o uso de materiais manipuláveis.. / Erica Cristina da Silva Andrade. – Araguaína, TO, 2021.

50 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2021.

Orientador: Rogerio dos Santos Carneiro

1. Ensino de Probabilidade. 2. Material didático. 3. Sequência didática. 4. Jogos no ensino de Probabilidade. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

ERICA CRISTINA DA SILVA ANDRADE

O ENSINO DE PROBABILIDADE: Uma proposta didática com o uso de materiais manipuláveis

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal do Tocantins - UFT, Campus de Araguaína, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em 30 de julho de 2021.

Banca examinadora

Prof. Dr. Rogerio dos Santos Carneiro
Orientador/UFT

Prof.ª Dr.ª Fernanda Vital de Paula
Examinadora/UFT

Prof. Dr. Sinval de Oliveira
Examinador/UFT

Araguaína / TO

2021

*Dedico este trabalho inteiramente
a minha mãe, que me apoiou
sempre na realização e busca
pelos meus objetivos.
Eu amo você.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo fôlego de vida, por minha saúde, pelo cuidado para comigo, por minha família e pelos amigos que me deu, os quais contribuíram grandemente na minha vida, e por me permitir realizar esse sonho de cursar uma graduação. À minha família, meu pai Ezequiel, minha mãe Maria Cleide e irmãos Eduardo, Elane e Emily, pois sem a ajuda de vocês eu não estaria aqui, obrigado por serem tão amorosos comigo, por todo o carinho e cuidado, sou grata a Deus pela vida e saúde de cada um.

Agradeço imensamente ao meu orientador Rogerio dos Santos Carneiro, um excelente professor e orientador, agradeço primeiramente por ter aceitado me orientar durante a escrita deste trabalho e também pelos conhecimentos compartilhados durante a disciplina de LEM, sou grata por todos os ensinamentos passados a mim e pela sua paciência durante a produção deste trabalho. Sou muito grata também à Prof.ª Fernanda Vital de Paula, que inicialmente me orientou nas atividades deste trabalho, tenho um carinho muito grande por essa mulher, agradeço pela sua paciência comigo e peço desculpa por conversar demais nas suas aulas.

Agradeço também aos demais professores do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, ao Prof. Dr. Matheus Pereira Lobo do curso de Licenciatura em Física e à Prof.ª Dr.ª Antonia Marcia Duarte Queiroz do curso de Licenciatura em Geografia, pois estes também contribuíram grandemente para minha formação.

Agradeço ainda aos meus amigos que foram como pais para mim durante esses quatro anos, Alison e Thais, que me acolheram em sua casa, cuidaram de mim e que me deram um lar, com muito amor e carinho, agradeço pelas conversas, pelas risadas, pelos momentos de desabafo, pela paciência e por todo o suporte dado a mim. Obrigada Cauê por passar seus fins de semana comigo, obrigado por sua amizade e companhia nesses anos. Agradeço também aos meus amigos e irmãos em Cristo Jenival e a Joyse, que me apresentaram ao Alison e a Thais, e por também cuidarem de mim sempre, pelos conselhos e carinho comigo e minha família.

Agradeço, especialmente as minha amigas Djane, Daffny, Fernanda Campelo e a Sarah pois juntas compartilhamos nossos sonhos e medos, momentos felizes e tristes, e mesmo tendo alguns desentendimentos, vocês sempre estavam ali, sem soltar a mão uma da outra, agradeço pelos conselhos, risadas, encontros para comer, por serem minhas melhores amigas não só na faculdade mas também na vida, e ao Ronaldo, por nunca desacreditar de mim, por sempre me aconselhar nestes anos, sempre ao meu lado independente do momento, obrigado pelo carinho, cuidados, conselhos, puxões de orelha, pela paciência e por estar sempre presente, sou muito grata por ter você na minha vida.

Aos meus queridos irmãos em Cristo de Araguaína, por me receberem e me acolherem tão bem, especialmente a Silvia, que teve que aturar chorando na sua casa muitos finais de semana, pelos brigadeiros maravilhosos, pelos conselhos e momentos descontraídos, ao meu amigo Crispim, sou grata pela sua amizade, pelos conselhos, por me dar assistência nos momentos difíceis e por sempre me arrancar sorrisos sinceros.

Agradeço também aos meus colegas de classe: Atalia, Bruna, Daniel Alves, Daniel Carlos, Gabriela, Guilherme, Huan, Janaina, João Paulo, Jozieldo Carajá, Ludmila, Maysa Dias, Maiza Silva, Pablo Henrique e Pedro Dark, por compartilharem dessa caminhada, pelos estudos corujões e partidas de truco. Aos demais colegas da universidade: Arinelson, Fernanda Farias, Guilherme Guida, João Marcos, Jusciel, Lara, Marcia, Marco Aurélio, Mateus Alencar, Matheus Amorim, Matheus Pires, Raieli e aos demais que não citei o nome, mas que compartilharam dessa jornada comigo.

RESUMO

Os jogos e materiais didáticos têm se tornado importantes instrumentos didáticos no ensino em todos os níveis, podendo ser associados conceitos de diversas áreas, incluindo a matemática. O ensino através de jogos possibilita ao professor uma contextualização que estimula o processo de compreensão do conteúdo para os alunos. Para isso, este trabalho tem como problemática quais a premissas necessárias para a elaboração e utilização de uma sequência didática, com o uso de jogos, para o ensino e aprendizagem de probabilidade no Ensino Médio? Desta forma, este trabalho tem o objetivo de viabilizar o processo de ensino e aprendizagem de probabilidade no Ensino Médio, através da formulação de uma sequência didática com a utilização de materiais manipuláveis. Por meio da pesquisa bibliográfica, buscou-se constituir uma evolução histórica da probabilidade e investigar o uso de jogos e materiais manipuláveis no ensino de matemática. Como resultado, construímos uma sequência didática para as aulas de matemática, com o intuito de aplicar conceitos como espaço amostral, evento certo, impossível, união e intersecção de eventos e evento complementar, além de cálculo de probabilidade. O material produzido neste trabalho pode ser aplicado nos demais conteúdos de probabilidade, visto que o jogo produzido pode ser facilmente readequado até mesmo para outros conteúdos da matemática.

Palavras-chave: História da Probabilidade. Jogos e Materiais manipuláveis. Sequência Didática. Ensino de Probabilidade.

ABSTRACT

Games and teaching materials have become important teaching tools in teaching at all levels, and concepts from different areas can be associated, including mathematics. Teaching through games provides the teacher with a contextualization that stimulates the process of understanding the content for students. For this, this work has the problem of discovering which premises are necessary for the development and use of a didactic sequence, with the use of games, for teaching and learning probability in high school? Thus, this work aims to enable the process of teaching and learning probability in High School, through the formulation of a didactic sequence with the use of manipulative materials. Through bibliographical research, we sought to establish a historical evolution of probability and investigate the use of games and manipulative materials in the teaching of mathematics. As a result, we built a didactic sequence for math classes, in order to apply concepts such as sample space, certain event, impossible, union and intersection of events and complementary event, in addition to probability calculation. The material produced in this work can be applied to other probability contents, since the game produced can be easily readjusted to other mathematics contents.

Key words: Probability History. Games and manipulative materials. Following teaching. Probability Teaching.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Probabilidade foi incluída como um ramo da Matemática por volta do século XV, ainda que seus conhecimentos fossem utilizados de forma empírica muito antes (LOPES; MEIRELLES, 2005). Suas origens são datadas de 3000 a.C., onde alguns de seus conceitos eram utilizados em um antigo jogo de dados chamado Tali[1]. Segundo Viali (2008), as primeiras manifestações probabilísticas se deram através de jogos de dados, mais especificamente o Tali, ao qual utilizavam o astrálago, o ancestral do dado moderno. Desde seu princípio, observa-se que a probabilidade sempre esteve relacionada a jogos de azar, possibilidade de perda ou ganho, como é o caso dos primeiros seguros marítimos. De acordo com Viali (2008, p. 145) “a Teoria das Probabilidades, como disciplina matemática, originou-se das tentativas de quantificação dos riscos associados a sinistros (naufrágios, acidentes, morte, etc.) e da quantificação das possibilidades de se ganhar em jogos de azar”.

Ao passar dos séculos, a probabilidade foi se desenvolvendo e, atualmente, sua aplicação pode ser encontrada em várias áreas como biologia, meteorologia, geografia. Na matemática, seus conceitos aparecem muitas vezes aplicados em lançamentos de dados, moedas, retiradas de bolas em urnas, dentre outras. E é nestes objetos, que muitos professores encontram um meio de evidenciar conceitos, como espaços amostrais, eventos prováveis e impossíveis. Em 1998, foi estabelecida pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) uma junção do conteúdo de probabilidade com combinatória e estatística em um bloco denominado Tratamento de Informações.

Desse modo, o professor pode optar em adotar, em suas aulas, o uso de materiais manipuláveis e jogos, que evidenciem aos alunos conceitos como eventos certos, prováveis e impossíveis. Ao recorrer ao uso desses materiais o professor procura, através desta ação, influenciar uma curiosidade nos alunos e ainda diversificar a aula de modo que eles aprendam se divertindo.

Compreendemos que se insere no conceito de material didático (MD) todo e qualquer objeto educacional com potencialidade para auxiliar a aprendizagem, dessa forma os materiais usados nas próprias aulas, como quadro, giz, pincel, apagador, livro didático, etc., são caracterizados como materiais didáticos. Por essa razão, utilizaremos a expressão materiais

---

[1] Tali ou jogo de ossos, era o que hoje chamamos de jogo de dados. Utilizava-se astrálago, que era um osso de um animal (provavelmente carneiro) que era semelhante a um tetraedro irregular, ou seja, as suas quatro faces não eram idênticas e nem mostravam a mesma frequência de ocorrência (VIALI, 2008, p. 144).

manipuláveis, para nos referirmos aos objetos que podem diversificar e motivar os alunos a aprendizagem dos conceitos da Probabilidade, alguns exemplos desses materiais são: jogos, dados, roletas de bingo, baralhos, moedas e qualquer objeto que o professor julgar ser adequado e em que se possa estabelecer uma relação com o conteúdo matemático que está sendo estudado.

O material proposto neste trabalho pode ser facilmente aplicado em sala de aula, sem a necessidade de a escola possuir um local específico para a utilização do mesmo, como um Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), pois muitas escolas podem não dispor de um local como este. O LEM é um aliado tanto ao professor quanto a escola pois este visa facilitar o contato dos alunos com materiais manipuláveis, jogos didáticos, entre outros, além de ser um espaço desenvolvido para o aprendizado de matemática.

Durante minha vivência como aluna da educação básica, assim como acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática, observamos que no dia a dia escolar, são raros os momentos em que um professor recorre ao uso de materiais didáticos manipuláveis, entretanto há aqueles que o usam e além dos materiais manipuláveis, também recorrem ao uso de jogos didáticos objetivando um melhor aprendizado do conteúdo. O que se faz em consonância com Fiorentini (1995), o qual defende que o material didático não deve ser o centro do processo e sim os alunos, e o ensino seria baseado em atividades com a utilização de jogos e materiais manipuláveis.

São muitos os problemas enfrentados pelos professores na sala de aula, um deles é a cobrança, seja por parte da coordenação pedagógica ou por parte dos alunos, de aulas "diferentes" e o material didático vem como uma "resposta" a essas cobranças. Lorenzato (2006, p. 18) argumenta que:

> Os MD podem desempenhar várias funções, conforme o objetivo a que se prestam, e, por isso, o professor deve perguntar-se para que ele deseja utilizar o MD: para apresentar um assunto, para motivar os alunos, para auxiliar a memorização dos resultados, para facilitar a redescoberta pelos alunos?

