UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CAMILA DOS SANTOS CHAVES

A UTILIZAÇÃO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA NO ENSINO DE FUNÇÕES: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO FUNÇÕES DO 2º GRAU

ARRAIAS-TO
2021

CAMILA DOS SANTOS CHAVES

A UTILIZAÇÃO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA NO ENSINO DE FUNÇÕES: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO FUNÇÕES DO 2º GRAU

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor para obtenção de título de Licenciada em Matemática, sob orientação da Profª. Drª. Keidna Cristiane Oliveira Souza.

Orientadora: Profª. Draª. Keidna Cristiane Oliveira Souza.

ARRAIAS-TO
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

C512u Chaves, Camila dos Santos .

A utilização do software GeoGebra no ensino de funções: resolução de problemas envolvendo funções do 2º grau . / Camila dos Santos Chaves. – Arraias, TO, 2022.

42 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2022.

Orientadora : Keidna Cristiane Oliveira Souza

1. GeoGebra. 2. Resoluções. 3. Resolução visual. 4. Resolução Algébrica. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

CAMILA DOS SANTOS CHAVES

A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DE FUNÇÕES: resolução de problemas envolvendo funções do 2º grau

Monografia foi avaliada e apresentada à UFT - Universidade Federal do Tocantins - Câmpus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor para obtenção de título de Licenciada em Matemática e aprovada em sua forma final pela Orientadora e pela Banca Examinadora.

Data de aprovação: 10 / 12 / 2021

____

Profª. Dra. Keidna Cristiane Oliveira Souza
Orientadora (Presidente)

____

Prof. Dr. Antonio Marcos Duarte de França
Examinador 1

____

Profª. Me. Amanda Vieira da Silva
Examinador 2

Arraias-TO
2021

À meus pais, em nome de toda a minha família,
por todo apoio e incentivo recebido.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida.

A orientadora desta pesquisa, Profa. Dra Keidna Cristiane O. Souza, por todo apoio, orientações e contribuições para minha formação e para o desenvolvimento deste trabalho.

A meus pais, Idalia e Leocil por todo apoio, esforço e incentivo aos meus estudos, e por nunca deixarem que eu desistisse.

A meu irmão, Lucas por todo cuidado e força que sempre me deu.

Aos meus amigos, Beatriz Luíza, Bruno Santos, Gabriel Rocha, Juliana Barcelos Geovana Batista e Pedro Florêncio por todo companheirismo, união e carinho durante toda a minha caminhada acadêmica e de vida.

A minha prima, Arielly Ferreira por ser minha confidente e sempre se fazer tão presente em minha vida.

A minha amiga, Janete por sempre me incentivar e me consolar em tempos de aflição.

Aos meus colegas, que sempre torceram por mim, me ajudaram e participaram de discussões produtivas em torno de minhas pesquisas.

A meu sobrinho, Heitor Ferreira por trazer luz e aprendizado a minha vida.

A Universidade Federal do Tocantins por me oportunizar a realizar parte de um sonho, dando as condições necessárias para o mesmo.

A direção do Câmpus pelo apoio dado aos discentes.

A coordenação do Curso pela preocupação e apoio para/com a formação dos futuros professores de matemática.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação.

"Matemática não é apenas números, e sim envolve letras e toda capacidade que o ser humano conseguir expressar."

François Viète

RESUMO

Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de investigar e explorar o *Software* GeoGebra e suas contribuições na resolução de problemas algébricos e geométricos da educação básica. A pesquisa se configurou como uma oportunidade de induzir reflexões sobre as diversas maneiras existentes de se resolver um problema, uma vez que vários autores defendem que a Resolução Visual é válida e pode contribuir para entendimento da Resolução Algébrica. O GeoGebra surge aqui como uma ferramenta auxiliar para tais resoluções, visto que nos dá subsídio para manipular de forma dinâmica objetos como pontos e retas, possibilitando uma visualização gráfica e algébrica das mudanças de parâmetros. Ao que se refere a Educação, é possível observar que avanços tecnológicos vêm impulsionando profundas mudanças sociais e estruturais, de diferentes ordens, na sociedade moderna. Vê -se então, que há necessidade do desenvolvimento de recursos didáticos para implementação das atividades em sala de aula e uma formação adequada e contínua dos profissionais da educação utilizando esses avanços tecnológicos, já que existem muitas ferramentas, dentres elas o GeoGebra, que podem oferecer benefícios para o processo de ensino-aprendizagem e também para a formação continuada dos professores. Com base nos referenciais teóricos apresentados e em um levantamento bibliográfico, a produção de dados dessa pesquisa se deu no contexto da resolução de problemas com foco na utilização do Geogebra em atividades exploratórias. Para o desenvolvimento da pesquisa selecionamos três problemas de vestibulares envolvendo funções de segundo grau, relacionados com interseções de gráficos e máximos e mínimos. No primeiro problema de interseção, descobrimos o ponto comum entre duas funções com o auxílio do GeoGebra, variando os parâmetros observamos o comportamento dos gráficos. No segundo problema descobrimos qual é a equação reta que contém os vértices das parábolas dadas no enunciado. Na terceira questão são fornecidas duas equações e a partir disso descobrimos os seus dois pontos de interseção, bem como a distância entre eles. De modo geral, o auxílio do GeoGebra na Resolução Visual dos problemas nos proporcionou analisar e explorar as discussões dos resultados obtidos, além de observar que cada resolução vem a contribuir e complementar uma a outra.

Palavras-chave: GeoGebra. Resoluções. Resoluçao visual. Resolução Algébrica.

ABSTRACT

This work was developed in conjunction with the undergraduate program in Mathematics, linked to the Federal University of Tocantins. The thesis in question seeks to investigate and explore the GeoGebra Software, and its contributions in solving Algebraic and Geometrical problems in Basic Education. The research was configured as an opportunity to induce reflections on the various existing ways to solve a problem, since Visual Resolution is valid, and can contribute to the understanding of Algebraic Resolution. GeoGebra appears here as an auxiliary tool for such resolutions, as it gives us support to dynamically manipulate objects such as points and lines, enabling a graphic and algebraic visualization of parameter changes. With regard to Education, it is possible to observe that technological advances have been driving profound social and structural changes, of different orders, in modern society. and an adequate and continuous training of education professionals using these technological advances, since there are many tools, including GeoGebra, that can offer many benefits for the teaching-learning process, and also for the continuing education of teachers. Based on the theoretical references presented and on a bibliographical survey, the production of data for this research took place in the context of problem solving with a focus on the use of GeoGebra in exploratory activities. For the development of the research we selected three entrance exam problems involving second degree functions, involving intersections of graphs, maximum and minimums. In the first intersection problem, we find the common point between two functions, with the help of the GeoGebra, varying the parameter, we observe the behavior of the graphics. In the second problem, we find out which is the straight equation that contains the vertices of the parabolas given in the statement. In the third question, two equations are given, and from that we discover their two points of intersection and the distance between them. In general, the assistance of GeoGebra in the Visual Problem Solving allowed us to analyze and explore discussions of the results obtained, in addition to observing that each resolution contributes to and complements one another.

Keywords: GeoGebra. Resolutions. Algebraic Resolution. Visual resolution.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Tela inicial do GeoGebra Classic 17
Figura 2 – Barra de Ferramentas do GeoGebra Classic 17
Figura 3 – Controle deslizante de C 21
Figura 4 – Gráfico de $f(x)$ 22
Figura 5 – Gráfico de $f(x)$ e $g(x)$ 22
Figura 6 – Variação do parâmetro C 22
Figura 7 – Interseção de $f(x)$ e $g(x)$ 23
Figura 8 – Interseções de $f(x)$ e $g(x)$ 23
Figura 9 – Definição do controle deslizante 25
Figura 10 – Controle deslizante C 26
Figura 11 – Gráfico da função $f(x)$ 26
Figura 12 – Gráfico $f(x)$ com C igual a $2,8$ 27
Figura 13 – Reta vertical passando pelo vértice da parábola 28
Figura 14 – Ponto do Vértice 29
Figura 15 – Comportamento do vértice com a variação de C 30
Figura 16 – Gráfico da equação de reta 33
Figura 17 – Gráficos das equações da parábola e da reta 33
Figura 18 – Interseção das equações 34
Figura 19 – Medida dos segmentos com extremidades P_1 e P_2 34
Figura 20 – Gráfico da parábola 37
Figura 21 – Vértice da parábola 38

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **10**

2 AS TECNOLOGIAS DIGITAIS COMO INSTRUMENTO DE MEDIAÇÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA **12**

2.1 Possibilidades e Desafios do Uso das Tecnologias **13**

2.2 A Utilização do GeoGebra pelos Professores de Matemática **15**

2.3 GeoGebra: Interface e Principais Comandos **17**

3 PROBLEMAS **19**

3.1 Problema 1 . . . . **19**

3.1.1 Solução Algébrica do Problema 1 . . . . **20**

3.1.2 Resolução do Problema 1 utilizando o GeoGebra **20**

3.2 Problema 2 . . . . **23**

3.2.1 Solução Algébrica do Problema 2 . . . . **24**

3.2.2 Resolução do Problema 2 utilizando o GeoGebra **25**

3.3 Problema 3 . . . . **30**

3.3.1 Solução Algébrica do Problema 3 . . . . **31**

3.3.2 Resolução da Problema 3 utilizando o GeoGebra **32**

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS **35**

REFERÊNCIAS **39**

1 INTRODUÇÃO

Desde o início da minha vida escolar, o contato que tive com a Matemática foi marcado por curiosidades em conhecer novas situações, explorando as várias maneiras, ramificações e possibilidades ao estudá-la. Durante minha caminhada acadêmica, eu me questionava por que alguns de meus professores não se permitiam buscar outras metodologias que fossem além do ensino tradicional e que acabavam deixando de explorar o ensino da Matemática e, de certo modo, fazendo com que ela perdesse o seu encanto, até gerando algum desinteresse por parte dos alunos. Desde que iniciei a graduação no curso de Licenciatura em Matemática, sempre acreditei que o ensino pode ser simplificado, se o professor não só estiver disposto a enfrentar novos desafios como também dispor de condições necessárias e incentivo para desenvolver novas propostas.

Enquanto Professora de Matemática em formação inicial, observei que alguns professores buscam inserir novas ferramentas tecnológicas em suas aulas e outros já têm algum tipo de resistência à sua utilização. Analisando este fato e considerando minhas vivências com relação às tecnologias digitais associadas ao ensino de Matemática, consigo destacar a importância da inserção das ferramentas aplicadas ao ensino, uma vez que os avanços tecnológicos se fazem cada vez mais presentes no âmbito escolar.

A monografia em questão busca investigar e explorar o GeoGebra e suas contribuições no ensino, pensando numa proposta de resolução de atividades voltada para o processo de ensino de Matemática, com foco em funções do segundo grau nas turmas do ensino médio. A pesquisa se configura como uma oportunidade de apresentar resoluções exploratórias para o ensino, utilizando o GeoGebra como auxílio com o intuito de estimular o interesse na utilização de ferramentas tecnológicas e ao mesmo tempo ampliar as discussões acerca do papel das tecnologias no ensino. A produção dos dados e informações para a pesquisa está ligada à formação docente e às formas de exploração dos conteúdos de Geometria e Álgebra, utilizando o GeoGebra. Logo, visa responder questionamentos sobre como utilizar essa ferramenta tecnológica junto a uma resolução de problemas voltada para o ensino.

O problema da pesquisa se refere aos seguintes questionamentos: **Como utilizar o *Software* GeoGebra numa proposta de resolução de atividades, voltada para o ensino de Matemática? E quais podem ser suas contribuições para o processo de ensino?**

Dentre os resultados esperados, podemos citar as seguintes expectativas:

- Utilização do GeoGebra pode proporcionar ao professor conhecimento aprofundado de uma nova ferramenta didática aliando-se ao ensino de Matemática e propondo investigações que auxiliam no processo de ensino-aprendizagem da mesma;

- Proporcionar para o professor e para o aluno a possibilidade de visualização da construção das atividades a serem desenvolvidas e a importância em participar e explorar essas construções;

- Exploração de atividades a partir do GeoGebra pode possibilitar a criação ou teste de novas hipóteses.

