UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MATHEUS PIRES CARDOSO

SOBRE A CONSISTÊNCIA DA HIPÓTESE DO CONTÍNUO

ARAGUAÍNA
2020

MATHEUS PIRES CARDOSO

SOBRE A CONSISTÊNCIA DA HIPÓTESE DO CONTÍNUO

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Matheus Pereira Lobo.

ARAGUAÍNA
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

C268s Cardoso, Matheus Pires.
Sobre a consistência da Hipótese do Contínuo. / Matheus Pires Cardoso.
– Araguaína, TO, 2020.
50 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2020.

Orientador: Matheus Pereira Lobo

1. Teoria dos Conjuntos. 2. Hipótese do Contínuo. 3. Números Transfinitos. 4. Ordinais. I. Título

CDD 510

MATHEUS PIRES CARDOSO

SOBRE A CONSISTÊNCIA DA HIPÓTESE DO CONTÍNUO

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Matheus Pereira Lobo.

Aprovada em: 15 / 12 / 2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Matheus Pereira Lobo (orientador)

Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hancco

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior

Dedico a todos que deixaram de pensar finitamente e imergiram para além do contínuo.

AGRADECIMENTOS

A Deus por me permitir concluir mais uma etapa. Aos meus pais por me encorajar em persistir, a Karel Kohlross pelo incetivo e aos meus colegas do Euklidea, Jusciel, Maria Cristina e Nelly pelo companheirismo, amizade e dedicação aos projetos de extensão. Gostaria, também, de agradecer a alguns colegas de turma que tive o prazer de compartilhar bons momentos de estudo o Victor Wender e Hevellyn Tays. Agradeço, também, ao meu orientador Prof. Dr. Matheus Pereira Lobo e os Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hancco e Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior por aceitarem avaliar este trabalho. E, também, a todos os prováveis leitores que se desafiarão a encarar o estudo da Teoria Axiomática dos Conjuntos, da Hipótese do Contínuo e de outras provas de consistência. Que este trabalho possa ser o início das aventuras no paraíso que começou com Cantor.

‘‘Ninguém haverá de nos expulsar do paraíso que Cantor criou para nós’’.

David Hilbert, 1926

RESUMO

Primeiramente formulada por Georg Cantor (1845-1918), a Hipótese do Contínuo permaneceu quase um século sem que uma solução fosse dada, a conjectura se tornou tão intrigante quantos os paradoxos que apareciam na teoria conjunto que David Hilbert, em 1900, a colocou como o primeiro problema da sua famosa lista, ele mesmo havia tentado, sem sucesso, prová-la, mas foi com a solução de um outro problema da lista que um vislumbre da prova desta conjectura começou a se formar. Em 1930, Kurt Gödel após resolver um dos problemas da lista e ter descoberto dois importantes teoremas para a lógica, trouxe também uma prova da consistência da Hipótese do Contínuo. É essa prova que este trabalho irá explicitar, iniciando com desenvolvimento da teoria axiomática dos conjuntos e posteriormente trabalhando com um modelo do sistema Zermelo-Fraenkel (ZF) de modo que possamos concluir que se ZF adicionado a hipótese do contínuo produzir em um contradição podemos então produzir uma contradição em ZF.

Palavras-chave: Teoria dos Conjuntos. Hipótese do Contínuo. Construtíveis. Números Transfinitos. Cardinais. Ordinais.

ABSTRACT

First formulated by Georg Cantor(1845-1918), the Continuum Hypothesis remained almost a century without a solution being given, a conjecture became as intriguing as the paradoxes that appeared in the set theory that David Hilbert, in 1900, inserted as the first problem on his famous list, he had tried unsuccessfully to prove it, but it was with the solution of another problem on the list that a glimpse of proof of this conjecture began to form. In 1930, Kurt Gödel after solving one of the problems in the list and having discovered two important theorems for logic also brought proof of the consistency of the Continuous Hypothesis. It is this proof that this work will make explicit, starting with the development of the axiomatic theory of the sets and later working with a model of the Zermelo-Fraenkel (ZF) system so that conquered that if ZF added the Continuum Hypothesis produce in a contradiction we can then produce a contradiction in ZF.

Keywords: Set Theory. Continuum Hypothesis. Construtible. Transfinite Numbers. Cardinals. Ordinals.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

É natural quando se estuda algo, podemos chegar em perguntas as quais não temos uma resposta imediata. Tal infortúnio, com direito a frustrações e sucessos, é intrínseco ao desenvolvimento da ciência. Afinal, se um dia faltar perguntas do que servirá a investigação? No entanto, apesar de que tais perguntas nos tome alguns anos para serem respondidas, pode ocorrer que a resposta que obtemos é que não há uma resposta ou até mesmo que o *"sim, é verdade!'* ou *"não, não é verdade!"* podem ser ambos aceitos. Foi com este tipo de "pergunta" que Georg Cantor se deparou no século XIX. Cantor estudava teoria dos números, equações indeterminadas e séries trigonométricas, sendo este último responsável por seu posterior interesse nos fundamentos da Análise Matemática, que conseguinte trouxe a luz o que hoje conhecemos como **Teoria Ingênua dos Conjuntos**, concebida em 1874, trazendo uma tentativa de se trabalhar com o infinito na forma mais fundamental da Matemática. O modo intuitivo com que algumas das definições foram tratadas por Cantor rendeu a teoria paradoxos, que foram aos poucos sendo descobertos. O próprio Cantor encontrou alguns deles. Os mais conhecidos são o de Russel e Burali-Forti, mas como o segundo exige um aprofundamento da teoria dos conjuntos além do exigido no curso de Fundamentos de Matemática, o de Russel se tornou mais explícito, ainda que podemos fazer uma relação peculiar com este paradoxo e os Teoremas da Incompletude de Gödel, os quais farão parte do desenvolvimento deste trabalho. Quando descobertos, os paradoxo renderam aos matemáticos esforços para que a teoria fosse *"consertada"*. Algo que era fundamental para uma gama de áreas da Matemática não poderia estar repleto de paradoxos. E tais problemas eram importantes para comunidade matemática da época. No século XX temos o surgimento da Teoria da Axiomática, o estudo do conjunto de postulados e suas propriedades, que teve como pioneiro o estudo da estrutura lógica d'Os Elementos de Euclides. A teoria dos conjuntos também passou por tentativas de se tornar consistente, o que veremos posteriormente se mostrou não ser possível, e para isso era necessário encontrar os pontos críticos que produziam os paradoxos. Da mesma forma que conceitos de ponto, reta e infinito afetavam a consistência da Geometria Euclidiana, os conceitos de elemento e conjunto também afetavam a teoria dos conjuntos, e durante a euforia do século XX nos estudos da Axiomática, que surge a moderna teoria Matemática dos conjuntos, ou teoria axiomática dos conjuntos. Com as reformulações da Teoria Ingênua dos Conjuntos, inicialmente organizada por Cantor, novos modelos emergiram, o mais famoso deles é o modelo de **Zermelo-Fraenkel**, conhecido como modelo ZF que muitas vezes pode ser chamado de **Zermelo-Fraenkel Choice** (ZFC), sendo "C"o abreviação de *Choice* o que é uma indicação da inclusão do *Axioma da Escolha*. Um outro modelo não muito conhecido é o de Gödel-Bernays.