Desse modo, antes de escolher o MD que julgar mais adepto ao conteúdo, o professor deve pensar primeiramente em que situação ele está incluindo esse MD, dada às situações descritas acima por Lorenzato, assim, pensando no contexto histórico unindo à utilização de materiais didáticos, esta pesquisa tem como resultado uma sequência didática com a utilização de um MD, o qual recebe o nome de *Roleta da Probabilidade*[2], destinado para o ensino de

---

[2] Este jogo foi confeccionado pelas alunas Djane da Silva Souza e Erica Cristina da Silva Andrade, o qual foi apresentado a disciplina de Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), em 2018, na Universidade Federal do Tocantins (UFT - Araguaína). Foi inicialmente planejado para se trabalhar o conteúdo de expressões matemáticas, porém, durante sua confecção observamos este mesmo material poderia ser usado em outro conteúdo.

Probabilidade. Assim, esta pesquisa seguiu uma abordagem qualitativa, fundamentada por procedimentos de pesquisa bibliográfica, utilizando como base textos sobre História da Probabilidade, o uso de materiais didáticos no ensino de Matemática e Probabilidade em sala de aula.

O questionamento que norteou a pesquisa aqui delineada, foi: **quais são as premissas necessárias para a elaboração e utilização de uma sequência didática, com o uso de jogos, para o ensino e aprendizagem de probabilidade no Ensino Médio?** A sequência didática que será apresentada neste trabalho, elaborada de forma onde espera-se que a mesma possibilite um bom resultado no “desenvolvimento das habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas” (BRASIL, 2018), centrando essa sequência numa forma de desenvolver noções de probabilidade. A competência 3, do documento da BNCC, para área de Matemática e suas Tecnologias no Ensino médio, diz:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 527)

Esperamos que os alunos utilizem seus conhecimentos de Probabilidade no momento da sequência, além de realizarem experimentos com a ajuda do material produzido para a resolução e construção de problemas. Quando o professor utiliza de meios, métodos e materiais, a fim de demonstrar aos alunos, conceitos, definições e aplicações matemáticas por meio de materiais que permitem uma manipulação por parte dos alunos, possibilita a estes um método de ampliar seus entendimentos, visto que, para alguns alunos a matemática é vista como algo abstrato.

O desenvolvimento deste trabalho objetivou viabilizar o processo de ensino e aprendizagem de probabilidade no Ensino Médio, por meio da formulação de uma sequência didática com a utilização de materiais manipuláveis. O desdobramento para a obtenção dos resultados desejados perpassou por algumas especificidades, são eles: Compreender a evolução histórica e conceitual da probabilidade; Desenvolver um material didático manipulável para o ensino de probabilidade; Empregar o uso de um material didático em uma sequência didática para o ensino de probabilidade na educação básica.

Assim o leitor encontrará no segundo capítulo um breve histórico da probabilidade desde seu início até os dias atuais, além dos conceitos de Probabilidade que são estudados pelos alunos do ensino médio. No terceiro capítulo, realizamos um breve diálogo teórico sobre os benefícios da utilização dos jogos no ensino de Matemática, especialmente no ensino de

Probabilidade, além da utilização de demais materiais didáticos manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem.

No capítulo IV, encontra-se descrita a proposta elaborada com base nos estudos dos capítulos anteriores, um passo a passo da confecção do material didático proposto, a sequência didática com a utilização deste, além de considerações e apontamentos que devem ser observados pelo professor no momento da aplicação da mesma.

E logo após as considerações finais sobre este trabalho, onde o leitor encontrará de forma sintetiza as informações apresentadas durante a elaboração do mesmo, como também alguns apontamentos acerca da sequência didática elaborada

2 CONTEXTO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO DE PROBABILIDADE

Este capítulo está subdividido em dois tópicos. No primeiro, realizamos uma construção histórica dos acontecimentos que contribuíram para que a situações que antes se explicavam como sorte, acaso ou interferência divina, passassem a ser estudada como o objeto matemático que é hoje, a Teoria da Probabilidade.

No segundo, foi realizada uma breve explanação de conceitos e definições da Probabilidade que são vistos pelos alunos de Ensino Médio durante sua formação. Nesse tópico temos como objetivo, rever os conceitos essenciais estudados por estes alunos que se fazem necessários para a compreensão da Probabilidade. A maneira como essas definições e propriedades encontram-se de acordo com a sequência adotada por Dante (2016).

2.1 Uma Análise da Evolução Histórica da Probabilidade

A Probabilidade, em seu início, foi considerada uma ciência empírica. Somente em meados do século XV que esta foi inserida como um ramo da Matemática. Podemos dizer ainda que esta "nasceu" a partir do estudo de jogos de azar. Alguns de seus conceitos, definidos apenas em 1980, já eram utilizadas muito antes quando se analisavam as possibilidades de perda de um navio ou de suas mercadorias, de acordo com as rotas e eventos relatados por outros marinheiros em outras viagens, como saqueamento por piratas, fortes tempestades, etc. Como já afirmado na introdução deste texto, o seu desenvolvimento inicial, baseou-se na análise de um antigo jogo de dados, chamado Tali (jogo de ossos) que utilizava os astrálagos, uma versão antiga do dado moderno.

> Os italianos do século XV e XVI foram os pioneiros dos cálculos probabilísticos. Eles foram além da simples enumeração das possibilidades para resolver problemas de comparação de freqüências de ocorrências e ganhos em jogos de azar. Não formularam conceitos e teoremas limitaram-se apenas a resolver problemas concretos. (VIALI, 2008, p. 146)

O frei Luca Pacioli (1445 - 1517), foi um dos estudiosos que tentou solucionar o problema da divisão de pontos em uma aposta interrompida. Este problema, conhecido como Problema dos Pontos, continha o seguinte enunciado: "Dois jogadores disputam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse 6 pontos no jogo da balla. Quando o primeiro jogador tinha 5 pontos e o segundo 3 pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio?" (PRADO, 2015, p. 14).

Este Problema dos Pontos estudado por Pacioli, é semelhante ao que Pascal e Fermat chegaram a solucionar, conceituando assim o início da Teoria da Probabilidade. Quanto ao problema estudado por Pacioli, o mesmo chegou a uma resolução, propondo que $\frac{5}{8}$ do prêmio fosse destinado ao primeiro jogador e $\frac{3}{8}$ do prêmio fosse destinado ao segundo jogador. Esta resolução foi considerada incorreta, o italiano Niccolo Fontana (1499 - 1557), mais conhecido como Tartaglia, considerou que "a solução de Pacioli não parece estar correta, mas qualquer que seja a forma de dividir o prêmio haverá sempre um lugar a litígio" (TENREIRO, 2004).

Neste mesmo século, o também italiano, jogador e matemático, Jerônimo Cardano (1501- 1576), estudou as possibilidades de ganhar vários jogos, uma de suas conclusões durante esses estudos foi de que as chances de se tirar um, três e cinco, no lançamento de um dado, são as mesmas de dois, quatro e seis. Mais adiante Cardano influenciado por seu amor em jogos de azar e apostas, escreveu um tratado sobre apostas intitulado *"Liber de Ludo Aleae"* (Livro de Jogos de Azar), onde define a Probabilidade de um determinado evento acontecer "como sendo a razão entre os números de casos favoráveis e o número de possíveis resultados" (MORAES, 2014, p. 5). Este tratado apesar de ter sido escrito em 1526, permaneceu desconhecido até o ano de sua publicação, em 1663.

Tartaglia realizou estudos em cálculos de probabilidades e combinatória, em seu trabalho intitulado *"Tratado geral sobre números e medidas"* publicado em 1556, onde também realizou um estudo acerca do Problema dos Pontos proposto inicialmente por Pacioli. Todos os estudos e resultados de Cardano chegaram ao conhecimento do físico, matemático e astrônomo italiano, Galileu Galilei (1564 -1642), onde o mesmo realizou um estudo completo do número possível de resultados em jogos de dados, estudo este que deu origem ao seu trabalho *"Sopra le scorpeta dei dadi"* (Sobre o jogo de dados).

> [...] uma vez que um dado tem seis faces, e quando lançado, pode igualmente cair em qualquer um deles, apenas 6 lances podem ser feitos com ele, cada um diferente de todos os outros. Mas se junto com o primeiro dado lançarmos um segundo, que também tem seis faces, podemos fazer 36 jogadas, cada uma diferente de todas as outras, já que cada face de o primeiro dado pode ser combinado com cada um do segundo e, em conseqüência, pode fazer 6 lançamentos diferentes, de onde é claro que tais combinações são 6 vezes 6, ou seja, 36. E se adicionarmos um terceiro dado, já que cada uma de suas seis faces pode ser combinada com cada uma das 36 combinações dos outros dois dados, veremos que as combinações de três dados são 6 vezes 36, ou seja, 216, cada um diferente dos outros (DAVID, 1962, p. 66, tradução nossa).

Neste trecho podemos observar que Galileu já obtinha algum conhecimento sobre o cálculo de probabilidades a partir do lançamento de um dado. Até então a probabilidade era entendida, num contexto geral, como uma forma de compreender as frequências no processo do acaso, ou como métodos de comprovação de coisas presumíveis da fé. O marco do início da Teoria da Probabilidade se dá, no entanto, em 1654, com o início de uma série de correspondências trocadas entre os estudiosos franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), na quais discutiam sobre um problema parecido com o Problema dos Pontos proposto por Pacioli, problema este que foi apresentado a Pascal por Chevalier de Méré. Em suas cartas, Pascal e Fermat, não só discutiram como chegaram a uma solução para este problema.

Pascal, desde sua adolescência, já se mostrava um menino prodígio ao redescobrir, por si só, boa parte da Geometria Euclidiana. Seus feitos ao longo de sua vida são extensos, trabalhou em problemas de hidrodinâmica, estabeleceu a lei de pressão de Pascal, provou a existência do vácuo e muito mais. Em um de seus tratados intitulado *"Traité de triangle arithmétique"* (Tratado do triângulo aritmético), fragmento de sua obra *"De Alea Geometriae"* (O jogo da Geometria), Pascal estabeleceu os fundamentos para o cálculo das probabilidades, fruto de um trabalho desenvolvido juntamente com Fermat.

As correspondências trocadas entre Pascal e Fermat totalizam sete cartas. A primeira carta, infelizmente não existe mais, é uma correspondência de Pascal para Fermat, onde Pascal apresenta um problema de divisão de pontos e uma possível resolução para ele. Não se sabe ao certo como ele enunciou o problema em sua carta, alguns autores, após estudarem as 6 cartas existentes e baseando-se principalmente na segunda carta, que é a resposta de Fermat a carta de Pascal, enunciam o problema estudados por eles da seguinte forma: "*Dois jogadores com igual perícia*[3] *são interrompidos enquanto jogam um jogo de azar para uma certa quantia de dinheiro. Dada a pontuação do jogo naquela altura, como deve ser dividida a aposta?*" (POMBO, s/d).

A segunda carta, a qual não se sabe a data em que foi escrita, é a resposta de Fermat e Pascal. Nela Fermat mostra um possível contraexemplo ao que foi apresentado por Pascal na primeira carta. De acordo com Fermat, independente do momento em que os jogadores A e B resolvam ou sejam forçados a interromper o jogo, o jogador que menos tiver pontuado deve ficar com $\frac{1}{6}$ do valor total da soma, assim Fermat exemplifica, caso os dois jogadores concordem que o jogador B não deve realizar a primeira jogada, $\frac{1}{6}$ do valor total da aposta deve

[3] Por "jogadores com igual perícia" entende-se que ambos os jogadores possuem a mesma probabilidade de ganhar, em todos os aspectos.

ficar com ele. Caso isso aconteça e os dois ainda concordem que o jogador B não deve realizar a segunda jogada, então ele receberá $\frac{1}{6}$ do valor que ainda resta, assim ele receberá $\frac{5}{36}$ do valor restante, esse valor é calculado por Fermat da seguinte forma: $\frac{1}{6} \times \left(1\ \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}$. Seguindo esse raciocínio, se o jogador B não realizar a 3ª jogada, receberá $\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6} - \frac{5}{36}\right) = \frac{25}{216}$ do valor total da aposta, e consequentemente, na 4ª jogada não realizada pelo jogador B, ele receberá $\frac{125}{1296}$ do valor total da aposta.