Logo, o objetivo principal da pesquisa é explorar as potencialidades do GeoGebra no ensino de Matemática explorando soluções e identificando as contribuições dessa ferramenta através de uma discussão dos problemas propostos. Assim, foram traçados alguns pontos, tomados como os objetivos específicos para o alcance dos resultados:

- Resolver problemas de otimização;

- Mostrar a resolução algébrica dos problemas;

- Analisar visualmente a solução dos problemas;

- Estudar e analisar o comportamento das funções;

- Discutir os problemas com base nas resoluções e nas formas de exploração.

Em outras palavras, em relação aos objetivos, tem-se o intuito de investigar as contribuições das atividades exploratórias de Álgebra e Geometria utilizando o *Software* GeoGebra.

A estrutura do trabalho segue com discussões iniciais sobre a inserção das tecnologias digitais no ensino de Matemática, abordando um pouco sobre as possibilidades e desafios que essas ferramentas propõem no âmbito educacional, já que o Geogebra também faz parte dessas tecnologias. Em seguida, partimos para uma breve apresentação do *Software*, com foco nos principais comandos utilizados nas resoluções dos problemas propostos no trabalho. O terceiro capítulo apresenta-se com uma exposição dos problemas e suas soluções, na qual denominamos em subseções de Solução Algébrica e Resolução utilizando o GeoGebra. No último capítulo apresentamos discussões gerais sobre o trabalho, apontando algumas questões e considerações que surgiram na construção de cada resolução.

2 AS TECNOLOGIAS DIGITAIS COMO INSTRUMENTO DE MEDIAÇÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA

As tecnologias digitais estão em constantes transformações, apresentando-se como uma gama de possibilidades para a interação, para comunicação, para a busca de informações, para o entretenimento e para a produção do conhecimento (FRIZON, 2015, P. 3). Deste modo, é possível identificar a importância de se repensar e explorar as práticas de ensino que assegurem a aprendizagem dos alunos, considerando que analisar essas ações percorre todo o processo de formação, tanto inicial quanto continuada do professor. Nesse contexto, a formação de professores é uma questão extremamente relevante em relação à inserção das tecnologias na educação.

Como o uso de ferramentas tecnológicas, como o GeoGebra, o ensino se torna um desafio para os professores atuantes, já que descendem de uma cultura tradicionalista com intuito massificador e uma estrutura mais rígida e fechada à inovações. Tarouco (2016, p.2-3), destaca que "entende-se por ensino tradicional, aquele cuja a prática pedagógica predominante se faz baseada na transmissão de conceitos e técnicas". Diante disso, algumas ferramentas tecnológicas no ensino surgem justamente com o objetivo de propor ao professor adequações de suas práticas pedagógicas em parceria com as novas formas de mediar e produzir conhecimento.

É importante entender a complexidade dos conteúdos de Matemática e observar que essa complexidade trás uma relação com a percepção da Matemática sendo apenas transmitida e pouco explorada de forma a gerar reflexões sobre o seu significado.

Logo, Tarouco (2016, p.3) complementa que:

> É diante dessa crença que o ensino da Matemática por vezes, ainda é trabalhado de maneira tradicional, pouco se discuti o funcionamento de suas leis, pois, culturalmente foi estabelecido um distanciamento entre o conhecimento matemático institucionalizado e o conhecimento prático.

Em concordância a isso, Silva (2009, p.24) destaca a importância de se perceber a Matemática como "uma atividade social e historicamente influenciada por julgamentos do mundo real, da vida cotidiana dos sujeitos".

Ribeiro (2012) destaca que:

> Para que os professores reconheçam e utilizem as Novas Tecnologias no ensino da Matemática é preciso que utilizem o computador como um aliado muito importante na construção do conhecimento ou seja,

> nas suas práticas pedagógicas, onde possam fazer uso das novas tecnologias, incorporando-as em suas aulas e favorecendo aos alunos uma aprendizagem Matemática lúdica e envolvente. Dessa forma, a busca de práticas inovadoras com o uso das Novas Tecnologias a serviço da disciplina de Matemática poderá contribuir de forma eficiente o ensino atual. (RIBEIRO, 2012, p.13)

Percebe-se, a necessidade do professor de Matemática assumir realmente o papel de mediador dos saberes, tornando-se responsável pela busca ativa e desenvolvimento de novas metodologias de ensino, acompanhando as inovações e as demandas do novo mundo, buscando ampliar seus próprios conceitos, contribuindo para o desenvolvimento da capacidade de seus alunos de explorar a Matemática das mais variadas formas possíveis e assim, enriquecendo ainda mais a busca pelo conhecimento.

2.1 Possibilidades e Desafios do Uso das Tecnologias

As tecnologias abrem um portal para um novo momento que é conhecido como "a era da informação", conduzindo as pessoas para um ambiente propício para a aprendizagem e, consequentemente, para o ensino por excelência (CUNHA, 2001). Em detrimento a isso, é possível dizer a educação vem se mostrando por vezes mais eficaz e interessante com a utilização de tecnologias de ensino. Entretanto, o ensino auxiliado de recursos tecnológicos se torna um desafio para os professores, fazendo-os rever suas metodologias, práticas e, assim, buscar adaptações e reinvenções para tornar as aulas interessantes e positivas para o processo de ensino-aprendizagem. É possível destacar que o uso dos recursos tecnológicos permitem novas possibilidades para o professor enquanto mediador, por isso a proposta surge justamente para explorar o recurso tecnológico em questão, procurando formas que contribuam para o ensino.

Ao que se refere aos desafios do uso das tecnologias em sala de aula, Santos (2010) diz que :

> O desafio para o professor é ensinar com tecnologia, ou seja, empregar uma sequência didática em que o computador através de um *Software* educativo seja utilizado para desenvolver um conteúdo. É o computador como parte do planejamento do professor não sendo utilizado para fins ilustrativos, que pelas suas características (som, imagens coloridas, animações...) acaba causando uma mera impressão visual, porém sem resultados significativos em termos de aprendizagem. (SANTOS, 2010, p.43)

Nos dias atuais, com tantas novidades tecnológicas voltadas para a educação, pode-se dizer que é inadequado que os profissionais da educação se esquivem de utilizar o mínimo que seja dessas ferramentas a favor de suas aulas, já que muitos instrumentos como celulares, computadores ou *tablets*, fazem parte do cotidiano de alguns alunos e até dos próprios professores. Com isso, é necessário e valioso a inserção das tecnologias na educação, criando novas possibilidades, oferecendo maiores contribuições e formas de exploração no ensino de Matemática.

A partir de alguns documentos, como os Parâmetros Curriculares Nacionais-PCNs, Brasil (1998) e a Base Nacional Comum Curricular- BNCC, Brasil (2018), é possível perceber que a presença de habilidades e competências a serem desenvolvidas pelos docentes ligados ao uso de tecnologias para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem é bem evidente. Logo, segundo o PCN - Matemática, Brasil (1998, p.46) :

> É esperado que nas aulas de Matemática se possa oferecer uma educação tecnológica que não significa apenas uma formação especializada mas antes uma sensibilização para o conhecimento dos recursos da tecnologia para aprendizagem de alguns conteúdos sobre sua estrutura funcionamento linguagem e pelo reconhecimento das diferentes aplicações da informática em particular nas situações de aprendizagem e valorização da forma como ela vem sendo incorporada nas práticas sociais.

No contexto da BNCC, Brasil (2018, p.265):

> o estudante deve ser capaz de utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis para modelar e resolver problemas cotidianos sociais e de outras áreas de conhecimento realizando estratégias e resultados.

Nesse cenário, os professores devem estar em constante aprendizado, acompanhando as inovações digitais de ensino, atentando-se às suas práticas pedagógicas para que se tornem aptos e capazes de utilizar as ferramentas tecnológicas com interesse de instigar os alunos, incentivando-os a se tornarem cada vez mais participativos em sua própria aprendizagem e atores principais no processo relacionado à construção do seu conhecimento.

Diante desses apontamentos, vê-se que a utilização de *Softwares* educacionais, como o GeoGebra, pode contribuir para o rompimento da dominação de ensino tradicionalista da Matemática nas escolas, com processos padronizados e mecânicos que, por vezes, não fazem sentido para os alunos. Assim, podemos dizer que os recursos oferecidos pelas ferramentas tecnológicas digitais podem auxiliar os professores na exploração de novas possibilidades de práticas pedagógicas no processo de ensino-aprendizagem em Matemática.

No contexto escolar, as tecnologias digitais podem ter grande utilidade. Trabalhar com essas ferramentas, para os professores, pode ser uma possibilidade ou também um desafio. Por um lado, pode melhorar a compreensão dos conteúdos por parte dos alunos e de certa forma colaborar com as práticas metodológicas do educador. Já, por outra perspectiva, a insegurança de alguns professores em fazer uso de alguns *Softwares* durante as aulas, pode ser relacionado com o medo de perder o seu espaço como mediador ou também a falta de intimidade e manejo com o aplicativo. Nesse sentido Santos (2005) destaca que:

> As atitudes dos professores de resistência, indiferença e rejeição às novas tecnologias estão ligadas ao receio que os mesmos demonstram de serem substituídos pela máquina, porém, pesquisas já revelam que esta atitude está sendo substituída pela preocupação de que os alunos os ultrapassem por não dominarem tal ferramenta, ficando, assim, em julgamento a sua competência para a efetivação do processo ensino-aprendizagem e do próprio conhecimento.(SANTOS, 2005, p.4)

Ensinar Matemática pode se tornar um desafio, principalmente se não houver um preparo adequado, um domínio dos conteúdos e uma metodologia relevante. Tais desafios estão relacionados com a dificuldade de compreensão da Matemática que surge quando os alunos não conseguem entender ou interpretar a linguagem empregada pelos professores em suas aulas.

Em concordância com este fato, D'Ambrosio (2008, p. 79) discorre que:

> Não há dúvida quanto à importância do professor no processo educativo. Fala-se e propõe-se tanto educação a distância quanto outras utilizações de tecnologia na educação, mas nada substitui o professor. Todos esses serão meios auxiliares para o professor. Mas o professor, incapaz de utilizar esses meios, não terá espaço na educação. O professor que insistir no seu papel de fonte e transmissor de conhecimento está fadado a ser dispensado pelos alunos, pela escola e pela sociedade em geral.

Em geral, trabalhar com tecnologias digitais em sala de aula exige empenho e capacitação do docente, que por vezes estes não tiveram durante sua formação inicial, considerando que tais contribuições se tornam extremamente importantes no ensino da Matemática. Favorecer o desenvolvimento de importantes saberes, tanto dos conteúdos curriculares quanto tecnológicos, aliando-se a uma visão positivista da Matemática, que na maioria das vezes é temida por tantos alunos, faz parte do processo de ensino-aprendizagem.

2.2 A Utilização do GeoGebra pelos Professores de Matemática

O GeoGebra foi criado em 2001, por Markus Hohenwarter. Trata-se de um aplicativo gratuito que relaciona, de maneira dinâmica, a Álgebra, a Geometria, bem como outras aplicações. O *Software* traz consigo diversos recursos interativos que contribuem e auxiliam para o ensino de diversos conteúdos matemáticos, apresentando uma variedade de ferramentas internas para resolução de problemas ou criação de objetos visuais.

De acordo com Hohenwarter (2007),

> O GeoGebra é um sistema de geometria dinâmica. Permite realizar construções tanto com, pontos, vetores, segmentos, retas, cônicas como com

> funções que podem se modificar posteriormente de forma dinâmica. Por outro lado, equações e coordenadas podem estar interligadas diretamente através do GeoGebra. Assim o *Software* tem a capacidade de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores, e pontos; permitindo achar derivadas e integrais de funções e oferecer comandos, como raízes e extremos. (HOHENWARTER, 2007, p.4)

Logo, neste trabalho iremos apresentar o GeoGebra como uma ferramenta de auxílio na resolução de alguns problemas de funções de 2º grau. Uma vez que o intuito da pesquisa é mostrar e compreender as contribuições e vantagens desse *Software* para o ensino de Matemática, é possível destacar tanto a importância que se tem de proporcionar ao professor conhecimento aprofundado de uma nova ferramenta didática aliando-se educação e propondo investigações que auxiliam no processo de ensino-aprendizagem, como também a de proporcionar ao professor e ao o aluno a possibilidade de visualização da construção das atividades a serem desenvolvidas e como é importante e interessante participar e explorar essas construções.

