UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GABRIEL ROCHA MAGALHÃES

FUNÇÃO W DE LAMBERT:
PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Arraias (TO)
2022

GABRIEL ROCHA MAGALHÃES

FUNÇÃO W DE LAMBERT: PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Monografia avaliada e apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário Dr. Sérgio Jacintho Leonor, curso de Licenciatura em Matemática para obtenção do título de licenciado em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: Prof. Dr. Élis Gardel da Costa Mesquita.

Arraias (TO)
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

M188f Magalhães, Gabriel Rocha .

Função W de Lambert: propriedades e aplicações. . / Gabriel Rocha Magalhães. – Arraias, TO, 2022.

42 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2022.

Orientador: Élis Gardel da Costa Mesquita

1. Constante Ômega. 2. Equações transcendentais. 3. Funções transcendentais . 4. Função W de Lambert. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

GABRIEL ROCHA MAGALHÃES

FUNÇÃO W DE LAMBERT: PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor, Curso de Licenciatura em Matemática foi avaliado para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Data de aprovação 14 / 02 / 2022

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
gov.br ELIS GARDEL DA COSTA MESQUITA
Data: 05/07/2022 15:28:55-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Élis Gardel da Costa Mesquita, UFT

Orientador

Documento assinado digitalmente
gov.br GISELE DETOMAZI ALMEIDA
Data: 05/07/2022 17:21:59-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Profª. Dra. Gisele Detomazi Almeida, UFT

Examinadora 1

Documento assinado digitalmente
gov.br THIAGO RODRIGUES CAVALCANTE
Data: 06/07/2022 11:22:39-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Thiago Rodrigues Cavalcante, UFT

Examinador 2

Dedico este trabalho à toda comunidade acadêmica de exatas, ao qual sei que apreciam, contribuem e enriquecem todo conhecimento matemático existente.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus, acima de tudo, pelas oportunidades na vida e por ser o guia de todos os meus passos trilhados até aqui. Agradeço à Deus por ser a base mais sólida dos meus princípios e valores, da minha força e da minha fé.

Agradeço aos meus pais Gelson Crispim da Rocha e Lucilene Alves Magalhães da Rocha, por todo apoio dado para que eu continuasse estudando, e pelo reconhecimento do esforço cedido por mim em toda minha trajetória de estudante. Agradeço a eles pela criação admirável que tive, por todo aprendizado valioso que me deram, por terem me ensinado sobre o respeito, honestidade, integridade, ética e moral, apenas com o exemplo de suas atitudes.

Agradeço às minhas irmãs Suelen Rocha Magalhães e Wigna Suyane Rocha Magalhães por terem me ajudado, na medida do possível, sempre que precisei. Agradeço a elas por sempre terem me dado o maior apoio para que eu prosseguisse estudando e por compreenderem cada dificuldade minha.

Agradeço a minha namorada Luciana Martins Gonzaga, que, quando me encontrei angustiado e desamparado, trouxe calmaria, apoio e teve compreensão sobre meus problemas. Agradeço a ela por estar ao meu lado quando eu me perdia diante a algumas dificuldades e aflições, e por ter me dado o prazer de mostrar que a vida é bem melhor quando se é compartilhada com alguém especial que acredita em você.

Agradeço aos meus amigos Agenor Xavier, Willians Costa, Victor Manoel, Mauro Machado, Vinícius Braga, Bruno Lima e Matheus Oliver por terem proporcionado momentos descontraídos, momentos que, com a presença exclusiva de cada um deles, se tornaram minha válvula de escape durante alguns momentos difíceis que passei. Agradeço à Deus por essas exclusivas amizades, são as melhores que eu poderia ter.

Agradeço aos meus colegas e amigos da faculdade que, dentro da mesma realidade acadêmica que eu, enfrentaram e compartilharam momentos de euforia e também de angústias. Grato aos que me ajudaram, me fortaleceram e me incentivaram, tanto no papel de colegas de profissão como no papel de amigos, contribuindo diretamente para minha formação.

Agradeço ao meu orientador Dr. Élis Gardel da Costa Mequita, em que me apresentou espontaneamente à função estudada neste trabalho. Agradeço a ele por acreditar no meu potencial, por me incentivar e por, durante todo o processo, ter se apresentado como uma pessoa muito humilde que, cosequentemente, proporcionou uma ótima parceria.

"Não é o conhecimento, mas o ato
de aprender,
não a posse mas o ato de chegar lá,
que concede a maior satisfação."

(Carl Friedrich Gauss)

RESUMO

No presente trabalho, realizamos um estudo acerca da função W de Lambert a qual é definida implicitamente como a inversa da função $f(x) = x \exp x$. Começamos construindo o gráfico de f e em seguida o refletimos em torno da reta $y = x$ a fim de obter o gráfico de W. Fizemos uma apresentação de particularidades da sua lei de formação, do esboço gráfico destacando seu domínio e imagem, uma vez que a mesma é uma função multivalorada, ou seja, definida em ramos. Apresentamos algumas de suas propriedades imediatas e identidades fundamentais, além de um princípio de simplificação. Exibimos alguns valores notáveis e especiais da função, tais como a constante Omega. Estudamos as aplicações da função W na obtenção de soluções para equações transcendentes. Por fim, fazemos também um estudo do cálculo infinitesimal e integral da função W de Lambert.

Palavras chave: Constante Omega. Equações transcendentes. Funções transcendentes. Função W de Lambert.

ABSTRACT

In the present work, we carried out a study on the Lambert function W which is implicitly defined as the inverse of the function $f(x) = x \exp x$. We start by constructing the graph of f and then reflect it around the line $y = x$ in order to obtain the graph of W. We make a detailed presentation of the particularities of its formation law, the graphic outline highlighting its domain and image, since it is a multivalued function, that is, defined in branches. We present some of its immediate properties and fundamental identities, beyond the principle of simplification. We display some notable and special values of the function, such as the Omega constant. We study the applications of the W function in obtaining solutions to transcendental equations. Finally, we also study the infinitesimal and integral calculus of Lambert W function.

Keywords: Omega constant. Lambert W function. Transcendent equations. Transcendental functions.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As funções transcendentais, sendo funções que não podem ser expressas em termos de equações polinomiais, são funções que estão categorizadas numa classe de funções especiais que carregam uma vasta aplicabilidade, sendo útil em soluções de problemas diversos, como exemplo temos as funções mais familiares, como funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Essa classe de funções é aplicada em variadas áreas do conhecimento, como a função logarítmica aplicada na química, em que é usada para determinar o tempo de desintegração de uma substância radioativa; na escala Richter, em que com o uso do logaritmo se calcula a amplitude, epicentro e magnitude de um terremoto; na medicina, quando é utilizada para o cálculo do tempo que um medicamento é metabolizado e eliminado proporcionalmente do corpo humano. Além das funções logarítmicas, as funções trigonométricas também são ferramentas usuais que estão presentes em áreas como geografia, no cálculo de distâncias em mapas, através de paralelos e meridianos; na astronomia, em medições de distâncias de planetas por meio da triangulação; nas engenharias, na medição de peças em série e na análise de comportamentos de séries; presente também na medicina, assim como a função logarítmica, mas para a leitura de eletrocardiogramas.

Notoriamente, as funções transcendentais estão presentes em distintas áreas do conhecimento, e são funções que vão desde abordagens mais simples até a aplicações mais complexas, sendo ferramentas exclusivas para a resolução de determinados problemas, e dentro dessa classe de funções transcendentais elementares, existe uma função conhecida como a função W de Lambert que será o objeto de estudo deste trabalho.

Embora não seja tão usual ou familiar como as funções transcendentais apresentadas anteriormente, a função W de Lambert é uma função também especial que tem variadas aplicações em situações problemas em física e outras áreas afins, além disso, é por vezes ferramenta única de soluções de problemas mais complexos. Assim como a função logarítmica, esta função não trivial é também a inversa de uma outra função que veremos adiante, ao qual sua natureza oferece propriedades a serem estudadas minuciosamente.

A função W de Lambert é uma função transcendental elementar definida implicitamente.

