UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS
CÂMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Huan Elvis Campelo Brandão

UMA DEMONSTRAÇÃO ALGÉBRICA DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Araguaína

2022

Huan Elvis Campelo Brandão

UMA DEMONSTRAÇÃO ALGÉBRICA DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins - Campus Universitário de Araguaína, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Renata Alves da Silva

Araguaína

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

B817d Brandão, Huan Elvis Campelo .
UMA DEMONSTRAÇÃO ALGÉBRICA DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA. / Huan Elvis Campelo Brandão. – Araguaína, TO, 2022.
54 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2022.
Orientadora : Renata Alves da Silva

1. Número imaginário. 2. Corpo dos números complexos. 3. Equação cúbica. 4. Polinômio. I. Título

CDD 510

Huan Elvis Campelo Brandão

UMA DEMONSTRAÇÃO ALGÉBRICA DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins - Câmpus Universitário de Araguaína, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Renata Alves da Silva

Data de aprovação: _____ / _____ / ___

Banca Examinadora

____

Profa. Dra Renata Alves da Silva, UFNT - Orientadora

____

Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hancco, UFNT– Avaliador

____

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior, UFNT – Avaliador

Araguaína

2022

Dedico este trabalho aos meus pais que sempre me apoiaram e que me fazem acreditar em mim mesmo.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, que me deu condições físicas e mentais para estudar cada uma das disciplinas oferecidas na graduação, me considero uma pessoa muito abençoada e devo tudo isso ao Senhor.

Em especial aos meus pais Ana Claudia Ferreira Campelo e Sebastião Borges Brandão por estarem sempre ao meu lado e por incentivo sempre aos estudos. Agradeço por sempre serem presentes na minha vida, reconheço o esforço que tiveram para me ensinar da melhor forma.

Aos meus colegas da Universidade, que compartilhamos as piores e melhores experiências nessa trajetória, aprendemos muitos e ajudamos uns aos outros, superamos cada obstáculos.

Sou muito grato pelas dádivas que recebo e, principalmente, pelas pessoas que atravessam em minha vida positivamente, que trazem ensinamentos pessoais e profissionais. Por esse motivo, sou grato a minha orientadora, Profa. Dra. Renata Alves da Silva, que me orientou nessa realização de trabalho, com muito emprenho e dedicação, foi um privilégio que a vida me ofertou. Foram meses de orientações, conversas, reuniões, essas experiências que foram essenciais para o resultado final dessa monografia.

E ao colegiado de Matemática da UFT, Campos de Araguaína, formado por professores e pessoas excelentes, comprometidas com a educação, que contribuíram para minha formação.

"O Espírito Divino expressou-se sublimemente nesta maravilha da análise, neste portento do mundo das idéias, este anfíbio entre o ser e o não ser, que chamamos de raiz imaginária da unidade negativa".
(Leibniz).

RESUMO

Esta pesquisa é o resultado da investigação sobre o Teorema Fundamental da Álgebra, de caráter metodológico quantitativo, os procedimentos utilizados durante a pesquisa foram com base em estudos e analise de livros, artigo e teses, elucidaremos de forma seqüencial os tópicos do tema, com objetivo de analisar e investigar o desenvolvimento histórico dos números complexos desde o surgimento das raízes quadradas de números negativos, com destaque nas obras de Scipione del Ferro, Girolamo Cardano, Rafael Bombelli e Carl Friedrich Gaus, com foco na construção do corpo do conjunto dos números complexos como uma extensão do conjunto dos reais e, as definições e propriedades de polinômios, que oferecem estrutura para a consolidação do Teorema Fundamental da Álgebra. Neste trabalho trazemos uma demonstração totalmente algébrica, confirmando o resultado que todo o polinômio não constante, de grau n, com coeficientes complexas, tem pelo menos uma raiz complexa. A pesquisa procurou trazer uma demonstração acessível e objetiva.

Palavras-chaves: Número imaginário; corpo dos números complexos; equação cúbica; polinômio.

ABSTRACT

This research is the result of the investigation on the Fundamental Theorem of Algebra, of a quantitative methodological character, the procedures used during the research will be based on studies and analysis of books, articles and theses, we will elucidate in a sequential way the topics of the theme, with the objective of to analyze and investigate the historical development of complex numbers since the emergence of the square roots of negative numbers, with emphasis on the works of Scipione del Ferro, Girolamo Cardano, Rafael Bombelli and Carl Friedrich Gaus, focusing on the construction of the body of the set of complex numbers as an extension of the set of reals, and the definitions and properties of polynomials, in which they offer a structure for the consolidation of the Fundamental Theorem of Algebra. In this work we bring a fully algebraic proof, confirming the result that every non-constant polynomial, of degree n, with complex coefficients, has at least one complex root. The research sought to bring an accessible and objective demonstration.

Keywords: Imaginary number; field of complex numbers; cubic equation; polynomial.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Meu fascínio pela área de Álgebra nasceu em 2020, por circunstância do curso de Licenciatura em Matemática, na Universidade Federal do Norte do Tocantins – UFNT no Câmpos de Araguaína - To. Nessa oportunidade, aprofundei sobre o assunto acerca da teoria dos números complexos, e assim, busquei compreender sobre o *Teorema Fundamental da Álgebra* (TFA). Enxergo a Matemática como um instrumento de projeção, na qual suas demonstrações revelam os mistérios do mundo físico, as equações retratam e descrevem as estruturas e padrões do universo. Segundo Tegmark (2003, p. 13), “um teorema é verdadeiro independentemente de ser demonstrado por uma pessoa, um computador ou um alienígena”. Para Ernest (1991, p. 13), “a conclusão de uma demonstração lógica está, no máximo, tão certa quanto sua premissa mais fraca”.

Refletindo sobre a necessidade que os alunos de graduações têm em compreender e aprender sobre a teoria dos números complexos, bem como suas aplicações, conceitos e conexões com outros conteúdos da Matemática, apresento aqui uma demonstração algébrica do *Teorema Fundamental da Álgebra*, na qual, no decorrer desse trabalho formularemos sobre a origem dos números imaginários, apresentaremos demonstrações do corpo dos números complexos como uma extensão do conjunto dos reais e, exporemos teoremas e definições de polinômios.

O matemático Roth (1580-1617), em 1600, foi o primeiro a afirmar que há sempre soluções para equações polinomiais, mas só em 1799 o Teorema Fundamental da Álgebra foi publicada a primeira prova correta, pelo alemão Carl Friedrich Gauss. O TFA afirma que qualquer polinômio $p(z)$ com coeficientes complexos não constante de grau $n \geq 1$ tem alguma raiz complexa. Isto é, existe algum número complexo z tal que satisfaça a igualdade $p(z) = 0$, dizemos que z é uma raiz ou zero do polinômio p.

No próximo capitulo mostraremos aspectos históricos do surgimento e aceitação dos números imaginários e como foram interpretados por parte dos matemáticos, trazendo-nos um grande enredo de tramas, segredos revelados, disputas e desafios entre matemáticos envolvendo equações do terceiro grau. Destaco aqui algumas referencias para a elaboração do capitulo dois que trata da parte histórica, utilizamos o livro de Roque (2012), *História da Matemática - Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas*, é um texto que trás um olhar crítico sobre a história da matemática; Garbi (2009) *O Romance Das Equações Algébricas*, o livro se destaca pela didática ao abordar o desenvolvimento da Álgebra ao longo da história; NAHIN (1998), *An imaginary tale: the story of* $\sqrt{-1}$, traduzindo - *um conto imaginário: a história de* $\sqrt{-1}$, onde o autor conta a história dos números imaginários, ele trás os problemas matemáticos que contribuíram para a descoberta dos números complexos. Cuja leitura de todos recomendamos.

No capitulo três demonstramos alguns resultados sobre o corpo dos números complexos, formalizamos a representação de um número complexo da forma algébrica e trigonométrica, na qual representamos esses números no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, e apresentamos definições e conceitos de polinômios. Destaco algumas referencias em que nos baseamos para a construção do capitulo três, o livro do Iezzi (2013), *Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 6* e Neto (2012), *Funções de uma variável complexa*, os autores trazem de forma didática o estudo dos números complexos, dos polinômios e das equações polinomiais; a monografia de Fernandes (2016), *Polinômios, Corpos de Decomposição e uma Introdução à Teoria de Galois*, onde nos trás de contribuição sobre corpos de decomposição de um polinômio; e o trabalho de IME – Unicamp, *Das Simetrias à Teoria de Galois*, nos baseamos pontualmente do texto sobre Polinômio Simétrico. Esses resultados se fazem necessários para a demonstração do TFA.

No capítulo quatro temos o foco principal, o ápice desta dissertação, nele traremos uma lindíssima demonstração algébrica do TFA, nos baseamos na demonstração da dissertação do Salvado (2016), *Teorema Fundamental da Álgebra: Ferramentas para Demonstrar para Alunos do Ensino Médio*, onde fizemos uma apresentação mais didática, detalhada, e corrigimos um erro encontrado.

Buscaremos então estudar números complexos, conhecer um pouco a sua história, trazendo conceitos definições, chegando ao TFA. Esse trabalho tem como um dos principais objetivos elucidar, facilitar, colaborar, agregar, de modo que a leitura dessa obra se torne objetiva e agradável.

2 ORIGEM DOS NÚMEROS COMPLEXOS

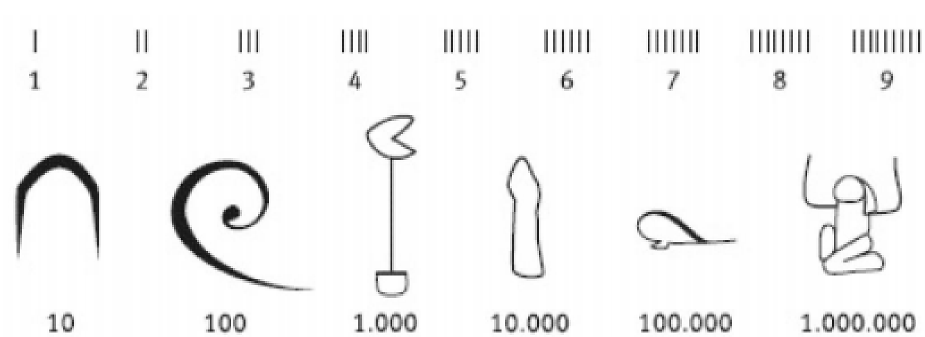
Estudaremos, aqui, uma resumida história da descoberta dos números complexos, com ênfase nos trabalhos desenvolvidos por Scipione del Ferro (1465-1526), Girolamo Cardano (1501-1576), Rafael Bombelli (1526-1572) e Carl Friedrich Gaus (1777-1855). Nosso objetivo neste capítulo é investigar matemáticos que contribuíram para a construção do *Teorema Fundamental da Álgebra*, analisar a conjuntura que instigaram e motivaram a utilização de raízes quadradas de números negativos, e o reconhecimento como novos números - visto que na época ainda não tinha sentido próprio.

Quando surgiu a necessidade dos humanos de contar coisas, os números naturais (1, 2, 3,...) supriam suas precisões. À medida que as civilizações avançavam, as pessoas precisavam de matemáticas mais sofisticadas para resolver problemas, como dividir terras, fazer transações financeiras e plantações agrícolas. No Papiro egípcio Rhirid, escrito por volta de 2000 anos a.c, encontra se registros onde egípcios desenvolveram uma nova matemática conhecida como fração unitária, onde todas as frações eram reduzidas a frações com numerador um.

> O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos (há evidências arqueológicas de que o homem, já há uns 50 000 anos, era capaz de contar) que a maneira como ocorreram é largamente conjectural. Com a evolução gradual da sociedade, tornaram-se inevitáveis contagens simples (EVES, 2011, p. 1).

A seguir, podemos ver na Figura 1 alguns símbolos utilizados para a representação dos números do antigo Egito.

Figura 1- Números representados por símbolos egípcios.



Fonte: Roque (2012, p. 56)

Há registros históricos que os egípcios e os matemáticos antigos da Babilônia já conseguiam resolver algumas equações do primeiro e segundo grau, utilizando-se de símbolos e textos como ferramenta nas resoluções. Muitos dos problemas encontrados nesses registros históricos consistiam em problemas geométricos, relacionados em sua considerável parte, com áreas, perímetros e lados. Garbi (2009) apresenta um dos problemas de equação do primeiro grau de *Ahmes*, traduzido diz: “Uma quantidade, somada a seus 2/3, mais sua metade e mais sua sétima parte perfaz 33. Qual é esta quantidade?”.

> Muito de nossa informação sobre a matemática egípcia vem do Papiro Rhid ou de Ahmes, o mais extenso documento matemático do antigo Egito; mas há também outras fontes. Além do Papiro Kahum já mencionado, há um Papiro de Berlim do mesmo período, duas pranchas de madeira de Akhmin (Cairo) de cerca de 2000 a.C., um rolo de couro contendo listas de frações unitárias e datando do fim do período dos hicsos, e um importante papiro chamado Golonishev ou de Moscou comprado no Egito em 1893. (BOYER, 1974, p. 13).

Os matemáticos gregos resolviam alguns tipos de equações do segundo grau através da Geometria, com régua e compasso. Boyer (1974) afirma que na matemática grega há registro de soluções de equações cúbicas, um deles relacionado a um problema conhecido como duplicação do cubo ou problema de Delos, que consistia em encontrar duas médias proporcionais entre o comprimento da aresta de um cubo dado e o dobro da medida dessa aresta.

Mas foram os matemáticos hindus e árabes que avançaram no estudo da Álgebra, assim, aperfeiçoaram na resolução de equações. Grande parte dos conhecimentos produzidos pelos hindus advém do livro *Lilãvati* de Bhaskara (1114-1185) no século XI, onde tem estudos na área da Aritmética e Álgebra.