A terceira carta, datada de 29 de julho de 1654, é uma consideração de Pascal acerca dos apontamentos feitos por Fermat na segunda carta, Pascal mostra-se admirado com a resolução de Fermat e relata ter encontrado outro método "*mais curto e mais claro*" (POMBO, s/d) para a resolução deste problema. Pascal considera então três situações, sendo a primeira relatada por ele assim:

> Este é o caminho que tomo para saber o valor de cada parte quando 2 jogadores jogam, por exemplo 3 lançamentos, e quando cada um aposta 32 pistolas (dinheiro da época). Suponhamos que o primeiro tem 2 (pontos) e o outro 1(ponto). Eles jogam agora uma vez na qual as hipóteses são tais que, caso o primeiro ganhe, ele ganhará a totalidade do que está apostado, ou seja, 64 pistolas. Se o outro ganhar eles ficarão 2 para 2 e, consequentemente, se pretenderem dividir acontecerá que cada um retirará o valor da sua aposta, ou seja, 32 pistolas. (POMBO, 2002, grifos do autor)

Pascal acrescenta ainda o acontecimento onde nenhum dos dois jogadores realizam de fato a jogada, mas especulam sobre seus possíveis resultados e como se deve ser feita a divisão do valor apostado:

> Considere então Sr. que se o primeiro ganha 64, serão dele. Se perder, 32 serão dele. Então, se eles não quiserem jogar este ponto e queiram dividir, sem o fazer, o primeiro jogador deverá dizer: «Eu tenho 32 pistolas, porque, mesmo que perca elas serão minhas. Quanto às outras 32, talvez as venha a ganhar ou talvez você as ganhe, o risco é igual. Assim, vamos dividir as 32 pistolas a meias, e eu fico com as 32 que são realmente minhas. Ele terá então 48 e o outro 16. (POMBO, 2002, grifos do autor)

Pascal vai mais além em seu raciocínio e propõe uma segunda situação, onde um jogador possui 2 pontos enquanto o outro nada pontuou ainda:

> As hipóteses são tais que, caso o primeiro ganhe, levará a totalidade da aposta, 64 pistolas. Se o outro ganhar, tenha em atenção de que eles voltarão à situação atrás descrita, na qual o primeiro tem 2 pontos e o segundo 1 ponto.
> Neste caso, já demonstrámos que 48 serão do que tem 2 pontos. Portanto, se eles não quiserem jogar este ponto ele deverá dizer: «Se eu ganhar fico com tudo, ou seja, com 64 pistolas. Se eu perder, 48 serão legitimamente minhas. Portanto, dê-me as 48 que

> me pertencem de certeza mesmo que eu perca e, vamos dividir as outras 16 ao meio pois temos as mesmas hipóteses de as ganhar». Então, ele terá 48 + 8 que são 56. (POMBO, 2002, grifos do autor)

E por fim, atribui a esta discussão uma terceira situação onde somente um dos jogadores tem 1 ponto:

> Vamos agora imaginar que o primeiro tem apenas 1 ponto e o outro nenhum. Repare Sr., que se eles iniciarem uma nova jogada as hipóteses serão tais que, caso o primeiro ganhe, ele terá 2 pontos e o outro 0 e dividindo, como na situação anterior, 56 serão dele. Se ele perder, eles ficarão empatados e 32 serão dele. Ele deverá dizer então: «Se não quer jogar, dê-me as 32 pistolas que são de certeza minhas e, vamos dividir o resto das 56 ao meio. De 56 tira 32 ficam 24. Depois, divida 24 ao meio dá 12 para si e 12 para mim, que com 32 dará 44. (POMBO, 2002, grifos do autor)

Nota-se que em todas as situações apresentadas por Pascal, o jogador que mais pontua, aponta o modo que o valor deve ser dividido, mas sempre se colocando como o vencedor. Ainda nesta mesma carta, Pascal relata um método para se encontrar, considerando qualquer número de jogadas que alguém pretenda, o valor da primeira. Para isso ele utiliza um exemplo de 8 jogadas:

> Tomam-se os primeiros 8 números pares e os primeiros 8 números ímpares, assim: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Multiplicam-se os números pares desta forma: o primeiro pelo segundo, o seu produto pelo terceiro, o seu produto pelo quarto, o seu produto pelo quinto, etc., multiplica-se os números ímpares da mesma forma: o primeiro pelo segundo, o seu produto pelo terceiro, etc. (POMBO, 2002, grifos do autor)

Mais à frente, Pascal teoriza o primeiro teorema até então, quando afirma: “[...] se cada um joga o número de pistolas iguais ao produto dos números pares, pertencer-lhe-ão (quem perder a jogada) a quantia da aposta do outro, expressa pelo produto dos números ímpares” (POMBO, 2002). Na continuação da carta, Pascal apresenta algumas proposições puramente aritméticas, com o intuito de comprovar o teorema proposto anteriormente, e traz como exemplo com 8 letras, onde mostra que o quarto número da progressão quaternária cujo primeiro termo é 2, é igual a metade das combinações com 4 letras, a saber que são 35 (metade de 70), todas as combinações para 5 letras, a saber 56, todas as combinações para 6 letras, a saber 28, todas as combinações para 7 letras, a saber 8, e a combinação para 8 letras.

Pascal exemplifica esse teorema com a seguinte situação: Se um jogador A tem 1 ponto de 5, ou seja, ele já perdeu 4 pontos, e o jogo só será definido em 8 jogadas. O valor da fração da primeira jogada de 5, na aposta do jogador B, é a fração que tem como numerador metade da combinação de 4 das 8 (é tomado 4 porque é igual ao número de pontos que ele perdeu e 8 porque é o dobro de 4) e para denominador, o mesmo numerador somado a todas as mais altas combinações. Ele explica ainda, que se o jogador A tem 1 ponto de 5, então $\frac{35}{128}$ da aposta do jogador B lhe pertence, a saber, se ambos os jogadores apostam 128 pistolas cada um, das 128 pistolas do jogador B, 35 serão destinadas ao jogador A e as outras 93 permanecem com o jogador B. Pascal ainda mostra que $\frac{35}{128} = \frac{105}{384}$, sendo esta última fração sendo resultado da multiplicação dos pares para o denominador e multiplicação dos ímpares para o numerador (POMBO, 2002).

Pascal também apresenta, em suas explicações, uma proposição para o teorema dos pontos e menciona uma tabela construída por ele onde expressa essa proposição matematicamente, mas, no entanto, ele não à reescreve para Fermat, afirmando que o mesmo pode chegar às mesmas conclusões caso se dê o trabalho de verificar todos os problemas propostos por ele anteriormente. Pascal conclui sua carta apresentando a prova de que a diferença dos cubos quaisquer de dois números naturais consecutivos, subtraindo um deles, é seis vezes a soma de todos os números contendo o menor deles, ele apresenta também mais 2 afirmações de problemas geométricos e pede a Fermat que comente sobre esses assuntos também em sua próxima carta.

Menos de um mês após escrever a terceira carta, Pascal escreve uma outra carta em continuação a anterior, datada de 24 de agosto de 1654. No início da mesma, ele demonstra um certo apreensão em expor suas ideias acerca do problema dos pontos para Fermat, por receio de haver uma discordância nas opiniões de cada um. Após, Pascal torna a explicar o método citado na carta anterior para o caso onde há dois jogadores.

Para confirmar sua explicação ele utiliza de uma tabela para apresentar a seguinte situação: Dois jogadores, onde o primeiro precisa de 2 pontos para ganhar a aposta e o segundo precisa de 3 pontos, sabe-se que o jogo será decidido em 4 pontos. Os dados utilizados por eles têm duas faces, e cada um joga 4 dados. Assim, as combinações desses lançamentos são demonstradas por Pascal, (Figura 1), note que podemos encontrar 16 disposições possíveis para o lançamento dos 4 dados, onde 11 delas são favoráveis ao primeiro jogador (representado por um número 1 na tabela), e 5 favoráveis ao segundo jogador (representado pelo número 2).

Figura 1 - Tabela de distribuição para 2 jogadores

a	**a**	**a**	**a**	**a**	**a**	**a**	**a**	**b**	**b**	**b**	**b**	**b**	**b**	**b**	**b**
a	**a**	**a**	**a**	**b**	**b**	**b**	**b**	**a**	**a**	**a**	**a**	**b**	**b**	**b**	**b**
a	**a**	**b**	**b**	**a**	**a**	**b**	**b**	**a**	**a**	**b**	**b**	**a**	**a**	**b**	**b**
a	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**	**2**	**2**	**2**

Fonte: Calabria e Cavalari (2013, p. 22)

Ele relata também o fato de ter compartilhado “a (alguns dos) nossos cavalheiros”, como cita ele, o método apresentado por Fermat e cita em especial o Sr. Roberval[4] (1602-1675), ao qual fez objeções ao método apresentado. Na carta ele relata suas respostas a objeções apresentadas por Sr. Roberval, em seguida ele volta a usar o método para solucionar o problema dos pontos no caso em que há três jogadores, onde falta ao primeiro 1 ponto para que ganhe a aposta e ao segundo e ao terceiro faltam 2 pontos, sendo assim, o primeiro jogador possui 2 pontos, o segundo jogador 1 ponto e o terceiro jogador 1 ponto.

O primeiro passo, como já sabemos, é descobrir em quantos pontos a partida será definida, que para este caso será em 3 pontos. Analisando as maneiras que podem ser combinadas as 3 jogadas, entre os jogadores, onde cada um possui 3 dados com 3 faces, de forma que cada face representa um ponto favorável a um jogador, por exemplo a face “**a**” é favorável ao primeiro jogador (1), a face “**b**” favorável ao segundo jogador (2) e a face “**c**” favorável ao terceiro jogador (3). Assim, Pascal apresenta uma outra tabela (Figura 2) como resultado das possíveis combinações para este caso, que são ao todo 27 combinações.

[4] Professor de Matemática do Colégio da França, membro da Academia de Mersenne e amigo de Etiene Pascal (pai de Pascal).

Figura 2 - Tabela de distribuição para 3 jogadores

a	a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b	b	c	c	c	c	c	c	c	c	c
a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c
a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1			1	1	1	1			1		
				2						2		2	2	2		2						2				
								3									3			3			3	3	3	3

Fonte: Calabria e Cavalari (2013, p. 25)

Observe que a tabela (Figura 2) apresenta 19 combinações favoráveis ao primeiro jogador, 7 combinações favoráveis ao segundo jogador e 7 combinações favoráveis ao terceiro jogador. É perceptível que há um erro na soma das combinações, isso ocorre porque há combinações que favorecem a mais de um jogador, a saber as combinações "**abb**" e "**acc**", por exemplo, sobre isso Pascal afirma:

> Se nós concluirmos daqui, que é necessário dar a cada um de acordo com a proporção 19, 7, 7, estamos a cometer um sério erro, e eu hesitaria em acreditar que você faria isto. Há diversos casos favoráveis ao primeiro e ao segundo, como **abb** tem o **a** de que o primeiro precisa, e os **2 b's** de que precisa o segundo. Assim como o **acc** é favorável ao primeiro e ao terceiro. Portanto, não é desejável contar as distribuições que são comuns aos dois como valendo o valor total de cada mas, somente metade do ponto. Pois, se a distribuição acc ocorrer, o primeiro e o terceiro deverão ter o mesmo direito à aposta, fazendo cada um a sua pontuação. Assim sendo, eles devem dividir a aposta ao meio. Se a distribuição aab ocorrer, o primeiro ganha sozinho. (POMBO, 2002, grifos do autor).

Assim, pelas suas considerações, Pascal obteve para o primeiro jogador 13 distribuições favoráveis que lhe dão o total da aposta, seis que lhe dá metade e oito que não lhe valem nada. Considerando ainda que a soma total vale uma pistola, temos 13 distribuições em que cada uma lhe garante uma pistola, seis que lhe valem ½ de uma pistola e oito que não lhe garantem nenhuma, onde conclui que a divisão da soma dos valores, a saber 16, pela soma das distribuições, a saber 27, ou seja, a fração 16/27 é a quantia que pertence ao primeiro jogador.