Originalmente, sua definição inicial teve aparição no trabalho publicado por de Johann Heinrich Lambert, em 1758, e posteriormente estudada por Euler, em 1779 (CORLESS et al., 1996). Embora historicamente tenha chamado a atenção de matemáticos renomados, a função não teve uma abordagem clara na qual seus valores notáveis, aplicações e propriedades imediatas fossem devidamente evidenciados. Foi em meados da década de 90, quando Corless (CORLESS et al., 1996) e sua equipe estudaram e obtiveram resultados surpreendentes, que a mesma foi reconhecida como uma função especial pertencente a um grupo de funções com uma ampla gama de aplicações.

Introduzimos a função W de Lambert utilizando a abordagem histórica para seu surgimento, isto é, através de soluções da equação transcendente $y \exp y = x$. A procura por soluções desta equação nos leva à definição da função W de Lambert como a inversa da função $f(x) = x \exp x$, ou seja, se denotamos a função W de Lambert por $W(x)$, então ela satisfaz

$$W(x)e^{W(x)} = x,$$

para certos valores x. Veja (CORLESS et al., 1993).

Esta função despertou o interesse da comunidade científica devido à sua aplicabilidade em várias áreas da Matemática e das Ciências da Natureza. Suas aplicações mais destacadas são elencadas a seguir. Pólya usou a função W e a inversão de Lagrange para deduzir uma expressão para o número de árvores enraizadas em um número dado de pontos marcados; o problema da torre exponencial ou exponencial iterada, o qual consiste em estudar sua convergência, para valores específicos de x; estudo de soluções de equações diferença-diferenciais com retardamento da forma $\dot{y}(t) = ay(t-1)$, as quais são utilizadas no estudo de estabilidade de equações diferenciais não lineares com retardamento; a equação de Volterra para crescimento populacional; o estudo do comportamento assintótico de raízes de equações polinomiais; estudo de epidemias; análise de algoritmo, entre outros (CORLESS et al., 1996), (STEWART, 2005), (KNOEBEL, 1981).

Neste trabalho fizemos um estudo acerca da função W de Lambert. Mais precisamente, exibimos seu domínio e imagem através de representação gráfica dando ênfase ao fato da existência de ramificações. Nossa abordagem de estudo tem caráter qualitativo visando apresentar propriedades elementares, valores notáveis e algumas aplicações. Para isso, o trabalho possui a seguinte organização.

No capítulo 2 apresentamos conceitos e definições básicas necessários ao entendimento do trabalho.

No capítulo 3, apresentamos a definição da função W de Lambert. Exibimos a construção e comportamento do gráfico dando ênfase ao surgimento de ramificações. Após introduzirmos a função, apresentaremos suas principais propriedades, alguns valores notáveis e a constante ômega.

No capítulo 4, apresentamos aplicações da função W de Lambert como solução de equações transcendentes. A abordagem é feita através de exemplos, no qual cada exemplo é a resolução de uma equação transcendente.

No capítulo 5, apresentamos o cálculo infinitesimal da função W de Lambert. Mais precisamente, obtemos expressões para a derivada e integral da função W de Lambert e outras funções correlacionadas.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo estudamos, de forma sucinta, alguns tópicos de Matemática que são necessários tanto à confecção quanto ao entendimento do trabalho. A ideia é fazer um estudo sobre a função apresentando sua ampla abordagem, mas com o texto o mais autocontido possível. As referências que seguimos serão destacadas à medida que formos avançando nas seções do capítulo.

2.1 Funções Inversíveis

Nesta seção, relembramos a definição de função inversa bem como alguns critérios de inversibilidade de funções a valores reais. Nossa principal referência é o livro (STEWART, 1999).

Informalmente, podemos considerar que quando um ponto do domínio de uma função qualquer assume a mesma imagem de outro ponto desse mesmo domínio, temos que essa função não possui uma inversa. Graficamente falando, temos que se, no esboço do gráfico de uma função dada, houver uma reta horizontal (paralela ao eixo x) em que o gráfico da função faça mais que uma interseção com a mesma, essa função não é inversível. A razão para isso é que o ponto da imagem associado aos dois pontos do domínio passará a ser um ponto do domínio da suposta função inversa, associado a dois pontos da imagem, o que contraria a definição de função.

Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$.

Definição 2.1 Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é inversível (possui inversa), quando existe uma função $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_X$ e $g \circ f = \mathrm{id}_Y$ (id=função identidade).

Ou seja, o que era domínio na função original (o conjunto X) vira imagem da função inversa, e o que era imagem da função original (Y) vira domínio.

A notação usual para a inversa é: $g = f^{-1}$.

Exemplo 2.2 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$. Perceba que quando os valores do domínio são $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$, as imagens são $f(x_1) = f(x_2) = 4$. Logo, não é uma função inversível, pois $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$.

Exemplo 2.3 A função $f(x) = x + 2$, definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, possui inversa. De fato, seja $y = x + 2$. Resolvendo equação em y, obtemos $y = x - 2$. Portanto, $f^{-1}(x) = x - 2$.

Uma condição necessária e suficiente para que uma função seja inversível é que ela seja *bijetiva*.

Definição 2.4 Uma função $f : X \to Y$ é sobrejetora (ou sobrejetiva), se para todo elemento $y \in Y$ existe pelo menos um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Ou seja, quando o conjunto imagem coincide com o contradomínio da função. Não é necessário que x seja único; a função f pode apontar um ou mais elementos de X para o mesmo elemento de Y.

Definição 2.5 Uma função $f : X \to Y$ é dita injetora se possui um valor da imagem correspondente a apenas um valor do domínio da função; ou seja, se $x_1 \neq x_2$ em X, então $f(x_1) \neq f(x_2)$ em Y.

Definição 2.6 Uma função $f : X \to Y$ é bijetiva (ou bijetora) se ela é injetora e sobrejetora.

Claramente a função do exemplo 2.2 não é injetora. Já a função do exemplo 2.3 é, como pode ser checado pelo leitor, injetora e sobrejetora, ou seja, é bijetora.

2.2 Função logarítmica e propriedades

Seja x um número real positivo. O logaritmo de x na base e é o número y solução da equação $e^y = x$. A notação usual é $y = \ln x$. A medida que x percorre um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ no qual a equação $e^y = x$ possui solução, temos definido a função logarítmica $y = f(x) = \ln x$. Note que ln definida dessa forma é a função inversa da função exponencial. A referência que seguimos é (SILVA, 2016).

A seguir elencamos algumas propriedades da função logaritmo.

Propriedades 2.2.1 $\ln e = 1$.

Note que se $\ln e = y$ então $e^y = e$, que remete a $e^y = e^1$, como são expoentes de mesma base, implica que $y = 1$.

Propriedades 2.2.2 $\ln 1 = 0$.

Se $\ln 1 = y$, então $e^y = 1$, ou seja, $e^y = e^0$, o que implica que $y = 0$.

Propriedades 2.2.3 $e^{\ln x_1} = x_1$.

Perceba que $\ln x_1 = k$, isso quer dizer que $e^k = x_1$, e como $e^{\ln x_1} = e^k$, o que implica que $e^{\ln x_1} = x_1$.

Propriedades 2.2.4 $\ln[(x_1)^k] = k \ln x_1$.

Se $\ln x_1 = y_1$ e $\ln[(x_1)^k] = y_2$, então $e^{y_1} = x_1$ e $e^{y_2} = (x_1)^k$. Dessa forma, temos $e^{y_2} = (x_1)^k$. Como temos que $x_1 = e^{y_1}$, implica que $e^{y_2} = (e^{y_1})^k$, e como as bases são iguais, temos $y_2 = e^{ky_1}$, e conhecemos y_1 e y_2, logo $\ln[(x_1)^k] = k \ln x_1$.

Propriedades 2.2.5 $\ln x_1 x_2 = \ln x_1 + \ln x_2$.