Garbi (2009) nos traz um fato interessante, quando nos deparamos com o nome Bhaskara relacionamos ao primeiro instante a fórmula de solução das equações do segundo grau. Mas, conforme ele mesmo relatou, a celebre fórmula foi encontrada um século antes pelo matemático hindu Sridhara (870-930).

Segundo Eves (2011), Os hindus aceitavam os números negativos e irracionais, já tinham método de resolver problemas algébricos de equações quadráticas, semelhante ao que conhecemos como completar quadrados e, sabiam que uma equação quadrática (com respostas reais) tem duas raízes formais.

> O *Lilãvati* como o *Vija-Gonita*, contem númerosos problemas sobre os tópicos favoritos dos hindus: equações lineares e quadráticas, tanto

> determinadas quanto indeterminadas, simples mensuração, progressões aritméticas e geométricas, radicais, tríadas pitagóricas e outros. O problema do “bambu quebrado”, popular na China, aparece na forma seguinte: se um bambu de 32 cúbitos de altura quebrado pelo vento de modo que a ponta encontra o chão a 16 cúbitos da base, a que altura a partir do chão ele foi quebrado?. (BOYER, 1974, p. 152).

O grande responsável pela modernização da Álgebra foi o matemático francês François Viète (1540-1603), que por volta do século XVI organizou notações algébricas, aprimorando o método resolutivo das equações do segundo e terceiro grau substituindo os símbolos por letras. Segundo Eves (2011, p. 309-310) “Viète usava os símbolos atuais + e - mas não tinha símbolo para a igualdade. Assim, o que escreveríamos $5BA^2 - 2CA + A3 = D$, para ele seria *B5 in A quad – C plano 2 in A + A cub aequatur D solido”.*

> O mais famoso trabalho de Viète é *In artem* ao qual o desenvolvimento do simbolismo algébrico muito deve. Nesse texto Viète introduziu a prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. Viète usava a mesma letra, adequadamente qualificada; assim, o que hoje se indica por x, x^2, x^3 ele expressava por *A, A quadratum, A cubum*; mais tarde alguns escritores abreviaram essa notação para *A, A q, A c*. (EVES, 2011, p. 309)

François Viète, Figura 2, foi um matemático e ilustre advogado, tido como o maior matemático francês do século XVI. Viète deixou varias obras relacionadas à trigonometria, álgebra e geometria.

Figura 2- François Viète (1540-1603).

Fonte: Wikimedia Commons - Domínio Público (COMMONS, 2005).

Os símbolos matemáticos eram muitos diferentes dos que conhecemos hoje em dia (como podemos observa na Tabela 1). Na trajetória árdua evolutiva da matemática, desde o principio os matemáticos tem suas parcelas de culpa nas notações que chegou à atual; um grande deles foi o Leonhard Euler (1707-1783), responsável pela maior parte de padronizar os símbolos, publicando seus númerosos livros.

A partir daqui adotaremos símbolos modernos atuais, assim podemos facilitar e compreender melhor os fatos e as conjecturas históricas ao trabalho atribuído.

Tabela 1- Evolução das notações algébrica.

DATA	AUTOR	NOTAÇÃO
c.250	Diofante	$\Delta^{Y} a \varsigma \beta \overset{\circ}{M} \gamma$
c.825	Al-khowârizmî	*potência mais lado dobrado mais três* [em árabe]
1545	cardano	*quadrado mais lado dobrado mais três* [em italiano]
1572	Bombelli	$3p \cdot 2 \overset{1}{\smile} p \cdot 1 \overset{2}{\smile}$
1585	Stevin	$3 + 2^{\textcircled{1}} + 1^{\textcircled{2}}$
1591	Viéte	x quadr. $+ x2 + 3$
1637	Descartes, Gauss	$xx + 2x + 3$
1670	Bachet de Méziriac	$Q + 2N + 3$
1765	Euler, moderna	$x^2 + 2x + 3$

Fonte: Stewart, (2013, p. 64).

As raízes quadradas negativas foram evitadas e ignoradas por milhares de anos, por motivos óbvios, o quadrado de qualquer número real, seja seu sinal positivo ou negativo, é sempre positivo. Esses números realmente não faziam muito sentido em uma época que a Matemática era limitada a resolver problemas geométricos relacionado a unidades de medidas, áreas, perímetros e volumes.

Na obra *Stereometria* de Heron de Alexandria (c.50 d.c.), é encontrado pela primeira vez citação da raiz quadrada de um número negativo. Ao tentar calcular o volume de um tronco de uma pirâmide de base quadrada, em que o lado da base inferior é 28; superior 4 e a borda 15, aplicou-se a fórmula de Heron, chegando a:

$$h = \sqrt{(15)^2 - 2\left(\frac{28-4}{2}\right)^2} = \sqrt{225 - 2(12)^2} = \sqrt{225 - 144 - 144} = \sqrt{81 - 144}.$$

No entanto, o Heron (ou alguma outra pessoa, não pode ser determinado) inverteu a ordem dos termos para evitar raiz quadrada negativa, concluindo incorretamente $\sqrt{144 - 81}$ (NAHIN, 1998).

No século XVI, aconteceu algo na Europa que fizeram com o que os matemáticos não ignorassem mais as raízes quadrada de um número negativo. Um matemático italiano, Scipione del Ferro, professor de matemática da Universidade de

Bolonha, conseguiu encontrar uma fórmula para equações cúbicas reduzida $x^3 + cx = d$, com c e d positivos (NAHIN, 1998).

Umas das formas que os matemáticos ganhavam dinheiro no século XVI eram desafiando outros matemáticos. O então del Ferro manteve sua fórmula em segredo para usar em seus duelos, o que não foi possível, pois del Ferro morreu (1526) antes de publicar sua descoberta. Mas, no seu leito de morte, Scipione del Ferro passou sua descoberta para seu pupilo Antonio Maria Del Fiore (STRUIK, 1992).

> Logo no início do século XVI, Scipione del Ferro obteve uma fórmula usando radicais para a solução de um certo tipo de equação, que constituiu uma novidade em relação aos trabalhos árabes. Mas essa fórmula foi mantida secreta, como era de costume. Alguns anos mais tarde, por volta de 1535, Tartaglia resolveu diversas equações cúbicas, em particular as do tipo que escrevemos hoje como $x^3+bx^2 = c$, considerada com coeficientes exclusivamente numéricos (ROQUE, 2012, p. 228).

No ano 1535, ocorreu uma das mais famosas disputas matemáticas envolvendo equações do terceiro grau. Antonio Fiore soube que um exímio matemático, Niccolò Fontana (1499-1557), mais conhecido como Tartaglia (por causa de um ferimento de espada na mandíbula que recebeu de um soldado francês quando tinha doze anos, ocasionando sua gagueira), sabia resolver algumas equações cúbicas. E, Fiore desafiou o matemático para uma disputa na qual cada participante propunha alguns problemas para o outro. Mas até então o Tartaglia não conseguia resolver cúbicas da forma de del Ferro, mesmo assim Tartaglia aceitou o desafio. Tartaglia não só venceu a disputa, como também descobriu um método geral para resolução de equações cúbicas na forma $x^3 + bx^2 = c$ (NAHIN, 1998; EVES 2011).

> Por volta de 1535, Nicolo Fontana de Brescia, mais conhecido como Tartaglia(o tartamudo), devido a lesões físicas sofridas quando criança que afetaram sua fala, anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica x^3+bx^2 = c. Achando que se tratava de blefe, Fior desafiou Tartaglia para uma disputa pública envolvendo a resolução de equações cúbicas. Com muito empenho Tartaglia conseguiu resolver também, faltando poucos dias para a disputa, a equação cúbica desprovida do termo quadrático. Como no dia marcado sabia resolver dois tipos de cúbicas, ao passo que Fior só sabia resolver um, Tartaglia triunfou plenamente (EVES, 2011, p. 302-303).

Matemático, italiano, veneziano, Niccolò Fontana (Tartaglia), Figura 3, após a batalha, Tartaglia relatou, "*mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que* *fui capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas equações, o que a consegui a 10 de fevereiro de 1535*" (Garbi, 2009, p.37).

Figura 3- Niccolò Fontana (Tartaglia, 1499-1557)

Fonte: Wikimedia Commons - Domínio Público (COMMONS, 2015).

Tartaglia ganhou a batalha matemática do Antonio Fiore e descobriu um novo método de resolução de equações cúbicas na forma $x^3 + bx^2 = c$. O então Tartaglia, no momento passou a compartilhar a fórmula com o mundo? Não exatamente, ele manteve em segredo para que ele continuasse desafiando e ganhando os duelos de Matemática. Mas, a notícia da batalha chegou ao conhecimento do italiano Girolamo Cardano (1501-1576), que se interessou pela a fórmula de resolução de equações cúbicas de Tartaglia. Cardano pressionou Tartaglia a compartilhá-la, Tartaglia acabou concordando, mas somente com uma condição, que Cardano fizesse um juramento de total sigilo. Mas, Cardano, acabou encontrando os papéis com a fórmula de Scipione del Ferro, e publicou em seu livro de álgebra *Ars magna* (Grande arte) em 1545, concedendo os merecidos crédito a del Ferro e Tartaglia (NAHIN, 1998).

> Mesmo que ele e del Ferro, de fato, tinha prioridade como verdadeiro e independente descobridor da solução ao cúbico deprimido, desde *Ars Magna*, é conhecido como o "Car - da fórmula". Cardano não era um ladrão intelectual (plagiadores não dão atribuições), e na verdade, ele mostrou como estender a solução da cúbica deprimida para todas as cúbicos. Esta foi uma grande conquista por si só, e é tudo de Cardano. A idéia é tão inspirador quanto foi o avanço original de del Ferro. (NAHIN, 1998, p. 16)

Girolamo Cardano, Figura 4, um matemático, físico, filosofo, médico e jogador, deixou mais de 200 trabalhos relacionados às suas áreas de estudo, em seu mais conhecido publicado *Ars magna,* foram trabalhado novos métodos para resolver equações cúbicas e quárticas.

Figura 4- Girolamo Cardano (1501-1576)

.
Fonte: Wikimedia Commons - Domínio Público (COMMONS, 2011)

Segundo Struik (1992, p. 147) “a *Ars magna*, continha outra descoberta brilhante: o método de Ferrari para reduzir a solução da equação biquadrática geral à de uma equação cúbica. A equação de Ferrari era $x^4+6x^2+36 = 60x$, que ele reduziu a $y^3+15y^2+36y=450$”.

Segundo Boyer (1974) a resolução da cúbica $x^3+bx = c$ dada por Cardano em *Ars Magna* consiste na seguinte identidade:

$$x=\sqrt[3]{\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}-\frac{b^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}-\frac{b^3}{27}}}.$$

No entanto, Cardano encontrou um problema, quando se aplica a regra na equação $x^3=15x^2+4$, temos:

$$x=\sqrt[3]{\frac{4}{2}+\sqrt{\frac{4^2}{4}-\frac{15^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{4}{2}-\sqrt{\frac{4^2}{4}-\frac{15^3}{27}}}$$

O resultado é $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ + $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, onde aparece $\sqrt{-121}$.

Portanto, na teoria das equações mostram que, se $\frac{c^2}{4}-\frac{b^3}{27}$ é negativa, então a equação cúbica $x^3+bx=c$ tem três raízes reais. Mas, na fórmula de Cardano (del Ferro-Tartaglia), essas raízes se expressam como diferença de duas raízes cúbicas de números complexos imaginários. Essa característica é chamada de equações cúbicas irredutível (EVES, 2011).

Segundo Boyer (1974, p. 196), “Cardano sabia que não existia raiz quadrada de um número negativo, e no entanto ele sabia que $x = 4$ é uma raiz. Não conseguia entender como sua regra faria sentido em tal situação”.

“No chamado "caso irredutível", quando a equação possui três raízes reais, o emprego do método de Cardano acarreta obrigatoriamente o manejo de números complexos, embora as soluções da equação, que constituem o resultado final, sejam reais!”. (CARMO; EDUARDO; WAGNER, 1992; p. 110).

Cardano foi o primeiro a aceitar os números complexos, Segundo BOYER (1974. p.196), “Cardano se referia a essas raízes quadradas de números negativos como “sofisticado” e concluía que o resultado nesse casso era “tão sutil quanto inútil”.

Em *Ars Magna,* Cardano apresenta envolvendo raízes quadradas de números negativos, o seguinte exemplo:

> [...] o de dividir em duas partes cujo produto é quarenta. Ele chama esse problema de "manifesto possível" porque leva imediatamente à equação quadrática $x^2 - 10x + 40 = 0$, onde x e $10 - x$ são as duas partes, uma equação com as raízes complexas que Cardan chamou de “sofística” porque ele não podia ver nenhum significado físico para eles - de $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$. A soma é óbvia porque as partes imaginárias se cancelam, mas e o produto? Cardan ousadamente escreveu "ainda assim vamos operar[...]. (NAHIN, 1998, p. 17).

Vimos que nos casos das equações irredutíveis, como $x^3 = 15x^2 + 4$, surgia um problema na solução. Como encontrar um número que, quando multiplicado por si mesmo (quadrado de um número), resultará em um negativo? Os números positivos e negativos não funcionaram, seria então um novo tipo de número para resolver a solução do problema? Diante deste impasse das raízes quadrada negativa, que intrigou os antigos matemáticos, foi resolvida pelo grande matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1572), Figura 5. Ele, um entusiasta dos trabalhos do Cardano, tinha uma compreensão dos seus livros de Álgebra.