Mas não eram apenas os paradoxos que intrigavam os matemáticos quando o assusto era a teoria dos conjuntos. A Hipótese do Contínuo, formulada em 1878 por Cantor, havia se tornado um problema a qual deveria ser resolvida. Mas, antes disso, a hipótese permeou mais da metade do século XX, sem que fosse chegado a uma conclusão definitiva, ela que tampouco produzia paradoxo no sentido de erro, incitou os matemáticos por ser difícil de se encontrar uma resposta definitiva. Cantor foi um dos primeiros a tentar provar a veracidade da hipótese, não obteve sucesso, apesar de acreditar que esta era verdadeira. Ela chegou a desafiar outras grandes mentes da época, uma delas David Hilbert, o que levou a conjectura a ter o prestígio de ser o primeiro de uma lista de 23 problemas, formulada por Hilbert no final do século XIX, tais problemas não possuiam solução e poderiam servir de guia para a geração futura de matemáticos. Solucionar os paradoxos e obter resposta para a hipótese traria a possibilidade de se ter uma teoria consistente, e aqui podemos ver que a hipótese estava ligada à escola de Hilbert, participando do período histórico da filosofia da Matemática e a crise de uma das três principais escolas filosóficas. Hilbert lançou o desafio aos matemáticos do século XX a provar que não havia um infinito que fosse estritamente maior que o dos naturais e estritamente menor que os dos Reais. Em 1930, Kurt Gödel resolvia o segundo problema da Lista de Hilbert, que se tratava de provar a consistência da aritmética, frustrando as intenções da escola de Hilbert. Com o desenvolvimento dos Teoremas da Completude e Incompletude, Gödel conseguiu mostrar que qualquer teoria dita consistente é incompleta caso contrário ela passaria a ser inconsistente, Gödel também veio a provar que a Hipótese do Contínuo era consistente, desde que ZF fosse também. Posteriormente, por meio do método ou técnica de forcing de Paul Cohen, 1963, que enfim foi possível concluir algo sobre a hipótese. Parte dos desenvolvimentos realizados em prol da solução definitiva para a hipótese será o que mostraremos neste trabalho. Para compreender a magnitude desta hipótese, temos que conhecer o que são conjuntos infinitos, cardinalidade, e números transfinitos e uma gama de conceitos, definições e teoremas da Teoria dos Conjuntos. Esperamos que o leitor já tenha um conhecimento prévio da teoria elementar dos conjuntos e de lógica também. Assim poderemos compreender o que torna esta conjectura desafiadora e que continua a intrigar os matemáticos até hoje. Faremos uma breve explanação dos capítulos que compõem o desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente no Capitulo 2 iremo desenvolver a Teoria Axiomática dos Conjunto de Zermelo-Fraenkel, apresentado todos os noves axiomas, conceitos e definições sobre relação, relação de ordem, ordinais e cardinais. O Capítulo finalizará com o enunciado da Hipótese do Contínuo. No capítulo seguinte iremos explicitar um método de demonstrar que o Axioma da Regularidade é consistente com ZF, também desenvolveremos conceito de Axiomas Altos de Infinito e concluido o Capítulo 3 explanando, de maneira sucinta, sobre o Teorema de Löwenheim-Skolem. No ultimo capítulo seguiremos com a demonstração da consistência da Hipótese do Contínuo e o Axioma da Escolha. Neste capítulo iremos desenvolver o método de Kurt Gödel para esta demonstração que se baseia na demonstração de três teoremas principais.

1.1 Justificativa e Metodologia

A Hipótese do Contínuo é um dos problemas centrais da teoria dos conjuntos. Ela permaneceu em aberto até 1930, quando Kurt Gödel provou sua consistência, o que significava que não poderíamos demonstrar sua negação, mas em 1963 descobriu-se que era independente dos axiomas da teoria dos conjuntos, assim como o quinto postulado de Euclides é para a geometria euclidiana, já pelo método *forcing*, que provou a negação da hipótese, ou seja, não poderíamos então provar a sua afirmação. Sendo assim, teríamos uma conjectura que não poderíamos provar que ela é falsa ou verdadeira. É possível concluir que tanto o modelo que utiliza a afirmativa quanto o modelo que sugere a negação são consistentes. Desta forma, é possível justificar a importância do estudo desta hipótese e sua prova de consistência, para que se possa compreender toda a construção que leva ao questionamento se há um número cardinal transfinito entre dois cardinais consecutivos além de ser um estudo introdutório sobre teoria axiomática dos conjuntos, teoria de modelos e provas de consistência relativa. Neste trabalho desenvolvemos todos os tópicos principais por meio de estudo das bibliografias que são apresentadas na seção de referências, buscamos estudar tanto referências pioneiras no estudo dos objetos aqui apresentados como atuais também. Aqui seguimos uma ordem de apresentação de conceitos parecida com a que foi apresentada em [1]. Adotamos alguns símbolos e notações que podem estar diferentes da referência [1], mas nossa intenção é que, caso o leitor já tenha conhecimento sobre o assunto a mesma não pareça ultrapassada ou confusa e caso seja a primeira leitura, queremos que o leitor comece a se habituar com alguns símbolos e notações que são recorrente em Teoria dos conjuntos e Teoria dos Modelos [4] na literatura atual.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Nosso objetivo é apresentar as provas da consistência de Kurt Gödel [1, 2].

1.2.2 Objetivos Específicos

- Efetuar uma breve explanação de conceitos da teoria axiomática dos conjuntos, necessários para entender a Hipótese do Contínuo;

- Mostrar a consistência da Hipótese do Contínuo por um método utilizado por Gödel.

Capítulo 2

Teoria Axiomática dos Conjuntos

2.1 Axiomas

Neste capítulo, nosso único objetivo é construir todo o aparato teórico necessário para se compreender, de forma eficaz, a Hipótese do Contínuo (CH)[1]. Deste modo, faz-se necessário desenvolver o esquema de axiomas Zermelo-Fraenkel ou, como usaremos a partir de agora, o sistema ZF[2]. De fato, há outros sistemas axiomáticos da teoria que podem facilmente substituir o sistema que escolhemos, mas para o nosso propósito, o sistema ZF é suficiente e pode nos garantir um desenvolvimento sem qualquer contradição até o nosso objetivo. No sistema que desenvolveremos, partiremos da ideia de que o conceito de conjunto é o que se tem de mais fundamental em Matemática. O que certamente não retira dos números inteiros este entendimento que possuímos sobre os mesmos, apesar de que podemos desenvolver a Matemática de modo a ter os inteiros como entidades primitivas e os conjuntos entidades de ordem superior. No entanto, para os nossos objetivos específicos, teremos como ponto de vista que, até por meio da ideia abstrata que se tem sobre conjuntos, é possível obter os inteiros. De forma mais geral e conclusiva, o que estamos dizendo é que, tudo no nosso universo pode ser interpretado por meio de conjuntos e de processos sucessivos de união de conjuntos vazios. Para iniciar, primeiramente vamos apresentar uma lista de símbolos gerais que iremos utilizar.

- $\neg$ não;
- $\wedge$ e;

[1]Esta é a abreviação de *Continuum Hypothesis*. Neste trabalho, achamos preferível utilizar a abreviação das palavras em inglês, ao invés do português, uma vez que na literatura conhecida é comum usar CH e não HC. Sendo assim, a partir daqui utilizaremos tal nomenclatura quando quisermos citar a Hipótese do Contínuo.

[2]A abreviação é de Zermelo-Fraenkel, também pode ser usado ZFC, onde C refere-se a palavra inglesa *Choice* explicitando a inclusão do **Axioma da Escolha** que iremos incluir neste breve desenvolvimento da teoria axiomática dos conjuntos; no entanto, usaremos ZF mesmo com a inclusão do Axioma da Escolha, caso contrário iremos deixar explícito os motivos.

- $\vee$ ou;
- $\rightarrow$ implica;
- $\leftrightarrow$ se, e somente se;
- $\forall$ para todo;
- $\exists$ existe;
- $=$ igual;
- (,) parêntesis;
- x, x' e y, y' variáveis.