Temos que $\ln x_1 = y_1$ e que $\ln x_2 = y_2$. Então, $e^{y_1} = x_1$ e $e^{y_2} = x_2$. Com isso, temos que o produto entre x_1 e x_2 é dado por $x_1 x_2 = e^{y_1} e^{y_2} = e^{y_1 + y_2}$. Como vimos, $x_1 x_2 = e^{y_1 + y_2}$. Aplicando o logaritmo na sua base natural em ambos os lados da igualdade, temos $\ln x_1 x_2 = \ln e^{y_1 + y_2}$, e a propriedade (4) nos dá $\ln x_1 x_2 = (y_1 + y_2) \ln e$, e pela propriedade (1), temos $\ln x_1 x_2 = y_1 + y_2$. Logo, $\ln x_1 x_2 = y_1 + y_2 = \ln x_1 + \ln x_2$.

Propriedades 2.2.6 $\ln\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \ln x_1 - \ln x_2$.

Partindo da propriedade (5), onde se encontra x_1 substituiremos por $\frac{x_1}{x_2}$. Sendo assim, temos

$$\ln\left[\left(\frac{x_1}{x_2}\right) x_2\right] = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + \ln x_2$$

$$\ln x_1 = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + \ln x_2$$
$$\ln x_1 - \ln x_2 = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + \ln x_2 - \ln x_2$$

Logo, $\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln x_1 - \ln x_2$.

2.3 Função Transcendente

Visto que a função que iremos estudar pertence à classe das funções transcendentes, definimos aqui o que vem a ser uma função transcendente. Seguimos as referências (CORREIA, 1999), (JACOMINO, 2013).

Definição 2.7 Uma função $y = f(x)$ é dita algébrica se ela pode ser expressa como

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + ... + P_{n-1}(x)y^1 + P_n(x)y^0 = 0, \tag{2.1}$$

em que $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ são polinômios com coeficientes inteiros, e n é dito como o grau do polinômio. A equação (2.1) é chamada de *equação algébrica*.

Em outras palavras, uma função algébrica é aquela dada por expressões algébricas com um número finito de termos, envolvendo apenas as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação com o expoente podendo ser fracionário.

Exemplo 2.8 Considere a equação $x^2y^2 + xy - 1 = 0$. Então,

$$\begin{aligned} y &= -x + \frac{\sqrt{x^2+4x^2}}{2x^2} \\ &= -x + \frac{x\sqrt{5}}{2x^2} \\ &= -x + \frac{\sqrt{5}}{2x}, \end{aligned}$$

é uma função algébrica. Analogamente, a outra solução da equação, $y = -x - \frac{\sqrt{5}}{2x}$, também o é.

Definição 2.9 Uma função é dita *transcendente* se ela não for algébrica.

Alguns exemplos de funções transcendentes são: $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = \cos x$.

2.4 Noções de Cálculo

Nesta seção vamos apresentar alguns conceitos e definições do cálculo que utilizamos no desenvolvimento do trabalho. Seguimos as referências (STEWART, 1999), (GUIDORIZZI, 2001) e (LIMA, 2004).

2.4.1 Limites

Definição 2.10 Considere que f esteja definido num intervalo aberto que contenha o número k, embora f não esteja definido possivelmente em k. Dizemos que o número L é o limite de $f(x)$ quando x tende à k, se dado um número $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, sempre que $|x - k| < \delta$. A notação é:

$$\lim_{x \to k} f(x) = L.$$

Definição 2.11 (Limites laterais)

- Dizemos que o número real L é o limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende a k, cuja a notação é $\lim_{x \to k^-} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existir $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < k - x < \delta$.

- Analogamente, dizemos que o número real L é o limite à direita de $f(x)$ quando x tende para k, e escrevemos $\lim_{x \to k^+} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existir $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < x - k < \delta$.

Definição 2.12 (Limites infinitos) Seja $f(x)$ uma função definida num intervalo I, ao qual $k \in I$, mas $f(x)$ não necessariamente esteja definida no próprio k. Diremos que $\lim_{x \to k} f(x) = \infty$ quando, para todo $A > 0$ dado, exite um $\delta > 0$ tal que $0 < |x - k| < \delta$, $x \in I$, tivermos $f(x) > A$.

Ou seja, quando os valores de x se tornam cada vez ms próximos de k os valores de $f(x)$ se tornam cada vez maiores, tendendo ao infinito.

Definição 2.13 (Assíntota Vertical) Uma reta $x = k$ é dita assíntota vertical da curva $y = f(x)$ se satisfaz ao menos uma das condições abaixo:

1. $\lim_{x\to k} f(x) = \infty$
2. $\lim_{x\to k^-} f(x) = \infty$
3. $\lim_{x\to k^+} f(x) = \infty$
4. $\lim_{x\to k} f(x) = -\infty$
5. $\lim_{x\to k^-} f(x) = -\infty$
6. $\lim_{x\to k^+} f(x) = -\infty$.

Definição 2.14 (Assíntota horizontal) Temos que a reta $y = L$ é dita como assíntota horizontal da curva $y = f(x)$ se ela satisfaz

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \text{ ou } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Definição 2.15 (Pontos de Máximo e de Mínimo) Seja f uma função ao qual D seja seu domínio, e também $k \in I$. Então k é dita ponto de máximo da função f se $f(k) \geq f(x), \forall x \in I$. Analogamente, k é dita ponto de mínimo da função f se $f(k) \leq f(x), \forall x \in I$.

2.4.2 Derivadas

A derivada de uma função é defina utilizando-se do conceito de limite.

Definição 2.16 Sejam $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in I$. Dizemos que a derivada da função f no ponto a é o limite

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

quando o mesmo existe. Se a derivada $f'(x)$ existe para todo $x \in I$ dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável no conjunto I e obtem-se uma nova função $f' : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$, a qual chamamos de *função derivada* de f'. Uma notação também usual é $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ em que $y = f(x)$.

A seguir exibimos, sem demonstração, algumas propriedades da derivada e alguns exemplos.

Exemplo 2.17 (Regra da Potência) Seja $n \in \mathbb{N}$ e $y = x^n$. Então

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

Exemplo 2.18 (Derivada da função exponencial) Se k um número real positivo com $k \neq 1$, temos a seguinte regra

$$\frac{d}{dx}(k^x) = k^x \ln k.$$

Fazendo $k = e$ e utilizando a propriedade 2.2.1, obtemos a derivada da função exponencial:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x,$$

ou seja, a derivada da função exponencial é a própria.

Exemplo 2.19 (Derivadas básicas de funções trigonométricas)

1. $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x;$

2. $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x.$

Propriedades 2.4.1 (Regra da soma e subtração) Se assumirmos as funções $f(x)$ e $g(x)$ como sendo deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x).$$

Propriedades 2.4.2 (Regra do Produto) Sejam f e g funções deriváveis em $I \in \mathbb{R}$, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}(g(x)) + g(x)\frac{d}{dx}(f(x)).$$

Propriedades 2.4.3 (Regra do Quociente) Tomemos as funções $f(x)$ e $g(x)$ como deriváveis em $I \in \mathbb{R}$, então

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{d}{dx}(f(x)) - f(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}.$$

Propriedades 2.4.4 (Regra da cadeia) Seja g derivável em x e f derivável em $g(x)$, então a função composta $F(x) = f(g(x))$ é derivável em x. A derivada da função $F(x)$ é obtida através da seguinte regra

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{df}{dx}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x).$$

Exemplo 2.20 (Derivada da função logarítmica) Sejam $g(x) = \ln x$, $f(x) = e^x$ e $F(x) = f(g(x))$. Então, pela regra da cadeia temos:

$$\begin{aligned}1 = \frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(F(x)) \\ &= \frac{d}{dx}(f(g(x))) \\ &= \frac{df}{dx}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x) \\ &= e^{\ln x} \cdot \frac{dg}{dx}(x) \\ &= x \cdot \frac{dg}{dx}(x).\end{aligned}$$

Portanto, $\frac{dg}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$.

Exemplo 2.21 Seja $n \in \mathbb{N}$ e f uma função derivável, temos então

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} \cdot \frac{d}{dx}f(x).$$

A *regra de L'hôspital* é utilizada para os casos de limites com indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, os quais veremos neste trabalho, além de outras indeterminações, como 0^0, ∞^0 e 1^∞.