Segundo Carmo, Cesar e Wagner (1992), Bombelli no estudo das equações do terceiro grau, tinha como escrita matemática "piu di meno", que corresponde a $\sqrt{-1}$, e enunciou as regras de operação com ela. Embora ele fosse critico aos números complexos, tido como inúteis e "sofísticos", Bombelli trabalhou com eles.

Em sua álgebra, deduziu que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ = 2 + $\sqrt{-1}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ = 2 - $\sqrt{-1}$, assim, ele passou a utilizar esse método para resolver equações que tinha soluções reais.

> No seu livro - e num outro sobre geometria, escrito por volta de 1550 e que permaneceu como manuscrito - introduziu uma teoria consistente de números complexos imaginários. Ele escreveu $3i$ como $\sqrt{0-9}$ (literalmente: $R\ [0\ m. 9]$, R para raiz, m para menos). Este facto permitiu a Bombelli tratar o caso irredutível, demonstrando, por exemplo, que: $\sqrt[3]{52+\sqrt{0-2209}}$ = 4 + $\sqrt{0-1}$. (STRUIK, 1992, p.147).

A partir dessa equação $x^3 = 15x^2 + 4$ com sua solução $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$+$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, Bombelli de forma brilhantemente mostrou usando manipulações algébricas que, se a soma das partes reais é 4, então a parte real é 2, logo, $x = 2 + 1\sqrt{-1} + 2 - 1\sqrt{-1} = 4$. Concluindo que 2 é real e $1\sqrt{-1}$ parte imaginário; assim surgindo um "novo número", mais tarde fórmulada a forma algébrica do número complexo $z = x + yi$ (tal que x é a parte real e, yi parte imaginaria). Estes trabalhos foram escrito por volta de 1560, livro *L'Algebra,* mas só publicados em 1572, formando as bases da teoria dos números complexos (BOYER, 1974).

Figura 5- Rafael Bombelli (1526-1572)

Fonte: MacTutor History of Mathematics (2000).

A trajetória de demonstrar, definir, conceituar os números complexos e trazer uma representação geométrica continuou com os importantes matemáticos. O inglês J. Wallis (1616-1703) foi um dos primeiros a propor uma representação dos números complexos no plano. Os antigos matemáticos, antes do século XIX, ao fundamentar os negativos e imaginários, tinham a necessidade de conectar o objeto baseando em uma relação geométrica com a realidade (ROQUE, 2012).

> Em 1673 Wallis sugeriu que um número complexo $x + yi$ deveria ser pensado como um ponto num plano. Desenhe uma linha reta num plano e identifique pontos nessa reta com os números reais, da forma habitual. Então, pense em $x + yi$ como um ponto localizado ao lado da reta, a uma distância y do ponto x. (STEWART, 2013, p.67).

O matemático Frances Albert Girard (1595-1632) desenvolveu estudos na área de Álgebra, Trigonometria e Aritmética. Foi um dos primeiros a afirmar que qualquer equação algébrica de grau n com coeficientes reais tem n raízes. Girard disse: "Pode-se perguntar: para que servem estas soluções impossíveis (raízes complexas). Eu respondo: para três coisas - para a validez das regras gerais, devido à sua utilidade e por não haver outras soluções" (CARMO; EDUARDO; WAGNER, 1992; p. 111).

> Em 1629, Albert Girard introduziu o problema de saber qual o número de raízes de uma equação qualquer [...]. Seu livro *Invention nouvelle en algèbre* (Nova invenção em álgebra)[...] ele afirma que todas as equações possuem tantas soluções quanto o grau da quantidade de maior grau, o que consiste em uma primeira versão do que conhecemos, hoje, como *teorema fundamental da álgebra* (ROQUE, 2012, p. 362).

Segundo Carmo, Cesar e Wagner (1992), o filosofo, matemático e físico René Descartes (1596-1650) em seu livro *La Géométrie,* admite a idéia de Girard, que uma equação tem n raízes quanto seu grau. Em seu livro, Descartes denomina os números imaginários (Assim, foi denominado que $\sqrt{-1}$ seria chamado de número imaginário): "nem as raízes verdadeiras nem as falsas (negativas) são sempre reais; por vezes elas são imaginárias".

> D'Alembert mostrou, em 1747, que qualquer expressão algébrica de um número complexo $a + b\sqrt{-1}$ é também um número da forma $a + b\sqrt{-1}$. Expressão algébrica, para D'Alembert, incluía elevar um número complexo a uma potência complexa. Sua demonstração só não é correta para o caso $(a\ +\ b\sqrt{-1})^{c\,+\,d\sqrt{-1}}$ (CARMO, EDUARDO, WAGNER, 1992, p. 111).

O gênio suíço Leonhard Euler (1707-1783), foi o primeiro a definir o Seno e Cosseno como funções. Responsável por dar um grande passo nas pesquisas sobre o *Teorema Fundamental da Álgebra*, tendo provado que todas as raízes não-reais são da forma $a + bi$ (número complexo). Em 1748 publicou no seu livro *Introductio in Analysis Infinitorum* a fórmula da conexão exponencial com números complexos

($e^{ix} = \cos x + \ i\sin x$), que mostra relação entre função exponencial e trigonométrica (NAHIN, 1998; CARMO; EDUARDO; WAGNER, 1992).

> O símbolo i para $\sqrt{-1}$ é outra notação usado primeiro por Euler, embora nesse caso a adoção viesse quase no fim de sua vida, em 1777. [...] foi por Gauss ter adotado esse símbolo em seu clássico *Disquisitiones arithmeticae* de 1801 que seu lugar ficou assegurado entre as notações matemática. (BOYER, 1974, p. 305).

Leonhard Euler, Figura 6, filho de um pastor rural, aos dezessete anos conseguiu diploma de pós-graduação da Faculdade de Teologia; teve grandes contribuições na modernização das simbologias matemática; nas áreas de estudos de Cálculo Diferencial e Números Complexos.

Figura 6- Leonhard Euler (1707-1783).

Fonte: Eves, (2011, p. 472).

Em 1777 nasceu um gênio, considerado o maior matemático do século XIX, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Figura 7, um homem que traçou uma linha divisória entre a matemática dos séculos XVIII e XIX. O garoto prodígio, aos 10 anos de idade, a pedido do professor na aula pediu aos alunos que somassem todos os números de um a cem $(1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100)$, Gauss foi o único em dar a resposta correta, 5050, evidentemente que ele já tinha noção de progressão aritmética (BOYER, 1974; EVES, 2011).

> Seus mestres logo levaram o talento de Gauss à atenção do Duque de Brunswick que apoiou seus estudos, primeiro para que pudesse cursar o colégio local, depois na Universidade em Göttingen, onde se matriculou em outubro de 1795.

> Em março do ano seguinte, um mês antes de completar 19 anos, fez uma descoberta brilhante. Havia mais de 2000 anos que se sabia construir, com régua e compasso, o triangulo eqüilátero e o pentágono regular [...], mas nem um outro polígono com número de lado primo. Gauss mostrou que também o polígono de regular de 17 lados pode ser construído com régua e compasso. (BOYER, 1974, p.344).

Deve-se a Gauss a primeira demonstração correta do *Teorema Fundamental da Álgebra* (na qual ele utilizou propriedades topológicas da reta e do plano). Aos 22 anos de idade, Gauss apresenta em sua tese de doutorado, na Universidade de Helmstadt, a demonstração, intitulada *"Nova Demonstração do Teorema que Toda Função Algébrica Racional Inteira em uma Variável pode ser Decomposta em Fatores Reais de Primeiro ou Segundo Grau"* (EVES, 2011; BOYER, 1974; CARMO, EDUARDO, WAGNER, 1992).

Boyer (1974, p. 345) apresenta uma resumida linha de pensamento de Gauss do Teorema:

> Resolveremos graficamente a equação $z^2 - 4i = 0$, mostrando que existe um valor complexo $z = a + bi$ que satisfaz à equação. Substituindo z por $a + bi$ e separando parte real e imaginaria na equação temos $a^2 - b^2 = 0$ e $ab = 0$. Interpretando a e b como quantidades variáveis e esboçando estas equações no mesmo conjunto de eixos, um para a parte real *a* e outra da hipérbole $ab = +2$.

Ao longo dos anos, Gauss apresentou novas demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra, na tentativa de encontrar uma demonstração inteiramente algébrica, apresenta uma sua quarta e ultima demonstração em 1850 (EVES, 2011).

Figura 7- Friedrich Gauss (1777-1855).

Fonte: Wikimedia Commons - Domínio Público (COMMONS, 2018).

Gauss deu outras contribuições importantes na área da Astronomia e Física, algumas de suas publicações e estudos relevantes foram: o livro *Disquisitiones arithmeticae* (1801) sobre a teoria dos números; em 1812, publicou um artigo sobre séries hipergeométricas, relacionada a convergência de séries; em 1827, publicou estudos sobre teoria das superfícies, *Disquisitionesgenerales circa superficies curvas* (EVES, 2011).

Observamos que a construção, o desenvolvimento dos números complexos foi um caminho árduo, difícil, e que a descoberta não deve ser atribuída a somente a uma pessoa. Depois de Gauss outros matemáticos continuaram a ajudar a consolidar os números complexos. É interessante pensar na dificuldade que os grandes matemáticos tiveram em aceitarem como um novo número. A idéia dos números complexos era abstrata, a abordagem não era visualmente representada, levou um tempo até a prova geométrica.

> As idéias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as idéias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber (D'Ambrosio, 1999, p. 97).

Segundo Lingard (2000) a construção matemática levou milhares de anos para serem alcançadas, e que isso deveria ser ensinado aos alunos, a história da matemática pode estimular a aprendizagem e a motivação, e mostrar o lado humano dos matemáticos. De acordo com D'Ambrosio (1996, p. 13), "Se em algum tema o professor tem uma informação ou sabe de uma curiosidade histórica, deve compartilhar com os alunos. [...] Isto pode gerar muito interesse nas aulas de Matemática".

> A fundamentação dos conteúdos através da história da matemática são essenciais para uma aprendizagem significativa, pois na construção do conhecimento matemático a partir de uma situação-problema que os antigos matemáticos enfrentaram para resolver situações da época, servirão de conhecimento prévio para as situações que ainda enfrentarão durante a aprendizagem em sala de aula e na vida. (FARAGO, 2003, p. 64).

Nos próximos capítulos provaremos que os números imaginários realmente existem, e não uma invenção arbitrária. Veremos que os números seguem regras da álgebra e da aritmética.

3 NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS

Neste capítulo, apresentaremos a teoria básica e resultados preliminares acerca do conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$) e polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$ necessários para construção do *Teorema Fundamental da Álgebra* (TFA).

Segundo Silva (2018), os matemáticos Cantor e Dedekind foram responsáveis por definir o conjunto dos reais a partir de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$, utilizando métodos diferentes. Cantor utilizou Classes de Equivalência de Sequências de Cauchy e Dedekind utilizou a noção de Cortes, assim, formando as propriedades e definições de todos os números reais. Portanto, apresentaremos o conjunto dos números complexos como uma extensão do conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$).

As propriedades, definições, teoremas e demonstrações deste capítulo e do capítulo seguinte aqui apresentados estão presentes em diversos livros de Álgebra e Matemática Básica. Aqui, em especial, nos baseamos nas seguintes referencias: Iezzi (2013), Neto (2012), Conway (1978), Carmo, Eduardo e Wagner (1992) e Fernandes (2016).

3.1 Números Complexos e Propriedades

Definição 3.1: É formado pelo conjunto de todos os pares ordenados $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, com a e $b \in \mathbb{R}$, para os quais estão definidas as operações de igualdade, adição e multiplicação, descritas abaixo. Usa-se o símbolo z para representar todos os elementos $(a, b) \in \mathbb{C}$.

$$\forall (a\ b), (c\ d) \in \mathbb{C}:$$

A1) igualdade: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c\ e\ d = d$

A2) adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

A3) multiplicação: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Exemplo 3.2: Dados $z = (1, 2)$ e $w = (3, 1) \in \mathbb{C}$. calcule:

a) $z + w$.

Temos, $(1, 2) + (3, 1) = (1 + 3, 2 + 1) = (4, 3)$

b) $z \cdot w$.

Temos, $(1, 2) \cdot (3, 1) = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 1, 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3) = (1, 7)$

c) Existe um número v tal que $z + v = w$.

Temos, $z = (1, 2), w = (3, 1)$ e $v = (x, y) \in \mathbb{C}$

Assim, $(1, 2) + (x, y) = (3, 1) \Rightarrow (1 + x, 2 + y) = (3, 1\ ) \Rightarrow \begin{cases} 1 + x = 3 \\ 2 + y = 1 \end{cases} \Rightarrow (2, -1).$

Logo, $(1, 2) + (2, -1) = (3, 1)$

A seguir, apresentaremos as propriedades da adição em $\mathbb{C}$.

Teorema 3.3: Consideremos $z, v\ e\ w \in \mathbb{C}$, tais que $z = (a, b), v = (c, d)\ e\ w = (e, f)$. A operação de adição (+) em $\mathbb{C}$ possui as seguintes propriedades:

B1) Associativa: $z + (v + w) = (\ z + v) + w$;

B2) Comutativa: $z + v = v + z$;

B3) Existência do elemento neutro: $\exists n \in \mathbb{C}$ tal que $z + n = z, \forall z \in \mathbb{C}$;

B4) Existência do elemento simétrico: $\forall z \neq 0 \in \mathbb{C}, \exists -z \in \mathbb{C}$ tal que $z + (-z) = (-z) + +z = 0, \quad \forall z, v\ e\ w \in \mathbb{C}$.