Vamos, agora. enunciar os axiomas.

Axioma 1. *Axioma da Extensionalidade*

$$\forall x, y : z \in x \leftrightarrow z \in y \rightarrow x = y$$

Em palavras é o mesmo que dizer que para todos os conjuntos x e y tais que para todo z que está contido tanto em x implica x contido em y, então x e y são o mesmo conjunto, ou seja, dois conjuntos são iguais se possuem os mesmos elementos. Este axioma também nos garante que um conjunto é determinado por seus membros. Por meio deste axioma podemos sustentar a seguinte definição.

Definição 2.1. Sejam x, y e z conjuntos quaisquer, tal que

a) $x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$;

b) $x \subset y \rightarrow x \subseteq y \wedge \neg(x = y)$.

Essa definição nos trás a ideia de um conjunto contido em outro, o que em símbolos exprimimos como $x \subseteq y$. E quando $x \subset y$ dizemos que x é um subconjunto próprio de y.

Axioma 2. *Axioma do Conjunto Vazio*

$$\exists x\, \forall y\, \neg(y \in x).$$

Há um conjunto x para todo y tal que y pertence a x seja falso. Este axioma estabelece um conjunto que conhecemos por *conjunto vazio* ou $\emptyset$. Aqui, x é o conjunto vazio.

Axioma 3. *Axioma dos Pares não-ordenados*

$$\forall x, y\, \exists z\, \forall w(w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y).$$

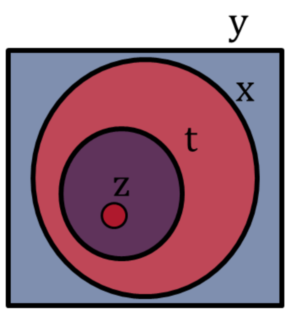
Isto é, dados dois conjuntos quaisquer x e y, há um conjunto do tipo $\{x, y\}$. Nós iremos representar o conjunto z por $\{x, y\}$. Note que $\{x\}$ é o mesmo que $\{x, x\}$ e $< x, y >= \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Denominamos o conjunto $< x, y >$ como o *par ordenado* de x e y. É fácil provar que $< x, y >=< u, v >$ implica em $x = u$ e $y = u$. Posteriormente iremos precisar do conceito de função para desenvolvermos outras ideias que formalizam o sistema axiomático que estamos construindo. Apesar de considerarmos que há uma ideia sobre o que é uma função gostaríamos, porém, de defini-la da seguinte maneira.

Definição 2.2. Uma função f é o conjunto de pares ordenados de modo que teremos $< x, y >$ e $< x, z >$ em f, e esta implicando em $y = z$. Sendo assim, o conjunto dos x tais que o par $< x, y >$ está em f chamaremos de *domínio* e o conjunto dos y, do mesmo par, denominamos de *contradomínio*. Além disso, f é *injetora ou injetiva* se todos os elementos do domínio possuírem um correspondente no contradomínio.

Axioma 4. *Axioma do Conjunto da Soma ou União*

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow \exists t(z \in t \wedge t \in x)).$$

Figura 2.1: Ilustração de um caso particular do Axioma 4.



Fonte: dos Autores.

Este axioma nos diz que há um y que contém todos os conjuntos que estão em x. Pelo Axioma 3, podemos definir $z = x \cup y$, com z tendo seus elementos definidos do seguinte modo

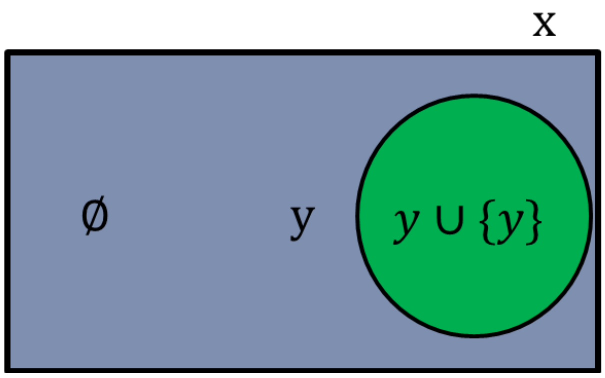
$$\forall x, y\, \exists z\, \forall t(t \in z \leftrightarrow t \in x \vee t \in y).$$

Axioma 5. *Axioma do Infinito*

$$\exists x\, (\emptyset \in x \wedge \forall y\, (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

Informalmente, poderíamos expressar o axioma do infinito da seguinte forma: Há um conjunto que contém o vazio, e que dado y um elemento que pertence a este conjunto, o elemento $y \cup \{y\}$ também está no conjunto. De modo sucinto, o axioma apenas estabelece a existência de um conjunto infinito. Perceba que utilizamos o Axioma 4 para construir um conjunto que possui elementos que são adicionados recursivamente na forma de $y \cup \{y\}$.

Figura 2.2: Ilustração de um caso particular do Axioma 5.



Fonte: dos Autores.

Axioma 6. *Axioma da Substituição*

$$\forall t_1, \ldots, t_k \ (\forall x \ \exists! \ y \ A_n(x, \ y; t_1, \ldots, t_k) \rightarrow \forall u \exists v \ B(u, \ v)) \text{ com } n = 1, 2, 3, \ldots$$

em que

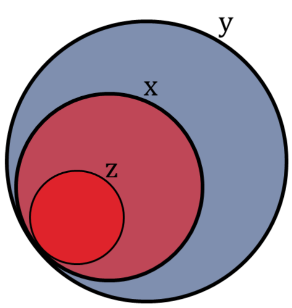
$$B(u, \ v) \equiv \forall r \ (r \in v \leftrightarrow \exists s(s \in u \vee A_n(s, \ r; \ t_1, \ldots, t_k))).$$

De modo informal, o Axioma 6 expressa que dado um conjunto X, existe uma fórmula que associa cada $a \in X$, formando assim conjuntos $\varphi(a)$. Deste modo estamos querendo dizer que existe o conjunto $\{\varphi(a); a \in X\}$, tal conjunto conhecemos como contradomínio de φ em X. Veremos, posteriormente, que este axioma, assim como o próximo, não depende dos outros.

Axioma 7. *Axioma do Conjunto Potência*

$$\forall x \ \exists y \ \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

Figura 2.3: Ilustração de um caso particular do Axioma 7.



Fonte: dos Autores.

Ao contrário do que se possa intuir sobre este axioma, ele não pode ser derivado de nenhum outro anterior. Ele diz que há, para cada x, um conjunto y formado pelos subconjuntos de x.

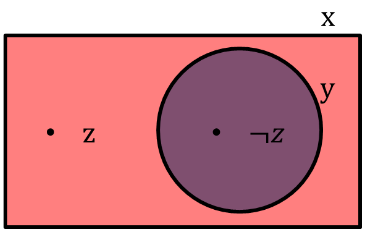
Podemos perceber que este axioma não deriva nem mesmo do **Axioma da Substituição**, uma vez que, mesmo que o conjunto y seja formado por uma propriedade, ele não é dado como contradomínio de uma função. Será possível perceber com os conceitos que virão, que y terá cardinalidade maior que x, o que nos permitirá obter cardinais de ordem superior, que são cardinais que transcendem os inteiros.

Axioma 8. *Axioma da Escolha*
"Se $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos tal que, para todo $F \in \mathcal{F}$, $F \neq \emptyset$, então existe $f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}$ tal que, para todo $F \in \mathcal{F}$, $f(F) \in F$. Isto é, dada uma família de conjuntos não vazios, podemos escolher um elemento de cada conjunto." [4]

Axioma 9. *Axioma da Regularidade*

$$\forall x \; \exists y (x = \emptyset \vee \; (y \in x \wedge \forall z \; (z \in x \to \neg z \in y)))$$

Figura 2.4: Ilustração de um caso particular do Axioma 9.