Nos casos das indeterminações que nos interessa, sejam f e g funções deriváveis em $I \subset \mathbb{R}$, tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Suponhamos que

$$\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k} g(x) = 0 \;\text{ ou }\; \lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k} g(x) = \pm\infty.$$

Ao considerarmos um processo de limite da função quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$, quando x tende para k, teremos indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

A Regra de L'hôspital nos fornece então

$$\lim_{x \to k} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to k} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ou seja, a regra nos dará o limite do quociente de duas funções como sendo o limite do quociente de suas respectivas derivadas. Vale ressaltar que, para isso, não se faz uso da regra do quociente, as funções f e g são derivadas separadamente.

2.4.3 Integrais

Nesta seção seguimos as referências (GUIDORIZZI, 2001) e (STEWART, 2005).

Definição 2.22 (Primitiva) Seja f uma função derivável num intervalo I. Uma *primitiva* de f em I é uma função F definida em I, tal que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Note que se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ em I, então $F(x)+k$ (k uma constante) também o é. De fato, $(F(x)+k)' = F'(x)+k' = F'(x) = f(x)$.

Por outro lado, se além de $F(x)$ houver outra primitiva $G(x)$ de $f(x)$ em I, então $G(x) = F(x)+k$, em que k é uma constante. Isso vem do fato de que se duas funções possuem derivadas iguais então elas diferem por uma constante. A ideia informal é a seguinte: Sejam f e g funções deriváveis em I tais que $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in I$. Então

$$k' = 0 = f'(x) - g'(x) = (f(x) - g(x))'.$$

Portanto $f(x) - g(x) = k$, para alguma constante k.

Assim, se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ em I então todas as primitivas de $f(x)$ são da forma $F(x)+k$, com k constante.

Definição 2.23 Dizemos que a família $y = F(x)+k$, k constante, é a *integral indefinida* de f em I. A notação é:

$$\int f(x)\, dx = F(x)+k.$$

A seguir enunciamos algumas propriedades e técnicas de integração de função.

Propriedades 2.4.5 Consideremos uma função $f(x)$ e tomemos c como sendo uma constante qualquer, então

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.$$

Propriedades 2.4.6 Condiremos as funções $f(x)$ e $g(x)$, então

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

Exemplo 2.24 Seja $k \in \mathbb{R}$, então

$$\int k dx = kx + C,$$

para alguma constante C.

De fato, $(kx + C)' = k$.

Exemplo 2.25

1. $\int \sin x dx = -\cos x + C$, onde C é uma constante.

2. $\int \cos x dx = \sin x + C$, onde C é uma constante.

Uma técnica de integração que nos ajuda muito nas efetuações dos cálculos é a técnica conhecida como *integração por partes*. Ela é uma espécie de contrapartida da regra do produto para derivadas. Assim, integrando a derivada do produto de duas funções f e g, obtemos

$$\int [f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)]dx = f(x)g(x)$$

$$\Rightarrow \int f(x)\frac{d}{dx}g(x)dx + \int g(x)\frac{d}{dx}f(x)dx = f(x)g(x)$$

$$\Rightarrow \int f(x)\frac{d}{dx}g(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)\frac{d}{dx}f(x)dx$$

Simplificando, tomando $u = f(x)$ e $v = g(x)$, e, respectivamente, $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$, temos que a integração por partes pode ser reescrita como

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

3 FUNÇÃO W DE LAMBERT

Neste capítulo iremos introduzir a função W de Lambert. Algumas das referências que seguiremos de perto são (CORLESS et al., 1996), (CORLESS et al., 1993) e (STEWART, 2005). O processo que motivou o surgimento da função W de Lambert foi a tentativa de obtenção das soluções da equação transcendente $ye^y = x$. Formalmente, a função W de Lambert é definida como a inversa da função transcendente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = xe^x$. Após fazer um estudo minucioso sobre o comportamento de $f(x) = xe^x$ e em quais subconjuntos de $\mathbb{R}$ podemos inverte-la, ou seja, em quais intervalos ela não é bijetora para que haja necessidade de definí-la em ramos para obtermos sua inversa, iremos apresentar algumas propriedades e alguns fatos envolvendo a função W de Lambert a partir do estudo da função que a define.

3.1 Estudo de $\mathbf{f(x) = xe^x}$

Iremos começar analisando função $f(x) = xe^x$. Nosso objetivo é construir seu gráfico e, a partir dai, após uma troca de eixos, entender o gráfico e W. Começamos estudando sua derivada, ao qual é obtida, através da aplicação da *"Regra do Produto"*, por

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \frac{d}{dx}x + x\frac{d}{dx}e^x \\ &= e^x + xe^x \\ &= e^x(1+x). \end{aligned}$$

Veja que $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = -1$. Portanto, $x = -1$ é o único ponto crítico da função, ou seja, ou é um ponto de máximo ou de mínimo.

Note que a expressão $x+1 > 0$ para $x > -1$, e $x+1 < 0$ para $x < -1$. Logo, a primeira derivada $f'(x) > 0$ para $x \in (-1,\infty)$ e $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty,-1)$. Portanto, $f(x)$ é decrescente em $(-\infty,-1)$ e crescente em $(-1,\infty)$. Como $f(x)$ decresce em $(-\infty,-1)$ e cresce em $(-1,\infty)$, temos então que o ponto $x = -1$ possa ser um ponto de mínimo.

Agora, calculando a segunda derivada, obtemos

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x \frac{d}{dx}(x+1) + (x+1)\frac{d}{dx}e^x \\ &= e^x + (x+1)e^x \\ &= e^x(x+2), \end{aligned}$$

A derivada segunda nos fornece ainda que se $f''(-1) > 0$, então $x = -1$ é um ponto de mínimo, e se $f''(-1) < 0$ teremos um ponto de máximo. Aplicando em $x = -1$, $f''(-1) = e^{-1}(-1+2) = e^{-1} > 0$. Logo, demonstramos a

Proposição 3.1 *O ponto de mínimo global de $f(x) = xe^x$ ocorre no ponto $(-1, \frac{-1}{e})$.*

Para o leitor que não tenha familiaridade com os resultados do cálculo que relacionam crescimento e decrescimento da função com o sinal de sua derivada, sugerimos (STEWART, 1999) e (GUIDORIZZI, 2001).

Para expressarmos o gráfico da função $f(x) = xe^x$ vamos continuar a utilizar o cálculo infinitesimal. Primeiramente, não há nenhuma restrição para essa função quanto ao domínio, o que nos leva a concluir que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Note que, pelo própria definição da função, a mesma não possui assíntotas verticais. Por outro lado, quando x tende a $-\infty$, temos

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \text{"}\frac{-\infty}{+\infty}\text{"},$$

o qual é uma indeterminação. Para resolver esse problema de indeterminação, faz-se uso da regra de "L'hopital"e obtemos

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0,$$

portanto, $y = 0$ é uma assíntota horizontal.

Quando o limite da função tende a $+\infty$, temos

$$\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty,$$

dessa forma, note que o gráfico da função, neste caso, se comporta de maneira análoga ao gráfico de funções exponenciais.

Agora iremos obter informações sobre as concavidades da curva de $f(x)$. Para isto, iremos lançar mão mais uma vez da segunda derivada $f''(x) = e^x(2+x)$.

Vale lembrar que as soluções da equação $f''(x) = 0$ fornece os pontos de inflexões da função os quais nos mostram a mudança de concavidade da curva da função. Sendo assim, temos que $f''(x) = 0$ se, somente se, $x = -2$. Logo, temos que $f(x)$ possui concavidade voltada para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$ e concavidade voltada para cima no intervalo $(-2, +\infty)$.

Dessa forma, apresentamos o gráfico de $f(x) = xe^x$ na figura 1.