Demonstração:

B1) Associativa:

$$\begin{aligned} (\ z + v) + w &= [(a, b) + (c, d)] + (e, f) = \\ &= (a + c, b + d) + (e, f) = \ [(a + c) + e, (b + d) + f] = \\ &= [a + (c + e), b + (d + f)] = (a, b) + (c + e, d + f) = \\ &= (a + b) + [(c, d) + (e, f)] = z + (v + w). \end{aligned}$$

B2) Comutativa:

$$\begin{aligned} (z + v) &= (a, b) + (c, d) = \\ &= (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = \\ &= (c, d) + (a, b) = (v + z). \end{aligned}$$

B3) Existência do elemento neutro, $\exists n \in \mathbb{C}$ tal que $z + n = z, \forall z \in \mathbb{C}$.

Sejam $z = (a, b)$ e $n = (x, y)$:

$$z + n = z \Leftrightarrow (a, b) + (x, y) = (a, b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + x = a \\ b + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + a + x = a - a \\ -b + b + y = b - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0, 0)$$

$$z + n = z \Leftrightarrow (a, b) + (0, 0) = (a, b).$$

Logo, $n = (0, 0)$, que somado a qualquer complexo z o resultado é z.

B4) Existência do elemento simétrico:

Provemos que existe um elemento $z' = (x, y)$ chamado simétrico ou inverso aditivo de $z \in \mathbb{C}$, tal que $z +\ z' = (0, 0)$.

Temos $z = (a, b)$ e $z' = (x, y)$:

$$z + z' = k \Leftrightarrow (a,b) + (x,y) = (0,0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + x = 0 \\ b + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ y = -b \end{cases} \Leftrightarrow (-a,-b).$$

Como, $z' = (x,y) = (-a,-b)$, logo, existe $-z = (-a,-b)$ chamado simétrico aditivo de z, que satisfaz $z + (-z) = 0$.

O teorema seguinte apresenta as propriedades da multiplicação em $\mathbb{C}$.

Teorema 3.4: Consideremos $z, v\ e\ w \in \mathbb{C}$, tais que $z = (a,b), v = (c,d) e\ w = (e,f)$. A operação da multiplicação $(\cdot)$ em $\mathbb{C}$ possui as seguintes propriedades:

C1) Associativa: $(z \cdot v) \cdot w = z \cdot (v \cdot w)$.

C2) Comutativa: $z \cdot v = v \cdot z$.

C3) Distributiva em relação à adição: $z \cdot (v + w) = z \cdot v + z \cdot w$.

$$(z + v) \cdot w = z \cdot w + v \cdot w, \qquad z, v\ e\ w \in \mathbb{C}.$$

C4) Existência do elemento neutro: $\exists e \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot e = z, \forall z \in \mathbb{C}$.

C5) Existência do elemento inverso: Para todo z não nulo, $z \in \mathbb{C}, \exists z^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$.

Demonstração:

C1) Associativa:

$$\begin{aligned}(z \cdot v) \cdot w &= [(a,b) \cdot (c,d)] \cdot (e,f) = (ac - bd, ad + bc) \cdot (e,f) = \\ &= [(ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e] = \\ &= [ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce] = \\ &= [a(ce - df) - b(de + cf), a(de + cf) + b(ce - df)] = \\ &= (a,b) \cdot (ce - df, cf + de) = \\ &= (a,b) \cdot [(c,d) \cdot (e,f)] = z \cdot (v \cdot w).\end{aligned}$$

C2) Comutativa

$$\begin{aligned}z \cdot v &= (a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc) = \\ &= (ca - db, cb + da) = (c,d) \cdot (a,b) = v \cdot z.\end{aligned}$$

C3) Distributiva em relação à adição.

A operação de multiplicação é distributiva em relação à adição:

$$\begin{aligned}z \cdot (v + w) &= (a,b) \cdot \big((c,d) + (e,f)\big) = (a,b) \cdot (c + e, d + f) = \\ &= \big(a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)\big) = \\ &= \big((ac - bd) + (ae - bf), (ad + bc) + (af + be)\big) = \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) =\end{aligned}$$

$$= (a,b)(c,d) + (a,b) \cdot (e,f) = z \cdot v + z \cdot w.$$

C4) Existência do elemento neutro, $\exists e \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot e = z, \forall z \in \mathbb{C}$.

Seja $z = (a,b)$, provemos que existe um elemento $n = (x,y)$ que satisfaça $z \cdot n = z$:

$$(a,b) \cdot (x,y) = (a,b) \Leftrightarrow (ax - by, ay + bx) = (a,b) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ax - by = a \\ bx + ay = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (1,0).$$

Então $n = (1,0)$, temos que $z \cdot n = z \Leftrightarrow (a,b) \cdot (1,0) = (a,b) = z$. De maneia análoga, mostra-se que $n \cdot z = z \Leftrightarrow (1{,}0) \cdot (a,b) = (a,b) = z$. Logo, existe um elemento neutro para a multiplicação, que quando multiplicado por qualquer $z \in \mathbb{C}$ o resultado é z.

C5) Existência do elemento inverso

Chama-se inverso multiplicativo $\forall$ z $\neq 0 \in \mathbb{C}\backslash\{(0,0)\}$, de $z = (x + y)$ o elemento $z^{-1} = \frac{1}{z}$=$\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right) \in \mathbb{C}$. Nota que, $z \cdot z^{-1} = 1$. (Como $z = (x + y) \neq (0,0)$, sege que $x^2+y^2 \neq 0$).

Definição 3.5: Um conjunto F não vazio munido de duas operações que satisfaz as propriedades B1-B4 e C1-C5 é chamado de corpo.

Dessa forma, $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +,\cdot)$ é um exemplo importante de corpo.

A aplicação bijetora $f: a \in \mathbb{R} \longmapsto (a,0) \in \mathbb{C}$ que conserva as operações de adição e multiplicação, nos fornece um subcorpo ($\mathbb{C}$ é um corpo com relação às operações vistas acima) isomorfo a $\mathbb{R}$, denotado por $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Isso que nos leva a dizer que em $\mathbb{C}$ existe um subconjunto A=$\{(a,0), \forall a \in \mathbb{R}\}$ que possui todas as característica de $\mathbb{R}$.

3.2 Forma Algébrica de um Número Complexo

Vamos formalizar outra maneira de representar um número complexo, denominada de forma algébrica do número.

Definição 3.6: Todo número complexo $z = (a,b)$ pode ser representado da forma $a + bi$, chamada de forma algébrica, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Definição 3.7: O par ordenado $i = (0,1)$ é chamado de unidade imaginária.

Note que $i = (0,1)$ satisfaz a relação $i^2 = -1$. De fato,

$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1$ por isso denotamos $i = \sqrt{-1}$.

Dado um número complexo qualquer $z = (a,b)$, temos:

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) =$$
$$= (a,0) + (b,0) \cdot (0,1) = a + bi$$

Definição 3.8: Dado $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, o número a é a parte real e o b é a parte imaginaria.

Notação: $Re(z) = a$ e $Im(z) = bi$.

Observação 3.9: A multiplicação de um número real por um número imaginário $b \cdot i$, é um número imaginário e a soma de um número real por um número imaginário $a + i$, é um número imaginário.

Exemplo 3.10: $z = (-3,4) \Rightarrow z = -3 + 4i$. $Re(z) = -3$ e $Im(z) = 4$.

Definição 3.11: Chama-se número real puro $\forall z \in \mathbb{C}$ cuja a parte imaginária é nula e $(z = a + 0i = a\, real\, puro)$. Chama-se número imaginário puro $\forall z \in \mathbb{C}$ cuja a parte real é nula e $(z = a0 + bi = bi \text{ imaginário } puro)$.

Exemplos 3.12: $z_1 = (5,0) \Rightarrow z_1 = 5 + 0i \Rightarrow z_1 = Re(z_1) = 5$ real puro

$z_2 = (0,-6) \Rightarrow z_2 = a0 + (-6i) \Rightarrow z_2 = Im(z_2) = -6i$ imaginário puro

Verifica-se que $\forall n \in \mathbb{N}$, temos:

D1) $i^{4n} = 1$;

D2) $i^{4n+1} = i$;

D3) $i^{4n+2} = -1$;

D4) $i^{4n+3} = -i$.

Teorema 3.13: Potenciação de um número complexo w qualquer:

E1) $w^0 = 1$

E2) $w^1 = w$

E3) $w^n = w \cdot w \cdot w \cdot \ldots \cdot w, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$

E4) $w^{-n} = \frac{1}{w^n}\ w \neq 0, \forall n \in \mathbb{Z}$

3.3 Conjugado e Módulo

Definição 3.14: O conjugado de um número complexo $z = a + bi$ é o número complexo $\bar{z} = a - bi$, isto é, na representação geométrica, $\bar{z}$ é simétrico de z em relação ao eixo real, Re, como ilustra abaixo Figura 8. Nota-se que $\bar{\bar{z}} = \overline{(a - bi)} = a + bi = z$, isto é, z e $\bar{z}$ é um conjugado do outro.

Definição 3.15: O Módulo ou valor absoluto de um número complexo $z = a + bi$ é o comprimento do vetor $\overrightarrow{Oz}$, ou seja, a distancia do ponto (a, b) até a origem O, como ilustra a Figura 8. Assim,

$$\rho = r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Nos próximos resultados apresentaremos propriedades do conjugado e módulo de um número complexo.

Propriedades 3.16: Para todo $z \in \mathbb{C}$, temos:

F1) $\overline{(z + v)} = \bar{z} + \bar{v}$;

F2) $\overline{(z \cdot v)} = \bar{z} \cdot \bar{v}$;

F3) $z + \bar{z} = 2 \cdot Re(z)$;

F4) $z - \bar{z} = 2 \cdot Im(z)i$;

F5) $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$;

F6) $z = \bar{z} \Longrightarrow z \in \mathbb{R}$;

F7) $\overline{(\bar{z})} = z$.

Demonstração. Sejam $z = a + bi$ e $v = c + di$.

F1) $\overline{(z + v)} = \overline{(a + bi)} + \overline{(c + di)} = (a + c) - i(b + d) = (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{v}$.

F2) $\overline{z \cdot v} = (a - bi) \cdot (c - di) = (ac - bd) - i(ad + cb) = (ac - adi) + (-adi +$

$+bdi^2) = a(c - di) - bi(c - di) = (a - bi) \cdot (c - di) = \bar{z} \cdot \bar{v}$.

F3) $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (bi - bi) = 2a + 0 = 2a = 2Re(z)$.

F4) $z - \bar{z} = (a + bi) + (-a + bi) = (a - a) + (bi + bi) = 0 + 2bi = 2Im(z)i$.

F5) $z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$.

F6) Se $z = \bar{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow a = a \; e \; b = -b \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z = a \in \mathbb{R}$.

F7) $\overline{(\bar{z})} = z$. Se $\bar{z} = a - bi$, temos $\overline{(\bar{z})} = \overline{a - bi} = a + bi = z$.

Observe que o produto de z pelo seu conjugado $\bar{z}$ é sempre um número real não negativo em $\mathbb{R}_+$.

Propriedades 3.17: Para todo $z, v \in \mathbb{C}$, temos:

G1) $|z| \geq 0$

G2) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

G3) $|z| = |\bar{z}|$

G4) $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$

G5) $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$

G6) $|z \cdot v|$=$|z| \cdot |v|$

G7) $\frac{|z|}{|v|} = \left|\frac{z}{v}\right|, v \neq 0$

G8) $|z + v| \leq |z| + |v|$

G9)$|\bar{z}| = |z| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Teorema 3.18: O conjugado de $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n, \forall n \in \mathbb{N}\ e\ \forall z \in \mathbb{C}$.

Demonstração: Provando por Indução, temos:

a) Para $n = 0$,

$$\overline{(z^0)} = 1\ e\ (\bar{z})^0 = 1.$$

b) Admitindo que a igualdade seja verdadeira para $n = k$, vamos mostrar que é verdadeira para $k + 1$, de fato,

$$\begin{aligned}\overline{(z^{k+1})} &= \overline{z^k \cdot z^1} \\ &= \overline{(z^k)} \cdot \overline{(z^1)} \\ &= (\bar{z})^k \cdot (\bar{z})^1 = (\bar{z})^{k+1}\end{aligned}$$

Observação 3.19: A equação modular de um número complexo nos fornece uma circunferência de centro na origem do plano e raio $|z|$ (veja o exemplo na Figura 9 b)). De fato, dado um número complexo $z = a + bi$, considere $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, elevando os dois membros ao quadrado, temos $r^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2$. Deste modo, $r^2 = a^2 + b^2$, obtendo assim a equação de uma circunferência de origem no centro e raio igual a $r = |z|$.