Fonte: dos Autore.

Este axioma nos diz que dado um conjunto x podemos ter que x é o conjunto vazio ou há $y \in x$ tal que para todo z, se z está em x, então todos os elementos, exceto z, estão em y. Em outras palavras, existe um conjunto A, não vazio, de modo que há um $C \in A$, onde a interseção de A com C é o conjunto vazio, ou seja, $A \cap C = \emptyset$. Este axioma garante a existência de um elemento minimal para a relação $\in$. Também evita conjuntos do tipo $y \in y$. Pode-se até comparar este axioma com a relação de boa ordem; no entanto, $\in$ não ordena todos os conjuntos, pois podemos ter conjuntos do tipo $x \neq y$ como $\neg x \in y$ e $\neg y \in x$. É comum referir-se à relação $\in$ como uma relação de *boa fundação* e os conjuntos advindos desta relação são denominados conjuntos *bem-fundados*, mas veremos isto mais adiante.

2.2 Ordinais

Desenvolveremos agora conceitos relacionados aos ordinais que, além de poderem ser, em um certo sentido, usados como generalizações dos números naturais, também exercem um papel importantíssimo em quase todas as áreas de investigação Matemática. Isso porque, quando se estuda modelos podemos definir a complexidade desses objetos por meio dos ordinais. De forma intuitiva, para introduzir a ideia de ordinais, podemos definir como sendo *classes de equivalência de conjuntos bem-ordenados* [9]. Em um primeiro momento esta definição parece ser satisfatória. No entanto, este tratamento intuitivo leva a algumas dificuldades e poderá produzir paradoxos[3]. Uma proposta de solução, para tal impasse, foi desenvolvida por Von Neumann em 1923, que propôs que fosse escolhido um *representante canônico* para as tais classes de equivalência, e será o que faremos. Para isso, devemos apresentar algumas definições para que possamos desenvolver os ordinais.

Definição 2.3. Seja R uma relação em um conjunto X. R será um conjunto de pares ordenados, os quais são formados por elementos do conjunto X, de modo que o $X \times Y$ é o conjunto dos pares ordenados $< x, y >$, tais que $u \in X$ e $v \in Y$.

Se f é uma função, o domínio de f é x e $y \subseteq x$, então $f \mid y$ (f restrita ao conjunto y) será o conjunto dos pares $< u, v >$ em f tais que $u \in y$.

Se $f(x) = f(y) \to x = y$, podemos então definir f^{-1} como sendo o conjunto $\{< x, y >|< y, x >\in f\}$. Chamaremos f^{-1} de *função inversa* de f.

Estas definições que introduzimos nos garantem a criação de um conjunto cujos elementos seguem uma propriedade específica, formando então pares, que podem ser ordenados ou não. Após esta definição, designamos uma relação especial a qual chamamos de função, que relaciona dois conjuntos, um chamamos de domínio e outro contradomínio. Posteriormente veremos que tais conjuntos nos auxiliam na demonstração de alguns teoremas, tornando a nossa tarefa de determinar um representante canônico para as classes de equivalência, possível e sem contradição. Agora que já definimos relação e função, podemos determinar um tipo de relação, a qual exercerá um papel de ordenar ou determinar que um conjunto possui uma ordem. No entanto, estamos construindo nosso sistema, e não sabemos o que significa um conjunto possuir uma ordem, ou até mesmo ser ordenado. Para isso vamos à seguinte definição.

Definição 2.4. *(Relação de Ordem)* Seja uma relação R em um conjunto T, de forma que podemos escrever $x < y$ em vez de $< x, y >$ em R, tal relação é uma relação de ordem se as duas afirmações abaixo forem válidas.

A.1 $\forall x, y \in T$ seja válido uma das três afirmações: $x = y$, $x < y$ ou $y < x$.

A.2 E seja verdade que $x < y \wedge y < z \to x < z$ (transitividade).

Definição 2.5. *(Boa ordem)* Uma relação R é de *boa ordem* em T se R *ordena* o conjunto e se tivermos um conjunto $B \subseteq T$ com B não vazio implicando em

$$\exists x(x \in B \wedge \forall y(y \in B \to \neg y < x)).$$

[3]Um paradoxo no sentido de contradição.

Podemos escrever $x > y$ ao invés de $y < x$, e $x \leq y$ para indicar que $x = y \vee x < y$.

Definição 2.6. *(Supremo de um conjunto)* Se $B \subseteq T$ escrevemos $supB = x$ se x é o menor elemento de T tal que $y \in B \to y < x$. Podemos também escrever $x > y$ e $x \leq y$ para designar $x = y$ ou $x < y$.

Definição 2.7. *(Segmento inicial)* Dado um conjunto A bem ordenado por uma relação R, iremos denominar B um *segmento inicial* de A tal que

$$x \in B \text{ e } y < x \to y \in B.$$

Perceba que da definição acima podemos ter que se B é um segmento inicial, então $B = A$ ou $\exists\, x\, \forall\, y\ (y < x \to y \in B)$. Isso porque o conjunto $A \setminus B \neq \emptyset$ e $x \in A \setminus B$ e x pode ser seu primeiro elemento, deste modo se houver $y < x$ é óbvio que $y \in B$. De outro modo, se tivermos $y \in B$ e $x < y$ então teríamos que $x \in B$ e consequentemente $x \notin A - B$ o que é contraditório, sendo assim devemos ter $y < x$. Deste modo, podemos reescrever nossa definição de *segmento inicial* da seguinte forma. Do mesmo modo, para qualquer x existe um conjunto $B = \{y \mid y \leq x\}$, B é chamado de *segmento inicial*.

Podemos nos indagar se um dado subconjunto de um conjunto bem ordenado é também bem ordenado. Para isso, seria necessário encontrarmos um modo de conservar a ordem entre o conjunto e suas partes. Para tanto podemos ter uma função $f : S \to T$, sendo tanto S quanto T conjuntos ordenados, f poderá conservar a ordem se ocorrer $x < y \to f(x) < f(y)$. Com isso podemos estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 2.8. *Sejam S e T ambos conjuntos bem ordenados. Então ou*

i) Existe uma função f, que é única, conserva a relação de ordem de S sobre um segmento inicial de T;

ii) ou existe f, ainda única, que conserva a relação de ordem de T sobre um segmento inicial de S.

Iremos omitir a demonstração deste teorema, mas caso o leitor se interesse, sugerimos a referência [3] que possui, de forma rigorosa, a demonstração do mesmo. Para a compreensão dos teoremas seguintes, chamaremos a função que satisfaz o teorema acima como *função boa*.

Teorema 2.9. *Se existe uma função boa f de A em B e uma outra função boa g de B em A, então, f e g são sobrejetivas e inversas entre si.*

Demonstração: Seja B um segmento inicial de um conjunto C, e f uma função boa tal que $f : A \to B$, deste modo temos que $f^{-1} : B \to A$. Agora, façamos g bijetora de um segmento inicial de C a A, ou seja, tenhamos D um segmento inicial de C e que $g : D \to A$. Se f^{-1} for sobrejetiva, temos que $D = B$, logo $f^{-1} = g$. $\square$

Definição 2.10. Se A e B são conjuntos bem ordenados, escrevemos $\breve{A} \leq \breve{B}$ se existe uma f boa de A em B. Se f não é sobrejetiva então $\breve{A} < \breve{B}$. Caso contrário, se f é sobrejetiva, então $\breve{A} = \breve{B}$.