Nesse contexto, os PCN's apresentam parte das colaborações na utilização dos recursos tecnológicos aliados ao ensino de Matemática. Dessa forma, contextualizando essas características em relação ao GeoGebra, diz-se que :

> -Relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meios de instrumentos esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
>
> -Evidência para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagens de variados problemas;
>
> -Possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
>
> -Permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade Matemática e desenvolvam atitudes positivas diante do seu estudo (BRASIL, 1998, p. 43).

A utilização do GeoGebra pode facilitar e incentivar o manuseio de outras ferramentas digitais de ensino, o que se torna um ponto positivo, já que contribuem diretamente para a quebra de paradigmas do ensino tradicional e, assim, permite adaptações dos professores e alunos às novas ferramentas de ensino.

De acordo com Fonseca (2001) ,

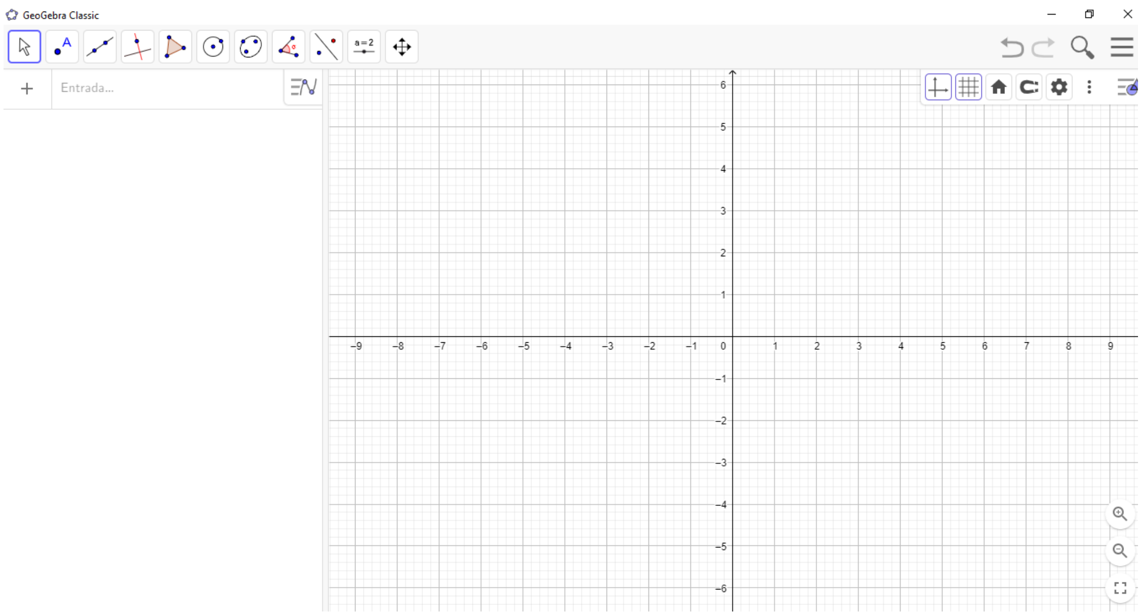
> A verdadeira função do professor não deve ser a gente assinar mas sim de criar condições de aprendizagem o professor poderá utilizá-lo por disciplina para reforçar os conteúdos que foram trabalhados em sala de aula adequando o uso do computador além do foco da sua matéria e também nos projetos educacionais em que a informática poderá ser desenvolvida com todos os alunos partindo de um objetivo proposto pela escola. (FONSECA, 2001, p. 2)

Priorizar o constante aprendizado, enquanto professor mediador, acompanhando as inovações digitais de ensino, atentando-se às suas práticas pedagógicas para que se tornem aptos e capazes de utilizar as ferramentas tecnológicas com interesse de instigar os alunos incentivando-os a se tornarem cada vez mais participativos em sua própria aprendizagem e atores principais no processo relacionado à construção do seu conhecimento faz parte dos deveres dos profissionais da Educação.

2.3 GeoGebra: Interface e Principais Comandos

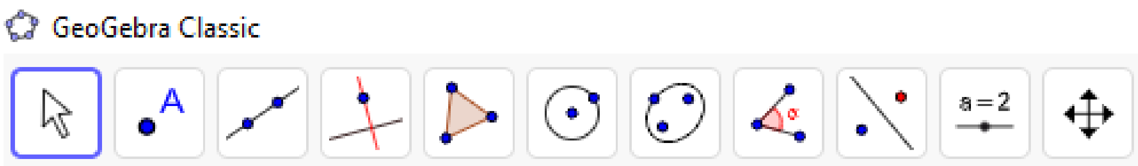
Nesta seção, vamos mostrar a tela inicial do GeoGebra e algumas informações relevantes sobre os principais comandos utilizados neste trabalho.

Figura 1 – Tela inicial do GeoGebra Classic



Fonte: Autoral, 2021.

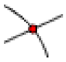
Figura 2 – Barra de Ferramentas do GeoGebra Classic



Fonte: Autoral, 2021.

A seguir, vamos apresentar detalhes somente dos comandos básicos que foram utilizados nas construções dos problemas apresentados no decorrer do trabalho. As ferramentas, bem como suas respectivas funções, serão listadas dentro de cada janela da barra de ferramentas.

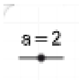
Menu da Janela 2

 Neste comando pode-se encontrar a interseção de dois objetos, explicitando-os.

Menu da Janela 8

Comprimento, Distância ou Perímetro.

Menu da Janela 10



Controle Deslizante

Considerando que nas resoluções dos problemas dispostos neste trabalho não utilizamos técnicas sofisticadas e, sim, conceitos básicos e simples, estamos prontos para adentrar a proposta principal do texto.

3 PROBLEMAS

O objetivo neste capítulo é apresentar três problemas envolvendo funções de 2º grau retirados de provas de vestibulares da Fundação Universitária para o Vestibular (FUVEST), a Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx, Academia Militar das Agulhas Negras (AMAN)) e a Universidade Católica de Pelotas (UCpel), respectivamente.

A proposta deste capítulo é apresentar os problemas juntamente com suas resoluções algébricas, utilizando o GeoGebra como auxílio para desenvolvimento da atividade, servindo-no das possibilidades visuais que o *Software* proporciona.

A estruturação desta seção seguirá com a apresentação inicial de cada problema, a sua resolução algébrica, em consonância com os passos visuais ao utilizarmos o GeoGebra como ferramenta auxiliar. Logo, seguindo esses procedimentos, nosso objetivo tem interesse nos seguintes aspectos:

- Investigar as resoluções do problemas com o auxílio do GeoGebra;
- Observar e detalhar os passos para a resolução tanto algébrica quanto geometricamente;
- Discutir as possíveis contribuições da ferramenta tecnológica GeoGebra para o ensino.

3.1 Problema 1

O problema a seguir é um questão do vestibular da Fundação Universitária ligada a Universidade de São Paulo (FUVEST).

1. (FUVEST 2021) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções dadas por $f(x) = C + x^2$, onde $C \in \mathbb{R}$ e $g(x) = x$, seus gráficos se intersectam quando, e somente quando,

   a) $C \leq \frac{1}{4}$

   b) $C \geq \frac{1}{4}$

   c) $C \leq \frac{1}{2}$

   d) $C \geq \frac{1}{2}$

   e) $C \leq 1$

3.1.1 Solução Algébrica do Problema 1

Sabendo que $f(x) = C + x^2$ e $g(x) = x$, iremos substituir os valores na relação $f(x) = g(x)$. Logo:

$$c + x^2 = x \implies x^2 - x + C = 0.$$

Tem-se uma equação do 2º grau.

Para existir a interseção entre os gráficos das funções f e g, o discriminante Δ deve ser maior ou igual a zero ($\Delta \geq 0$):

1º caso) $\Delta > 0$: Terá-se dois valores reais para x, o que implica que $f(x)$ e $g(x)$ se interceptam em dois lugares distintos.

2º caso) $\Delta = 0$: Terá-se somente uma raiz, ou seja, um valor para x, assim os gráficos das funções terão somente um ponto em comum.

Utilizando a expressão $\Delta = b^2 - 4.a.c$, em que a, b e c são os coeficientes da equação, encontraremos o valor do discriminante:

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.C \implies \Delta = 1 - 4C,$$

ou seja,

$$1 - 4c \geq 0$$
$$-4C \geq -1.(-1) \implies C \leq \frac{1}{4}.$$

3.1.2 Resolução do Problema 1 utilizando o GeoGebra

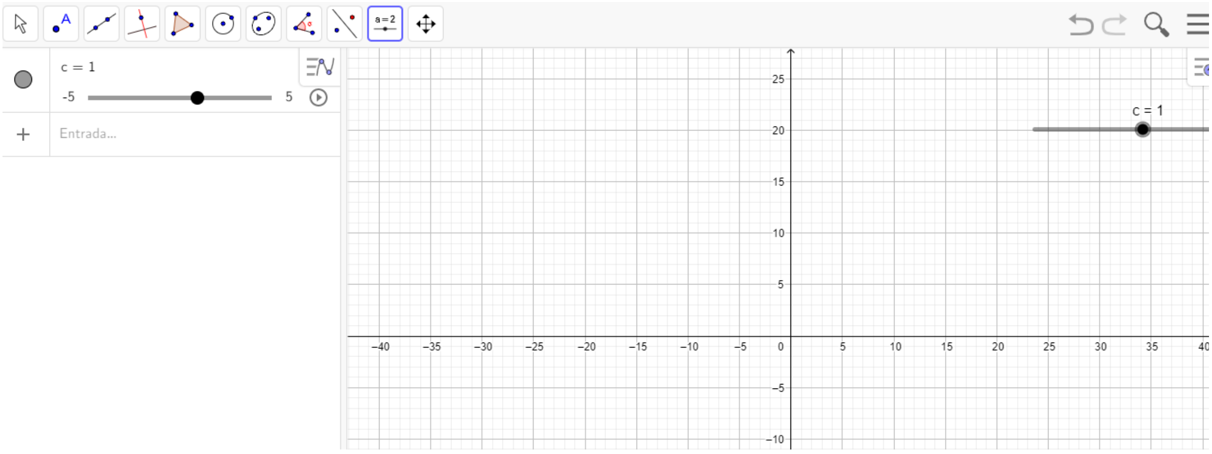
Interpretando o enunciado, a questão quer saber quando a função $f(x) = g(x)$, ou seja, qual é o ponto comum entre as duas funções.

A princípio iremos considerar as informações obtidas no enunciado da questão, em que temos as funções $f(x) = C + x^2$ onde $C \in \mathbb{R}$, e a função $g(x) = x$. Logo, vamos mostrar visualmente a intersecção dos gráficos, e seu comportamento quando variamos o valor de C.

Apresentando passo a passo uma resolução do problema utilizando algumas ferramentas do GeoGebra.

Passo 1: Vamos ativar a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE e assim construiremos uma variação para o valor de C e a partir disso observaremos o comportamento dos gráficos.

Figura 3 – Controle deslizante de C



Fonte: Autoral, 2021.

Ao ativar o controle, define-se um intervalo qualquer, como $C \in \mathbb{R}$, definimos arbitrariamente o intervalo -5 até 5.