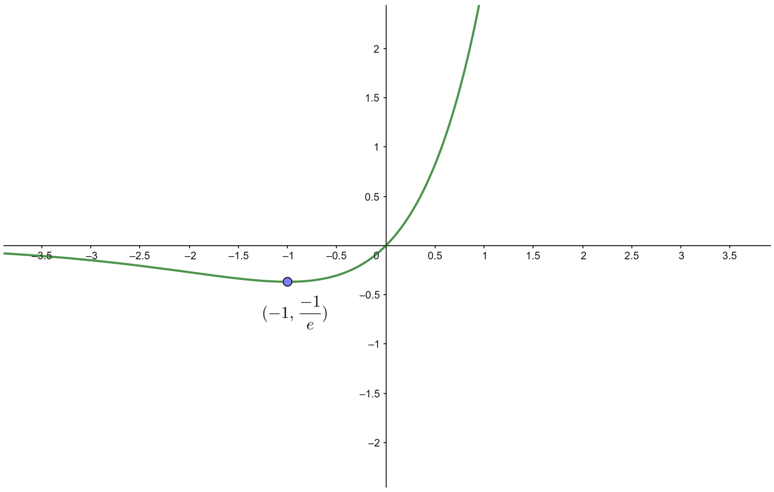

Figura 1 – Gráfico de $f(x) = xe^x$

3.2 Existência e gráfico de W

Vimos na seção anterior que $f(x)$ é decrescente em $(-\infty,-1]$ e crescente em $[-1,\infty)$. Logo, a mesma é inversível nestes intervalos e, consequentemente, bijetora sobre as imagens separadamente. Ou seja,

$$f_1 = f : (-\infty,-1] \to [-e^{-1},0) \;\text{ e }\; f_2 = f : [-1,\infty) \to [-e^{-1},\infty)$$

são ambas bijetoras, e portanto, inversíveis.

Definição 3.2 (Função W de Lambert) A função W de Lambert, $W : [-e^{-1},\infty) \to \mathbb{R}$, é definida por

$$W(x) = \begin{cases} f_2^{-1}(x), & \text{se } x \in [-e^{-1},\infty) \\ f_1^{-1}(x), & \text{se } x \in [-e^{-1},0). \end{cases}$$

Observação 3.3 Note que para $x \in (-e^{-1},0)$, temos $f_2^{-1}(x) \neq f_1^{-1}(x)$. Isto significa que existem pontos no domínio de W que estão associados a dois pontos distintos da imagem, o que contraria a definição de função. Por esta razão dizemos que $W(x)$ é uma função *multivalorada* ou *ramificada*. Temos então uma função multivalorada. Com isso, faz-se necessário algumas adequações. A porção de W com valores maiores ou iguais que -1 é chamada de *ramo principal* e é denotada por $W_0(x)$. Por sua vez, a parte de W que com valores menores ou iguais que -1 é chamada de *ramo secundário* e o denotaremos por W_{-1}.

Observação 3.4 Em termos das soluções da equação transcendente $ye^y = x$ temos o seguinte:

1. se $x < -e^{-1}$ então a equação não possui solução real;

2. se $-e^{-1} \leq x < 0$ a equação possui duas soluções reais;

3. se $x \geq 0$ então a equação possui uma raiz real.

Como a função $W(x)$ é inversa, sabemos que o esboço do seu gráfico será o espelhamento do gráfico de $f(x) = xe^x$ sobre a a reta $y = x$. Veja o esboço da função $f(x) = xe^x$ refletindo sua inversa a partir da reta $y = x$ na figura 3. O esboço do gráfico da função $W(x)$ é apresentado na figura 2.

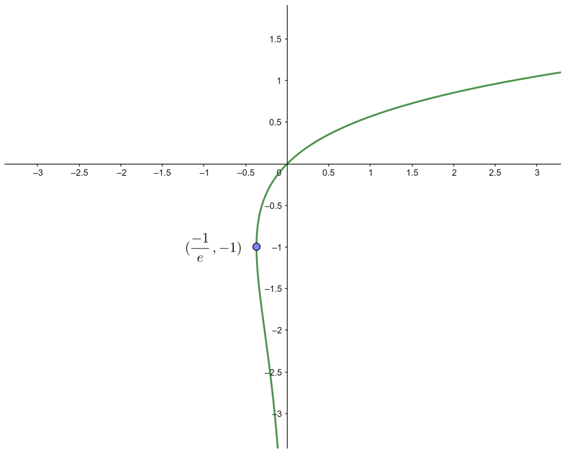

Figura 2 – Gráfico de $W(x)$

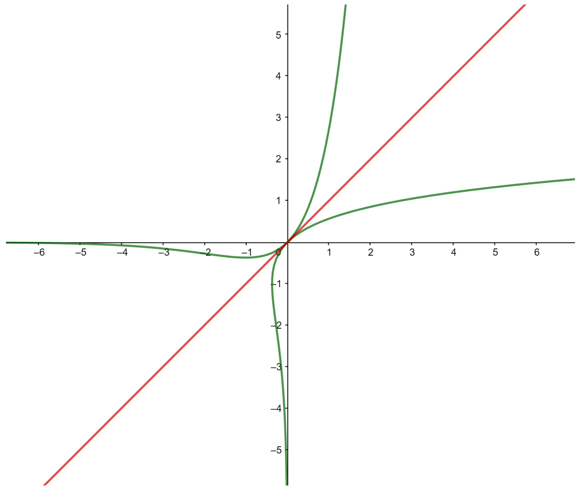

Figura 3 – Gráfico de $y = xe^x$ e sua reflexão em torno da reta $y = x$

A seguir, obtemos algumas identidades fundamentais que seguem imediatamente da definição $W(x)$.

Proposição 3.5 $W(0) = 0$.

Lembremos que se y satisfaz $ye^y = x$, então $W(x) = y$, por definição. A fim de encontrarmos $y = W(0)$, devemos resolver a equação $0 = ye^y$. Note que $y = 0$ é uma solução, pois $0e^0 = 0$. Por outro lado, como $f(y) = ye^y$, $y \geq 0$, é injetiva e $f(0) = 0$, segue $y = 0$ é a única solução real de $ye^y = 0$. Portanto $W(0) = 0$.

Proposição 3.6 $W\left(\dfrac{-1}{e}\right) = -1$.

Como na proposição anterior, queremos resolver $\frac{-1}{e} = ye^y$. Note que $y = -1$ é uma solução real, pois $-1e^{-1} = \frac{-1}{e}$. Por outro lado, $y = -1$ é o ponto de mínimo global de $f(y) = ye^y$, cujo o mínimo é $\frac{-1}{e}$, segue que $y = -1$ é a única solução real de $\frac{-1}{e} = ye^y$. Portanto,

$$W\left(\frac{-1}{e}\right) = W(-1 \cdot e^{-1}) = -1.$$

Proposição 3.7 *Para todo $x \geq -e^{-1}$, temos $W(x) = \dfrac{x}{e^{W(x)}}$.*

Por definição, temos que $W(x) = y$ desde que y satisfaça $x = ye^y$. Dessa forma, $W(x)e^{W(x)} = x$. Logo, ao trabalharmos a igualdade obtemos $W(x) = \frac{x}{e^{W(x)}}$.

Proposição 3.8 *Para todo $x \geq -e^{-1}$, temos* $W(x) = \ln\left(\dfrac{x}{W(x)}\right)$.

Pela proposição anterior temos $W(x)e^{W(x)} = x$. Logo, ao trabalharmos a igualdade obtemos $e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}$, e pela propriedade do logaritmo encontramos $W(x) = \ln(\frac{x}{W(x)})$.

3.3 Valores especiais e fórmula de simplificação

Assim como outras funções transcendentes, a função $W(x)$ também conta com valores especiais. Alguns são facilmente notados devido à forma com que a função é definida, isto é, $W(ye^y) = y$. Pela simples análise gráfica (veja figura 2) da função W de Lambert, encontramos as imagens dos pontos $x = -e^{-1}$ e $x = 0$. Ou seja, temos

$$W_0(0) = 0, \;\; W_0\left(\frac{-1}{e}\right) = W_{-1}\left(\frac{-1}{e}\right) = -1,$$

pois, por definição $W_k\left((-1)e^{(-1)}\right) = W_k\left(\dfrac{-1}{e}\right) = -1$, $k = 0, -1$, como foi demonstrado na seção anterior. Perceba nesta última expressão que quando o número $\dfrac{-1}{e}$ é colocado na forma $\dfrac{-1}{e} = (-1)e^{(-1)}$, fica claro qual a sua imagem.