Nesta definição estamos a introduzir a ideia de uma relação que posteriormente iremos conhecer como cardinalidade.

Definição 2.11. *(Conjunto Transitivo)* Dado um conjunto A, ele será chamado transitivo se houver

$$y \in x \wedge x \in A \rightarrow y \in A.$$

Podemos agora, definir o que é um ordinal da forma que propusemos inicialmente.

Definição 2.12. *(Ordinal)* Seja α um conjunto bem ordenado. Designaremos α como um *ordinal* se α for bem ordenado por $\in$ e for um conjunto transitivo. Vamos escrever $Ord\,\alpha$ para indicar *ordinal de alfa*.

Como havíamos dito, a definição que colocamos vem da motivação que queremos de estabelecer um representante canônico para cada classe de equivalência de conjuntos bem ordenados. Decidimos usar a relação $\in$ por ser a relação mais natural a ser empregada. Desta forma para que possamos estabelecer o representante canônico, duas condições devem ser satisfeitas: primeiro o conjunto deve estar bem ordenado pela relação que estabelecemos na definição e deve ser transitivo. A seguir iremos demonstrar que, se existem dois ordinais equivalentes no que se refere à boa ordenação, então eles são idênticos, por exemplo, os ordinais que representam $\{\emptyset\}$ e $\{c\}$ são idênticos. Mas antes disso, vejamos alguns teoremas necessários a esta conclusão.

Teorema 2.13. *Um segmento inicial de um ordinal é também um ordinal.*

Demonstração: Seja T um segmento inicial de α . Por hipótese, α é bem ordenado por $\in$ e é também transitivo. Como $T \in \alpha$, então T é também bem ordenado por $\in$. Se tivermos um $x \in T$ e $y \in x$ teremos que y é menor que x, na ordem de x em α e por isso $y \in T$. Deste modo, T é transitivo. Então, por definição, T é um ordinal, ou seja, $Ord\,T$. □

Teorema 2.14. *Dados $Ord\,\alpha$ e $x \in \alpha$, então x será o conjunto formado pelos $y \in \alpha$ de modo que y precede x.*

Demonstração: Temos, por hipótese, que $x = \{y \mid y \in x\}$ e que $\in$ é a relação de ordem em α . Podemos também definir $x = \{y \in x \wedge y \in \alpha\}$, por esta definição fica fácil ver que x é transitivo, porque se $x \in \alpha$ tendo assim $\in$ como relação que bem ordena qualquer $y \in x$, teremos que, na ordem de x, y será menor que x, ou seja, y precede x. □

Por meio do **Teorema 2.15** e de outro que será apresentado posteriormente, poderemos entender o que são os ordinais, ou seja, o que são os elementos que compõem um ordinal.

Teorema 2.15. *Se temos $Ord\,\alpha$ e $x \in \alpha$ então temos que $Ord\,x$.*

Em outras palavras, o teorema nos garante que se temos um ordinal de α e neste ordinal há um conjunto x, logo este conjunto x também é ordinal. A afirmação deste teorema é semelhante ao que foi feito para concluirmos que o segmento inicial de conjunto bem ordenado é também um conjunto bem ordenado.

Demonstração: Por hipótese, $x \subseteq \alpha$ e como $Ord\,\alpha$, então x é bem ordenado por $\in$. Agora, tomemos $y \in x$ e $z \in x$. Se $y \in x$ e $x \in \alpha$, então $y \in \alpha$ e, portanto, $z \in \alpha$. Logo, x é transitivo; deste modo, x é um ordinal, ou seja, $Ord\,x$. □

Teorema 2.16. *Se $Ord\,\alpha$, então dado β . Podemos escrever $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$*

Demonstração: Sejam $x, y \in \beta$, disto temos que:

ou ($x = y = \alpha$) ou ($x = \alpha$ e $y \in \alpha$) ou ($y = \alpha$ e $x \in \alpha$).

Perceba que em todos os casos, temos que ou $x = y$, ou $x \in y$ ou $y \in x$. Nesses três casos podemos concluir que β é bem ordenado por $\in$ e β é transitivo. Logo $Ord\,\beta$. □

O teorema que acabamos de apresentar esboça o que posteriormente chamaremos β de sucessor de α .

Teorema 2.17. *Seja A um conjunto bem ordenado. Existem f e τ únicos tais que $Ord\,\tau$, $f : A \to \tau$ e f é uma função boa, então A é isomórfico a um ordinal.*

Demonstração: Primeiro, vamos considerar que $\{\emptyset\}$ seja o único ordinal com apenas um elemento. Podemos formalizar essa afirmação sendo $x = \{v\}$ um ordinal e fazendo com que $\neg v \in v$ e se $u \in v$ então teremos que $u \in x$. Nestas poucas linhas mostramos que x é bem ordenado por $\in$ e é transitivo (a definição de ordinal) e perceba que $u \neq v$, logo $v = \emptyset$. Façamos agora um conjunto S que é formado por todos os $t \in A$, ou seja, seja um segmento inicial de A, de modo que tenhamos $I_m = \{y \mid y \leq m\}$ para todo $m \leq t$. Sendo assim, existe uma f_t (restrita a t) sobre um ordinal $\tau(m)$. Perceba que nosso segmento inicial S não é vazio, pois se t é o menor elemento de A então f é um isomorfismo com $\{\emptyset\}$. Considere agora $f(x)$ definida para todo $t \in A$ de modo que $f(t) = f_t(t)$, daí usando o **Axioma 6**, que τ o contradomínio de f, vemos que $f : A \to \tau$ é um isomorfismo. Falta apenas provarmos que τ e f são únicos. Para isso, façamos uma função g que é outro isomorfismo sobre $Ord\,\alpha$, então com $t \in A$, a restrição de g em I_t será um isomorfismo de g em I_t em um $Ord\,G$ que está em α , o que faz com que $g(x) = f(x)$ pela propriedade que define A. Deste modo, f e τ são únicos. Sendo assim, se $A = S$, o teorema está demonstrado. Caso $A \neq S$, tomemos $y = supA$ e defina uma g sobre $A \cup \{g\}$, onde $g(t) = f(t)$ para $t \in A$ e $g(y) = \tau$. Agora , é certo que temos uma g que é um isomorfismo de I_y sobre $\tau \cup \{\tau\}$, o que significa que $y \in A$, o que é uma contradição. □

Corolário 2.18. *Se α e β são ordinais, então se $\breve{\alpha} = \breve{\beta}$, $\alpha = \beta$ e se $\breve{\alpha} < \breve{\beta}$ então $\alpha \in \beta$.*

Demonstração: A primeira parte já foi provada, pois se $\breve{\alpha} = \breve{\beta}$, é trivial que $\alpha = \beta$. Agora vejamos se $\breve{\alpha} < \breve{\beta}$ implica em $\alpha \in \beta$. Se ocorrer, então há uma f que é isomorfismo de α em I, sendo I um segmento inicial de β . Defina $I = \{x|x < \gamma\}$ para $\gamma \in \beta$. Sabemos que I será ordinal e que $I = \alpha$, mas também $I = \gamma$. □

Teorema 2.19. *Se $Ord\,\alpha$ então $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$ é o menor ordinal maior do que α . Escrevemos então $\beta = \alpha + 1$.*

Demonstração: Seja $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$ com $Ord\,\alpha$. É evidente que $\alpha < \beta$, e β será o menor pois $\beta - \alpha = \{\alpha\}$, com β sendo ordinal, pois é bem ordenado por $\in$ e, dado um $x \in \alpha$, e $\alpha \in \beta$, então $x \in \beta$, ou seja, β é transitivo e, consequentemente, $Ord\,\beta$. □