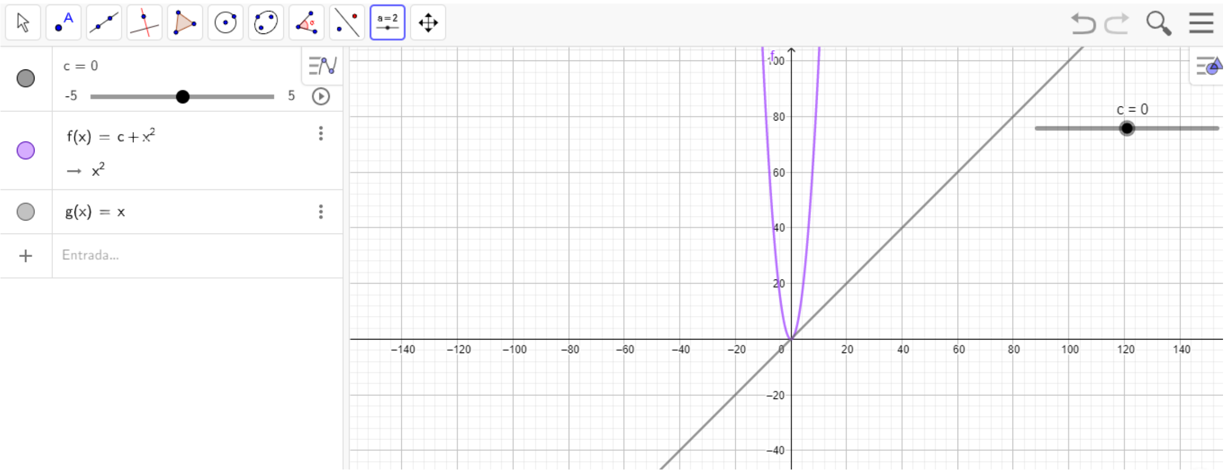
Passo 2: Na caixa de entrada, digitamos a função f e imediatamente o *Software* nos fornece o gráfico da função.

Figura 4 – Gráfico de $f(x)$

Fonte: Autoral,2021.

Passo 3: Ao inserir a função $g(x)$, obtemos o seu gráfico.

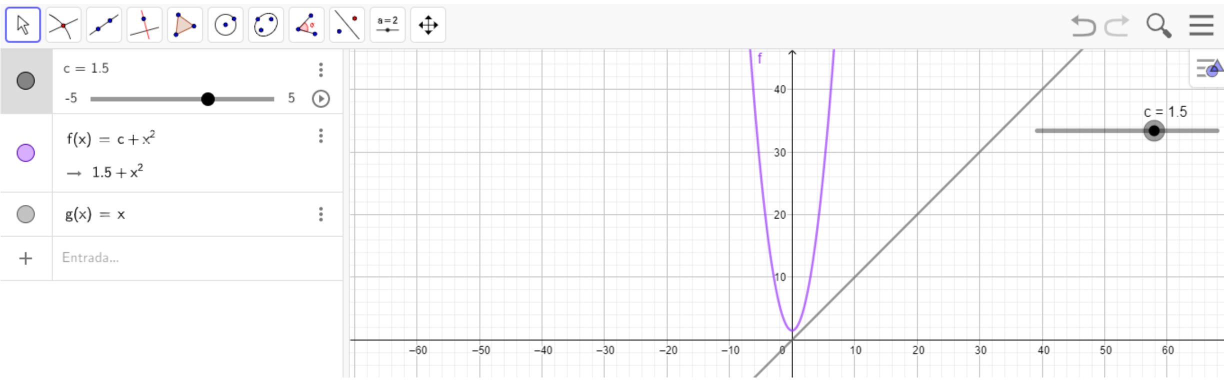
Figura 5 – Gráfico de $f(x)$ e $g(x)$



Fonte: Autoral, 2021.

A Figura 6 mostra o comportamento da função quando variamos os valores para C.

Figura 6 – Variação do parâmetro C



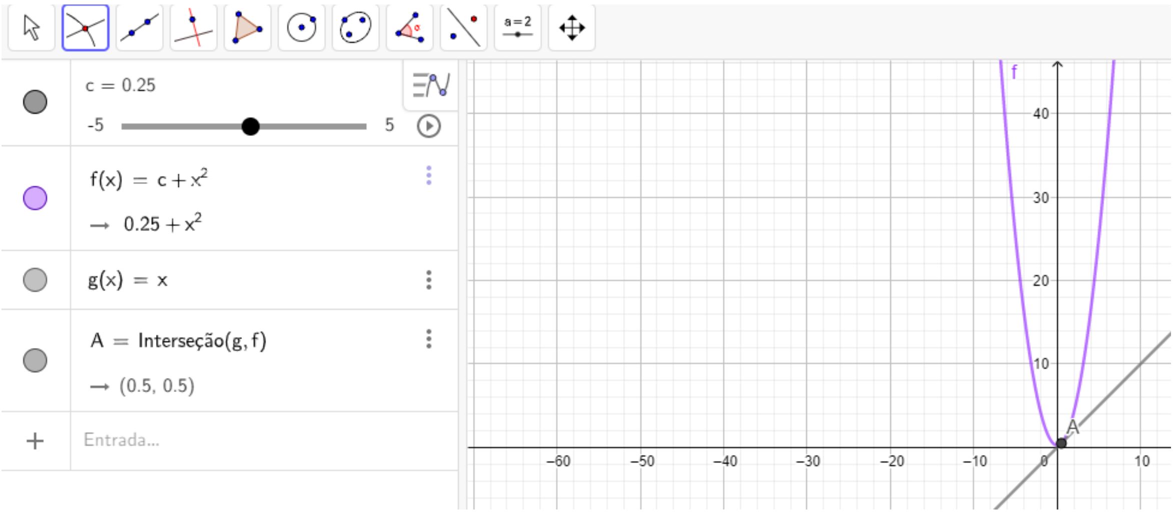
Fonte:Autoral, 2021.

Note que para valores diferentes que supomos para C, podemos observar quando as funções têm ou não pontos comuns entre elas.

Passo 4: Resolvendo algebricamente, na seção anterior concluímos que com $c \leq \frac{1}{4}$ é a condição necessária para que existam interseções entre os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$.

Quando supomos que $C = \frac{1}{4}$, o ponto de interseção dos gráficos será $A(0.5, 0.5)$.

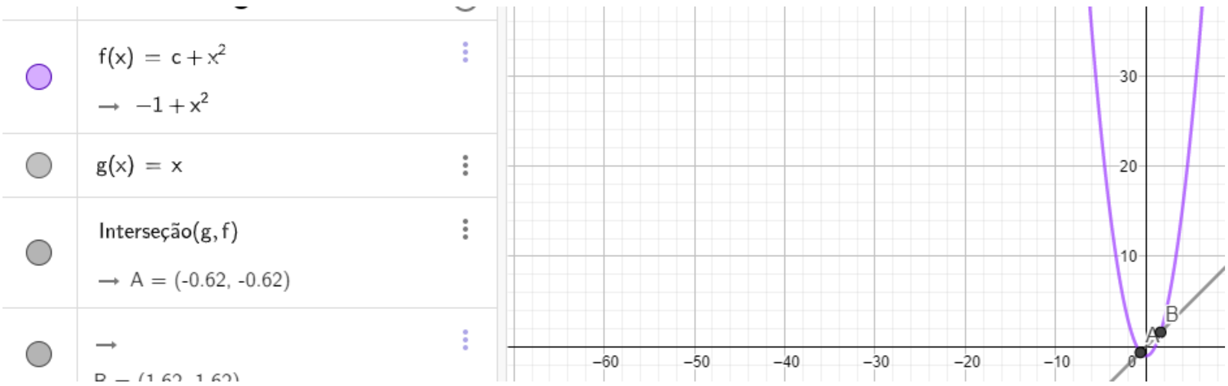
Figura 7 – Interseção de $f(x)$ e $g(x)$



Fonte: Autoral, 2021.

Passo 5: Ao fazer o mesmo processo, porém com a alteração no valor de $C < \frac{1}{4}$, têm-se dois pontos de interseção, sendo eles $A(-0.62, -0.62)$ e $B(1.62, 1.62)$.

Figura 8 – Interseções de $f(x)$ e $g(x)$



Fonte: Autoral, 2021.

3.2 Problema 2

O Problema 2 faz parte da prova de vestibular aplicada pela Escola Preparatória de Cadetes do Exército, no ano de 2020, para o ingresso dos cadetes à Academia Militar das Agulhas Negras (AMAN).

2. (Espcex (Aman) 2020) Considere a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 3x + C$, com $C \in \mathbb{R}$, cujo gráfico no plano cartesiano é uma parábola. Variando-se os valores de C os vértices das parábolas obtidas pertencem à reta de equação:

   a) $y = 2x - \frac{9}{2}$

   b) $x = -\frac{3}{2}$

   c) $x = -\frac{9}{2}$

   d) $y = -\frac{9}{2}$

   e) $x = \frac{3}{2}$

3.2.1 Solução Algébrica do Problema 2

Sabe-se que para cada valor de C, tem-se uma função diferente, portanto uma parábola diferente. Assim, variando o valor de C, vamos descobrir qual é a equação da reta que contêm os vértices das parábolas.

Calculando as coordenadas do vértice, temos:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2.1} = -\frac{3}{2}.$$

O x_v independe do valor de C, ou seja, para qualquer C, o x_v será sempre $-\frac{3}{2}$.

Para o y_v, temos:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - a.c}{4a}.$$

Substituindo:

$$y_v = -\frac{3^2 - 4.1.C}{4.1} = -\frac{9 - 4C}{4} = -\frac{9}{4} + C.$$

Para cada valor de C um vértice diferente.

Logo,

$$V(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4} + C)$$

Suponha que $C = 0$, então obtemos:

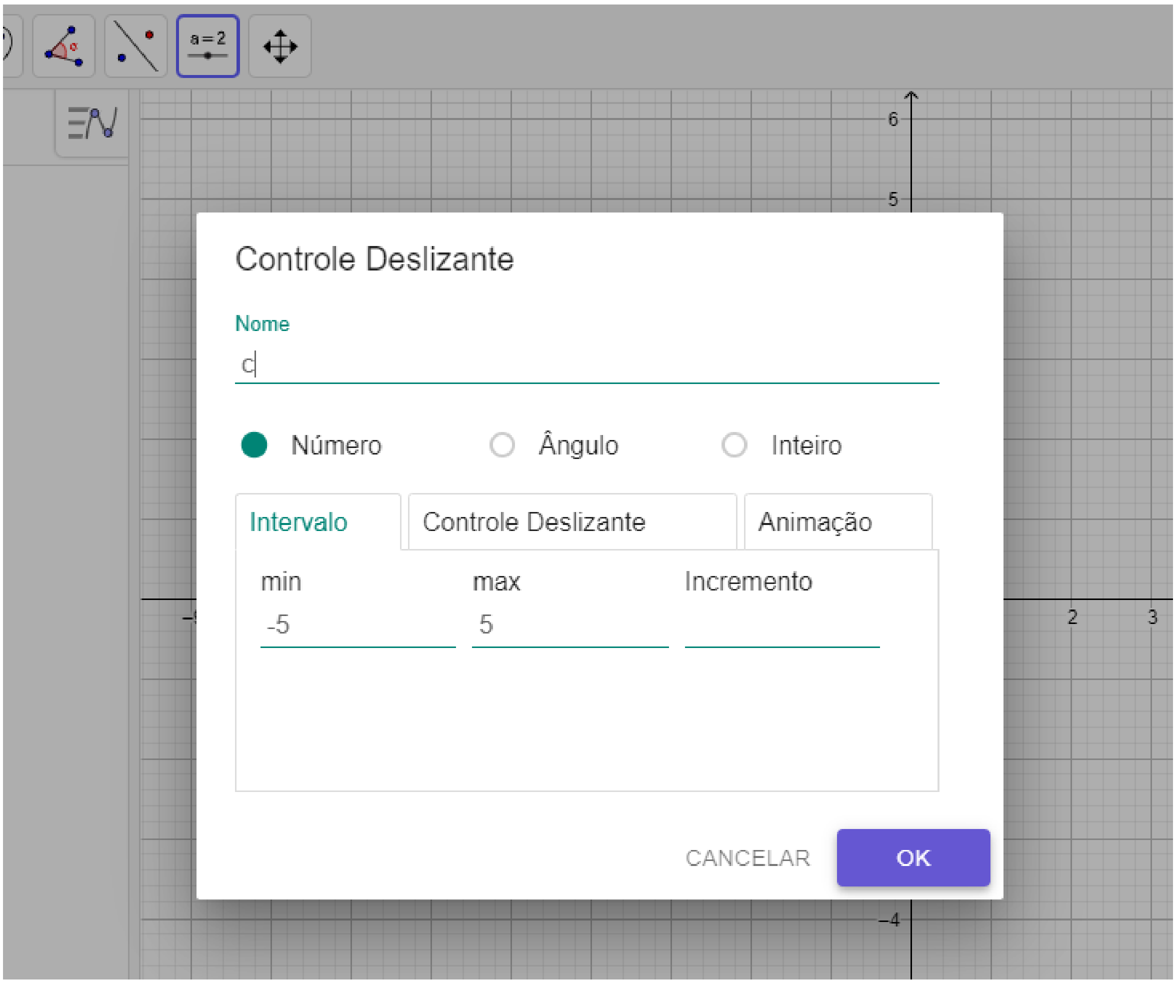
$$V(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}).$$

3.2.2 Resolução do Problema 2 utilizando o GeoGebra

Neste problema vamos utilizar alguns passos bem semelhantes aos que foram usados no exercício anterior. Assim, variando os valores de C, iremos visualizar em que reta de equação os vértices das parábolas estão contidos.