Inspirado na discussão acima, podemos obter outros valores para W.

Exemplo 3.9 (O valor de $W_0(e)$) Como podemos escrever $1e^1 = e$, então $W_0(e) = W_0(1e^1) = 1$, ou ainda $W_0(e)e^{W_0(e)} = e$.

Para evidenciar esses valores, utilizamos a definição de W como função inversa de $f(x) = xe^x$. Assim, temos a seguinte regra de simplificação

$$x = \begin{cases} W_0(xe^x) \text{ para } x \geqslant -1 \\ W_{-1}(xe^x) \text{ para } x \leqslant -1. \end{cases}$$

Agora, a partir dessa regra de simplificação podemos obter uma infinidade de valores exatos para W. Por exemplo,

Exemplo 3.10

$$\begin{aligned} W_0(2e^2) &= 2; \\ W_0(5e^5) &= 5; \\ W_0(2\ln 2) &= \ln 2; \text{ vem do fato de que } 2\ln 2 = \ln 2 \cdot e^{\ln 2}. \\ W_{-1}(-2e^{-2}) &= -2; \end{aligned}$$

e assim por diante.

Exemplo 3.11 (A constante Ω) Um valor importante referente à função W de Lambert é a constante Ω. Ela é dada como solução real da equação transcendental $e^{-\Omega} = \Omega$. Multiplicando ambos os lados por e^{Ω}, obtemos $1 = \Omega e^{\Omega}$. Com isso, aplicando W_0, temos que $W_0(1) = \Omega$. Através de técnicas de cálculo numérico tem-se que $W_0(1) \approx 0,567143290409$, (WEISSTEIN, 2008).

Como podemos ver em (WEISSTEIN, 2002) e (WEISSTEIN, 2008), Ω desempenha um papel análogo ao que cumprem algumas constantes irracionais conhecidas tais como: π para funções transcendentes trigonométricas e e para os logaritmos. Para mais detalhes sobre a constante Ω, além das duas mencionadas anteriormente, referimos (GOUVEA, 2000) e (BRITO; FABIAO; STAUBYN, 2008) e as referências contidas nelas.

4 APLICAÇÃO NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

A utilização da função W de Lambert como ferramenta de resolução de equações se baseia em fazer manipulações algébricas, de tal forma que a equação adquira o formato daquelas obtidas na seção 3.3.

Para ficar mais evidente, consideremos seguinte exemplo:

Exemplo 4.1 Resolver a equação

$$x + e^x = 0. \tag{4.1}$$

Somando $-e^x$ em ambos os lados da equação (4.1) obtemos $x = -e^x$. Agora, dividindo por e^x vem $xe^{-x} = -1$. Agora, multiplicando a última equação por -1 obtemos $-xe^{-x} = 1$. Fazendo a mudança $-x = \hat{x}$, a equação anterior pode ser escrita como $\hat{x}e^{\hat{x}} = 1$. Ou seja, como visto no exemplo 3.11, $\hat{x} = \Omega = W_0(1)$. Logo, $-x = W_0(1)$ e consequentemente $x = -W_0(1)$. Assim, a solução da equação (4.1) é aproximadamente

$$x \approx -0,567143290.$$

Exemplo 4.2 Resolva a equação

$$x^2 = 2^x. \tag{4.2}$$

Perceba que a equação é satisfeita para $x = 2$ e $x = 4$, pois para $x = 2$ temos $(2)^2 = 4 = 2^{(2)}$, e para $x = 4$ temos $(4)^2 = 16 = 2^{(4)}$. Mas quando se faz a plotagem das duas curvas dadas por $y_1 = x^2$ e $y_2 = 2^x$, num mesmo gráfico (veja figura 4), nota-se que há uma terceira solução (interseção dos gráficos de y_1 e y_2) a qual pode ser encontrada em termos da função W de Lambert. Como temos que a raiz quadrada de x^2 é igual a $|x|$, então

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2} = |x| &= \sqrt{2^x}\\ &= \pm\sqrt{2^x}\\ &= \pm 2^{\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

Sendo assim, temos dois casos: $x = 2^{\frac{x}{2}}$ e $x = -2^{\frac{x}{2}}$. Para o caso em que $x = 2^{\frac{x}{2}}$, aplicamos a propriedade de logaritmo na equação e obtemos $\ln x = \ln 2^{\frac{x}{2}} = \frac{x}{2}\ln 2$. Agora, aplicando a exponencial em ambos os lados, temos

$$x = e^{\left(\frac{x\ln 2}{2}\right)}$$

Em seguida, multiplicamos ambos os lados da equação pelo inverso de $\exp\left(\frac{x\ln 2}{2}\right)$:

$$\frac{1}{\exp\left(\frac{x\ln 2}{2}\right)} \cdot x = \exp\left(\frac{x\ln 2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{x\ln 2}{2}\right)} = 1.$$

Assim,

$$x\exp\left(-\frac{x\ln 2}{2}\right) = 1.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $-\frac{\ln 2}{2}$, obtemos

$$-\frac{x\ln 2}{2}\exp\left(-\frac{x\ln 2}{2}\right) = -\frac{\ln 2}{2}.$$

Com isso,

$$W_0\left(\frac{-\ln 2}{2}\right) = W_0\left(\frac{-x\ln 2}{2}\exp\left(\frac{-x\ln 2}{2}\right)\right) = \frac{-x\ln 2}{2}.$$

Portanto

$$x = -\frac{2}{\ln 2}W_0\left(\frac{-\ln 2}{2}\right)$$

Como $-\frac{\ln 2}{2}$ fica entre $\frac{-1}{e}$ e zero, temos que os dois ramos da função W de Lambert precisam ser considerados nesse ponto. Logo, temos por soluções:

$$x_1 = -\frac{2}{\ln 2} W_0\left(\frac{-\ln 2}{2}\right);$$

$$x_2 = -\frac{2}{\ln 2} W_{-1}\left(\frac{-\ln 2}{2}\right).$$

Note que

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{2}{\ln 2} W_0\left(\frac{-\ln 2}{2}\right) \\ &= -\frac{2}{\ln 2} W_0\left(-\ln 2 \cdot e^{-\ln 2}\right) \\ &= -\frac{2}{\ln 2}(-\ln 2) \\ &= 2. \end{aligned}$$

A demonstração de que $x_2 = 4$ é deixada para o leitor interessado.

Mas ainda temos um terceiro caso. Uma terceira solução considerando o caso negativo em que $x = -\sqrt{2^x}$. De maneira análoga ao caso positivo, aplicamos então o logaritmo em ambos os lados. Dessa forma, usando as propriedades de logaritmo e exponencial, temos

$$\begin{aligned} x &= -2^{\left(\frac{x}{2}\right)} \\ x &= -e^{\frac{x}{2}\ln 2} \\ xe^{-\frac{x}{2}\ln 2} &= -1 \\ -\frac{x}{2}\ln 2 e^{-\frac{x}{2}\ln 2} &= \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que

$$W_0\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = -\frac{x \ln 2}{2}.$$