Teorema 2.20. *Se T é um conjunto formado por ordinais, então existe um menor α em T.*

Demonstração: Tome um $\beta \in T$. O primeiro elemento de $\beta + 1 \cap T$ é o α que se procura. □

Teorema 2.21. *Se T for um conjunto de ordinais, há um ordinal α de modo que $\beta \in T \to \beta < \alpha$. Escrevemos neste caso $\alpha = sup\,T$.*

Demonstração: Tomemos ψ como um conjunto-soma de T. Se $x, y, z \in \psi$ então para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ em T, $x \in \alpha_1, y \in \alpha_2, z \in \alpha_3$ e α_i são ordinais. Se, por exemplo, $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \to x, y, z \in \alpha_3$, assim ψ é bem ordenado por $\in$. Se $S \subseteq \psi$, digamos com $\alpha \cap S \neq \emptyset$ e $\alpha \in T \to \alpha \in \psi + 1$, disso pode-se mostrar que ψ é o menor elemento destes ordinais e que se $\beta = \psi + 1$, então β satisfaz o teorema. □

Definição 2.22. α é designado *sucessor* de β se $\exists\beta(\alpha = \beta + 1)$.

Esta definição serve apenas para nomearmos o conjunto $\beta + 1$ como sucessor de algum ordinal, já havíamos provado que tal conjunto precede um outro que é estritamente menor que ele.

Definição 2.23. α será um *ordinal limite* se $\alpha \neq 0$.

Perceba que esta definição pressupõe a existência dos inteiros, ainda não tornamos claro a existência do mesmo no nosso sistema, mas veja que a definição se assemelha a um dos axiomas de Peano para a construção dos inteiros. Por enquanto, falamos vagamente sobre os inteiros, sem preposicionar um teorema sequer sobre os mesmos, mas a partir dos teoremas já expostos e desta definição, já inicia uma ideia concreta do conjunto dos inteiros em ZFC. Sabemos que o fato de definir este conjunto não lhe garante o status de existência, logo o motivo de explicitarmos o **Teorema 2.28** que demonstrará a existência dos ordinais limites.

Definição 2.24. Diremos que α é inteiro se $\beta \leq \alpha \rightarrow \beta$ é um sucessor ou é 0.

Teorema 2.25. *Existe um ordinal limite.*

Demonstração: Seja x o conjunto que satisfaz o **Axioma do Infinito (Axioma 5)**. E seja y o supremo de todos os ordinais que estão em x. Então, uma vez que $\alpha \in x \rightarrow \alpha + 1 \in x$, logo se $y = \alpha + 1$, então $y \in x$ e é um ordinal limite deste conjunto. □

Juntamente com o teorema acima, podemos propor a existência de um conjunto ω, que irá conceder a existência dos inteiros no nosso sistema. Faremos da seguinte forma, seja x um ordinal limite e seja ω o menor ordinal limite $\leq x$. Então, se $n \in \omega$ então n é inteiro. E também, para um $y \in \omega$, se $z \leq y \rightarrow z$ *é um sucessor ou é* 0, de modo que y é também um inteiro. Desta forma, temos que ω é o conjunto dos inteiros. A existência de ω no nosso sistema nos garantirá um modo de formalizarmos a Hipótese do Contínuo uma vez que, com ω, possuímos um conjunto que permitirá dizer se um determinado conjunto é ou não contável.

Os dois próximos teoremas serão apenas enunciados, o primeiro também conhecido como *Indução Matemática* e o segundo conhecido como *Indução Transfinita*não serão demonstrados, mas as referências [1, 3, 2] possuem a demonstração dos mesmos, caso o leitor se interesse.

Teorema 2.26. *(Indução Matemática) Se $x \subseteq \omega$ e $\phi \in x$, e $n \in x \rightarrow n + 1 \in x$, então $x = \omega$.*

Teorema 2.27. *(Indução transfinita) Dados t_i suponha $\forall x \, \exists! \, y \, A_n(x, y; t_1, \ldots, t_k)$ de modo que A define uma função $y = \varphi(x)$. Para todo o $Ord \, \alpha$ e para todo o conjunto z, existe uma função única f definida em $\{\beta \mid \beta \leq \alpha\}$ (este conjunto na verdade é α $+1$) tal que $f(0) = z$ e para $\beta \leq \alpha$, $f(\beta) = \varphi(h)$ em que h é a restrição de f a β.*

Definição 2.28. Dizemos que um ordinal é contável se pode ser posto em correspondência um-a-um com ω.

Definição 2.29. Seja α contável se $\beta < \alpha \leftrightarrow \beta \in \alpha$.

Juntamente com a **Indução Transfinita**, podemos ter algumas aplicações interessantes, e mesmo que a função φ não seja explícita, é sempre possível explicitá-la em ZF.[2, 9, 10, 11]

1. Para definirmos $\alpha + \beta$, basta que fixemos α e façamos

   $\alpha + 0 = \alpha$

   $\alpha + \beta = sup\{\alpha + \lambda \mid \lambda < \beta\}$

2. Do mesmo modo que no item anterior, vamos definir $\alpha \cdot \beta$ para algum α fixo e fazendo $\alpha \cdot 0 = 0$, daí teremos

   $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$

   $\alpha \cdot \beta = sup\{\alpha \cdot \lambda \mid \lambda < \beta\}$ tendo β como ordinal limite.

3. Vamos novamente fixar um α para definirmos α^β, fazendo com que $\alpha^0 = 1$, daí temos

   $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$

   $\alpha^\beta = sup\{\alpha^\lambda \mid \lambda < \beta\}$ com β sendo um ordinal limite.

Finalizamos, assim, a construção dos ordinais. Na seção seguinte iremos expor mais um conceito importante para formalizarmos a CH, nela teremos os conceitos necessários para propor o questionamento central da CH de tal forma que poderemos estender a hipótese de forma geral, o que conheceremos posteriormente como *Hipótese do Contínuo Generalizada* ou GCH.

2.3 Cardinais

O primeiro passo que daremos é definir *cardinalidade*. De forma ingênua poderíamos dizer que um número *cardinal* é a representação do "tamanho" de um conjunto. A definição abaixo pode ser facilmente aceita quando os conjuntos que trabalhamos são apenas finitos, rapidamente poderia concluir que para que dado dois conjuntos, os mesmos só terão a mesma *cardinalidade*, se possuírem a mesma quantidade de elementos. Perceba também que, na definição, não usamos o conjunto ω dos inteiros para propor a ideia de *conjuntos possuírem a mesma cardinalidade*, apenas nos utilizamos da ideia de função bijetora entre dois conjuntos, o que certamente é suficiente.

Definição 2.30. A e B têm a mesma cardinalidade se há uma função bijetora de A sobre B. Designaremos $\#A$ para cardinalidade de A.

Na nossa notação, a definição acima nos diz que $\#A = \#B$ se existir $f : A \to B$ bijetiva. Aqui, estamos considerando que $\#A = \#B$ define uma relação de equivalência, o que pode ser facilmente demonstrável.

Definição 2.31. $\#A \leq \#B$ se existir uma função injetiva de A em B, ou seja, a imagem de f é um subconjunto do contradomínio.

Teorema 2.32. *(Teorema de Cantor-Bernstein):* $(\#A \leq \#B \wedge \#B \leq \#A) \to (\#A = \#B)$.