Passo 1: Acionamos o controle deslizante para C, sabendo que $C \in \mathbb{R}$.

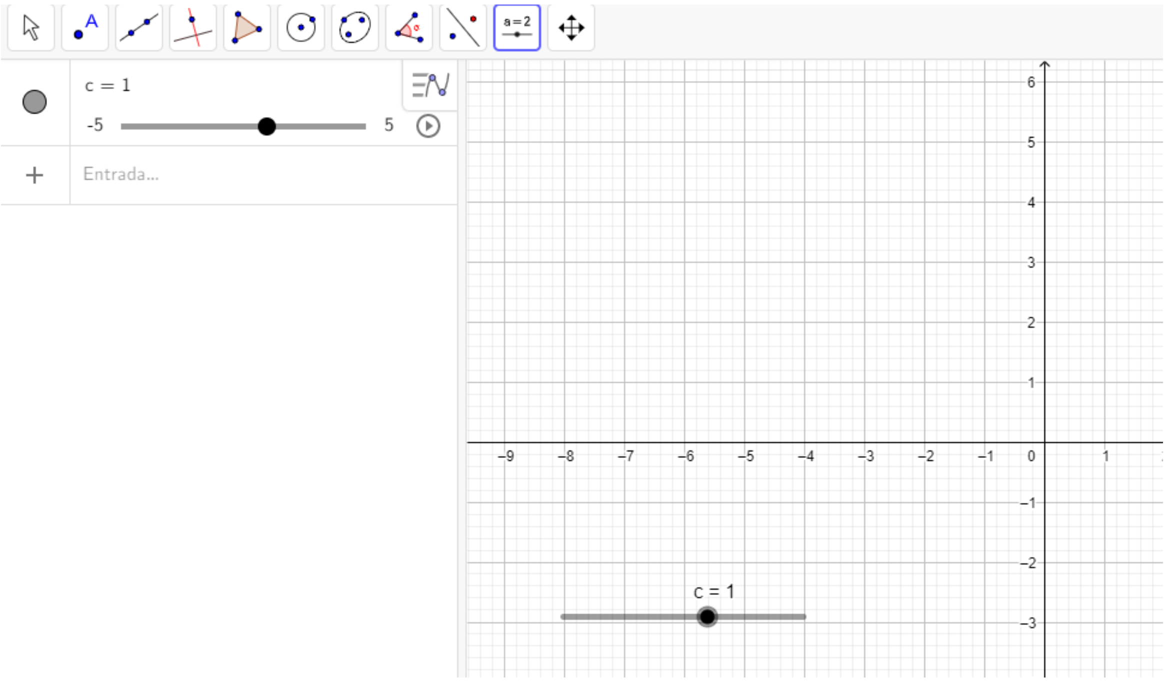
Figura 9 – Definição do controle deslizante



Fonte: Autoral, 2021.

Renomeamos o nome do controle para C e mantemos um intervalo de -5 até 5.

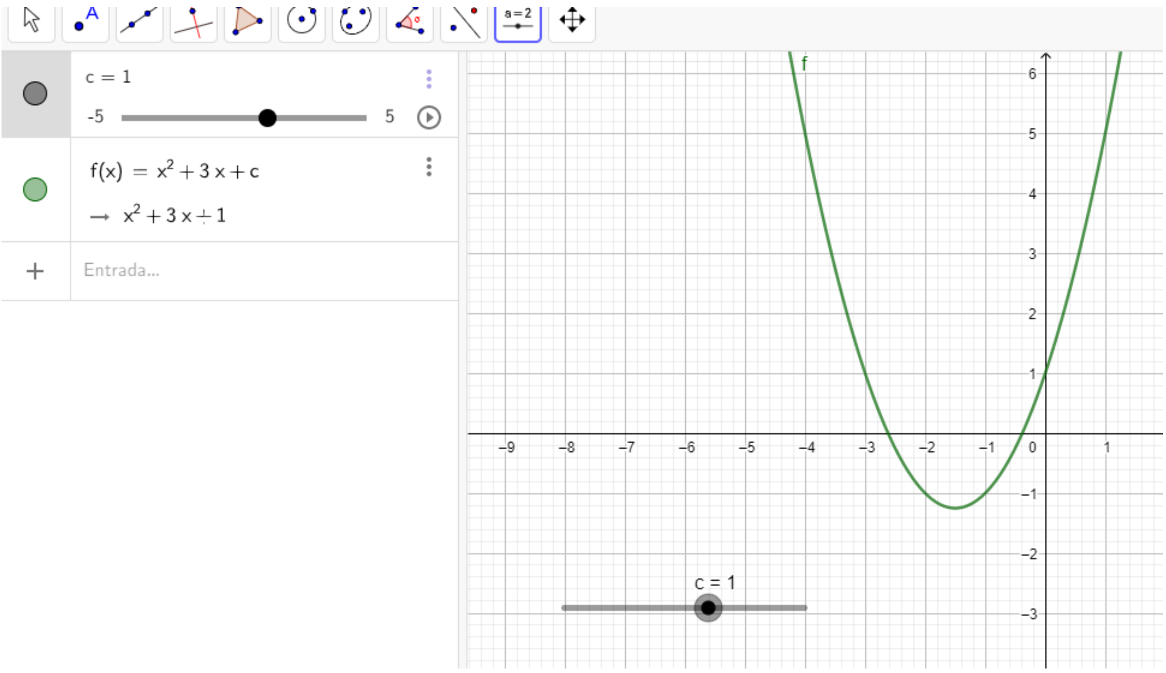
Figura 10 – Controle deslizante C



Fonte: Autoral, 2021.

Passo 2: Inserimos na caixa de entrada a função $f(x) = x^2 + 3x + C$ dada no enunciado. Note que a cada valor de C diferentes, obtemos uma parábola diferente.

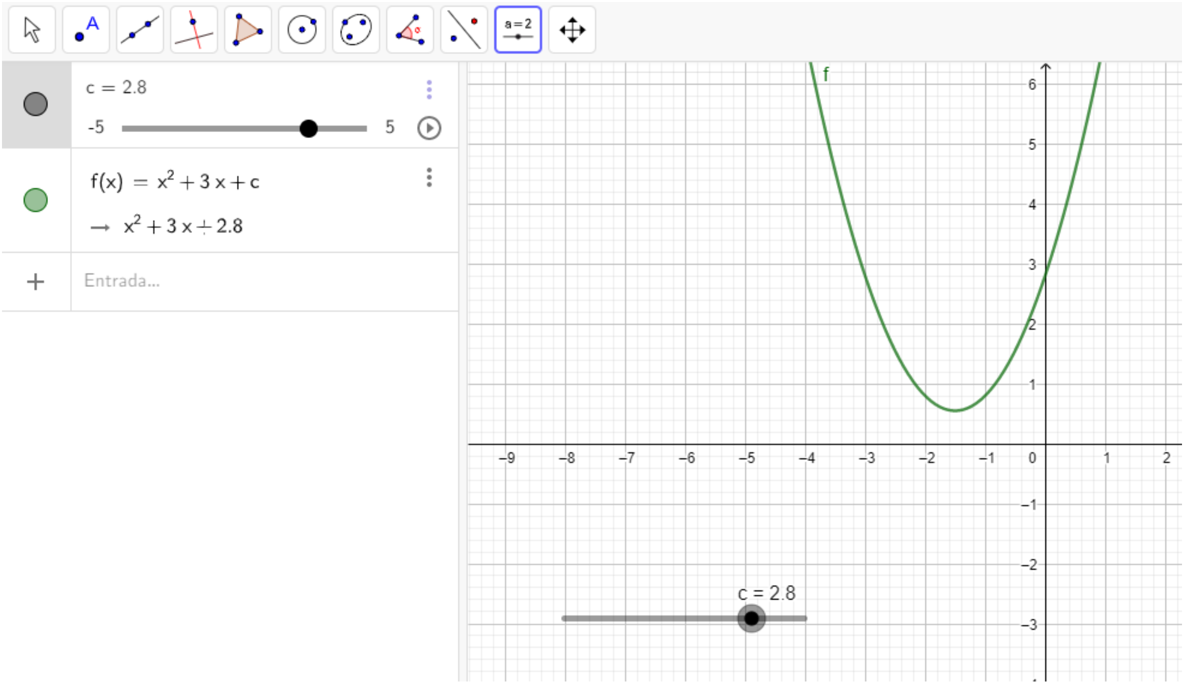
Figura 11 – Gráfico da função $f(x)$



Fonte: Autoral, 2021.

Ou seja, quando $C = 1$, temos uma parábola que passa pelo 1º, 2º e 3º quadrantes do plano cartesiano.

Figura 12 – Gráfico $f(x)$ com C igual a 2,8



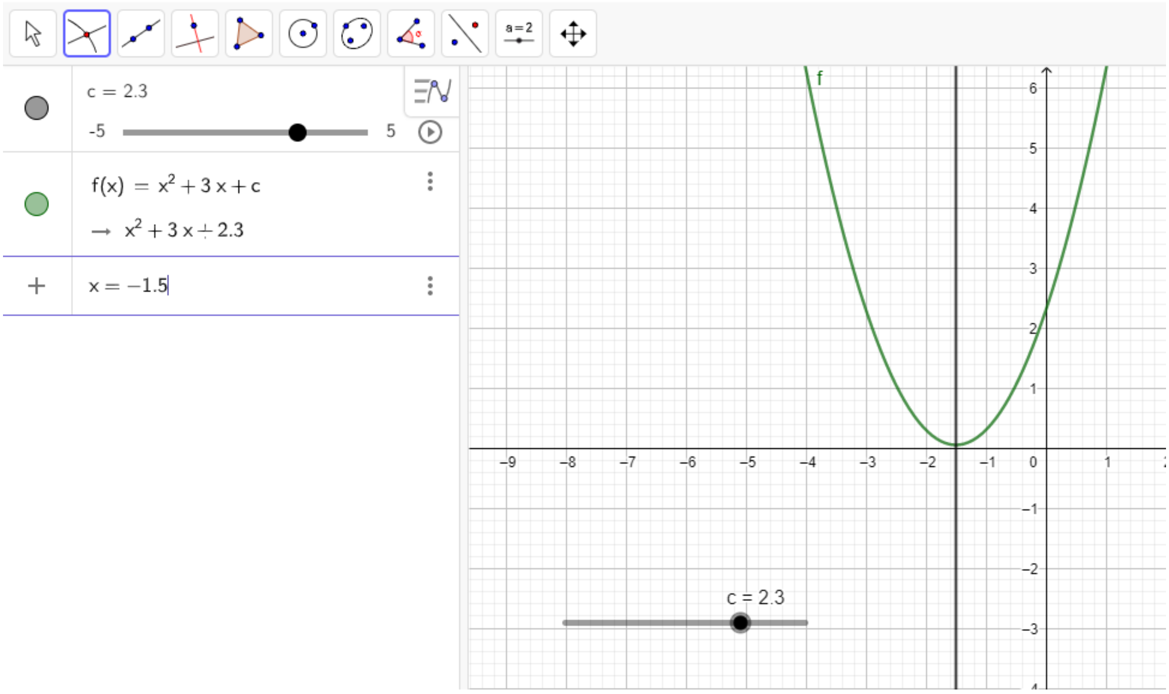
Fonte: Autoral, 2021.