Ele realiza o mesmo estudo para o segundo e terceiro jogadores, visto que os dois possuem a mesma pontuação, conclui que há quatro distribuições que garantirá a um deles, cada uma, uma pistola, três que garantirão ½ de uma pistola cada e 20 que não lhe valem nada. Assim, 5 ½ pistolas de 27 pertencem ao segundo jogador e o mesmo ao terceiro. Entretanto, ele mesmo afirma que está suposição é falsa:

> Parece-me que é esta a maneira na qual é necessário fazer a divisão pelas combinações, de acordo com o seu método, a não ser que tenha algo mais sobre o assunto que eu não saiba. Mas, se não estou enganado, esta divisão é injusta. A razão é que estamos a fazer uma suposição falsa, isto é, que eles estão a jogar 3 lançamentos sem exceção, em vez da condição natural deste jogo que é, que eles não devem jogar a não ser quando um dos jogadores obtiver o número de pontos que lhe faltam, e nesse caso o jogo termina. (POMBO, 2002, grifos do autor)

Naturalmente eles teriam o resultado em uma ou duas jogadas e não apenas na terceira, não se pode admitir que os dados serão jogados 3 vezes, pois naturalmente, assim que um dos jogadores ganha a partida é encerrada. Sabendo disso, para que esta suposição ocorra e seja verdadeira, é necessário que os três jogadores concordem e cooperem em jogar as três jogadas completas, assim todas as suposições feitas anteriormente serão verdadeiras e terá como resultado da divisão da aposta 16, 5½ e 5½, para o primeiro jogador, para o segundo e para o terceiro, respectivamente. Pascal apresenta ainda as seguintes afirmações:

> Se os jogadores se encontrarem no estado dado na hipótese [...] neste caso, a divisão deve ser feita como eu indico aqui: o primeiro deve ficar com 16, o segundo com 5 ½ e o terceiro com 5 ½ de 27 pistolas, e isto traz consigo a sua prova na suposição da condição acima indicada. Mas, se eles jogarem simplesmente na condição de que não jogarão necessariamente as 3 jogadas mas, que jogarão apenas até que um deles tenha obtido os seus pontos, e que então o jogo deve acabar sem dar a outro a oportunidade de alcançar a sua pontuação, então 17 pistolas deverão pertencer ao primeiro, 5 ao segundo e 5 ao terceiro, de um total de 27. (POMBO, 2002, grifos do autor)

Em 29 de agosto de 1654, Fermat escreveu a Pascal, a quinta carta trocada entre eles. Nesta ele foi mais sucinto, comparando-a com a décima primeira proposição apresentada no Tratado do Triângulo Aritmético (*Traité du Triangle Arithmétique*) de Pascal, relata também estar ocupado com o "fim do parlamento". Fermat faz apenas um breve comentário sobre o Problema dos Pontos, quanto a questão dos três jogadores que fazem três jogadas. Ele conclui esta carta apresentando a Pascal o resultado de que as potências quadradas do número dois adicionado por um é sempre um número primo[5].

A sexta carta é endereçada a Pascal por Fermat em 25 de setembro de 1654, onde o mesmo inicia comentando que para o caso com três jogadores, ele encontra 17 combinações favoráveis ao primeiro jogador e 5 para cada um dos outros jogadores e explica este resultado afirmando que, por exemplo, a combinação **acc** é boa apenas para o primeiro jogador, visto que há uma ordem nos lançamentos, como Fermat afirma: "[...] tudo o que é feito após um dos jogadores ter ganho nada vale" (Pombo, s/d). Ele exemplifica que para o caso dos três jogadores em quatro jogadas, o número de combinações será igual a 81, onde 51 destas serão favoráveis

---

[5] Após 100 anos, Euler comprovou que essa proposição é falsa.

ao primeiro jogador e 15 combinações favoráveis para cada um dos dois jogadores restantes. Consequentemente, se forem cinco jogadas, ou qualquer outro número, serão encontrados sempre três números na proporção de 17:5:5. Onde Fermat afirma novamente:

> E, de acordo com isto, estou certo em afirmar que a combinação **acc** é [favorável] apenas para o primeiro e não para o terceiro, e que **cca** é apenas para o terceiro e não para o primeiro e, consequentemente a minha lei de combinações é a mesma para 3 jogadores como para 2, e em geral para todos os números. (POMBO, 2002, grifos do autor)

Para confirmar sua afirmação, Fermat explica que há três situações possíveis, a primeira é onde o primeiro jogador ganha em apenas um lançamento do dado com três faces, assim $1/3$ da aposta lhe pertencem. Na segunda situação temos dois lançamentos, onde ele (primeiro jogador) poderá ganhar de duas maneiras, ou quando o segundo jogador ganha a primeira jogada e o primeiro jogador ganha a segunda, ou quando o terceiro jogador ganha a primeira jogada e o primeiro jogador ganha a segunda, sendo assim, ele possui $\frac{2}{9}$ do valor da aposta. Na terceira situação temos três lançamentos, onde o primeiro jogador poderá ganhar de 2 maneiras diferentes que são: o segundo jogador ganha no primeiro lançamento, o terceiro jogador ganha no segundo lançamento e o primeiro jogador ganha no terceiro lançamento, ou o terceiro jogador ganha no primeiro lançamento, o segundo jogador ganha no segundo lançamento e o primeiro jogador ganha no terceiro lançamento, não entram aqui o caso onde o segundo ou o terceiro jogador ganham os dois primeiros lançamentos, pois assim eles ganhariam a partida e primeiro jogador perderia. Ou seja, na terceira situação o primeiro jogador tem direito a $\frac{2}{27}$ da aposta, e a soma das hipóteses onde o primeiro jogador ganha é igual a $\frac{17}{27}$. No restante desta carta, Fermat discorre mais um pouco acerca de uma proposição relacionada à Teoria do Número.

A sétima carta trocada entre eles, última correspondência a qual tivemos acesso, é destinada à Fermat por Pascal no dia 27 de outubro de 1654. Ele afirma que, “sua última carta me satisfez perfeitamente. Eu admiro seu método para o problema dos pontos, tanto mais que eu o entendi bem. Ele é inteiramente seu, e não tem nada em comum com o meu, e atinge o mesmo fim facilmente. Agora nosso consentimento começou novamente” (POMBO, 2002).

Podemos ver a satisfação de Pascal com o método desenvolvido por eles, onde até atribui todo o crédito a Fermat. Na carta ele ainda caracteriza as afirmações feitas por Fermat, em sua última correspondência, sobre a Teoria do Números como valiosas e o aconselha a compartilhar essas informações com outra pessoa. Estas correspondências trocadas entre eles foram publicadas em 1679, em Toulouse, na França.

Concluindo o estudo destas cartas podemos apontar os seguintes princípios básicos a serem aplicados ao Problema dos Pontos:

1. Dependendo da situação do jogador ele receberá uma determinada quantia, tanto se perder quanto se ganhar, mesmo que o jogo seja interrompido;
2. Se em um jogo com dois jogadores um deles ganhar, determinada quantia pertence a este e se perde, esta mesma quantia pertencerá ao outro, e se os dois jogadores possuem as mesmas chances de vencer, então deverão dividir a quantia igualmente, no momento em que decidem parar de jogar;
3. Pascal nota que a divisão das apostas é determinada pelo número de casos favoráveis e pelo número total de possibilidades do determinado evento.

Além das cartas, podemos destacar a publicação de Pascal na obra intitulada *Traité du Triangle Arithmétique* (Tratado do Triângulo Aritmético), onde ele apresenta o triângulo aritmético e desenvolve 19 propriedades desse triângulo relacionando-as com cálculos probabilísticos, esse tratado é mencionado em uma das cartas de agosto de 1654. Em 1655 em uma viagem para Paris, o holândes Christiaan Huygens (1629 - 1695) teve contato com as correspondências trocadas entre Pascal e Fermat, o que fez com que se interessasse mais por problemas semelhantes aos propostos nelas. Huygens dedicou-se ao estudo de jogos de azar e publicou seus resultados em 1657, na obra intitulada *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (O Raciocínio em Jogos de Azar), sendo considerada a primeira publicação matemática em Teoria da Probabilidade.

Em sua obra, Huygens apresenta, em forma de exercício, alguns problemas de extração de bolas coloridas de uma urna e outras semelhantes aos que podemos encontrar em textos atuais sobre probabilidade. Para estes problemas, Huygens não apresenta nenhuma análise ou demonstração, pois são deixados exatamente para cargo do leitor. O tratado de Huygens foi muito utilizado até ser substituído pelos trabalhos elaborados por Jacob Bernoulli (1654 - 1705), Pierre Remind Montmort (1678 - 1719) e de Abraham de Moivre (1667 - 1754). Este último publicou em 1718 o livro *Doctrine of Chances* (Doutrina das Chances), trabalho este que dedicou a seu grande amigo Isaac Newton.

Na obra póstuma de James Bernoulli, intitulada *Ars Conjectandi* (A Arte da Conjectura), datada de 1713, é apresentado uma reedição comentada do tratado de Huygens, além da solução de seus problemas, considerações sobre a teoria da permutação e combinações e ainda uma aplicação da Teoria das Probabilidades. Mais tarde, em 1812, destacamos a publicação do tratado intitulado *Théorie Analytique des Probabilitíes* (Teoria Analítica das Probabilidades), de autoria de Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827), os fundamentos da Teoria da Probabilidade foram colocados por ele de uma forma que atualmente é denominada "Definição Clássica de Probabilidade" (MORAES, 2014).

Foi a partir da obra de Laplace que a probabilidade ganhou notoriedade e despertou o interesse de diversos matemáticos, aos quais podemos destacar: Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), Leonhard Euler (1707 -1783), o russo Andrei Andreyecich Markov (1856 - 1922), Siméon Denis Poisson (1781 - 1840), Henri Poincaré (1854 - 1912), Emile Borel (1871 - 1956), Henri Lebesgue (1875 - 1941) e Jean le Rond d'Alembert (1717 - 1783). Moraes (2014, p. 12) destaca que "o desenvolvimento moderno da Teoria das Probabilidades caracteriza-se por um crescimento geral de interesse na teoria em si, junto com o alargamento do alcance de suas aplicações práticas".

Atualmente por meio da probabilidade, e graças a todos os conhecimentos produzidos pelos estúdios citados anteriormente, podemos compreender que muitos acontecimentos do nosso cotidiano são aleatórios, e que noções de acasos e incertezas são intuitivas.

2.2 Probabilidade no Ensino Médio: Definições e Propriedades

Segundo Viali (2008, p. 143, grifos do autor), "a probabilidade é o ramo da matemática que pretende modelar fenômenos não determinísticos, isto é, aqueles fenômenos em que o 'acaso' representa um papel preponderante". Muito antes de ser incorporada à matemática, a probabilidade era considerada uma ciência empírica, seus fenômenos e resultados estavam sempre relacionados ao acaso, o qual pode ser definido como "[...] um conjunto de forças, em geral, não determinadas e controladas, que exercem individualmente ou coletivamente um papel preponderante na ocorrência de diferentes resultados de um experimento ou fenômeno" (VIALI, 2008, p. 144).

Tomemos como exemplo, o lançamento de uma moeda, apesar de possuir apenas duas faces, não se pode afirmar com certeza se teremos como resultado a face cara ou coroa, caso ocorra dois lançamentos da mesma moeda, ainda assim há a possibilidade dos resultados serem iguais ou diferentes. O mesmo ocorre no lançamento de um dado, não podemos afirmar com precisão que resultados obteremos. Esses são exemplos onde o "acaso" acontece, o mesmo pode ser relacionado a outros eventos como, o sorteio de uma bola em uma urna, a vida útil de determinados aparelhos eletrônicos, a previsão do tempo, e etc. Através disso, notamos que o “acaso” pode estar associado tanto a casos de fenômenos climáticos, como acontecimentos do nosso cotidiano ou ainda em jogos de azar.

Nesta seção serão apresentadas algumas definições e propriedades da Teoria da Probabilidade, em particular aquelas que se encontram relacionadas com o Ensino Médio. Vale ressaltar que os conteúdos aqui apresentados são frequentemente vistos nas turmas de 2ª ano do Ensino Médio.