Demonstração: Tenhamos uma f um-a-um e injetiva de A em B e g também um-a-um e injetiva, mas de B em A, o que nos é dado por hipótese. Suponha que A e B sejam disjuntos, ou seja $A \cap B = \emptyset$, e S é um conjunto formado pela união disjunta de sucessões, temos então $S = \{\ldots, x_n, y_n, \ldots\}$, podendo ou não terminar à esquerda com $x_n \in A$ e $y_n \in B$. Façamos agora com que $f(x_n) = y_n$ e $g(y_n) = x_{n-1}$. Se x se encontrar no contradomínio de g então y_{n-1} aparece e se y_n estiver no contradomínio de f então x_n aparece. Daí podemos definir φ um-a-um e injetiva de $S \cap A$ em $S \cap B$, da seguinte forma

$$\varphi = \begin{cases} \varphi(x_n) = y_n, \text{ se } x_n \in S \text{ para todo } n \text{ negativo;} \\ \varphi(x_n) = y_{n-1}, \text{ se um } y \text{ é o último elemento à esquerda em } S. \end{cases}$$

Desta forma, φ é uma função bijetora de A sobre B. E, portanto, $\#A = \#B$. Perceba que para esta demonstração não foi necessário o uso do **Axioma da Escolha**, ulteriormente iremos demonstrar um teorema usando este axioma. □

Dados dois conjuntos A e B, pode acontecer que $\#A \leq \#B$ e $\#A \neq \#B$, daí resulta que $\#A < \#B$. O teorema a seguir pretende mostrar que todo conjunto pode ser bem ordenado e por causa disso a relação $<$ induz uma relação de ordem entre as classes de equivalência que são definidas por $\#A = \#B$, e para isso usaremos o Axioma da Escolha.

Teorema 2.33. *(Teorema da boa ordem): Todo conjunto S pode ser bem ordenado.*

Demonstração: Vamos aplicar o axioma da escolha à função identidade sobre o conjunto potência $P(S)$, daí teremos que uma f definida para todo $x \subseteq S$ com x não vazio, de modo a ter $f(x) \in x$. Chamaremos uma boa ordem de *boa* se $\forall x \in T$ temos que $x = f(S - \{y \mid y \in T \wedge y < x\}$. Deste modo, estaremos obtendo através de uma função escolha, no conjunto dos elementos que restam, o elemento seguinte. Naturalmente, este processo pode ser repetido sucessivamente de modo a obter uma relação de boa ordem em todo o S. □

Mais além, podemos concluir que, dados dois subconjuntos A_1 e A_2 bem ordenados pelas respectivas relações de boa ordem $<_1$ e $<_2$, com $A_1 \subset A_2$. E, também, que A_2 e o segmento inicial de A_1 e a relação de boa ordem $<_2$ é na verdade uma restrição de $<_1$ em A_2. Em particular, temos que há apenas uma relação de boa ordem em A. Para provar o que afirmamos, iremos inicialmente definir uma φ como uma função que conserva a relação de boa ordem em um segmento inicial A_2. Tomemos x como o menor elemento de A_1, de modo que tenhamos $\varphi(x) \neq x$. Vamos verificar que isso não se sustenta, mostrando que não há outra função além de φ que possa obter x. Para isso, vemos que φ é uma função sobre um segmento inicial, daí temos que

$\varphi(x) = sup\{\varphi(x) \mid y <_1 x\}$ em que o sup é na verdade a relação $<_2$, sendo esta uma relação de boa ordem, daí temos,

$\varphi(x) = f(S - \{\varphi(x) \mid y <_1 x\});$
$\varphi(x) = f(S - \{y \mid y <_1 x\});$
$\varphi(x) = x.$

Isso contrariando nossa afirmação sobre $\varphi(x)$, sendo assim teremos então que $\varphi(x) = x$ para todo e qualquer x.

Agora veremos que dado um K formado pela união de K_α, os K_α serão bem ordenados por uma relação boa, ou seja, K será um conjunto bem ordenado por uma relação de boa ordem. Para isso, defina $x < y$ para $x, y \in K$. Se $x, y \in K_\alpha$ e se $x \in K_\alpha$ e $y \in K_\beta$, desse modo temos que K_α é segmento inicial de K_β. Então temos que $x, y \in K_\beta$ e, portanto, a relação de ordem é definida até mesmo exclusivamente para todos os $x, y \in K$. Agora falta verificar se a relação $<$ é uma relação de boa ordem. De fato, porque se tivermos $x \in K_\alpha$ e o segmento inicial $\{y \mid y < x\} = \{y \mid y \in K_\alpha \wedge y <_\alpha x\}$, o que consequentemente temos que $x = f(S - \{y \mid y < x\})$. Se $K \neq S$, basta que façamos um $x_0 = f(S - K)$ e tenhamos um conjunto $K_0 = K \cup \{x_0\}$, onde definiremos uma relação de boa ordem em K_0 como uma extensão da de K e fazendo $x < x_0$ para todo $x \in K$. Deste modo, a relação é de boa ordem e não é nenhuma das que relaciona os K_α. Logo, $K = S$ e S é bem ordenado por uma relação boa.

Definição 2.34. Um cardinal é um ordinal α tal que $\beta < \alpha \rightarrow \#\beta < \#\alpha$.

Vamos definir cardinal usando a ideia de ordinal. O cardinal é o menor ordinal com esta cardinalidade [1, 2]. Do mesmo modo que procurávamos um representante canônico para cada classe de equivalência para definirmos os ordinais, o fazemos aqui para definir cardinal. Consegue-se isso escolhendo para cada classe de equivalência de conjuntos de mesma cardinalidade, um representante único. Isso é possível, pois provamos que todo conjunto pode ser bem ordenado e, por isso, temos que tais conjuntos possuem a mesma cardinalidade de algum ordinal.

Agora que construímos e sabemos o que são os cardinais, podemos querer construir cardinais arbitrariamente grandes, e isso será possível com o teorema que iremos preposicionar em seguida.

Teorema 2.35. *(Teorema de Cantor): Para qualquer conjunto A, temos que $\#A < \#P(A)$.*

Demonstração: Claramente $\#A \leq \#P(A)$. Agora resta saber se vale o contrário para concluirmos se é ou não $\#A = \#P(A)$. Para isso vamos supor que φ é uma função um-a-um e sobrejetora de A sobre $P(A)$. Agora tomemos um z, tal que $z = \{x \in A \mid \neg x \in \varphi(x)\}$. Daí, temos que $z \subseteq A$ e sendo φ sobrejetora, existe $y \in A$ tal que $z = \varphi(y)$. Então

$y \in z \rightarrow \neg y \in \varphi(y) \rightarrow \neg y \in z$

e

$\neg y \in z \rightarrow \neg y \in \varphi(y) \rightarrow y \in z$

Isso é impossível, logo não se pode ter uma função do tipo φ, e portanto a cardinalidade dos conjuntos não são iguais. Logo $\#A < \#P(A)$. □

Com este teorema podemos obter uma sucessão de cardinais grandes. Podemos provar a existência de um $\aleph_\alpha$ que é o menor cardinal transfinito maior do que $\aleph_\beta$ para todo $\beta < \alpha$. Para isso, basta definirmos por indução transfinita uma função de $\alpha \rightarrow \aleph_\alpha$ de ordinais a cardinais. Pelo Teorema de Cantor podemos obter sempre um cardinal maior que qualquer ordinal dado, deste modo nossa definição é válida. E, por indução, podemos ter que $\alpha \leq \aleph_\alpha$. Sendo assim,

$\aleph_\alpha$ percorre todos os cardinais inclusive os arbitrariamente grandes. Nesta breve demonstração da existência de $\aleph_\alpha$ usamos o Axioma da Escolha. Uma vez que precisamos saber que todo conjunto possui cardinalidade igual a um certo ordinal, há como provar a existência de $\aleph_\alpha$ sem esse axioma, mas não o faremos aqui, essa demonstração é bem desenvolvida em [1, 2], também há uma aritmética que envolve cardiais grandes e para um estudo detalhado sobre essa aritmética sugerimos [6, 11, 12].