Neste caso, quando $C = 2,8$, obtemos uma parábola que passa somente pelo 1º e 2º quadrante. É importante lembrar que o objetivo aqui é encontrar os vértices das parábolas e descobrir a equação de reta que os contêm. Logo, através da resolução visual, nota-se que o x vértice das parábolas, para qualquer que seja o valor de C, está entre os pontos -2 e -1, o que implica dizer que o x_v é um valor negativo, sendo independente de C, o que vem ao encontro do que foi concluído na resolução algébrica deste problema.

Passo 3:

Algebricamente, calculamos as coordenadas do vértice e descobrimos $x_v = \dfrac{-3}{2}$. Inserindo essa informação no GeoGebra, temos:

Figura 13 – Reta vertical passando pelo vértice da parábola

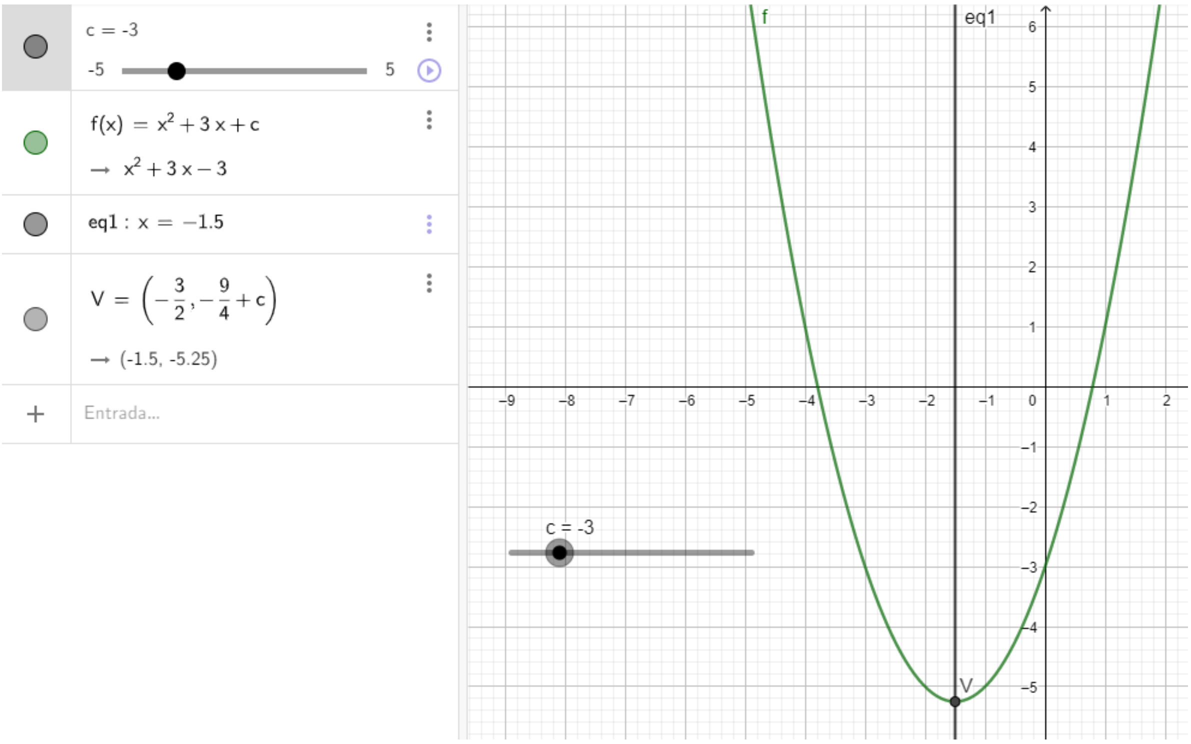


Fonte: Autoral, 2021.

Ao inserirmos o x_v encontrado, observa-se que o ponto do vértice é demarcado por uma reta que é perpendicular ao eixo das abscissas(x) e paralela ao eixo das ordenadas(y).

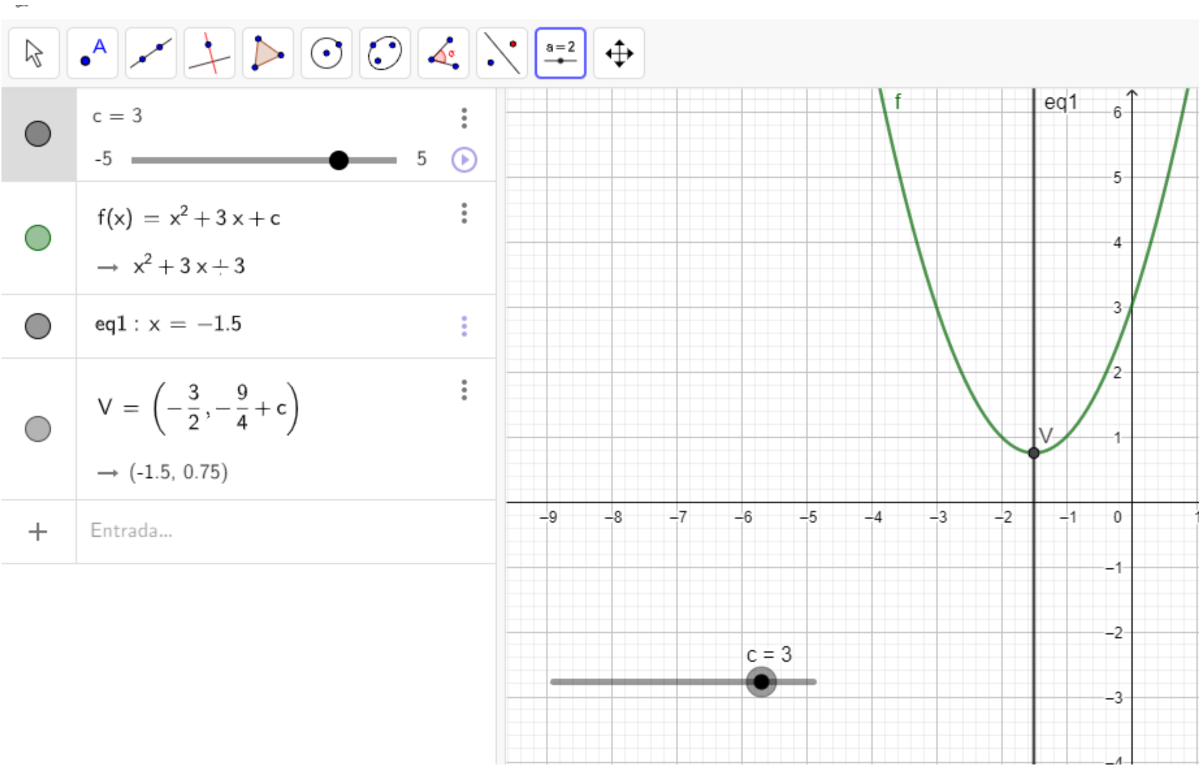
Passo 4: Podemos observar melhor essa situação, quando inserimos na caixa de entrada $V = (-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4} + C)$ encontrados na resolução algébrica.

Figura 14 – Ponto do Vértice



Fonte: Autoral, 2021.

Figura 15 – Comportamento do vértice com a variação de C



Fonte: Autoral, 2021.

Deste modo, percebe-se que que o vértice sempre terá em x o valor $-\dfrac{3}{2}$ e só irá variar em y de acordo com os diferentes valores de C que forem atribuídos. Logo, o vértice, para qualquer valor de C, estará sempre sobre a reta $x = -\dfrac{3}{2}$.

3.3 Problema 3

Nesta seção apresentamos uma questão do vestibular da Universidade Católica de Pelotas (UCPel).

3. (Ucpel 2021) A reta de equação $x - y - 3 = 0$ intercepta a parábola de equação $y = x^2 - 2x - 3$ nos pontos P_1 e P_2. Nestas condições, considere as seguintes alternativas:

   a) a medida do segmento com extremidades em P_1 e P_2 é de $3\sqrt{2}$;

   b) um dos pontos de interseção é o vértice da parábola de ponto $V(1, -4)$;

   c) um dos pontos de interseção possui coordenadas $x = 2$ e $y = -4$;

   d) os pontos de interseção são $P_1(2, -4)$ e $P_2(1, -4)$;

   e) a distância de P_1 a P_2 é $\sqrt{2}$;

3.3.1 Solução Algébrica do Problema 3

Nesta questão são fornecidas duas equações, sendo uma delas de reta e a outra de parábola, em que que as duas têm os P_1 e P_2 como pontos de interseção.

O primeiro passo para resolver a questão é descobrir quem são esses pontos de intersecção. Por um sistema de equação, temos que:

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3. \end{cases}$$

Igualando as equações,

$$x^2 - 2x - 3 = x - 3$$

O que implica em

$$x^2 - 3x = 0$$

Colocando o x em evidencia

$$x(x - 3) = 0.$$

Resolvendo essa equação, temos duas possibilidades, em que

$$x = 0$$

ou

$$(x - 3) = 0$$

Consequentemente

$$x = 3$$

Desta forma, quando:

$$x_1 = 0$$

Substituímos esse valor na equação da reta e obtemos

$$y_1 = -3$$

.

Da mesma forma, quando:

$$x_2 = 3$$

Obtemos

$$y_2 = 0.$$

Portanto, $P_1 = (0,-3)$ e $P_2 = (3,0)$

Agora vamos calcular a medida pedida utilizando a fórmula da distância entre pontos:

$$D_{p_1p_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

E assim, substituindo os pontos obtidos, temos:

$$\begin{aligned} D_{p_1p_2} &= \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{18} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

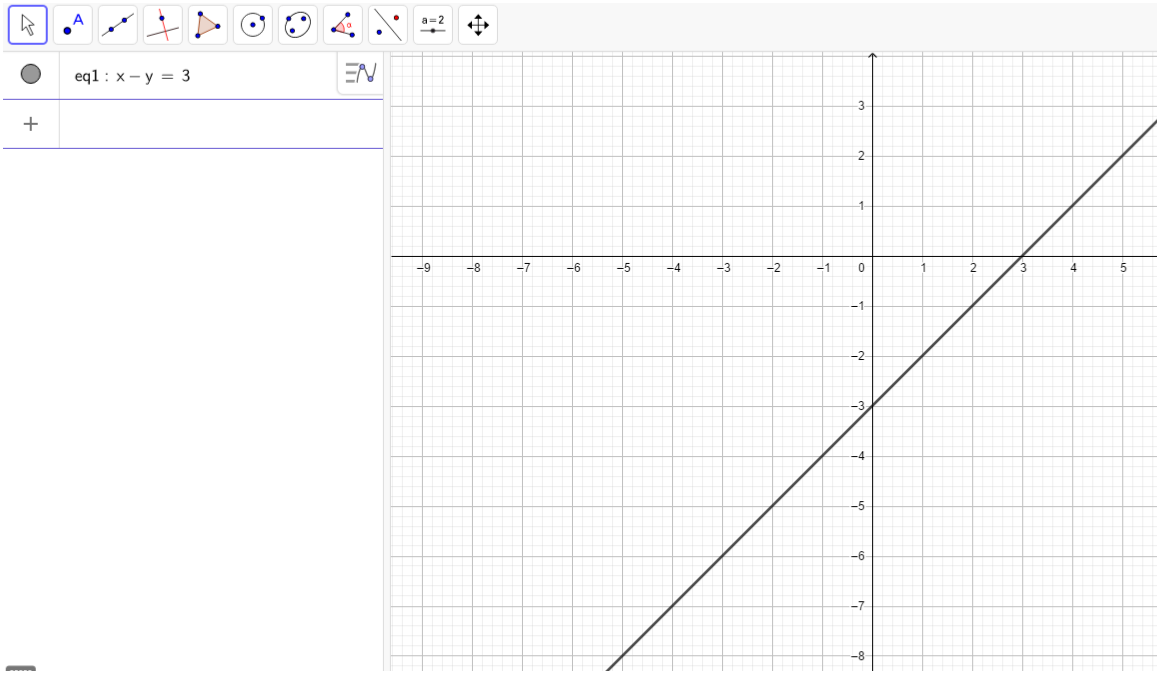
.