Ao iniciar a introdução do conteúdo é importante que o professor realize junto com a turma um momento de conversa sobre acontecimentos do cotidiano para que os alunos possam, através desta conversa, observar a existência de dois tipos de experimentos: os determinísticos e os aleatórios. Segundo Dante (2016), um experimento determinístico é aquele que regularmente fornece o mesmo resultado, se repetido nas mesmas condições, por exemplo o tempo que um dado leva para atingir o chão se jogado de uma altura fixa. Já o experimento aleatório é aquele que mesmo sendo repetido nas mesmas condições, não apresenta o mesmo resultado, por exemplo o lançamento de um dado, de uma moeda ou a retirada de uma carta qualquer em um baralho.

A Probabilidade faz o estudo especificamente deste último. Já que não podemos determinar um único resultado para estes experimentos, mas podemos, através da probabilidade, determinar com que frequência esses resultados ocorrem. Assim sendo, para a construção da sequência didática, é necessário que os alunos já tenham conhecimentos de algumas definições, que serão expostas agora, as quais se fundamentam em Dante (2016).

Definição 1: Espaço amostral: em um experimento (ou fenômeno) aleatório, o conjunto formado por todos os resultados possíveis é chamado espaço amostral (Ω). Por exemplo, no lançamento de uma moeda podemos ter como resultado cara (c) ou coroa (k), assim $\Omega = \{c, k\}$.

Definição 2: Evento (A, B, C, ...): é qualquer subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório. Por exemplo a possibilidade de “ocorrer número ímpar no lançamento de um dado” o espaço amostral para o lançamento é dado como $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e como evento A: “ocorrer número ímpar no lançamento de um dado” → $A = \{1, 3, 5\}$.

Definição 3: Quando um evento coincide com o espaço amostral, ele é chamado evento certo. E quando um evento é vazio, ele é chamado evento impossível. Por exemplo para o experimento “lançar um dado e registrar o resultado” se definirmos o evento A: “ocorrência de um número menor que 7” → $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, portanto $A = \Omega$. Mas se definirmos o evento

B: “ocorrência de número par maior que 6” → $B = \emptyset$. Onde A é um evento certo e B um evento impossível.

Definição 4: Considerando ainda o experimento anterior, e os eventos C: “ocorrência de número par” → $C = \{2,\ 4,\ 6\}$; D: “ocorrência de múltiplo de 3” → $D = \{3, 6\}$; E: “ocorrência de número ímpar” → $E = \{1,\ 3,\ 5\}$; podemos definir: o evento F: “ocorrência de número par ou múltiplo de 3” → $F = C \cup D = \{2,\ 4,\ 6\} \cup \{3, 6\}\ = \{2, 3, 4, 6\}$ o evento G: “ocorrência de número par e múltiplo de 3” → $G = C \cap D = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 6\} = \{6\}$ (intersecção de eventos). Observe que os eventos C e E são chamados eventos complementares, pois $C \cup E = \Omega$. Quando a intersecção de dois conjuntos é o conjunto vazio, eles são chamados de eventos mutuamente exclusivos, por exemplo $C \cap E = \emptyset$.

Definição 5: Cálculo de probabilidades: Em um fenômeno (ou experimento) aleatório, com espaço amostral finito, consideramos que todo evento elementar tem a mesma “chance” de ocorrer. A probabilidade de ocorrer um evento A, indicada por *p(A)*, é um número que mede essa chance de acontecer, é dado por: $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ onde $n(A)$ representa os números de elementos de A e $n(\Omega)$ o número de elementos de Ω. Para esses casos os eventos elementares são chamados de eventos equiprováveis.

Definição 6: Um evento A é um evento impossível, e não há possibilidade de que ele venha a ocorrer quando $p(A) = 0$ e um evento certo é aquele em que há certeza de que ele ocorre quando $p(A) = 1$. Essas definições são válidas pela desigualdade: $0 \leq p(A) \leq 1$.

Definição 7: Definindo teoricamente probabilidade como uma função que associa a cada evento A um número *p(A)* satisfazendo as seguintes propriedades. 1ª) P_1: $p(A) \geq 0$, para qualquer $A \subset \Omega$; 2ª) P_2: $p(\Omega) = 1$; 3ª) P_3: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, quando $A \cap B = \emptyset$(eventos mutuamente exclusivos).

Como consequências da definição teórica de Probabilidade, temos as seguintes propriedades:

1ª propriedade: Impossibilidade ou $p(\emptyset) = 0$: Como um evento qualquer A (sendo A subconjunto de Ω) pode ser escrito como $A \cup \emptyset$e como $A \cap \emptyset = \emptyset$, podemos aplicar a propriedade P_3 e temos:

$$p(A)\ =\ p(A \cup \emptyset) = p(A)\ +\ p(\emptyset) \Rightarrow p(\emptyset) = 0$$

2ª propriedade: Probabilidade do evento complementar: Sendo $\bar{A}$ a notação para “complementar de A”, temos:

$$A \cup \bar{A} = \Omega \text{ e } A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Logo:

$$p(\Omega) = p(A \cup \bar{A})$$

Aplicando P_2 e P_3, temos:

$$1 = p(A) + p(\bar{A}) \text{ ou, equivalente, } p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

3ª propriedade: Probabilidade da união de dois eventos: A partir do número de elementos da união de dois conjuntos, admitiremos que:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \rightarrow \text{probabilidade da união de dois eventos quaisquer}$$

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B), \text{ quando } A \cap B = \emptyset$$

Definição 8: Probabilidade condicional: Dados dois eventos A e B, com $p(B) > 0$, a probabilidade condicional de ocorrer A, já tendo ocorrido B, é um número dado por: $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Definição 9: Eventos independentes: Dois eventos A e B de um espaço amostral Ω (com $p(A) \neq 0$ e $p(B) \neq 0$ são independentes se, e somente se, $p(A/B) = p(A)$, ou, de modo equivalente:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Com isso, podemos afirmar que dois eventos A e B são dependentes quando $p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B)$.

Observando a evolução histórica da Probabilidade, juntamente como a forma em que esses conceitos são apresentados e estudado nos livros didáticos, percebe-se a importância de propiciar o estudo deste conteúdo através do uso de jogos e materiais manipuláveis em sala de aula, pois estes podem facilitar o processo de aprendizagem do aluno, que tende a deixar de ver a probabilidade como algo abstrato e passando a perceber sua presença nos eventos do seu dia a dia. No próximo capítulo, abordaremos mais acerca desta utilização de jogos no ensino, apresentando os benefícios e finalidades que se esperam com o seu uso em sala de aula, que vão muito além do lazer.

3 JOGOS E MATERIAIS CONCRETOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Durante o ensino de matemática o professor pode encontrar algumas dificuldades em trabalhar diversos conteúdos com seus alunos, por vezes, quando a matemática é ensinada de modo mecânico, sem contextualização e por meio de exemplos distantes da realidade do aluno, pode gerar nos alunos um entendimento de que esta é uma disciplina fechada, homogênea e abstrata, e isso pode dificultar o processo de aprendizagem.

A matemática é uma das disciplina mais importantes na grade curricular, devido a possibilidade de se fazer uma ligação da mesma com várias outras áreas do conhecimento, entretanto, essa disciplina "tem às vezes uma conotação negativa que influencia os alunos" (SANTOS; FRANÇA; SANTOS, 2007, p. 9), ou seja, o modo como a disciplina é apresentada influencia no aluno, podendo vir a contribuir para o aumento do índice de reprovação, e mesmo aqueles que são aprovados, sentem alguma "dificuldade" no momento em que é necessário aplicar os conhecimentos adquiridos.

Aprender matemática não é uma tarefa fácil e ensinar também não. Por muitos anos foi ensinado aos alunos a realizar cálculos a partir de métodos já prontos, mas com o avanço da tecnologia, cálculos matemáticos que antes preenchiam uma lauda inteira, agora podem ser feitos com apenas alguns clicks em uma calculadora ou utilizando softwares. De acordo com Santos, França e Santos (2007, p. 13), atualmente, "a sociedade espera do professor outras competências que possibilitem a formação de crianças autônomas, capazes de ler diferentes formas de representação e de elaborar ideias para novos problemas, além das atividades desenvolvidas em sala de aula".

À medida que o mundo se atualiza a nossa volta, vê-se uma cobrança com os professores para que seus métodos de ensino se "atualizem" também, entretanto para estes não é tão fácil assim. Podemos associar alguns fatores que influenciam nessas dificuldades enfrentadas pelos professores, como a falta de uma formação profissional qualificada, as péssimas condições de trabalho, as precárias políticas educacionais em nosso país, a grande quantidade de conteúdo que devem ser ministrados e o curto espaço de tempo que lhes é dado para isso, entre outras. Esses fatores não só dificultam o ensino, como também a aprendizagem por parte dos alunos.

Durante o último século, nota-se por parte de alguns educadores um "destaque à importância do apoio visual e visual-tático na aprendizagem" (LORENZATO, 2006, p. 3). Ainda de acordo com Lorenzato (2013), alguns educadores como Locke que, em 1680, defendia a necessidade da experiência sensível a fim de se alcançar um conhecimento; Piaget, mais tarde, concluiu que o conhecimento se dá através da ação reflexiva sobre o objeto; assim como Vygotsky e Bruner no qual chegaram a um entendimento que as experiências no mundo real constituem um caminho para que a criança possa construir seu raciocínio, entre tantos outros no exterior. No Brasil destacam-se nomes como Júlio César de Mello e Souza - Malba Tahan - e Manoel Jairo Bezerra que contribuíram para o uso de materiais didáticos como apoio nas aulas de matemática, entre outros autores.

Nos últimos anos nota-se, tanto por parte dos professores e da instituição de ensino, preocupações quanto aos métodos de ensino utilizados em sala de aula. Os professores têm diversificado mais suas aulas, fugindo do método tradicional e buscando diversificá-lo sem que isto afete o ensino e a aprendizagem, muitas vezes recorrendo aos materiais manipuláveis como uma forma de prender a atenção dos alunos quanto ao conteúdo que está sendo ministrado pelo professor.

Como um auxiliador ao professor neste momento, Lorenzato (2006), chama a atenção para a importância de se ter um espaço específico tanto para esses momentos quanto para as aulas de matemática:

> Nossa sociedade pressupõe e, até mesmo, exige que muitos profissionais tenham seus locais apropriados para desempenharem o trabalho. [...] E por que local apropriado para trabalhar? Porque o bom desempenho de todo profissional depende também dos ambientes e dos instrumentos disponíveis. Em muitas profissões, a prática difere pouco do planejamento; não é o caso do magistério, devido à criatividade dos alunos, que torna o LEM simplesmente indispensável à escola. (LORENZATO, 2006, p. 05)

Dessa forma o LEM deve compor, em uma escola, um dos espaços que possuem uma função específica, não o limitando a um local onde são guardados os materiais didáticos, como livros, materiais manipuláveis, jogos, etc., a fim de torná-los mais acessíveis para as aulas, este seria a definição de um arquivo ou depósito. Diferentemente deste, o LEM consiste num local da escola reservado preferencialmente não só para as aulas regulares de matemática, como também num espaço onde os alunos possam tirar suas dúvidas, um espaço onde há uma aprendizagem colaborativa, um compartilhamento de conhecimentos, onde os professores sejam capazes de planejar suas aulas e atividades a serem realizadas nas mesmas.

> [...] o LEM, nessa concepção, é uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensamento matemático, é um espaço para facilitar, tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender. (LORENZATO 2006, p. 07)

Neste momento de criação do LEM, Lorenzato (2006) ressalta a importância de uma ação conjunta dos professores, administração da escola e alunos, ressaltando que a participação deste último na construção do LEM é muito importante para o processo educacional. Porém além do ato de somente utilizar um material manipulável é perceptível que a participação na construção do mesmo, traz inúmeras contribuições no aprendizado do aluno, pois neste momento de construção de um poliedro, por exemplo, estes podem observar atentamente o objeto e entender mais de suas características e propriedades.