Exemplo 3.20: Sejam $z, v \in \mathbb{C}, \text{tais que } z = (2, 1)\ e\ v = (3, -2)$, calcule:

a)$\overline{(z + v)}$. Pela Propriedade F1), $\overline{(z + v)} = \bar{z} + \bar{v}$. Então,

$$\bar{z} + \bar{v} = (2 - i) + (3 + 2i) = (2 + 3) + (-i + 2i) = (5 + i)$$

b) $\overline{(z \cdot v)}$. Pela Propriedade F2), $\overline{(z \cdot v)} = \bar{z} \cdot \bar{v}$. Então,

$$\bar{z} \cdot \bar{v} = (2 - i) \cdot (3 + 2i) = (2 \cdot 3 + 2 \cdot 2i - 3i - 2i^2) = \big(6 + i - 2 \cdot (-1)\big) = (8 + i)$$

c) $z + \bar{z}$. Pela Propriedade F3), temos,

$$z + \bar{z} = (2 + i) + (2 - i) = (2 + 2 + i - i) = Re(z) = 4$$

d) $z - \bar{z}$. Pela Propriedade F4), temos,

$$z - \bar{z} = (2 + i) - (2 - i) = (2 - 2 + i + i) = Im(z) = 2i$$

e) $z \cdot \bar{z}$. Pela Propriedade F5), temos,

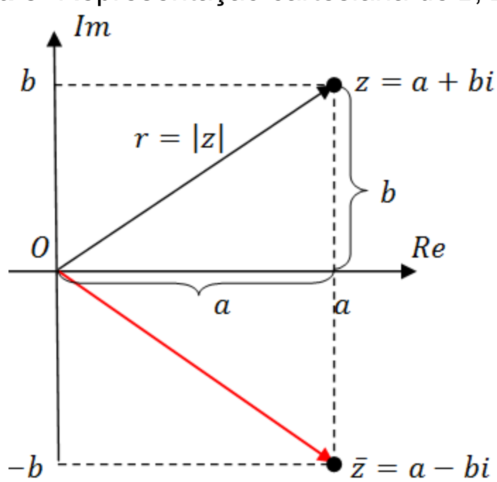
$$z \cdot \bar{z} = (2 + i) \cdot (2 - i) = 2^2 - 2i + 2i - i^2 = 4 - (-1) = 5$$

3.4 Plano de Argand-Gauss

Para a compreensão da demonstração do *TFA*, é importante que haja uma assimilação geométrica no plano cartesiano. Os números complexos $z = a + bi$ podem ser representados no plano complexo, conhecido como plano de Argand-Gauss.

O número complexo $z = a + bi$ pode ser pensado como um ponto do plano, ou um vetor $\overrightarrow{Oz}$, de origem O, representada pelo número $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ corresponde um único ponto no plano cartesiano $ReOIm$, no qual o eixo ORe é a parte real e OIm a parte imaginária do número, como ilustra a Figura 8.

Figura 8- Representação cartesiana de z, $\bar{z}$ e $|z|$.



Fonte: Autoria própria (2022).

Já definimos o módulo $|z|$, agora veremos a sua interpretação geométrica. Para calcular o módulo de z usa-se o *Teorema de Pitágoras.* Lembrando que o *Teorema de Pitágoras* diz que: o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Identificamos na Figura 8, que a hipotenusa é o comprimento do vetor $r = |z|$ e os catetos são os comprimentos a e b. Aplicando ao *Teorema de Pitágoras*, Temos:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \sqrt{|z|^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \blacksquare$$

Exemplo 3.21: Dado um número complexo $z = 3 + 4i$, encontre:

a) Módulo de z.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\ unidade\ de\ medida\ (u.\mathrm{m}).$$

Nota-se que a distância da origem O ao ponto $(3, 4)$ é 5.

b) Conjugado de z.

Temos, $\bar{z} = 3 - 4i$.

Observa-se que o conjugado de z é o simétrico de z em relação ao eixo real Re, conforme representado na Figura 9 (a).

c) Módulo de $\bar{z}$.

Pela propriedade (G9) sabemos que $|\bar{z}| = |z|$, logo, $|\bar{z}| = 5$.

Nota-se que o módulo do conjugado de um número complexo é igual o módulo do número.

d) Represente no plano de Argand-Gauss $z, |z|, \bar{z}$ e $|\bar{z}|$.

Veja na Figura 9 (a).

e) Represente no plano de Argand-Gauss o subconjunto $A = \{v \in \mathbb{C}\ ||v| = 3\}$.

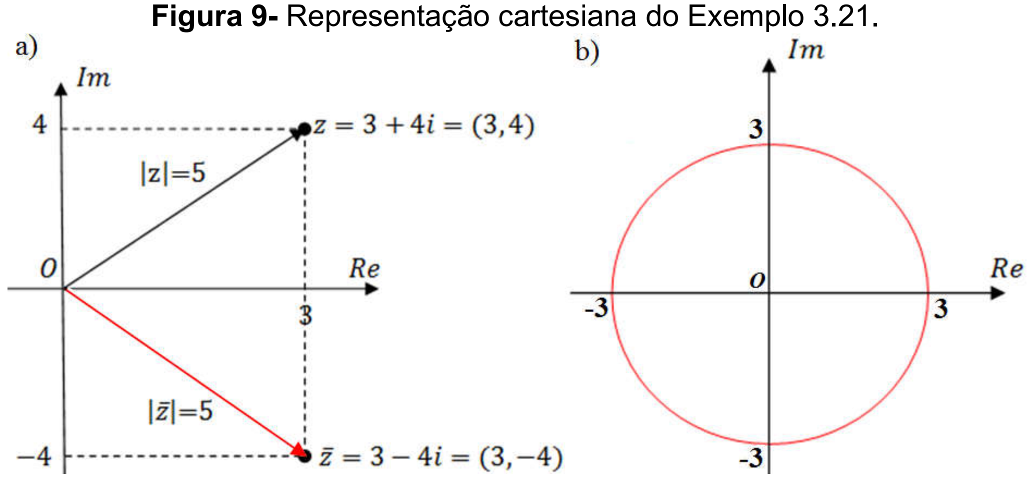
Determinamos um número complexo $v = a + bi$.

Temos,

$$|v| = 3 \Longrightarrow |a + bi| = 3 \Longrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 3^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 3^2.$$

Note que se trata de uma equação de uma circunferência de centro (0,0) e raio 3, como representada na figura 9 (b).

Figura 9- Representação cartesiana do Exemplo 3.21.



Fonte: Autoria própria (2022).

3.5 Argumento de um Número Complexo

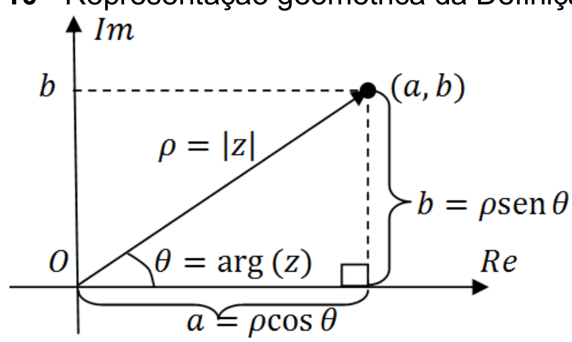
Definição 3.22: Dado um número complexo não nulo $z = a + bi$, o ângulo θ no sentido anti-horário formado entre o vetor $\overrightarrow{Oz}$ de comprimento $\rho = |z|$ e o eixo horizontal Re do plano complexo é chamado de argumento de z, denotado por $arg(z)$, como ilustra a Figura 10.

Conhecendo os valores de $sen\theta$ e $cos\theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$, atavés do triângulo retângulo da Figura 10, podemos obter as coordenadas de z. Lembrando que o ângulo θ pertence ao conjunto dos números reais.

Utilizando as razões trigonométricas seno e cosseno, temos:

$$\left.\begin{matrix} cos\,\theta = \frac{a}{\rho} \\ \\ sen\,\theta = \frac{a}{\rho} \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} cos\,\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{|z|} \\ \\ sen\,\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{|z|} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = \rho\cos\theta \\ \\ b = \rho\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Figura 10 - Representação geométrica da Definição 3.22.



Fonte: Autoria própria (2022).

Observação 3.23: Vale ressaltar a relação fundamental da Trigonometria, cuja demonstração é uma simples aplicação pelo Teorema de Pitágoras, onde para todo ângulo θ, vale a importante relação: $sen\theta^2 + cos\theta^2 = 1$.

Exemplo 3.24: Dado um número complexo $z = 1 + i$, determine o valor do argumento θ de z:

Primeiro, encontramos $\rho = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Agora, encontramos $sen\theta$ e $cos\theta$:

$$sen\,\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$cos\,\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

O valor de $a = 1$ e $b = 1$ é positivo, então, o ponto está no primeiro quadrante. Na tabela trigonométrica, o valor do ângulo que possui os valores de cosseno e de seno é, em graus $\theta = 45°$, e em radianos $\theta = 45° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{4}$.

3.6 Forma Trigonométrica de um Número Complexo

Existe outra forma de escrever um número complexo não nulo $z = a + bi$, que é chamada forma trigonométrica ou polar, na qual pode ser escrito na forma $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$. A forma trigonométrica torna-se mais pratico para as operações de potenciação e radiciação em $\mathbb{C}$.

A seguir, apresentamos a transformação da forma algébrica $z = a + bi$ para a forma trigonométrica $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$:

Vimos acima que as coordenadas de z podem ser expressas da seguinte forma:

$$\begin{cases} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

Assim, substituindo a e b na forma algébrica $z = a + bi$, temos:

$$z = a + bi \Leftrightarrow z = \rho\cos\theta + \rho i\text{sen}\,\theta \Leftrightarrow z = \rho(cos\theta + isen\theta) \qquad \blacksquare$$

Vejam algumas propriedades dos números complexos na forma trigonométrica no teorema seguinte.

Teorema 3.25: Para todos $z\ e\ v\ \in \mathbb{C}$, considere $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$ e $v = \varphi(cos\beta +$ $+isen\beta)$. As operações em $\mathbb{C}$ satisfazem as seguintes propriedades:

H1) $z \cdot v = \varphi\ \cdot \rho(\cos(\theta + \beta) + isen(\theta + \beta);$

H2) $\frac{z}{v} = \frac{\rho}{\varphi}(\cos(\theta - \beta) + isen(\theta - \beta).$

Demonstração:

H1) $z \cdot v = \rho(cos\theta + isen\theta) \cdot \varphi(cos\beta + isen\beta) =$

$$= \rho \cdot \varphi(cos\theta + isen\theta) \cdot (cos\beta + isen\beta) =$$

$$= \rho \cdot \varphi[(cos\theta \cdot cos\beta - sen\theta \cdot sen\beta) + i(sen\theta \cdot cos\beta + sen\beta \cdot cos\theta)] =$$

$$= \varphi\ \cdot \rho(\cos(\theta + \beta) + isen(\theta + \beta) \qquad \blacksquare$$

H2) $\frac{z}{v} = \frac{z \cdot \bar{v}}{v \cdot \bar{v}} = \frac{\rho(cos\theta + isen\theta) \cdot \varphi(cos\beta - isen\beta)}{|v|^2}$.

Lembrando que da trigonometria, $-sen\beta = sen(-\beta)$ e $cos\beta = \cos(-\beta)$. Segue que,

$$\frac{\rho(cos\theta + isen\theta) \cdot \varphi(\cos(-\beta) + isen(-\beta))}{|v|^2} =$$

$$\frac{\varphi\ \cdot \rho(\cos(\theta - \beta) + isen(\theta - \beta)}{\varphi^2}.$$

Logo,

$$\frac{z}{v} = \frac{\rho}{\varphi}(\cos(\theta - \beta) + isen(\theta - \beta) \quad \blacksquare$$

Portanto, provamos que o módulo do produto de dois números complexos é igual ao produto dos módulos dos fatores:

$$|z \cdot v| = |z| \cdot |v| \quad \text{e} \quad \left|\frac{z}{v}\right| = \frac{|\rho|}{|\varphi|},$$

e que seu argumento é congruente à soma dos argumentos dos fatores:

$$arg(z \cdot v) = arg(z) + arg\ (v) \quad \text{e} \quad arg\left(\frac{z}{v}\right) = arg(z) - \arg(v).$$

Teorema 3.26: Estendemos o Teorema 3.25, H1, para o produto de n fatores $z_1 = \rho(cos\theta + isen\theta), . . , z_n = \rho(cos\theta_n + isen\theta_n)$ com $n > 2$, aplicando a propriedade associativa da multiplicação, temos:

$$z = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n = \rho(cos\theta + isen\theta).$$

Segue que,

$$z = \rho_1\rho_2\rho_3 \ldots \rho_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + isen(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)].$$

Portanto,

$$\rho(cos\theta + isen\theta) = \rho_1\rho_2\rho_3 \ldots \rho_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + isen(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)]. \quad \blacksquare$$

Assim,

- $\rho = \rho_1\rho_2\rho_3 \ldots \rho_n$
- $\theta = (\theta_1 + \theta_2 \ldots + \theta_n) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Logo, o módulo do produto de $n\,(n > 2)$ números complexos é igual ao produto dos módulos dos fatores e seu argumento θ é congruente à soma dos argumentos dos fatores.

Uma das fórmulas mais importantes da trigonometria é a fórmula de Moivre, relacionada a n-ésima potência de um número complexo, desenvolvido pelo francês Abraham de Moivre e publicado pela primeira vez por Euler (STRUIK, 1992). Interpretando a fórmula de Moivre (Definição 3.27) geometricamente, significa que multiplicar o número complexo $z = \rho(cos\theta + isen\theta), \rho = 1$, por si próprio n vezes equivale a dar-lhe n rotações sucessivas do ângulo θ. Essa fórmula é útil para determinar raízes e para calcular potências de números complexos (CARMO, EDUARDO e WAGNER, 1992).

Definição 3.27: (Fórmula de Moivre) Dado o número complexo não nulo $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$, e o número inteiro n, temos:

$$z^n = \rho^n(cos\theta + isen\theta)^n = \rho^n(\cos\,(n\theta) + isen(n\theta)), \forall\theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

A demonstração desse fato pode ser encontrada no livro do Iezzi (2013, p. 34).

Exemplo 3.28: Dado um número complexo $z = -\sqrt{3} + i$, represente o número z na forma trigonométrica.

Primeiro, encontramos $|z|$: $\rho = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2.$

Agora, encontramos $sen\theta$ e $cos\theta$:

$$sen\,\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{1}{2}$$

$$cos\,\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{-\sqrt{3}}{2}.$$

Na tabela trigonométrica, o valor do ângulo θ que possui esses valores de cosseno e de seno é, em graus $\theta = 150°$, e em radianos $\theta = 150° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{5\pi}{6}$.

A forma trigonométrica do número complexo $z = -\sqrt{3} + i$ é dada por:

$$z = 2(\cos(150°) + isen(150°)) \quad \text{ou} \quad z = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

3.7 Polinômios

Vamos definir um dos objetos mais importantes deste trabalho.