3.3.2 Resolução da Problema 3 utilizando o GeoGebra

Os passos usados aqui para resolução do problema serão bem semelhantes a resolução algébrica já apresentados. Logo, vamos descobrir quais são os pontos P_1 e P_2 a partir da resolução visual utilizando o GeoGebra.

Passo 1: Na caixa de entrada inserimos a equação da reta $x - y - 3 = 0$.

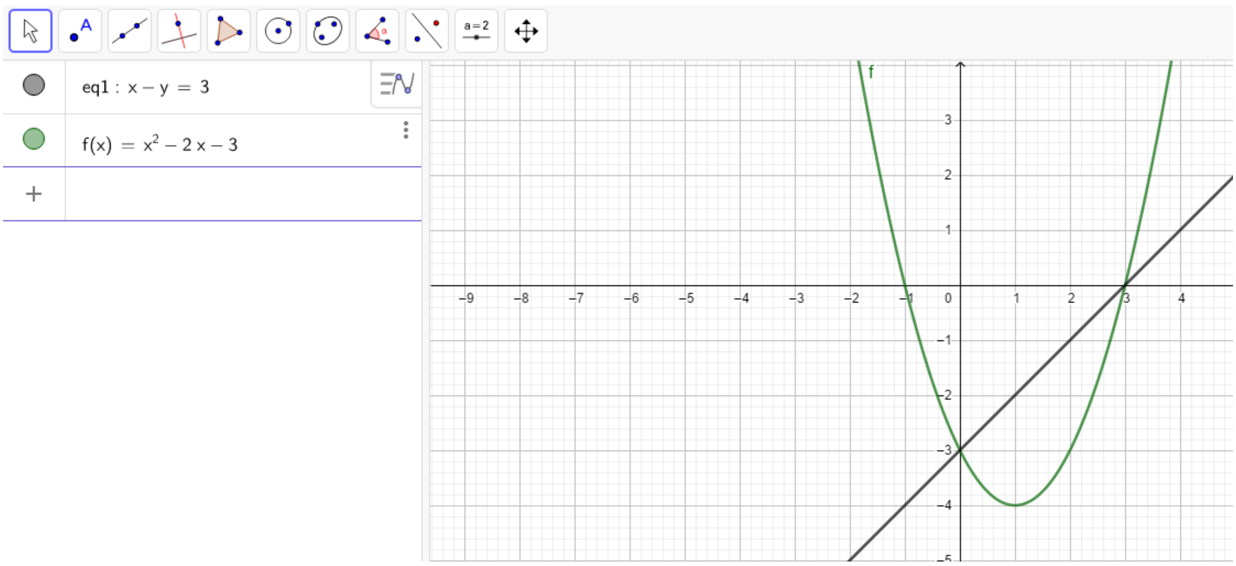
Figura 16 – Gráfico da equação de reta



Fonte:Autoral, 2021.

Passo 2: Adicionando a equação da parábola $y = x^2 - 2x - 3$.

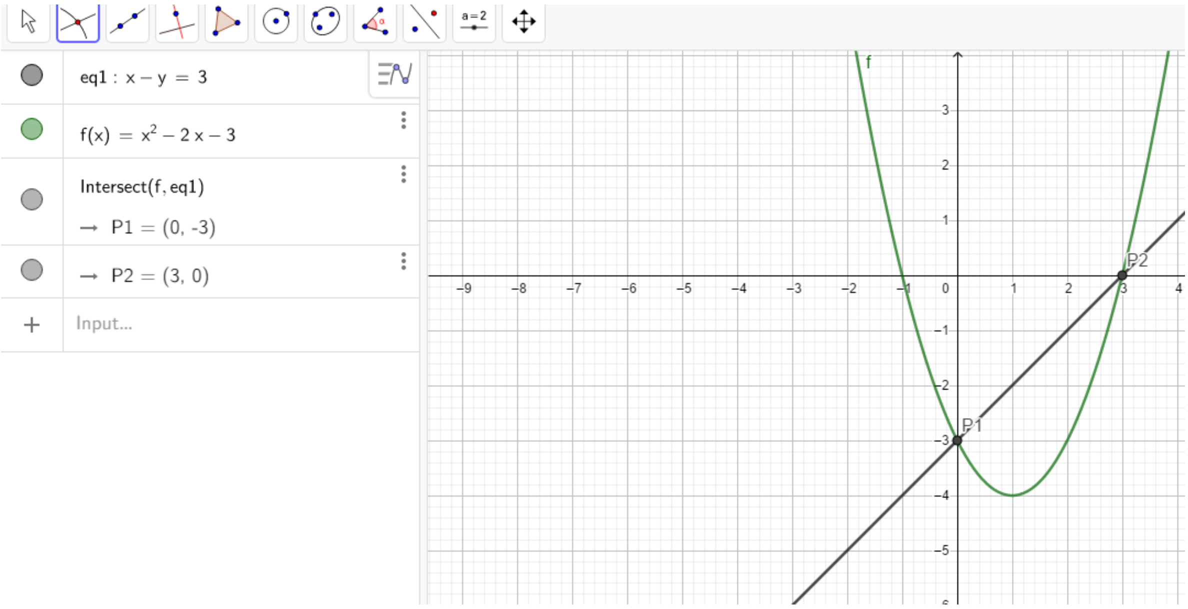
Figura 17 – Gráficos das equações da parábola e da reta



Fonte: Autoral, 2021.

Passo 3: Utilizando o comando INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, descobrimos os pontos de intersecção P_1 e P_2.

Figura 18 – Interseção das equações

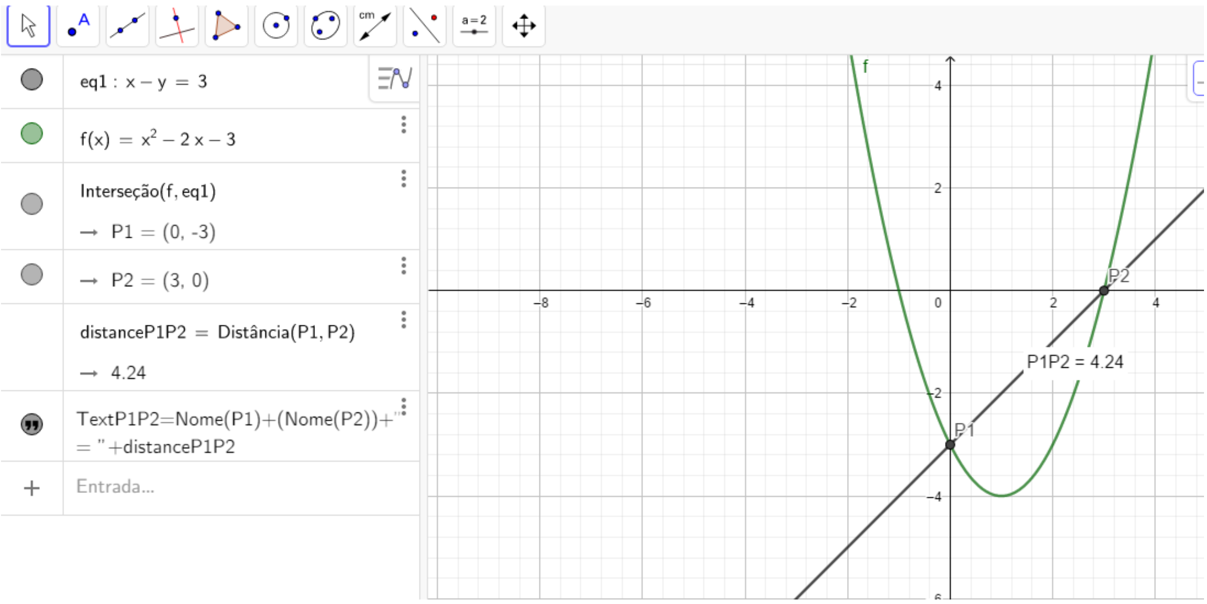


Fonte: Autoral, 2021.

Logo, podemos perceber que $P_1 = (0, -3)$ e $P_2 = (3, 0)$.

Passo 4: Utilizando o comando DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO vamos descobrir a medida do segmento com extremidades em P_1 e P_2.

Figura 19 – Medida dos segmentos com extremidades P_1 e P_2



Fonte: Autoral, 2021.

Temos então que a distância entre os pontos é $4,24$ o que implica em aproximadamente $3\sqrt{2}$.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A princípio, este trabalho se apresenta em duas partes. Na primeira etapa, apresentamos uma fundamentação teórica voltada para o uso de tecnologias digitais como auxílio no ensino de Matemática, mais especificamente com foco no *Software* GeoGebra, com o intuito de dar embasamento para a segunda parte do trabalho, na qual trouxemos três problemas de vestibulares. Na segunda etapa, o objetivo principal foi a resolução algébrica e visual utilizando o GeoGebra, com o intuito de apresentar as possibilidades de exploração dessa ferramenta ao ensinar Matemática, mostrando resoluções diferentes para um mesmo problema.

O segundo capítulo, ao abordar as possibilidades e desafios da utilização do GeoGebra, sentimos a necessidade de apresentar uma breve discussão sobre a utilização de ferramentas tecnológicas como mediação no ensino de Matemática, já que o GeoGebra está inserido nessas tecnologias. Neste contexto,

> A prática pode ser vista como um processo de aprendizagem através do qual os professores reproduzem sua formação e a adaptam à profissão, eliminando o que lhes parece inutilmente abstrato ou sem relação com a realidade vivida e conservando o que pode servir-lhes de uma maneira ou de outra. A experiência provoca, assim, um efeito de retomada crítica (retroalimentação) dos saberes adquiridos antes ou fora da prática profissional. Ela filtra e seleciona os outros saberes, permitindo assim aos professores reverem seus saberes, julgá-los e avaliá-los e, portanto, objetivar um saber formado de todos os saberes retraduzidos e submetidos ao processo de validação constituído pela prática cotidiana (TARDIF, 2002, p.23).

A importância da inserção das tecnologias no ensino, vem de uma vasta lista de possibilidades a serem exploradas, mas que devem ser integradas com cuidados, criatividade e com um senso crítico. É preciso utilizar as tecnologias criticamente com consciência de suas contribuições e não simplesmente inserir-las sem nenhum fim, acreditando que está fazendo uso de novas abordagens. Cabe dizer que, o ensino ,seja ele com ou sem o uso de ferramentas tecnológicas, deve ser planejado e replanejado quantas vezes for preciso. Contar com o auxílio de novas ferramentas, com criatividade, adaptando-se aos contextos, se torna um fator essencial para a educação no mundo atual.

Ao introduzirmos a ferramenta de Resolução de Problemas neste trabalho, pensamos na relevância de se propor duas resoluções para os problemas apresentados, possibilitando explorar caminhos diversos, ao participar ativamente da construção visual de cada problema, gerando discussões ligadas aos desafios de uma resolução visual e suas possibilidades. Ainda nesta etapa do trabalho, fizemos uma breve apresentação do GeoGebra, apontando algumas de suas ferramentas básicas e destacando os principais comandos utilizados na construção de cada resolução dispostas no Capítulo 3.

Em linhas gerais, o nosso trabalho buscou apresentar a possibilidade de proporcionar ao professor como o conhecimento de uma nova ferramenta didática aliada ao ensino pode contribuir, uma vez que terão a possibilidade de não só de observar os conhecimentos prévios e a partir deles explorá-los de formas diferentes possibilitando criar ou testar novas hipóteses, como também o acesso a visualização da construção das atividades a serem desenvolvidas, dando subsídio a novas indagações .