Ou equivalentemente

$$x = \frac{-2}{\ln 2} W_0\left(\frac{\ln 2}{2}\right).$$

Através de métodos numéricos, (STEWART, 2005) obteve $W_0\left(\frac{\ln 2}{2}\right) \approx 0,265706$. Logo, chegamos à terceira solução

$$x = -\frac{2}{\ln 2} W_0\left(\frac{\ln 2}{2}\right) \approx -0,76666469.$$

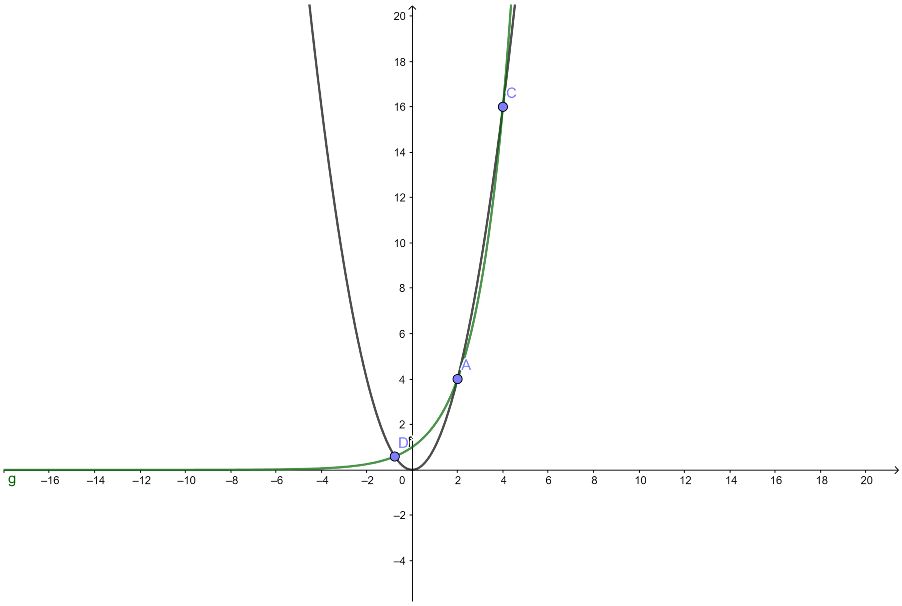

Figura 4 – Interseção de $y_1 = x^2$ e $y_2 = 2^x$

Exemplo 4.3 Resolver $100n^2 = 2^n$.

Primeiramente, vamos deixar a equação na forma usual para ser resolvida em termos de Lambert. Para isso, vamos usar propriedades do logaritmo e da exponencial.

$$\begin{aligned} 100n^2 &= 2^n \\ &= e^{\ln 2^n}. \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade de logaritmo no segundo termo e evidenciando o produto notável no primeiro termo, temos

$$\begin{aligned} (10n)^2 &= e^{n \ln 2} \\ 10n &= \pm\sqrt{e^{n \ln 2}} \\ 10n &= \pm\left(e^{n \ln 2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ 10n &= \pm e^{\frac{n \ln 2}{2}}. \end{aligned}$$

Agora, multiplicando a inversa de $e^{\frac{n \ln 2}{2}}$, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{e^{\frac{n \ln 2}{2}}}\right) 10n &= \pm e^{\frac{n \ln 2}{2}} \left(\frac{1}{e^{\frac{n \ln 2}{2}}}\right) \\ 10n\left(e^{-\frac{n \ln 2}{2}}\right) &= \pm 1 \\ e^{-\frac{n \ln 2}{2}} &= \pm\frac{1}{10n}. \end{aligned}$$

Multiplicando $-\dfrac{n\ln 2}{2}$ em ambos os lados da equação, obtemos

$$\left(-\frac{n\ln 2}{2}\right)e^{-\frac{n\ln 2}{2}} = \pm\frac{1}{10n}\left(-\frac{n\ln 2}{2}\right)$$
$$\left(-\frac{n\ln 2}{2}\right)e^{-\frac{n\ln 2}{2}} = \mp\frac{\ln 2}{20}.$$

Note que temos uma expressão que pode ser resolvida em termos de Lambert, ao qual, assume a seguinte expressão

$$W\left(\mp\frac{\ln 2}{20}\right) = -\frac{n\ln 2}{2}.$$

Isolando o n, temos

$$-n\ln 2 = 2W\left(\mp\frac{\ln 2}{20}\right),$$

ou seja,

$$n = -\frac{2}{\ln 2}W\left(\mp\frac{\ln 2}{20}\right)$$

A expressão que será calculada em função de Lambert assume sinais positivo e negativo. Para o sinal positivo, temos que o argumento é maior que zero, logo, faz parte do ramo principal, e tem apenas solução via $W_0(x)$. Quando assume o valor negativo, o argumento terá duas soluções, pois se encontra no intervalo $-\frac{1}{9} < x < 0$. Sendo assim, quando o argumento é positivo, temos

$$n = -\frac{2}{\ln 2}W_0\left(\frac{\ln 2}{20}\right) \approx -0{,}0967040343267.$$

Para o caso em que o argumento é negativo, temos as duas soluções relativamente a cada ramo $W_0(x)$ e $W_{-1}(x)$, a saber

$$n = -\frac{2}{\ln 2}W_0\left(-\frac{\ln 2}{20}\right) \approx 0{,}1036578164.$$

$$n = -\frac{2}{\ln 2}W_{-1}\left(-\frac{\ln 2}{20}\right) \approx 14{,}324727837.$$

Os valores aproximados $W_0\left(-\dfrac{\ln 2}{20}\right)$ e $W_{-1}\left(-\dfrac{\ln 2}{20}\right)$ foram obtidos via métodos numéricos, (WEISSTEIN, 2008).

Exemplo 4.4 Resolver $x\ln x = \alpha + \beta x$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Note que é uma equação um quanto tanto difícil de se resolver. Mas, fazendo o processo de manipular algebricamente a expressão para que resulte na forma da definição da função Lambert, temos, primeiramente, que isolar a incógnita x ao qual estamos querendo descobrir o valor. Assim sendo

$$\begin{aligned} x\ln x &= \alpha + \beta x \\ \ln x - \beta x &= \alpha \\ x(\ln x - \beta) &= \alpha. \end{aligned}$$

Substituindo $x = e^{\ln x}$ na equação, obtemos

$$e^{\ln x}(\ln(e^{\ln x}) - \beta) = \alpha$$

A propriedade de Logaritmo nos fornece

$$\begin{aligned} e^{\ln x}(\ln x(\ln e) - \beta) &= \alpha \\ e^{\ln x}(\ln x - \beta) &= \alpha. \end{aligned}$$

Agora, multiplicando $e^{-\beta}$ em ambos os lados da equação,obtemos

$$\begin{aligned} e^{-\beta}e^{\ln x}(\ln x - \beta) &= \alpha e^{-\beta} \\ (\ln x - \beta)e^{\ln x - \beta} &= \alpha e^{-\beta}. \end{aligned}$$

Perceba agora que chegamos onde queríamos. Chegamos numa expressão que se resolve em termos de Lambert. Assim, temos

$$(\ln x - \beta)e^{\ln x - \beta} = \alpha e^{-\beta},$$

o que implica

$$W(\alpha e^{-\beta}) = \ln x - \beta$$

ou, se preferir, já que estamos mexendo com equação, podemos interpretar como sendo aplicando Lambert W em ambos os lados da equação, nos dá

$$W\left((\ln x - \beta)e^{\ln x - \beta}\right) = W(\alpha e^{-\beta})$$

$$\ln x - \beta = W(\alpha e^{-\beta}).$$

Agora, vamos isolar a incógnita x.

$$\ln x = W(\alpha e^{-\beta}) - \beta.$$

Exponenciando ambos os lados da equação, concluímos que

$$e^{\ln x} = e^{W(\alpha e^{-\beta}) - \beta}$$

$$x = e^{W(\alpha e^{-\beta}) - \beta}.$$

Exemplo 4.5 Resolver a equação $e^{-\alpha x} = \dfrac{\beta}{x-c}$, em que $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$.

Trabalhando a igualdade e depois multiplicando por $e^{\alpha c}$, temos

$$(x-c)e^{-\alpha x} = \beta$$
$$(x-c)e^{-\alpha x}e^{\alpha c} = \beta e^{\alpha c}.$$

Agora, multiplicando o termo $-\alpha$ em ambos os lados da equação, obtemos

$$-\alpha(x-c)e^{-\alpha(x-c)} = -\alpha\beta e^{\alpha c}.$$

Perceba, que conseguimos manipular a expressão de tal forma que possa ser resolvida em termos da função W de Lambert.

$$W(-\alpha\beta e^{\alpha c}) = -\alpha(x-c).$$

Isolando agora a incógnita x de um lado da equação

$$x - c = \frac{W(-\alpha\beta e^{\alpha c})}{-\alpha},$$

e, portanto,

$$x = c + \frac{W(-\alpha\beta e^{\alpha c})}{-\alpha}.$$

5 CÁLCULO DA FUNÇÃO W DE LAMBERT

Neste capítulo realizamos um estudo sobre o cálculo infinitesimal da função W de Lambert. Mais precisamente, iremos obter expressão para sua derivada e integral, bem como para funções compostas com a mesma. Seguimos os trabalhos de (CORLESS et al., 1993), (CORLESS et al., 1996) e (STEWART, 2005).