Definição 3.29: Seja $P: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função definida por $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \neq 0$. Neste caso, P é chamado de polinômio ou função polinomial, no qual x é a variável, ou seja, pode assumir qualquer valor de $\mathbb{C}$, os números complexos $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{C}$ são denominados coeficientes (são constantes), $n \in \mathbb{N}$ é denominado grau do polinômio e as parcelas $a_n x^n, a_{n-1}x^{n-1}, a_1 x, a_0$ são chamadas de termos e cada uma é denominada monômio.

Exemplo 3.30: Considere $P(x) = 5x^3 + 4x^2 - 6$, temos que os coeficientes de $P(x)$ são, $-6, 4, 5$. $P(x)$ é um polinômio de grau 3.

Definição 3.31: Um polinômio identicamente nulo (ou polinômio nulo) é aquele no qual o valor numérico é igual a zero para todo x complexo, ou seja, $P(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{C}$..

Definição 3.32: Dois polinômios P e Q são idênticos ou iguais quando assumem valores numéricos iguais para todo x, ou seja, $P(x) = Q(x)\ \forall x \in \mathbb{C}$.

É possível mostrar que $P(x) = Q(x)$ somente se os coeficientes de $P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ e $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x^i$ forem ordenadamente iguais. Assim:

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in \mathbb{N}.$$

3.8 Operações Polinomiais

Definimos as operações de adição e multiplicação no conjunto dos polinômios com coeficientes complexos, e apresentamos algumas propriedades da soma e produto.

3.8.1 Soma de polinômios

Dados dois polinômios P e Q e $m \geq n$, temos:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i ,$$

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^m = \sum_{i=0}^{m} b_ix^i .$$

A soma dos polinômios P e Q é definida por

$$(P + Q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n + \ldots + b_nx^m.$$

Exemplo 3.33: Somar os polinômios $P(x) = 2x^3 + x^2 + 2$ e $Q(x) = 5x^3 + 3x^2 + 1$. Tem-se

$$P(x) + Q(x) = 2x^3 + x^2 + 2 + 5x^3 + 3x^2 + 1 =$$

$$= (2 + 5)x^3 + (1 + 3)x^2 + (2 + 1) = 7x^3 + 4x^2 + 3.$$

A seguir, vejam algumas propriedades da adição de polinômios.

Consideremos $P, Q\ e\ R$ polinômios quaisquer. A operação de adição possui as seguintes propriedades:

J1) Associativa: $(P + Q) + R = P + (Q + R)$;

J2) Comutativa: $P + Q = Q + P$;

J3) Existência de elemento neutro: $\exists n \in \mathbb{C}$ tal que $P + n = P, \forall$ polinômio P;

J4) Existência de inverso aditivo: $\exists -P \in \mathbb{C}$ tal $P + (-P) = 0, \forall$ polinômio P.

As demonstrações dessas propriedades se encontram em Iezzi (2013, p. 60).

3.8.2 Produto de polinômios

Dados dois polinômios P e Q, temos:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{\mathrm{m}}x^{\mathrm{m}}.$$

O produto dos polinômios P e Q é

$$(P \cdot Q)(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + \ldots + a_nb_{\mathrm{m}}x^{\mathrm{n+m}}$$

Nota-se que o produto $(P \cdot Q)(x)$ é o polinômio

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_{n+\mathrm{m}}x^{\mathrm{n+m}}.$$

Na qual o coeficiente c_k é dado como:

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0 = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}.$$

Exemplo 3.34: Multiplicação do polinômio $P(x) = 2x^3 + x^2 + 2$ por $Q(x) = 5x^3 + +3x^2 + 1$.

Lembrando que na multiplicação: $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$. Temos,

$$(P \cdot Q)(x) = (2x^3 + x^2 + 2) \cdot (5x^3 + 3x^2 + 1) =$$
$$= 2x^3(5x^3 + 3x^2 + 1) + x^2(5x^3 + 3x^2 + 1) + (10x^3 + 6x^2 + 2) =$$
$$= 10x^6 + 11x^5 + 3x^4 + 12x^3 + 7x^2 + 2.$$

Seguem algumas propriedades da multiplicação de polinômios.

Consideramos $P, Q\ e\ R$ polinômios quaisquer. A operação da multiplicação possui as seguintes propriedades:

L1) Associativa : $(P \cdot Q)R = P(Q \cdot R)$;

L2) Comutativa: $P \cdot Q = Q \cdot P$;

L3) Existência de elemento neutro: ∃ um polinômio n tal que $P \cdot n = P$, ∀ polinômio P;

L4) Propriedade distributiva: $P(Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R$.

As demonstrações dessas propriedades se encontram em Iezzi (2013, p. 62).

3.8.3 Divisão de polinômios

Definição 3.35: Dados dois polinômios P e $Q \neq 0$, ao dividir P por Q determinamos dois únicos polinômios q e r de modo que as seguintes condições são satisfeitas:

M1) $\begin{array}{r|l} P & Q \\ \hline r & q \end{array} \iff P = Q \cdot q + r$;

M2) $\partial r < \partial Q$ ou $r = 0$.

Chamamos P de dividendo, Q de divisor, q de quociente e r de resto da divisão de P por Q. Quando o resto é igual à zero, a divisão é chamada exata.

Exemplo 3.36: Dividindo os polinômios $P = 2x^3 + 2$ por $Q = x + 1$.

Temos

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3 + 2 & x + 1 \\
\cline{2-2}
\underline{-2x^3 - 2x^2} & 2x^2 - 2x + 2 = q \\
0 - 2x^2 + 2 & \\
\underline{2x^2 + 2x} & \\
0 + 2x + 2 & \\
\underline{-2x - 2} & \\
r = 0 &
\end{array}
$$

Neste caso a divisão é exata; dizemos, então, que P é divisível por Q.

Teorema 3.37: (Teorema do resto) Seja $P(x)$ um polinômio tal que existem únicos $q(x)$ e $r(x)$ de forma que $P(x) = Q(x).(x - a) + r(x)$ com o grau $r(x)$ menor que o grau de $Q(x)$, então, r é igual ao valor de P em a.

Demonstração: Aplicando a Definição 3.37 da divisão, temos,

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - a) + r,$$

Para $x = a$, segue que:

$$P(a) = Q(a) \cdot (a - a) + r \Rightarrow P(a) = Q(a).0 + r \Rightarrow P(a) = r.$$

Então, pela unicidade de r, temos que $r = P(a)$. ■

Teorema 3.38: (Teorema de D'Alembert) Um polinômio P é divisível por $(x - a)$ se, e somente se, $P(a) = 0$.

Demonstração: O teorema de D'Alembert é uma conseqüência direta do teorema do resto. Então, como P é divisível por $(x - a)$ e pelo Teorema 3.35, demonstramos que $r = P(a)$, segue que,

$$r = 0 \Leftrightarrow P(a) = 0.$$

Logo, a é raiz de P. ■

Exemplo 3.39: Resolva a equação $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ sabendo que uma das raízes é 1.

Por hipótese, a equação $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ possui uma raiz igual ao número 1, assim, pelo Teorema 3.38 a equação é divisível por $(x - 1)$. Logo,

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 5x^2 + 8x - 4 & x - 1 \\
\cline{2-2}
\underline{-x^3 + x^2} & x^2 - 4x + 4 = q \\
0 - 4x^2 + 8x - 4 & \\
\underline{4x^2 - 4x} & \\
0 + 4x - 4 & \\
\underline{-4x - 4} & \\
r = 0 &
\end{array}
$$

Veja que, $q = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$. Então, $(x - 1) \cdot (x - 2)^2 = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2)$. Portanto, 1 e 2 são raízes da equação, seu conjunto solução é $S = \{1, 2\}$.

3.9 Equação Polinomial

Para a demonstração do TFA precisamos ter uma compreensão básica de equações polinomiais, no entanto, antes de definirmos equações polinomiais, excluiremos dois casos gerais de polinômios; o primeiro é quando $P(x)$ é identicamente nulo e o segundo é quando $P(x)$ é igual a uma constante não nula:

1º) $P(x)$ é identicamente nula

$$0 + 0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x = 0.$$

Exemplo 3.40: $x^3 - x^2 + x - 1 + x^2 = x^3 + x - 1,$ conjunto solução: $S = \mathbb{C}$.

2º) $P(x)$ é constante e não nulo

$$0 + 0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x + k = 0.$$

Exemplo 3.41: $x^3 - 5x^2 + 3x = x^3 - 5x^2 + 3x - 9.$ $S = \emptyset$.

Consideraremos as equações polinomiais $P(x)$ em que seu grau é maior que zero.

Definição 3.42: chamam-se equações polinomiais ou algébricas às equações da forma $P(x) = 0$, onde $P(x)$ é um polinômio de grau n > 0, no qual o grau do polinômio $P(x)$ é também o grau da equação $P(x) = 0$.

Definição 3.43: Dado um polinômio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ e z número complexo tal que satisfaz a igualdade $P(z) = 0$, dizemos que z é uma raiz ou zero do polinômio P, isto é:

$$P(y) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n = 0$$

Definição 3.44: O número de vezes que uma de raiz de um polinômio P aparece indica a sua *multiplicidade*. Em outras palavras, dizemos que a é raiz de multiplicidade $m \geq 1$ da equação $P(x) = 0$ se, e somente se:

$$P = (x - a)^{\mathrm{m}} \cdot Q(x), Q(a) \neq 0,$$

isto é, a é raiz de multiplicidade m de $P(x) = 0$ quando a decomposição de P apresenta exatamente m fatores iguais a $(x - a)$. Quando $m = 1$, a é raiz simples; quando $m = 2$, a é raiz dupla; quando $m = 3$, a é raiz tripla, etc.

Exemplo 3.45: $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$, podemos decompor em:

$$(x + 1) \cdot (x - 2)^3 = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2).$$

Logo, a equação $P(x) = 0$ admite a raiz simples -1 e raiz 2 com multiplicidade 3. A equação é de 4º grau, porém, o conjunto solução só tem dois elementos $S = \{-1, 2\}$.

3.10 Polinômios em n Variáveis

Para compreensão da prova do TFA, vamos apresentar alguns resultados acerca de polinômios simétricos. Antes disso, vamos definir polinômios em n variáveis com coeficientes em um corpo F qualquer.

Definição 3.46: Seja F um corpo (veja a Definição 3.5). Um polinômio em n variáveis $f(x_1, \dots, x_n)$ é uma combinação linear de produtos de variáveis pertencentes ao conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ com coeficientes em F.

Exemplo 3.47:

a) $F = \mathbb{C}$. Considere $f(x_1, x_2) = (i+1)x_1x_2 + {x_1}^2x_2 - 3x_1{x_2}^3$.

b) $F = \mathbb{R}$. Considere $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$.

Definição 3.48: Chamam-se *polinômios simétricos*, aos polinômios em que podemos permutar as variáveis entre si e o polinômio não se altera.

Em outras palavras, considere S_n o grupo simétrico de todas as permutações dos n primeiros números naturais $\{1, 2, \dots, n\}$. Dado um polinômio $f(x_1, x_2 \dots, x_n)$, f satisfaz a Definição 3.48 se, $\forall \sigma \in S_n$, temos:

$$f = \left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} \dots, x_{\sigma(n)}\right) = f(x_1, x_2 \dots, x_n).$$

Exemplo 3.49:

a) Seja $f(x, y) = x + y$. Se $x + y = y + x$, logo $f(x, y) = f(y, x)$, portanto f é simétrico.

b) Seja $f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$. Temos que $f(x_1, x_2)x_1x_2 - x_2x_1 \neq x_2x_1 - x_1x_2 = f(x_2, x_1)$, logo $f(x_1, x_2) \neq f(x_2, x_1)$, portanto f não é simétrico.

c) Seja $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$. Temos que $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_2x_1 + x_2x_3 + x_1x_3$, logo $f(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, x_1, x_3)$, portanto f é simétrico.

Para mais detalhe sobre polinômios simétricos vejam as referencias Hitomi (2014) e Martins (2014).

A seguir, apresentamos uma das classes mais importantes de polinômios simétricos

$$\begin{aligned}
e_0(z_1, \dots, z_n) &= 1 \\
e_1(z_1, \dots, z_n) &= z_1 + \dots + z_n, \\
e_2(z_1, \dots, z_n) &= \textstyle\sum_{i<j} z_i z_j, \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

$$e_j(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i_i < i_2 < \dots < i_j} z_{i_i} z_{i_2} \dots z_{i_j},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$e_n(z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^{n} z_i.$$

Esses polinômios são chamados de polinômios simétricos elementares e são os coeficientes da equação geral de grau n nas indeterminadas $z, z_1, \dots, z_n$:

$$F(z, z_1, \dots, z_n) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) =$$

$$z^n - e_1(z_1, \dots, z_n) z^{n-1} + e_2(z_1, \dots, z_n) z^{n-2} + \dots (1)^j e_j(z_1, \dots, z_n) z^{n-j} + \dots + (-1)^n e_n(z_1, \dots, z_n).$$

Baseamo-nos na referencia *Das Simetrias à Teoria de Galois,* IME – Unicamp.

Exemplo 3.50: Os coeficientes de $Q_t(z)$ são polinômios simétricos nas variáveis z_i e z_j com coeficientes reais, veja abaixo para $1 \leq i < j \leq 3$:

$$Q_t(z) = \prod_{1 \leq i < j \leq 3} \left(z - z_i - z_j - t z_i z_j\right) = (z - z_1 - z_2 - t z_1 z_2)(z - z_1 - z_3 - t z_1 z_3) =$$

$$= (z - z_2 - z_3 - t z_2 z_3) = Q_t(z, z_1, z_2, z_3).$$

3.11 Raízes Conjugadas

Destacamos esse subtítulo como parte fundamental para a demonstração do TFA.