O autor frisa sempre o fato de que, a construção de um LEM não é algo que se dá do dia para a noite, e sim através de uma contínua produção de materiais e busca por métodos diferentes de investigação científica, não existe um momento de conclusão deste, assim como não existe um modelo único. Lorenzato (2006, p. 9) chama a atenção para esse ponto ao afirmar que “a respeito da construção do LEM, é também fundamental considerar a quem se destina”. O LEM de uma escola de Ensino Fundamental, por exemplo, difere do LEM destinado aos alunos do Ensino Médio, a finalidade é a mesma, mas os materiais didáticos que constituem cada um possui objetivos e finalidades diferentes.

Apesar desta diferença e de seu processo de construção não ser algo simples, Lorenzato (2006) destaca alguns materiais, considerados por ele básicos, para se ter nesse espaço, são estes: livros didáticos, paradidáticos e sobre temas matemáticos, artigos de jornais ou revistas, registros de episódios da história da matemática, ilusões de ótica, falácias, sofismas e paradoxos, jogos, quebra-cabeças, figuras geométricas, sólidos geométricos, moldes estáticos ou dinâmicos, quadros, murais ou pôsteres, materiais didáticos industrializados e produzidos pelos alunos e professores, réguas, compasso, calculadoras, computadores, colas, tesouras e demais materiais e instrumentos necessários à produção de materiais didáticos.

Lorenzato (2006, p. 07) ressalta que, “para muitos professores, todas as salas de aula e todas as suas aulas devem ser um laboratório onde se dão as aprendizagens da matemática”. Essa concepção, para o autor, é considerada uma utopia que pode enfraquecer uma possível construção de um LEM, desmotivando o professor ainda no processo de construção deste, seja ele uma sala, um canto ou simplesmente um armário. Assim, como o professor encontrará motivos para construir um LEM, ele também encontrará objeções a este, o que torna ainda mais necessário que o mesmo tenha conhecimento sobre este espaço, para que possa influenciar e incentivar seus demais colegas, alunos e a escola.

3.1 Jogos e Materiais Concretos no Ensino de Probabilidade

No contexto educacional, percebe-se que os jogos e brincadeiras educativas vêm tomando cada vez mais espaço nas salas de aula como apoio aos professores, tornando assim as aulas mais agradáveis sem perder o foco da aprendizagem. Segundo Kishimoto (2008, p. 37), "o jogo é um instrumento pedagógico muito significativo [...] é uma atividade livre, alegre, que engloba uma significação. É de grande valor social, oferecendo inúmeras possibilidades educacionais". Assim, esses jogos são vistos, no ambiente escolar, como uma estratégia para o ensino e para a aprendizagem, sendo considerados um veículo importante para o desenvolvimento social, emocional e intelectual dos alunos.

Assim o jogo passa a ter um caráter de material de ensino quando provoca aprendizagem, onde o aluno aprende ao mesmo tempo a estrutura lógica da brincadeira e a estrutura matemática presente no jogo.

> O jogo será conteúdo assumido com a finalidade de desenvolver habilidades de resolução de problemas, possibilitando ao aluno a oportunidade de criar planos de ação para alcançar determinados objetivos, executar jogadas de acordo com este plano e avaliar sua eficácia nos resultados obtidos. (CABRAL, 2006, p. 15)

Nessas concepções, saímos da visão do jogo como puro material instrucional incorporado ao ensino, para algo mais lúdico que propicia o tratamento dos aspectos afetivos que caracterizam o ensino e a aprendizagem como uma atividade.

Cabral (2006, p. 16) cita Perelman como "um dos grandes precursores do uso dos jogos no ensino de matemática", utilizados de forma a explorar determinados conceitos e colocá-los de forma lúdica. Como exemplo de materiais que podem ser enquadrados nessas características temos os quebra-cabeças, quadro mágicos, o geoplanos, materiais dourados, ábacos, sólidos geométricos, entre outros. Ressaltamos que

> Se brinquedos são sempre suportes de brincadeiras, sua utilização deveria criar momentos lúdicos de livre exploração, nos quais prevalece a incerteza do ato e não se buscam resultados. Porém, se os mesmos objetos servem como auxiliar da ação docente, buscam-se resultados em relação a aprendizagem de conceitos e noções, ou mesmo, ao desenvolvimento de algumas habilidades. Nesse caso, o objeto conhecido como brinquedo não realiza sua função lúdica, deixa de ser brinquedo para tornar-se material pedagógico (KISHIMOTO, 1994, p.14).

Dessa maneira, vemos uma diferenciação entre brinquedo e material pedagógico, que é fundamentada na natureza da ação educativa. Para saber se um jogo é educativo ou não, o professor deve assumir um papel de organizador de ensino, isto é, organizar situações que possibilitem ao aluno ter consciência dos conceitos que pretende trabalhar com o desenvolver das atividades.

> O jogo na educação matemática parece justificar-se ao introduzir uma linguagem matemática que aos poucos será incorporada aos conceitos matemáticos formais, ao desenvolver a capacidade de lidar com informações e ao criar significados culturais para os conceitos matemáticos e estudo de novos conteúdos. (CABRAL, 2006, p. 18)

Dessa forma, a matemática deve buscar nos jogos a ludicidade das soluções construídas para cada situação problema do dia a dia. Segundo os PCNs (1998, p. 46), voltando-se para o ensino de matemática, “os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permite que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções”. Assim, pode-se obter uma abordagem didática diferenciada no ensino de matemática, pois o professor, além de estabelecer uma relação menos autoritária, também consegue fazer com que os alunos se dediquem mais às atividades durante o desenvolvimento da aprendizagem.

O uso de jogos e materiais didáticos visa também combater as “velhas” práticas educacionais tradicionais no ensino de matemática, pois o que vem sendo decorado pelo aluno, como fórmulas, conceitos, regras e outros, podem ser assimilados durante a realização dessas atividades pedagógicas. Contudo é necessário tomar cuidado para que estas atividades não se tornem meros momentos de lazer, pois a finalidade destas é de induzirem os alunos a pensarem de forma mais clara, desenvolvendo seu raciocínio lógico e criatividade. Segundo Rosário (2013), é preciso que o professor saiba induzir os alunos a um ambiente de aprendizagem, que pode ser caracterizado pela proposição, investigação e exploração de situações problemas diferentes.

Dessa forma, os jogos e materiais concretos são destinados a chamar a atenção do aluno para a aprendizagem da matemática, sendo capazes ainda de incentivar a motivação e os estímulos destes. Na concepção de Rêgo e Rêgo (2006, p. 43),

> [...] o material concreto tem fundamental importância pois, a partir de sua utilização adequada, os alunos ampliam suas concepções sobre o que é, como e para que aprender matemática, vencendo os mitos e preconceitos negativos, favorecendo a aprendizagem pela formação de idéias e modelos.

Desse modo, no momento em que o professor estiver em sala utilizando-se de materiais concretos para os alunos, esses poderão ser estimulados a apresentarem suas dúvidas sobre os conceitos matemáticos, além de utilizar seus conhecimentos prévios durante a aula. O conteúdo não será visto como “mais uma fórmula a ser decorada” e sim como algo que eles utilizam em momentos de diversão, sem terem o conhecimento de que o estão fazendo. Gavanski e Lima

(2010), ressaltam que alguns materiais concretos como botões, tampas, palitos e outros, podem ser úteis na evidenciação de relações que estão em nível de abstração elevado ainda para crianças, às vezes mais que materiais como geoplanos, tangran, material dourado e afins, os quais apresentam ideias matemáticas já definidas na sua utilização.

Gavanski e Lima (2010, p. 106, grifo dos autores) ressalta ainda que "as noções matemáticas 'jamais se encontram nos materiais', mas se formam na mente da criança com o auxílio da ação mediadora do professor". Sobre isso, Cabral (2006, p. 22) salienta que "é necessário que o professor questione o aluno sobre suas jogadas e estratégias para que o jogar se torne um ambiente de aprendizagem e criação conceitual e não apenas de reprodução mecânica do conceito". Durante esse processo, o aluno dispõe-se à elaboração de processos de análise de possibilidades e tomadas de decisões. O aluno é instigado a criar processos para jogar e resolver problemas que podem e irão surgir durante o jogo, criando assim novas estratégias e pensamentos.

Um outro aspecto importante, que é próprio do jogo e é destacado por Cabral (2006), é o seu caráter social, onde possibilita que os alunos exponham suas ideias e estratégias, analisem as dos seus colegas e reflitam sobre cada jogada feita por eles e por seus adversários. O autor destaca ainda para que um jogo, ou até mesmo um material didático, possa atingir sua plenitude e realmente ser considerado um objeto útil no processo de ensino, é necessário analisar determinados aspectos, que são:

> Ser interessante e desafiador: O professor deve propor alguma coisa interessante para os alunos resolverem, levando sempre em conta o estágio de desenvolvimento em que o aluno se encontra. [...] O professor também deve buscar adaptar um jogo para torná-lo mais desafiador. Permitir que o aluno avalie seu desempenho: Quando um aluno tenta obter um resultado, está naturalmente interessado no sucesso de sua ação. Neste caso, é necessário que o resultado seja claro, permitindo ao aluno avaliar seu sucesso, percebendo, sem dúvida, onde errou, estabelecendo as consequentes relações entre as várias ações realizadas e reações, contribuindo, assim, para a construção da autonomia. Favorecer a participação ativa de todos os jogadores durante o jogo: O professor deve estar atento à reação e a participação contínua e a capacidade de envolvimento dos alunos, seja observando, agindo ou pensando. Caso seja necessário, o professor pode fazer alterações no grupo ou mesmo tirar ou incluir regra, a fim de possibilitar este movimento. (CABRAL, 2006, p. 23-24)

Assim, ao introduzir um jogo ou um material didático, o professor deve estabelecer e deixar claro os objetivos para o mesmo, assim como deve verificar a adequação da metodologia a turma em que pretende trabalhar, além disso, estes devem representar uma atividade desafiadora aos alunos, para assim, desencadear o processo de aprendizagem.

Como visto no capítulo anterior, a probabilidade se deu a partir do estudo de jogos, sendo assim, utilizá-los no seu ensino pode contribuir para uma melhor compreensão dos conceitos e definições.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) de 2000, o ensino de Probabilidade (e Estatística) são indicados como uma competência a qual deve ser desenvolvida uma compreensão do caráter aleatório, e não determinístico, dos fenômenos naturais e sociais. De acordo com esse documento:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas. (BRASIL, 2000, p. 44)

As técnicas e raciocínios probabilísticos enfatizados, recebem uma atenção e especificação maior na BNCC. Nela os diferentes campos da matemática são integrados de uma forma mais consistente, definidos num conjunto de pares de ideias, sendo estes: variação e constância; certeza e incerteza; movimento e posição; relações e inter-relações. No que concerte à Probabilidade temos o par certeza e incerteza, onde:

> Certeza e incerteza é um par normalmente associado, na matemática escolar, ao estudo de fenômenos aleatórios, à obtenção de medidas no mundo físico, a estimativas, análises e inferências estatísticas e a argumentações e demonstrações algébricas ou geométricas. Mas ela engloba muitas outras ideias. [...] Como certeza e incerteza são inerentes à elaboração de conjecturas e predições, podemos considerar que a visualização, a antevisão, a previsão e a antecipação são inseparáveis desse par de ideias e estão associadas às práticas de expressar e comunicar ideias e estratégias matemáticas, validando-as por meio de sugestões. [...] Certeza e incerteza são inerentes, ainda, a variadas formas de comunicação social, que empregam elementos de estatística e suas representações, além dos problemas de contagem e de formas intuitivas de expressão de probabilidades. (BRASIL, 2018, p. 518, grifo nosso)

Portanto, não será suficiente que o aluno apenas calcule medidas probabilísticas, o aluno deve ser capaz de interpretar e avaliar situações propostas. Desse modo, com o apoio do jogo produzido iremos propor uma sequência didática que melhor se adeque as competências e habilidades previstas na BNCC.