5.1 Derivação

Nesta seção obtemos expressões para derivada da função W de Lambert.

Proposição 5.1 Para $x \neq 0$, vale

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}. \tag{5.1}$$

Aplicando a regra do produto e regra da cadeia em ambos os lados da identidade $W(x)e^{W(x)} = x$, obtemos

$$W'(x)e^{W(x)} + W(x)W'(x)e^{W(x)} = 1$$

e reorganizando

$$W'(x)(1+W(x))e^{W(x)} = 1.$$

Isolando $W'(x)$ temos

$$W'(x) = \frac{1}{(1+W(x))e^{W(x)}}.$$

Agora, lembrando que $W(x)e^{W(x)} = x$, obtemos

$$\begin{aligned} W'(x) &= \frac{1}{e^{W(x)} + W(x)e^{W(x)}} \\ &= \frac{1}{\frac{x}{W(x)} + x} \\ &= \frac{1}{\frac{x + xW(x)}{W(x)}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))} \text{ desde que } x \neq 0.$$

As derivadas de ordem superior bem como sua expansão séries de Taylor pode ser encontrada em (CORLESS et al., 1996).

5.2 Integração

Nesta seção obtemos uma expressão para a integral da função W de Lambert. Veremos que $W(x)$, por se tratar de uma função inversa, assim como o logaritmo por exemplo, requer uma substituição que aponta para o método de integração por partes.

Proposição 5.2 *A integral da função W de Lambert é dada por*

$$\int W(x)dx = x\left(W(x) - 1 + \frac{1}{W(x)}\right) + C,$$

em que C é uma constante.

Fazendo a mudança da variável $w = W(x)$, a equação de definição resulta em $we^w = x$ e $dx = (w+1)e^w dw$. Dai, multiplicando por $W(x)$ obtemos

$$\int W(x)dx = \int w(w+1)e^w dw.$$

Ou seja, encontrar a integral de W é equivalente a encontrar a integral de $w(w1+1)e^w$.

Iremos fazer integração por partes. Para isto, escolhemos $u = w^2 + w$ e $dv = e^w dw$, o que leva a $du = (2w+1)dw$ e $v = e^w$. Assim, temos

$$\int (w^2+w)e^w dw = (w^2+w)e^2 - \int (2w+1)e^w dw.$$

Agora iremos integrar por partes a integral do lado direita da equação. Seja $u = 2w+1$ e $dv = e^w dw$, o que nos leva a $du = 2dw$ e $v = e^w$. Assim

$$\begin{aligned}\int (2w+1)e^w dw &= (2w+1)e^w - \int 2e^w dw \\ &= (2w+1)e^w - 2\int e^w dw \\ &= (2w+1)e^w - 2e^w + C.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int (w^2+w)e^w dw &= (w^2+w)e^w - [(2w+1)e^w - 2e^w] + C\\ &= (w^2+w)e^w - (2w+1)e^w + 2e^w + C\\ &= (w^2+w-2w-1+2)e^w + C\\ &= (w^2-w+1)e^w + C.\end{aligned}$$

Como $w = W(x)$, substituímos na expressão e obtemos

$$\begin{aligned}\int W(x)dx &= (W^2(x) - W(x) + 1)e^{W(x)} + C\\ &= \left(W(x) - 1 + \frac{1}{W(x)}\right) W(x)e^{W(x)} + C\\ &= \left(W(x) - 1 + \frac{1}{W(x)}\right) x + C.\end{aligned}$$

Logo, obtemos o que queríamos.

Podemos integrar outras expressões que envolva $W(x)$, fazendo o mesmo processo de mudança de variáveis e aplicação da regra de integração por partes, como fizemos nas integrais acima. Sendo assim, deixamos a cargo do leitor verificar as seguintes identidades:

- $\int \frac{W(x)}{x} dx = W(x) + \frac{W^2(x)}{2} + C.$
- $\int W(x)dx = \frac{1}{2}[(1+W(x))W(x) - W(x)\cos W(x)]e^{W(w)} + C.$
- $\int \cos W(x)dx = \frac{1}{2}[(1+W(x))\cos W(x) + W(x)W(x)]e^{W(w)} + C.$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo apresentar uma pesquisa na modalidade de revisão bibliográfica sobre a função transcendente. Mostramos que ela é uma função definida implicitamente através da inversa da função $f(x) = x\exp x$ e que é uma função multivalorada, ou seja, dada em ramos. Uma vez que destacamos seus dois ramos os quais estão bem definidos, apresentamos propriedades imediatas e identidades fundamentais, evidenciando sua versatilidade em aplicações como, por exemplo, na obtenção de soluções para equações transcendentes. Conseguimos perceber que algumas dessas equações não poderiam ser resolvidas somente com a utilização de funções e técnicas comumente conhecidas, e neste sentido a função W de Lambert desempenhou um papel importante.

Como sequência a esta pesquisa podemos apontar para aplicação da função W de Lambert na resolução do problema da torre, isto é, condições em x para o qual o processo $x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$ seja convergente; considerar ramos complexos e aplicações a áreas afins a matemática.

O trabalho realizado encima do estudo sobre essa função especial expande o conhecimento sobre funções, pois ao fazer uma abordagem sobre uma função que se difere das demais de mesma classe, que se tornaram comuns por estarem inseridas em indeterminadas situações em diferentes áreas do conhecimento, mostra o quão exploratório é o conhecimento matemático, e o quanto é inovador estudar uma função incomum, multivalorada e implícita, para aprofundar o conceito de função, além de explorar propriedades pouco conhecidas, mas com um potencial vasto em aplicações e resoluções de problemas mais complexos.

Referências

BRITO, P.; FABIAO, F.; STAUBYN, A. Euler, lambert, and the lambert w-function today. **Mathematical Scientist**, v. 33, n. 2, 2008.

CORLESS, R. M.; GONNET, G. H.; HARE, D. E.; JEFFREY, D. J.; KNUTH, D. Lambert's w function in maple. **Maple Technical Newsletter**, v. 9, n. 1, p. 12–22, 1993.

CORLESS, R. M.; GONNET, G. H.; HARE, D. E.; JEFFREY, D. J.; KNUTH, D. E. On the lambertw function. **Advances in Computational mathematics**, Springer, v. 5, n. 1, p. 329–359, 1996.

CORREIA, J. M. T. A evolução do conceito de função na segunda metade do século xviii. Universidade do Porto. Reitoria, 1999.

GOUVEA, F. Time for a new elementary function. **FOCUS (Newsletter of Mathematics Association of America)**, v. 20, n. 2, 2000.

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo: volume 1. **Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição**, 2001.

JACOMINO, T. M. Z. Funções racionais no ensino médio. **Acedido a**, v. 12, 2013.

KNOEBEL, R. A. Exponentials reiterated. **The American Mathematical Monthly**, Taylor & Francis, v. 88, n. 4, p. 235–252, 1981.

LIMA, E. L. Análise real-volume 1-coleçao matemática universitária. **IMPA, Rio de Janeiro**, 2004.

SILVA, R. F. d. Função exponencial e logarítmica. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2016.

STEWART, J. **Cálculo diferencial e integral**. [S.l.: s.n.], 1999.

STEWART, S. A new elementary function for our curricula? **Australian Senior Mathematics Journal**, v. 19, n. 2, p. 8–26, 2005.

WEISSTEIN, E. W. **CRC concise encyclopedia of mathematics**. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2002.

WEISSTEIN, E. W. Omega constant–a wolfram web resource. 2008. Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/OmegaConstant.html>.