Teorema 3.51: Se uma equação polinomial $P(x) = 0$ de grau n e coeficientes reais admitir como raiz o número complexo $z = a + bi \ \ (b \neq 0)$, então essa equação também admite como raiz o conjugado de z, o número $\bar{z} = a - bi$. Sendo assim,

$$P(z) = 0 \ \Rightarrow P(\bar{z}) = 0.$$

Demonstração: Seja a equação $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, onde seus coeficientes são reais e z é raiz de $P(x)$, isto é, $P(z) = 0$.

Provemos que o conjugado de z também é raiz dessa equação, isto é, $P(\bar{z}) = 0$:

Primeiro, lembrando que:

a) O conjugado de um número real puro a é o próprio número a sem alteração $(\bar{a} = a)$.

b) Pela Observação 3.9,

$$\begin{cases} Im \cdot Re = Im \\ Im + Re = Im. \end{cases}$$

c) Pelo Teorema 3.18:

$$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n, \forall n \in \mathbb{N} \ e \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Verificando $\bar{z}$ na equação, temos:

$$P(\bar{z}) = a_n(\bar{z})^n + a_{n-1}(\bar{z})^{n-1} + \ldots + a_1\bar{z} + a_0 =$$

$$= a_n\overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \ldots + a_1\bar{z} + a_0 =$$

$$= \bar{a}_n\overline{z^n} + \bar{a}_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \ldots + \bar{a}_1\bar{z} + \bar{a}_0 =$$

$$= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 x} + \overline{a_0} =$$

$$= \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} = \overline{P(z)} = \bar{0} = 0 \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.52: Se uma equação $P(x) = 0$ de coeficientes reais admite a raiz $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ com multiplicidade m, então essa equação admite a raiz $\bar{z} = a - bi$ com multiplicidade m' $(m = m')$. Logo, P é divisível por $(x - z)^{\mathrm{m}}$, $(x - \bar{z})^{\mathrm{m}'}$ e $(x - z)^{\mathrm{m}} \cdot (x - \bar{z})^{\mathrm{m}'}$.

Observação 3.53: Esses dois teoremas das raízes conjugadas nos garantem que:

- Se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar, então ela admite um número ímpar de raízes reais. Pois o número de raízes complexas e não reais é par.
- As raízes complexas não reais necessariamente aparecem conjugada e aos pares. Equações de grau ímpar sempre terão uma raiz real;
- A multiplicidade da raiz conjugada é igual a da raiz original.

Exemplo 3.54: Resolver a equação $x^3 - 2x^2 + 5x - 10 = 0$, sabendo que uma das raízes é $i\sqrt{5}$.

Pelo Teorema 3.51, sabemos que o conjugado de $i\sqrt{5}$ é raiz da equação, portanto, $-i\sqrt{5}$ é raiz da equação.

Considerando a Definição 3.38 da divisão e o Teorema 3.52 da multiplicidade da raiz conjugada, onde diz que a equação é divisível por $(x - z)^{\mathrm{m}} \cdot (x - \bar{z})^{\mathrm{m}'}$, temos:

$$\left(x - i\sqrt{5}\right) \cdot \left(x + i\sqrt{5}\right) = x^2 + 5$$

Logo:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x^2 + 5x - 10 & x^2 + 5 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3 \quad\;\; - 5x} & x - 2 \\ \quad -2x^2 - 10 & \\ \quad \underline{\;\; 2x^2 + 10} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Portanto, $x^3 - 2x^2 + 5x - 10 = \left(x - i\sqrt{5}\right) \cdot \left(x + i\sqrt{5}\right) \cdot (x - 2)$, onde temos as raízes do polinômio $x_1 = i\sqrt{5}$, $x_2 = -i\sqrt{5}\ e\ x_3 = 2$, conj. solução: $S = \left\{i\sqrt{5}, -i\sqrt{5}, 2\right\}$.

3.12 Corpo de Decomposição de um Polinômio

Nesta seção, veremos sobre corpo de decomposição de um polinômio, conceito importante para a prova do TFA.

Definição 3.55: Sejam F um corpo (veja a Definição 3.5) e $f(x)$ um polinômio qualquer com coeficientes em F. Dizemos que o corpo E é um corpo de decomposição do polinômio $f(x)$ se $E = F(\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n)$, onde $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$são as raízes de f.

Em outras palavras, o corpo E contem F e Toda as raízes de $f(x)$.

Assim,

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} k(x - \alpha_i)$$

tal que $k \in F$ é uma constante.

Pelo Lema 3.32 Fernandes (2016) esse corpo sempre existe.

Para mais detalhes das definições e resultados recomendamos Fernandes (2016).

Exemplo 3.56:

a) Seja $f(x) = x^2 + 1 \ \in \mathbb{R}[x]$.

Temos:

$$f(x) = 0$$

$$x^2 + 1 \Longrightarrow x^2 = -1.$$

$$\text{Raizes: } x_1 = i, x_2 = -i \notin \mathbb{R}.$$

Logo:

$$\underbrace{\mathbb{R}(i, -i)}_{\text{Corpo de decomposição.}} = \mathbb{R}(i) = \underbrace{\{a + bi;\ a, b \in \mathbb{R}\}}_{\text{Um corpo.}} = \mathbb{C}.$$

Note que o corpo $\mathbb{C}$ contém todas as raízes de f.

b) Seja $f(x) = x^2 - 2 \ \in \mathbb{Q}[x]$,

Temos:

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 2 \Longrightarrow x^2 = 2.$$

$$x = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Logo:

$$\underbrace{\mathbb{Q}(\pm\sqrt{2})} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \underbrace{\{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{R}\}}.$$

Note que o corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ contém todas as raízes de f.

4 TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

A partir do século XVI grandes matemáticos tentaram demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra, Peter Roth (1580-1617) foi o primeiro a formular escrita deste teorema em seu livro *Arithmetica Philosophica* (Aritmética Filosófica), de 1600, onde ele afirma que uma equação tem no máximo tantas raízes quanto seu grau (CARMO; EDUARDO; WAGNER, 1992). Segundo Roque (2012), em 1629 o francês Albert Girard no seu livro *Invention nouvelle en algèbre* (Nova invenção em Álgebra) publicou que “todas as equações possuem tantas soluções quanto o grau da quantidade de maior grau”.

Mas só em 1748 foi posto a primeira demonstração do TFA, pelo matemático francês D’Alembert (1717-1783), cujo teorema diz que “todo polinômio $p(z)$ com coeficientes reais possui uma raiz complexa”. Mas sua prova continha um erro que só em 1851 foi corrigido pelo francês Victor Puiseux (1820-1883) (EVES, 2011).

Em 1772 o matemático italiano Lagrange (1736-1813) publicou uma demonstração do TFA a partir de um trabalho de Euler sobre produto de fatores lineares e quadráticos, porém, a prova de Lagrange estava incompleta (CARMO; EDUARDO; WAGNER, 1992).

Somente em 1799 a primeira demonstração correta do *Teorema Fundamental da Álgebra* foi publicada, aos 22 anos de idade, Gauss (1777-1855) apresenta em sua tese de doutorado, na Universidade de Helmstadt, a demonstração, intitulada *“Nova Demonstração do Teorema que Toda Função Algébrica Racional Inteira em uma Variável pode ser Decomposta em Fatores Reais de Primeiro ou Segundo Grau”*, na qual ele utilizou propriedades topológicas da reta e do plano.

Na terceira prova (1816) de Gauss, ele utilizou integrais complexas. Ele adorava esse teorema, tendo publicado sua quarta demonstração com o enunciado para polinômios com variável e coeficientes complexos. Outra demonstração foi encontrada entre seus papéis depois da sua morte. Em 2009, o holandês Theo de Jong publicou uma demonstração modernizada da prova de Gauss, na qual sua apresentação usa o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (EVES, 2011; STRUIK, 1992).

O Teorema Fundamental da Álgebra nos garante que todo polinômio não constante de grau n com coeficientes complexos tem ao menos uma raiz complexa.

Antes da demonstração do TFA, apresentamos uma série de resultados necessários para a sua demonstração.

Lema 4.1: Todo polinômio de coeficientes reais de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

Demonstração: veja os teoremas 3.51 e 3.52.

Isto é, se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar, então, o número de raízes complexas e não reais é par. As raízes complexas não reais necessariamente aparecem conjugadas e aos pares.

$$P(z) = 0 \ \Rightarrow P(\bar{z}) = 0.$$

Lema 4.2: Se a, $b \in \mathbb{R}$ quaisquer, então existem dois números complexos z_1 e z_2 tais que:

$$P(z) = z^2 + az + b = (z - z_1)(z - z_2), \forall z \in \mathbb{C}.$$

Demonstração: Dado um polinômio mônico:

$$\begin{aligned} w = P(z) &= z^2 + az + b \\ &= \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} \\ &= \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{4b - a^2}{4} \end{aligned}$$

Se $w = 0$, então

$$\left(z + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\Delta}{4}$$

$$z + \frac{a}{2} = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{4}$$

$$z = \frac{a \pm \sqrt{\Delta}}{4}.$$

Se o discriminante $\Delta = a^2 - 4b \ \geq 0$, então w possui duas raízes reais:

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-a + \sqrt{\Delta}}{2} \\ z_2 = \dfrac{-a - \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$$

Temos que:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{-a + \sqrt{\Delta} - a - \sqrt{\Delta}}{2} = -\dfrac{2a}{2} = -a \\ z_1 \cdot z_2 = \dfrac{\left(-a + \sqrt{\Delta}\right) \cdot \left(-a - \sqrt{\Delta}\right)}{2 \cdot 2} = \dfrac{a^2 - \Delta}{4} = \dfrac{a^2 - (a^2 - 4b)}{4} = b \end{cases}$$

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, e assim

$$(z - z_1)(z - z_2) =$$
$$z^2 - zz_2 - z_1 z + z_1 z_2 =$$
$$z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 \cdot z_2 =$$
$$z^2 - (-a)z + b =$$
$$z^2 + az + b.$$

Sabemos que w tem duas raízes z_1e z_2 se o discriminante $\Delta \geq 0$, assim, para o descriminante $\Delta < 0$, temos:

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-a + \sqrt{\Delta}}{2} \\ z_2 = \dfrac{-a - \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases} .\ Como, -\Delta > 0, \text{temos} \begin{cases} z_1 = \dfrac{-a + i\sqrt{-\Delta}}{2} \\ z_2 = \dfrac{-a - i\sqrt{-\Delta}}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{-a + i\sqrt{-\Delta} - a - i\sqrt{-\Delta}}{2} = -\dfrac{2a}{2} = -a \\ z_1 \cdot z_2 = \dfrac{\left(-a + i\sqrt{-\Delta}\right) \cdot \left(-a - i\sqrt{-\Delta}\right)}{2 \cdot 2} = \dfrac{a^2 - \Delta}{4} = b. \end{cases}$$

$\Delta < 0$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, e portanto,

$$(z - z_1)(z - z_2) =$$
$$z^2 - zz_2 - z_1 z + z_1 z_2 =$$
$$z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 \cdot z_2 =$$
$$z^2 - (-a)z + b =$$
$$z^2 + az + b.$$

Portanto, provamos que tanto para $\Delta \geq 0$ e $\Delta < 0$ existem duas raízes z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$ tal forma podemos decompor esse polinômio $z^2 + az + b =$ $= (z - z_1)(z - z_2)$ ■

Lema 4.3: Seja $Q: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ um polinômio, onde $\overline{Q(z)} = Q(\bar{z}), \forall z \in \mathbb{C}$. Então, os coeficientes de Q são reais.

Demonstração: Para todo $z \in \mathbb{C}$, temos

$$\overline{Q(z)} = Q(\bar{z}) \Longrightarrow$$
$$\overline{\overline{Q(z)}} = \overline{Q(\bar{z})} \Longrightarrow$$
$$Q(z) = \overline{Q(\bar{z})}.$$

Verificando na equação, temos:

$$Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 =$$
$$\overline{a_n (\bar{z})^n + a_{n-1} (\bar{z})^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0} =$$

$$\bar{a}_n\overline{\overline{z^n}} + \bar{a}_{n-1}\overline{\overline{z^{n-1}}} + \ldots + \bar{a}_1\bar{\bar{z}} + \bar{a}_0 =$$

$$\bar{a}_n z^n + \bar{a}_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \bar{a}_1 z + \bar{a}_0 =$$

Concluímos que:

$a_n = \overline{a_n}, \ldots, a_1 = \bar{a}_1,\ a_0 = \bar{a}_0$, isto é, $a_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,\ldots,n.$ ■

Observação: Se um polinômio $P(z)$ tem coeficientes complexos $P: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \mapsto P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, com $a_i \in \mathbb{C}, i = \{1,2,\ldots,n\}$,

Lema 4.4: O polinômio $Q(z) = P(z) \cdot \overline{P(\bar{z})}$ tem coeficientes reais.

Demonstração: Temos para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$Q(z) = P(z) \cdot \overline{P(\bar{z})}$$

$$\overline{Q(z)} = \overline{P(z) \cdot \overline{P(\bar{z})}}$$

$$= \overline{P(z)} \cdot P(\bar{z})$$

$$= Q(\bar{z})$$

Se $\overline{Q(z)} = Q(\bar{z})$, então pelo Lema 4.3, Q possui coeficientes reais. ■

Note que, se $z_0 \in \mathbb{C}$ é raiz de $Q(z)$, então z_0 ou $\bar{z}_0$ é raiz de $P(z)$, temos que:

$$Q(z) = P(z) \cdot \overline{P(\bar{z})}$$

$$0 = Q(z_0) = P(z_0) \cdot \overline{P(\overline{z_0})}$$

$$\Leftrightarrow P(z_0) = 0 \text{ ou } \overline{P(\overline{z_0})} = 0, P(\overline{z_0}) = \bar{0} = 0$$

4.1 Demonstração Algébrica do TFA

Teorema 4.5: (Teorema Fundamental da Álgebra) Todo polinômio complexo de grau $n \geq 1$ possui pelo menos uma raiz complexa.