4 PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO

Com o desenvolver dos estudos apresentados em capítulos anteriores, percebemos a necessidade de uma organização do conteúdo, com objetivo de produzirmos uma proposta que adote o uso de um jogo nas aulas de probabilidade, em específico, quanto ao estudo dos conceitos de: Espaço amostral, Evento Certo, Impossível, Eventos mutualmente exclusivos, União e Intersecção de eventos, Eventos Complementares e Cálculo de probabilidades. Como destaca Zabala (1998, p. 53), “os tipos de atividades, mas sobretudo sua maneira de se articular, são um dos traços diferenciais que determinam a especificidade de muitas propostas didáticas”. Assim os debates, exercícios e problemas propostos, as provas, as aplicações e etc., podem ter uma finalidade ou outra, depende de como estas são atribuídas. No tocante às atividades de cada sequência, há algumas preocupações que devem ser observadas pelo professor como:

> [...] a identificação das fases de uma sequência didática, as atividades que a confirmam e as relações que se estabelecem devem nos servir para compreender o valor educacional que têm, as razões que as justificam e a necessidade de introduzir mudanças ou atividades novas que as melhorem. (ZABALA, 1998, p. 54)

Assim, o professor deve se perguntar primeiro se a sequência é apropriada para o que ele gostaria de trabalhar em sala de aula. O autor define, anteriormente, as sequências didáticas como “[...] um conjunto de atividades estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (ZABALA, 1998, p. 18). Em consonância, Cabral (2017, p. 31) defende que o uso de sequências didáticas “possibilita ao professor organizar as atividades de ensino em função dos núcleos temáticos e dos procedimentos estruturais”.

Portanto, a utilização das sequências possibilita uma melhor organização do conteúdo e facilita o processo de ensino e aprendizagem do aluno. A decisão de se utilizar ou não destas sequências deve ser pensada antecipadamente, no processo de estudo do conteúdo a ser ministrado. Cabral (2017, p. 34) divide esse processo em 4 etapas:

> [...] o professor faz em primeiro lugar uma investigação interna, ou seja, olhando para relações conceituais do objeto em termos de conteúdos disciplinares. [...] Em segundo lugar, o professor deve se apropriar de estudos já desenvolvidos sobre o objeto de ensino em foco. [...] Em terceiro lugar, o professor precisa, por um lado, sistematizar uma caracterização do objeto de ensino a partir tanto do olhar disciplinar e, por outro lado, o objeto de ensino precisa ser percebido como objeto investigado com resultados apontados no que diz respeito às possibilidades de aprendizagem. E, por fim, o professor deve materializar o que elegeu como insanável. Objetivar suas ações de ensino a partir de um percurso metodológico definido e explícito.

Esse processo exige do professor tanto uma capacidade de planejamento e organização de dados quanto uma capacidade de produção de texto escrito, a saber o plano de aula, que lhe servirá de apoio para conduzir as ações de aprendizagem dos alunos.

A sequência a seguir aqui foi produzida de forma a ser utilizada pelo professor ainda na introdução das aulas acerca dos conteúdos de Probabilidade, como o intuito dos alunos aplicarem seus conhecimentos. Com base nos estudos já feitos nos capítulos anteriores, partiremos agora para a sequência didática.

4.1 Sequência Didática

Bloco Matemático: Probabilidade

Conteúdos: Espaço amostral e evento; Eventos certo, impossível e mutualmente exclusivos e Cálculo de Probabilidades

Ano de Ensino: 2ª ano do Ensino Médio

Objetivos:

Geral: Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo de probabilidades de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. (Habilidade EM13MAT312 da BNCC)

Específicos:

- Estimular a reutilização de materiais recicláveis;
- Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de Jogos no estudo dos conceitos de Probabilidade.
- Interpretar a linguagem matemática que está relacionada aos conceitos de espaço amostral, eventos e cálculo de probabilidade;
- Identificar os procedimentos matemáticos necessários para a resolução de problemas;

Tempo previsto: 6 horas/aulas.

Quadro 1: Primeiro Momento

1ª MOMENTO: Construção e estudo do material
Atividade 1: Confeccionar a *Roleta da Probabilidade* **Objetivos:** Construção/Montagem do material didático *Roleta da Probabilidade*
Atividade 2: Estudo do material **Objetivos:** Analisar o material confeccionado e aplicar os conceitos probabilísticos relacionados a espaço amostral e eventos. **Problema 1:** Descreva o espaço amostral da Roleta da Probabilidade. **Problema 2:** Sabendo que a roleta foi girada três vezes, determine os eventos: A: "parar ao menos 2 vezes na cor azul" e B: "parar uma vez na cor vermelha". **Problema 3:** Seja os eventos: A: "Ocorrência de um número par" e B: "Ocorrência de um número ímpar". Determine-os. **Problema 4:** O que acontece quando eu junto os eventos A e B do problema 3?

Fonte: Autoria própria

Quadro 2: Segundo Momento

2ª MOMENTO: União e Interseção de eventos na Roleta da Probabilidade
Atividade 1: União e Intersecção de eventos **Objetivos:** Aplicar conceitos de união e intersecção de eventos na resolução de problemas. **Problema 1:** Seja $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $C = \{3, 6, 9\}$. Determine $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cap C$ e $A \cap C$. **Problema 2:** Explique porque $A \cap B = \emptyset$.
Atividade 2: Cálculo de Probabilidade **Objetivos:** Aplicar o cálculo de probabilidades na resolução de problemas **Problema1:** Considerando que a roleta foi girada 2 vezes qual a probabilidade de se obter a cor verde no segundo giro, sabendo que já se obteve vermelho no primeiro resultado. **Problema 2:** Três giros foram feitos na roleta. Qual a probabilidade de sair a soma 15, sabendo que ocorreu 3 no primeiro giro e 5 no segundo giro?

Fonte: Autoria Própria

Quadro 3: Terceiro Momento

3ª MOMENTO: Elaborando problemas
Atividade 1: Elaboração de problemas. **Objetivos:** Desenvolver a capacidade de elaborar e resolver problemas que envolvam os conceitos vistos anteriormente por eles. Tarefa 1: O professor deve desafiar os alunos a desenvolverem um problema matemático a partir dos conteúdos estudados previamente. O professor pode auxiliar os alunos na elaboração dos problemas.

Fonte: Autoria própria

4.2 Detalhamento e Orientações Pedagógicas para a Aplicação da Sequência Didática

Antes de iniciar a aplicação desta proposta, é necessário que o professor converse com seus alunos sobre a matéria prima necessária para a construção do material didático. O professor já deve ter uma breve ideia, com base na quantidade de alunos que participarão da proposta, de quantas *Roleta da Probabilidade* serão necessárias para serem construídas, ou seja, cada grupo construirá sua roleta, de modo que cada tenha até quatro alunos. Dessa forma, observa-se que cada grupo precisará de:

- 11 tampas[6];
- Papelão ou Papel Panamá;
- Cartolina ou EVA (em três cores diferentes);
- Pistola e bastão de cola quente;
- Palitos de churrasco;
- Tesoura, Cola branca, estilete;

No primeiro momento temos a construção do material, esse momento deve ser realizado juntamente com os alunos. Essa construção se inicia no recorte da base da roleta, cada uma terá

[6] As tampas utilizadas na montagem foram as de caixas de leite, sucos de caixinha, etc., por terem um tamanho maior, mas o professor pode se preferir utilizar papelão para substituir.

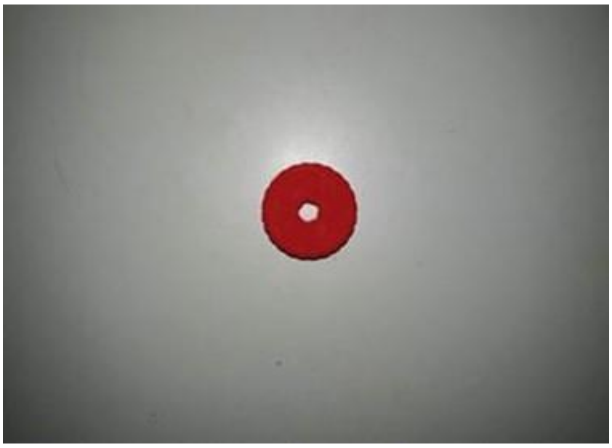
uma base de 50×50 centímetros com um furo no meio, por esse furo irá passar o palito de churrasco que será usado como apoio para que nossa tampa gire, observe a Figura 3.

Figura 3 - Base da Roleta

Fonte: Autoria própria

Assim o professor fará um furo em uma das tampas, de modo que ao encaixá-la no palito de churrasco a mesma gire livremente, veja a figura a seguir.

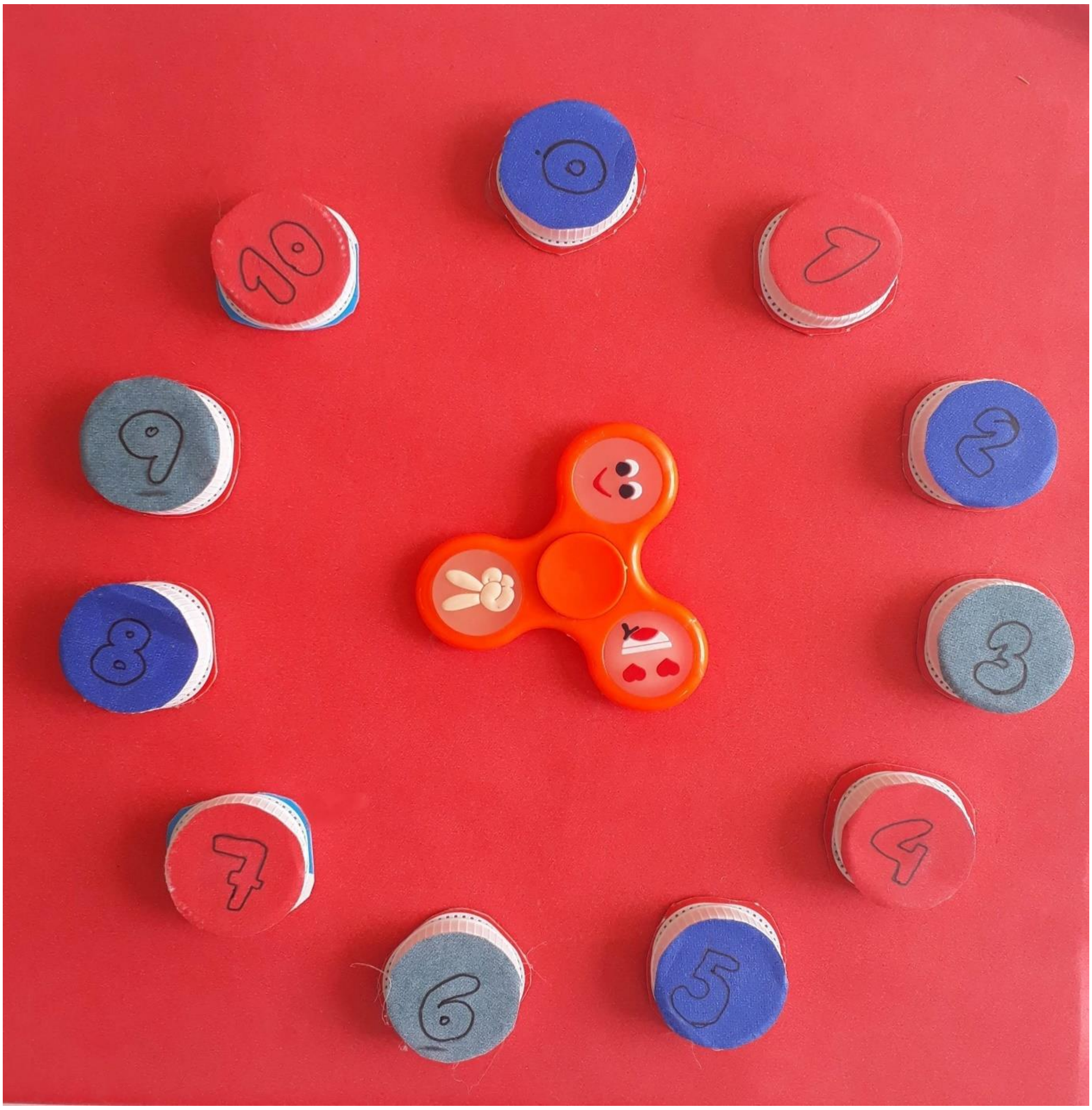
Figura 4 - Tampa com furo



Fonte: Autoria própria

Na parte de baixo do papelão sugerimos que o palito seja colado com o uso de cola quente, fazendo com que este esteja mais firme no momento em que se girar a tampa, o professor pode ainda substituir este por um *fidget spinner* (veja Figura 5). Utilizando as tampas, cobrimos elas com cartolina de cores diferenciadas e concluímos o processo de montagem da roleta, Figura 5, nela temos, também, a primeira roleta produzida na disciplina de LEM como mencionado na introdução deste trabalho.