Inicialmente, ao propormos uma Resolução Visual o interesse estava ligado a mostrar uma visão ampla sobre o problema, aliada a Resolução Algébrica. A cada passo feito e refeito para a resolução, foram surgindo novos questionamentos e indagações interessantes a serem exploradas em cada problema. Alguns dessas discussões serão apresentadas a seguir:

- **Questões do Problema 1**

No problema 1, utilizamos a Resolução Visual como complemento da Resolução Algébrica, já que, ao resolvermos a equação utilizando a fórmula do discriminante, encontramos que $C \leq \frac{1}{4}$. A partir daí, já temos uma resposta suficiente para a questão, onde a condição necessária para que haja intersecção entre os gráficos é que $C \leq \frac{1}{4}$. Propondo uma resolução visual para o mesmo problema, utilizamos as informações obtidas algebricamente e assim criamos um controle deslizante para o C. Neste momento podemos observar que a cada valor que variamos para c, obtemos um comportamento diferente de seu gráfico. Logo surgiram questões como “Quantos pontos de interseção existem entre os gráficos agora que sabemos qual a condição?Quais são os pontos de intersecção se $C = \frac{1}{4}$", e quais são os pontos de intersecção se $C < \frac{1}{4}$?. Tais questionamentos, surgiram no exercício de repetição das resoluções, o interesse em explorar e expandir as discussões sobre o problema, torna a Resolução Visual mais surpreendente ainda, trazendo uma visão mais ampla sobre a questão proposta.

- **Questões do Problema 2**

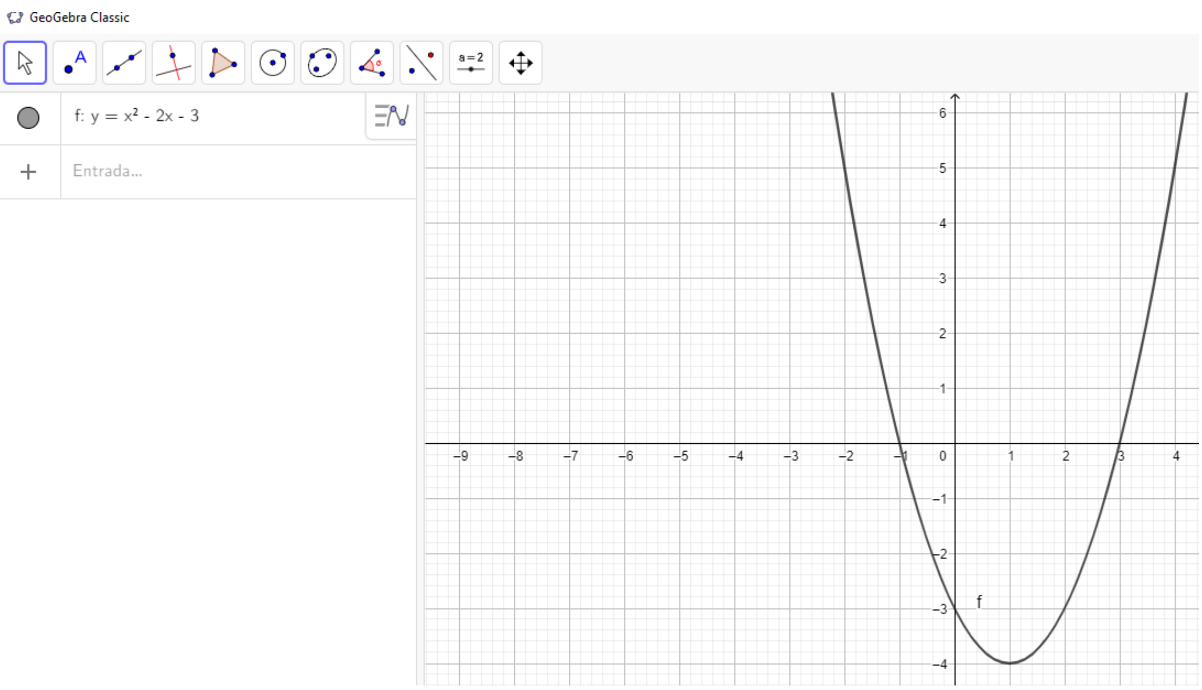
O nosso propósito aqui não é apresentar resoluções sofisticadas ou padronizadas, por isso, utilizamos métodos simples, com comandos básicos nos dando suporte a construções semelhantes às que fazemos com régua ou compasso. Nesse sentido, no segundo problema, utilizamos o mesmo esquema do Problema 1. Utilizando a ferramenta de Controle Deslizante, variamos os valores de C, deseja-se descobrir qual reta de equação contém os vértices das parábolas, sabendo que para cada C diferente temos também uma parábola diferente.

Para um melhor visualização de resolução e conclusão do exercício, inserimos na caixa de entrada o x_v e o x_v encontrados algebricamente, assim o GeoGebra no forneceu uma reta paralela ao eixo y e perpendicular ao eixo x, o que nos permitiu concluir não só algebricamente, mas geometricamente que o vértice da parábola está sobre a reta vertical, sendo que toda reta vertical é do tipo x constante.

- **Questões do Problema 3**

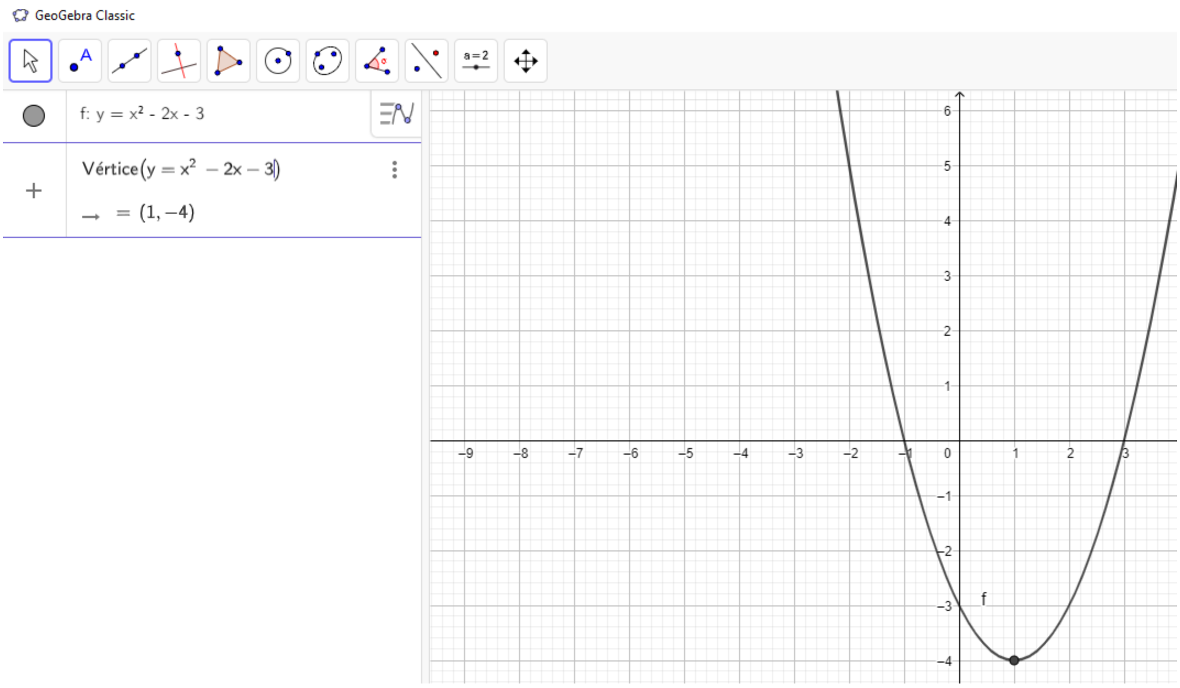
O Problema 3 apresenta alternativas que nos possibilitam explorar melhor o exercício, logo, nesta resolução descobrimos os pontos P_1 e P_2 e a distância entre eles. Um fator interessante a ser ressaltado é que o rigor das construções possibilitaram que as mudanças de parâmetros não modificassem características de cada construção. Com um *Software* que combina álgebra e geometria de forma dinâmica, o GeoGebra se faz interessante, pois nesse caso específico é possível resolver o exercício apenas utilizando essa ferramenta. Indagações como "Qual o vértice da parábola?", ou ainda "Quais dos pontos de interseção dos gráficos é o vértice da parábola?"podem surgir no ato da resolução e que podem ser resolvidas visualmente, como podemos observar na figura a seguir:

Figura 20 – Gráfico da parábola



Fonte: Autoral, 2021.

Figura 21 – Vértice da parábola



Fonte: Autoral, 2021.

Por fim, cabe salientar que nós, professores, precisamos sempre estar dispostos as adaptações a partir das novas ferramentas e novos modelos de ensino, baseando-se na evolução da sociedade em que estamos inseridos. Acrescento que a pesquisa em torno deste trabalho, trouxe-me reflexões sobre minhas futuras práticas e abordagens enquanto professora de matemática em formação. Assim, a busca contínua por uma formação adequada para atuar frente às novas demandas da sociedade moderna pode trazer mudanças significativas para o processo de ensino-aprendizagem.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**- BNCC. 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRASIL. Universidade de São paulo. Fundação universitária para vestibular. **1ª fase - 2021-prova de conhecimentos gerais/Matemática.**São Paulo. Disponível em: <https://www.fuvest.br/wp-content/uploads/fuvest2021primeirafase.pdf>

CUNHA, M. B. **Para saber mais: fontes de informação em ciência e tecnologia.** Brasília: Briquet de Lemos/ Livros, 2001. 168 p. Disponível em : <http://repositório.unb.br/handle/10482/15121/> Acesso em 19 Dez. 2021.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática da teoria à prática**. 16.ed. Campinas/SP: Papirus, 2008.

EXÉRCITO BRASILEIRO.Escola preparatória de cadetes do exército.Espcex-2020.**Prova de matemática/2º dia.** disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-militares/provas/exercito-2019-espcex-cadete-do-exercito-2-dia>

FONSECA, Lucio. **Tecnologia na Escola** 2001.

FRIZON, V. LAZZARI, M. de B. SCHWABENLAND, F. P. TIBOLLA, F. R. C. **A Formação de Professores e as Tecnologias Digitais.**. Comunicação e tecnologia. Artigo. V Seminário Internacional Sobre Profissionalização Docente- SIPD- Catedra UNESCO. 2015. Disponível em: <https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/22806-11114.pdf> Acesso em: 20 Dez. 2021.

GIL, A. C. (2002) **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4ª ed. São Paulo: Atlas S/A.

HOHENWARTER, M. **GeoGebra-Informações.** Disponível em: <http://www.geogebra.org/help/docupt-Br.pdf>

MINAYO, Maria Cecília de Souza. **Ciência, técnica e arte: o desafio da pesquisa social**, IN: MINAYO, Maria C.S. (org). Pesquisa Social: teoria, método e criatividade. Petrópolis, RJ: vozes, 2001.

RIBEIRO, F. M. (2012) **O ensino da matemática por meio de novas tecnologias**. Revista Modelos – FACOS/ CNEC Osório Ano 2 – Vol . 2 – N º 2 – AGO / 2012 – ISSN 2237 - 7077

SANTOS, I. S. **As novas tecnologias na educação e seus reflexos na escola e no mundo do trabalho.** In.: II JORNADA INTERNACIONAL DE POLÍTICAS PÚBLICAS, São Luiz, 2005. Anais... São Luiz, 2005.

SANTOS, M. A. dos.**Novas tecnologias no ensino de Matemática: possibilidades e desafios**. 2010. Disponível em: <http://www.pucrs.br/ciencias/viali/ticliteratura/artigos/tics/101092011085446.pdf>

SILVA, A. C. da **Reflexão sobre a matemática e seu processo de ensino-aprendizagem: implicações na (re) elaboração de concepções e práticas de professores**. 2009. 246 f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Educação da Universidade da Paraíba, João Pessoa. 2009

TARDIF, M. **Os professores enquanto sujeitos do conhecimento: subjetividade, prática, e saberes no magistério**. CANDAU, V.M. (org.). Didática, currículo e saberes escolares - Rio de Janeiro: DP e A, cap.1, p. 18-25, 2002

TAROUCO,V.L. Marcas do ensino tradicional sobre a compreensão da operação de multiplicação em professores dos anos iniciais do ensino fundamental. **Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades** São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016.

UCPEL.**vestibular de verão/primeira etapa/matemática.** 2021. Pelotas. disponível em: <https://vestibular.ucpel.edu.br/prova/provas-anteriores/>

VERGARA, S. C. **Projetos e relatórios de pesquisa em Administração**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2006.