Demonstração: Tomemos o polinômio $Q(z) = P(z) \cdot \overline{P(\bar{z})}$. Pelo Lema 4.3, vimos que $Q(z)$ tem coeficientes reais e que se z_0 é raiz de $Q(z)$, então z_0, ou seu conjugado, é raiz de $P(z)$. Desta forma, podemos demonstrar o teorema para um polinômio de coeficientes reais.

Vamos demonstrar o teorema por indução ao maior inteiro não negativo k, tal que 2^k divide o grau n de $P(z), n = \partial P$.

Lembrando que, pela Seção 3.9 o $\partial P \geq 1$. Veja que, o conjunto $A = \{k \in \mathbb{Z},\ 2^k | n,\ k \geq 0\}$ é não vazio, pois $0 \in A$, e é limitado superiormente. Usando o PMI (Principio do maior inteiro) todo conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$, limitado superiormente possui maior inteiro.

Vamos fazer Indução em k.

Para $k = 0$, temos

$$n = 2^0 m = m.$$

Como m é ímpar, $n = \partial P$ é ímpar. Pelos Teoremas 3.51 e 3.52, vimos que todo polinômio de grau impar admite ao menos uma raiz real, portanto, complexa.

Agora, considere $k > 0$ e $n = 2^k m$, com m ímpar, e suponha que o teorema é valido para todos os polinômios de grau $n = 2^{k-1}m',\ m'$ ímpar.

Considere F um corpo que contém $\mathbb{C}$ e as raízes de $P(z)$ (corpo de decomposição, veja a Definição 3.55). Então, existem elementos $z_1, z_2 \dots, z_n \in F$ tais que

$$P(z) = \textstyle\prod_{i=1}^{n}(z - z_i) = (z - z_1)\dots(z - z_n). \qquad (1)$$

Defina o seguinte polinômio

$$Q_t(z) = \prod_{1 \leq i \leq j < n} \left(z - z_i - z_j - t z_i z_j\right), \text{com } t \in \mathbb{R}.$$

(Veja a Subseção 3.10 sobre polinômios simétricos) Como $P(z)$ é simétrico, pela equação (1), temos

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) =$$
$$= z^n - e_1(z_1, \dots, z_n)z^{n-1} + e_2(z_1, \dots, z_n)z^{n-2} + \dots + (-1)^n e_n(z_1, \dots, z_n),$$

onde os polinômios $e_i s$ são os polinômios simétricos elementares.

Por outro lado,

$$P(x) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \qquad a_i \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} 1 &= a_n \\ -e_1(z_1, \dots, z_n) &= a_{n-1} \\ +e_2(z_1, \dots, z_n) &= a_{n-2} \\ \vdots \qquad & \qquad \vdots \\ (-1)^n e_n(z_1, \dots, z_n) &= a_0 \end{aligned} \qquad (2)$$

$P(z)$ é um polinômio simétrico com coeficientes reais $a_i \in \mathbb{R}$, temos por $\mathbb{R} \ni a_{n-j} = (-1)^j e_j(z_1, \dots, z_n)$, então $e_j(z_1, \dots, z_n)$ são números reais.

Como $Q_t(z)$ é também simétrico nas variáveis z_i e z_j, é possível mostrar que os seus coeficientes dependem dos polinômios simétricos elementares dados em (2). Logo, Q_t possui coeficientes reais e tem grau igual a $\frac{n(n-1)}{2} = 2^{k-1}m(n-1)$, onde $m(n-1)$ é ímpar. De fato, veja que o grau de $Q_t(z)$ é a quantidade de pares (i, j) tais que $1 \leq i < j \leq n$, que é dado pela soma $1 + 2 + \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$. Como $n = 2^k m$, com

m ímpar, segue que $\partial Q_t = 2^{k-1}m(n-1)$, com $m(n-1)$ ímpar. Então, pela hipótese de indução, Q_t tem alguma raiz real. Digamos, $z_i + z_j + tz_iz_j$ é real, raiz de Q_t associado aos elementos distintos $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Como existem uma quantidade finita de pares (i, j), $i < j$, é possível encontrar números reais distintos t e s tais que $z_i + z_j + tz_iz_j$ e $z_i + z_j + sz_iz_j$ sejam reais, associado ao mesmo par (i, j), i e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Consequentemente, tanto a soma, quanto o produto entre z_i e z_j são números reais, pois

- $(z_i + z_j + tz_iz_j) - (z_i + z_j + sz_iz_j) = (t-s)z_iz_j \in \mathbb{R} \Rightarrow z_iz_j \in \mathbb{R}$,
- $z_i + z_j = z_i + z_j + tz_iz_j - tz_iz_j \in \mathbb{R}$.

Observa-se que pelo Lema 4.2 as raízes do polinômio

$$z^2 - (z_i + z_j)z + z_i \cdot z_j$$

são complexos. Concluímos que z_i e z_j são números complexos, pois são as raízes desse polinômio.

Portanto, z_i e z_j são as raízes complexas $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ do polinômio

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

o que conclui a prova do TFA. ■

O Teorema da decomposição é uma aplicação do TFA. Onde nos garante que todo polinômio $P(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$, $a \neq 0$ de grau $n \geq 1$ pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, isto é $P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$, em que $z_1, z_n \dots z_n$ são as raízes complexos de P.

A demonstração pode ser vista em Iezzi (2013) p.105.

Veja que pelo Teorema da decomposição todo polinômio P com grau $n \geq 1$ e coeficientes em $\mathbb{C}$, as n raízes de P são números complexos. Isso mostra que o corpo dos complexos é algebricamente fechado.

Baseamos na demonstração apresentada na dissertação do Salvado (2016), *Teorema Fundamental da Álgebra: Ferramentas para Demonstrar para Alunos do Ensino Médio*.

CONCIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, com muita pesquisa e estudo procuramos investigar a história dos números imaginários, objetivamos em trazer a conjuntura que proporcionou seu surgimento, compreendendo a linguagem utilizada na época e apresentando alguns matemáticos que contribuíram com o desenvolvimento e a construção dos números complexos.

Desta forma, esta pesquisa buscou aprofundar nos estudos da teoria dos números complexos. Provamos que os números complexos seguem as regras da álgebra e da aritmética, eles não são apenas um número aleatório - eles são a extensão natural do conjunto dos reais, assim, mostramos que o conjunto dos complexos é um corpo. Portanto, esses resultados nos ofereceram estrutura para a construção e consolidação do Teorema Fundamental da Álgebra, na qual chegamos ao resultado final que, o conjunto dos números complexos contém ao menos uma raiz complexa para polinômios de coeficientes complexos de grau $n \geq 1$, portanto, o corpo dos complexos é algebricamente fechado.

Diante desta pesquisa foram encontradas variedades de demonstrações do TFA, todas encontradas com demonstrações diretas, sem detalhamentos, portanto, acessível somente para quem teve oportunidade de estudar mais aprofundado em tais áreas. Diante disso, buscamos como objetivo principal trazer uma demonstração algébrica do TFA com rigor exigido da escrita matemático, mas, acessível para pessoas com conhecimentos em Álgebra. Acredito que será de grande contribuição para o campo cientifico, e diretamente para estudantes dos cursos de exatas.

Portanto, concluímos que o número complexo, o último conjunto numérico a ser aceito e formalizado, não só apenas completou a Matemática, mas nos trouxe ferramentas extremamente consideráveis para o avanço da ciência e engenharia.

REFERÊNCIAS

ARAGONA, J. e OLIVEIRA, O. R. B. **Números Complexos.** s.d. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP). Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~oliveira/ComplexosCap1.pdf>. Acesso em: 2 de maio de 2022.

BOYER, C. B., 1906. **Historia da Matemática.** tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, Ed. Da Universidade de São Paulo,. 1974. 487 p.

CARMO, M. P., MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria Números Complexos.** Coleção Professor de Matemática. IMPA-VITAE, 1992, 122 p.

CHAMBERS, P. e TIMLIN, R. **Ensinando matemática para adolecente.** 2ª. ed. Porto Alegre: Penso, 2015, 288 p.

CHAQUIAM, M. **Ensaios Temáticos: História e Matemática em Sala de Aula.** 1ª. ed. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017, 241 p.

COMMONS, W. **File: Carl Friedrich Gauss.jpg - Wikimedia Commons, the free media repository**. 2018. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg&oldid=286337627>. Acesso em: 5 de abril de 2022.

COMMONS, W. **File: Francois Viete.jpg- Wikimedia Commons, the free media repository**. 2018. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Francois_Viete.jpeg>. Acesso em: 5 de abril de 2022.

COMMONS, W. **File: Girolamo Cardano.jpg - Wikimedia Commons, the free media repository**. 2011. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Girolamo_Cardano.jpg&oldid=55612594>. Acesso em: 5 de abril de 2022.

COMMONS, W. **File: Niccolò Tartaglia Quesiti et inventioni diverse.jpg - Wikimedia Commons, the free media repository**. 2018. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Niccol%C3%B2_Tartaglia_Quesiti_et_inventioni_diverse.jpg>. Acesso em: 5 de abril de 2022.

CONWAY, J. B. **Funções de uma variável complexa**. Tradução nossa. New York: Springer-Verlag, 1978. Titulo original: Functions of one complex variable.

COSTA, A. I. S. **Uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra**. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/8723>. Acesso em: 17 de abril de 2022.

D'AMBROSIO, U. **A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática.** Pesquisa em Educação

Matemática: Concepções & Perspectivas, org. Maria Aparecida Viggiani Bicudo. Editora UNESP, São Paulo, 1999, 97-115 p.

D'AMBROSIO, U. **História da Matemática e Educação**. In: Cadernos CEDES 40. 1ª ed. Campinas, SP: Papirus, 1996.

Das Simetrias à Teoria de Galois. s.d. IME–Unicamp. 7 p. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~engler/notas1ma673.pdf>. Acesso em: 20 de junho de 2022

ERNEST, P. **The Philosophy of Mathematics education: studies in Matheatics educaion.** Basingstok: Fale, 1991.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** 5ª. ed. São Paulo: Unicamp, 2011.

FARAGO, J. L. **Do ensino da História da Matemática à sua contextualização para uma aprendizagem significativa.** Dissertação de Mestrado. UFSC, FLORIANÓPOLIS, 2003.

FERNANDES, L. S. **Polinômios, Corpos de Decomposição e uma Introdução à Teoria de Galois.** 2016. Monografia (título de Especialista em Matemática) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Belo Horizonte, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/EABA-ACAHA3/1/monografia_leandro.pdf>. Acesso em: 10 de junho de 2022.

GARBI, G. G. **O Romance Das Equações Algébricas.** 3ª. ed. São Paulo: Livraria da Fisica, 2009, 843 p.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

HITOMI, E. **O Teorema Fundamental para Polinômios Simétricos.** 2014, Monografia - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/Eduardo2_AC_2014.pdf>. Acesso em: 2 de maio.

IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar: Complexos, polinômios e equações**. vol. 6. 8ª. ed. São Paulo: Atual, 2013, 249 p.

LINGARD, D. **The history of mathematics: an essential component of the mathematics.** Tradução nossa. Vol. 56. Inglaterra: Journal - The Australian mathematics teacher, 2000.

MacTutor History of Mathematics. **File: Rafael Bombelli.** 2000. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bombelli/>. Acesso em: 5 de abril de 2022.

MANUAL DE NORMALIZAÇÃO PARA ELABORAÇÃO DE TRABALHOS ACADÊMICO-CIENTÍFICOS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS. 2ª.

ed. Elaboração: Fundação Universidade Federal do Tocantins - Sistema de Bibliotecas (SISBIB). Palmas: UFT, 2022, 72 p.

MARTINS, M. F. **O Teorema Fundamental sobre Polinômios Simétricos.** 2014, Monografia - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/Michel2_AC_2014.pdf>. Acesso em: 2 de maio de 2022.

NAHIN, P. J. **An imaginary tale : the story of $\sqrt{-1}$.** Tradução nossa. Princeton, Nova Jersey: Princeton University Press, 1998.

NETO, A. L. **Funções de uma variável complexa**. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

ROQUE, T. **História da Matemática - Uma Visão Crítica, Desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: ZAHAR, 2012, 511 p.

SALVADO, C. D. **Teorema Fundamental da Álgebra: Ferramentas para Demonstrar para Alunos do Ensino Médio.** 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, Brasil. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/TCC_Claudio_Salvado.pdf>. Acesso em: 2 de maio de 2022.

SILVA, B. P. **Construção dos Números Reais por Sequência de Cauchy e Corte de Dedekind.** 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/13213/1/Arquivototal.pdf>. Acesso em: 1 de junho de 2022.

STEWART, I. **17 Equacoes Que Mudaram o Mundo**. Tradução: George Schlesinger. Londres: ZAHAR, 2013.

STRUIK, D. J. **Historia Concisa da Matemática**. Tradução de João Cosme S. Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1992.

TEGMAR, M. **Parallel Universes**. In: Barrow, J.D., Davies, P.C.W., & Harper, C.L. Science and Ultimate Reality: From Quantum to Cosmos. New York: Cambridge University Press, 2003. Disponível em: <https://space.mit.edu/home/tegmark/multiverse.pdf>. Acesso em: 2 de junho de 2022.