Figura 5 - Roleta produzida na disciplina de LEM



Fonte: Autoria própria

Após essa construção da roleta, o professor deverá trabalhar a *Atividade 2* do primeiro momento.

Problema 1: Descreva o espaço amostral da Roleta da Probabilidade.

Problema 2: Sabendo que a roleta foi girada três vezes, determine os eventos: A: "parar ao menos 2 vezes na cor azul" e B: "parar uma vez na cor vermelha".

Problema 3: Seja os eventos: A: "Ocorrência de um número par" e B: "Ocorrência de um número ímpar". Determine-os.

Problema 4: O que acontece quando eu junto os eventos A e B do problema 3?

Portanto espera-se que os alunos sejam capazes de identificar conceitos como de espaço amostra e evento e aplicá-los na resolução de problemas. Sugere-se que esta atividade seja aplicada antes de se haver um início do conteúdo, de forma que os alunos apliquem conhecimentos anteriores na resolução destes problemas.

Problema 1: Seja $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $C = \{3, 6, 9\}$. Determine $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cap C$ e $A \cap C$.

Problema 2: Explique porque $A \cap B = \emptyset$.

No segundo momento temos duas atividades, onde a primeira é direcionada ao conteúdo de União e Intersecção de eventos. Durante esta atividade o professor deve incluir os conceitos e definições acerca da união de eventos, intersecção de eventos, eventos complementares e eventos mutualmente exclusivos.

Problema1: Considerando que a roleta foi girada 2 vezes qual a probabilidade de se obter a cor verde no segundo giro, sabendo que já se obteve vermelho no primeiro resultado.

Problema 2: Três giros foram feitos na roleta. Qual a probabilidade de sair a soma 15, sabendo que ocorreu 3 no primeiro giro?

Ainda na segunda atividade do mesmo momento, temos a introdução do conteúdo de cálculo de probabilidades. Nesta atividade espera-se dos alunos que sejam capazes de identificar e aplicar o conceito de cálculo de probabilidade. No *Problema 1*, os alunos podem apresentar seus resultados através do diagrama da árvore. Quanto ao *Problema 2*, espera-se que os mesmos identifiquem quais os resultados possíveis e favoráveis para este.

O terceiro momento nãos está dividido em um único momento, onde os alunos ainda separados em grupos deverão elaborar problemas que envolvam os conteúdos de união e intersecção de eventos ou o cálculo de probabilidade. Espera-se que os mesmos sejam capazes de relacionar o conteúdo visto no momento anterior com o material didático em suas mãos, a *Roleta da Probabilidade*, e assim elaborarem problemas sobre estes assuntos.

Dessa forma, cada grupo deve elaborar um problema baseado também no material, Roleta da Probabilidade e juntamente com este a sua solução e o método, ou modo, que utilizaram para encontrar a solução do mesmo. É necessário que o professor incentive cada grupo a fazer uma breve apresentação do seu problema, e de sua resolução, aos demais alunos da turma, para que todos possam compartilhar conhecimentos com seus colegas.

Neste momento o professor deve incentivar a exposição das dúvidas por parte dos alunos, esclarecendo-as à medida que estas forem surgindo. De acordo com a realidade escolar de cada professor, os mesmos podem ainda expor estes estudos em alguma feira de ciência na própria escola, ampliando esses estudos e conhecimentos aos demais alunos das outras turmas, e turnos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve o objetivo de viabilizar o processo de ensino e aprendizagem de probabilidade no Ensino Médio, por meio da formulação de sequência didática com a utilização de materiais didáticos manipuláveis. Na qual foi realizada uma pesquisa bibliográfica para melhor compreender o processo de evolução da História da Probabilidade, como resultado observamos que a probabilidade é considerada um estudo recente na área da Matemática, visto que somente a partir de meados do século XV que a mesma foi incluída como uma área de estudos. Assim, eventos e acontecimentos que antes eram vistos de forma empírica, como uma vontade de uma divindade, ou mero caso de sorte ou azar, passam a ser estudados de forma científica e matematicamente.

Surgem assim os primeiros trabalhos na resolução de problemas que envolve o cálculo de divisões de apostas interrompida, resultado de lançamentos de dados, possibilidade de se perder uma carga preciosa (que são os casos dos seguros marítimos), estes problemas e outros foram estudados por matemáticos durante anos, nesses podemos destacar as correspondências trocadas entre Pascal e Fermat, que são consideradas como o início da Teoria da Probabilidade.

Realizamos também estudos e leituras para uma melhor compressão dos objetivos dos jogos em sala de aula, assim como os benefícios de uma sequência didática e podemos compreender os benefícios da utilização de jogos e materiais no ensino. Além disso, nos valendo também dos estudos realizados, percebemos que os jogos estiveram desde sempre presentes no estudo da probabilidade, em especial os jogos de azar.

É nesta demonstração de conceitos e ampliação de estudos que este jogo se mostra um aliado ao professor, pois através deste o aluno poderá notar a aleatoriedade em eventos probabilísticos em particular, além dos demais conceitos vistos no estudo de Probabilidade, principalmente aqueles ao qual a sequência descrita foi direcionada. Vale ressaltar material produzido pode ser utilizado nos demais estudos acerca de Probabilidade.

Portanto, os jogos surgem como aliados aos professores no momento de demonstrar e aplicar os conceitos estudados, em especial no jogo proposto aqui, pois através do mesmo é possível para o aluno notar a aleatoriedade presente em eventos probabilísticos em particular, espaço amostral, probabilidade de evento, união e intersecção de eventos e cálculo de probabilidades.

Logo temos como resultado deste trabalho a criação de uma sequência didática utilizando o material *Roleta da Probabilidade*, este material além de poder ser construído com materiais recicláveis, ainda permite uma estabilidade, embora estejamos falando de uma roleta, quem em sua maioria possuem bases circulares, está foi confeccionado em uma base quadrada para que haja uma melhor sustentação da mesma no seu momento de uso. Infelizmente por conta de nossa atual situação perante a pandemia do COVID-19, não podemos realizar a aplicação da sequência didática. Entretanto isso não nos impede de em um outro momento realizar a aplicação da mesma e apresentar os resultados obtidos desta aplicação.

REFERÊNCIAS

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**, Ministério da Educação, Brasília, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação -. Brasília: MEC/SEF, 2018.

CABRAL, Marcos Aurélio. **A utilização de jogos no ensino de Matemática**. 2006. 52 f. TCC (Graduação) - Curso de Curso de Matemática - Habilitação em Licenciatura, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/96526. Acesso em: 14 maio 2021.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências Didáticas**. Belém - Pará: SBEM/SBEM-PA, 2017. 103 p. Disponível em: http://sbemparana.com.br/site/index.php. Acesso em: 21 jun. 2021.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações**. São Paulo: Ática, 2013. 320 p.

DAVID, Florence Nightingale. **Games, gods and gambling: the origins and history of probability and statistical ideas from the earliest times to the Newtonian era**. New York: Hafner Publishing Company, 1962. 275 p. Disponível em: https://prism.ucalgary.ca/bitstream/handle/1880/41346/aih.pdf?sequence=1. Acesso em: 24 de abr. de 2021.

FIORENTINI, Dário.; MIORIM, Maria Ângela. Uma reflexão sobre o uso dos materiais concretos e jogos no ensino da matemática. In: **BOLEMA**, ano 4 – nº7, São Paulo, 1990. Disponível em: http://www.cascavel.pr.gov.br/arquivos/14062012_curso_47_e_51_-_matematica_-_emersom_rolkouski_-_texto_1.pdf. Acesso em: mar. de 2021

GAVANSKI, Doroteya; LIMA, Rosana Viomar de. Materiais Concretos no Ensino e na Aprendizagem da Matemática: Reflexões e proposições. In: BURAK, Dionísio; PACHECO, Edilson Roberto; KLUBER, Tiago Emanuel (org.). **Educação Matemática: Reflexões e Ações**. Curitiba: Editora Crv, 2010. p. 101-120.

KISHIMOTO, T. M. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.** 11. Ed. São Paulo: Cortez, 2008.

LIMA, Igo de Sousa. **O LÚDICO NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADE:** Uma Experiência no Ensino Fundamental II**.** 2019. 63 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Ciências Naturais/ Química, Universidade Federal do Maranhão, São Bernardo, 2019. Disponível em: http://hdl.handle.net/123456789/4115. Acesso em: 11 maio 2021.

LOPES, Celi Espasandin; MEIRELLES, Elaine. O Desenvolvimento da Probabilidade e da Estatística. In: XVIII ENCONTRO REGIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, 2005, Campinas. **Estocástica nas Séries Iniciais.** Campinas: LEM/IMECC/Unicamp, 2005. p. 1-8. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc02_b.pdf. Acesso em: 26 maio 2021.

LORENZATO, Sergio. (org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. 1ª. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).

MORAES, Luís Cláudio Longo. **Ensino de Probabilidade: Historicidade e Interdisciplinaridade**. 2014. 130 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ, Seropédica – RJ, 2014. Disponível em: https://tede.ufrrj.br/jspui/handle/jspui/2984. Acesso em: 12 mar. 2021

POMBO, Olga. **Pascal & Fermat**. 2002. Disponível em: https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/7cartas/pascalfermat.htm. Acesso em: 18 mar. 2021.

PRADO, J. W. S. **Noções de probabilidade por meio de jogos de azar**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS, Feira de Santana/BA, 2015. Disponível em: http://profmat.uefs.br/arquivos/File/JOSE_WILLIAM_DE_SOUZA_PRADO.pdf. Acesso em 13 maio 2021.

RÊGO, Rômulo Marinho do; RÊGO, Rogéria Gaudencio do. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, Sergio. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas Sp: Editora Autores Associados, 2006. p. 39-56.

ROSÁRIO, Maria Izabel Carvalho. **Lúdico no Ensino aprendizagem: Matemática Fundamental II**. 2013. 27 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual do Sudeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2013. Disponível em: https://docplayer.com.br/11584553-Ludico-no-ensino-aprendizagem-matematica fundamental-ii.html. Acesso em: 14 maio 2021.

SANTOS, Josiel Almeida; FRANÇA, Kleber Vieira; SANTOS, Lúcia Silveira Brum dos. **Dificuldades na Aprendizagem de Matemática**. 2007. 41 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Centro Universitário Adventista de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Santos.pdf. Acesso em: 14 jun. 2021.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. História da Probabilidade. In: **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/historia-probabilidade.htm. Acesso em: 14 fev. de 2021.

TENREIRO, Carlos. **Paradoxos Clássicos no Cálculo das Probabilidades**, 2004. Disponível em: http://www.leg.ufpr.br/lib/exe/fetch.php/disciplinas:ce067:paradoxosclassicos.pdf. Acesso em 12 de jul. de 2021

VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade. In: **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 8, n. 16, 2008. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/177/163. Acesso em: out. de 2021.

X SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 2013, Campinas. **Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades.** Campinas: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2013. 62 p. Disponível em: https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/335/o/Um_passeio_hist%C3%B3rico_pelo_in%C3%ADcio_da_teoria_das_probabilidades-Mariana_Feiteiro_Cavalari_e_Ang%C3%A9lica_R._Cal%C3%A1bria.pdf?1409001312. Acesso em: 15 out. 2020.

ZABALLA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.