Agora que sabemos que podemos obter cardinais arbitrariamente grandes [13, 14, 15]., vamos considerar um conjunto C, definido como o Conjunto Potência de ω, ou seja, $C = P(\omega)$. Sabemos que este conjunto não possui cardinalidade igual a de ω pelos resultados anteriores e também que não é contável, pois não pode ser posto em correspondência um-a-um com ω.

Hipótese do Contínuo. $\#C = \aleph_1$ sendo $C = P(\omega)$.

Podemos também conjecturar a CH de forma geral.

Hipótese Generalizada do Contínuo. $\#P(\aleph_\alpha) = \aleph_{\alpha+1}$

Enunciamos, enfim, a Hipótese Generalizada do Contínuo (GCH)[4]. Nos próximos capítulos iremos abordar sua consistência. Mas antes, há alguns aspectos interessantes sobre a aritmética que envolve os cardinais, os mesmos possuem uma aritmética própria, sendo que alguns resultados podem ser semelhantes à aritmética que envolve os inteiros, como no caso de estarmos lidando com conjuntos finitos. Neste caso, se A e B são disjuntos e finitos, é fácil verificar que

$$\#A + \#B = \#(A \cup B),$$
$$\#A \cdot \#B = \#(A \times B).$$

No entanto, se A e/ou B forem infinitos, teremos que [2, 3]

$$\#A + \#B = \#A \cdot \#B = max(\#A, \#B).$$

[4]Aqui, assim como a CH, foi preferível o uso da abreviação de *Gerenalized Continuum Hypothesis*, por isso GCH e não HCG.

Capítulo 3

Axiomas da Regularidade e Altos de Infinito

3.1 Axioma da Regularidade

Queremos dedicar a primeira parte deste capítulo a demonstrar que o **Axioma da Regularidade** é consistente se todos os outros axiomas do sistema ZF sejam consistentes. Aqui, quando nos referimos ao ZF, o fazemos sem o Axioma da Escolha e sem o axioma da Regularidade. Queremos, com isso, introduzir a ideia que Gödel usou para mostrar que a GCH é consistente. Desse modo, veja esta seção como um esboço do que faremos posteriormente. O motivo de retirarmos o Axioma da Escolha é porque este tem sua consistência provada pelo mesmo método. E apesar de que a GCH não tenha tido muitos desdobramentos na Matemática moderna, mas o axioma da escolha (AE) tem. E, por isso, o que faremos em seguida será mostrar a consistência do sistema que possui a GCH e o AE adicionado ao ZF.

Vamos recapitular o que ocorrerá. O Axioma da Regularidade simplifica nossa ideia de ordinal, onde podemos omitir que $\in$ é uma relação de boa ordem em um ordinal α e simplesmente dizer que $\in$ ordena α . E veremos que o Axioma da Regularidade é uma proposição consistente com os demais axiomas de ZF. Para mostrarmos isso, iremos construir um modelo para ZF, cujo Axioma da Regularidade (AR) é consistente. A esse tipo modelo chamaremos, em breve, de *modelo interno*. No entanto, vale lembrar que não é possível mostrar a consistência de ZF ($ConsisZF$) mantendo-se em ZF, deste modo nossa prova de consistência será uma prova relativa, pois de acordo com Paul J. Cohen, $ConsisZF$ (Consistência de ZF) é um artigo de fé e todas as provas de consistência são resultados relativos [3]. Acreditamos que este curto resumo seja suficiente para compreender o processo que se seguirá.

Agora vamos iniciar nossa discussão relembrando o que queremos dizer quando falamos de *conjunto transitivo*, esse conceito será recorrente a partir de agora. x é transitivo se dado um $z \in y$ e $y \in x$ implica que $z \in x$. Certo, agora iremos definir alguns conceitos que servirão para denominarmos quando um um conjunto é *bem-fundado*, isto é, vale o Axioma da Regularidade. Para que posteriormente possamos trabalhar a ideia de um **sub-modelo** ou **modelo interno**.

Definição 3.1. Tomemos um conjunto Y transitivo, definimos uma função de cota c em Y como o valor x, que é um ordinal, de tal modo que $x \in Y$ e $c(x) = sup\{c(z) \mid z \in x\}$.

O lema a seguir servirá para mostrar que a função de cota, apresentada acima, é única quando a interseção de dois conjuntos, ambos transitivos e cada um com uma função de cota, resulta em um conjunto também transitivo.

Lema 3.2. *Sejam K_1 e K_2 conjuntos transitivos e c_1 e c_2 as funções de cota dos conjuntos, respectivamente. Então $K_1 \cap K_2$ é também transitivo e $c_1 = c_2$ em $K_1 \cap K_2$.*

Demonstração:

$K_1 \cap K_2$ é transitivo: Seja $v \in K_1 \cap K_2$, agora tomemos um $u \in x$ tal que $u \in K_1$. Como este é transitivo por hipótese, também teremos que $u \in K_2$, pois K_2 é também transitivo. Daí, podemos concluir que $u \in K_1 \cap K_2$, logo o que temos é

$$v \in K_1 \cap K_2,\, u \in v \to u \in K_1 \cap K_2,$$

fazendo com que $K_1 \cap K_2$ seja, por definição, transitivo.

$c_1 = c_2$ em $K_1 \cap K_2$: Vamos supor o contrário, seja α o menor ordinal tal que $\exists x \in K_1 \cap K_2$ e tenhamos $c_1(x) = \alpha$ e $c_1(x) \neq c_2(x)$. Se $y \in x$, então $c_1(y) < \alpha$, pois α é cota de x, daí temos que $c_1(y) = c_2(y)$, daí

$c_2(x) = sup\{c_2(y) \mid y \in x\}$

$c_2(x) = sup\{c_1(y) \mid y \in x\}$

$c_2(x) = c_1(x)$

o que é impossível, pois contradiz o que supomos inicialmente. □

Agora iremos apresentar outras duas definições que contribuíram para a nossa discussão sobre o AR.

Definição 3.3. Um conjunto x é dito *bem-fundado* se $x \in A$, com A transitivo, e existe uma função de cota.

Para os conjuntos que serão definidos a partir daqui, utilizaremos a notação que Cohen usou em [2].

Definição 3.4. Seja $S_0 = \{x\}$, S_{x+1} o conjunto soma dos S_n e $S_\omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n x$.

Teorema 3.5. *$S_\omega x$ é transitivo. E se $x \in S_\omega x$ e $x \in A$, com A transitivo, então $S_\omega x \subseteq A$.*

Demonstração:

$S_\omega x$ é transitivo: Tomemos um $a \in S_n x$ para algum n. Agora, tomemos um $t \in a$, então temos que t deve estar em $S_{n+1}x$, de modo que por definição $t \in S_\omega x$, logo o que temos é

$$a \in S_\omega x, t \in a \to S_\omega x,$$

o que, por definição, torna $S_\omega x$ um conjunto transitivo.

$S_\omega x \subseteq A$: Temos por hipótese que, dado um x, sabemos que:

- $x \in S_\omega x$;
- $x \in A$;
- A é transitivo.

Como $x \in S_\omega x$, então $x \in S_0 x$ e, por hipótese, temos que $S_0 x \subseteq A$. Agora suponhamos que $S_n x \subseteq A$, então vamos verificar se $S_{n+1}x \subseteq A$ é válida. Perceba que

$$S_n x \subseteq A, S_n \subseteq S_{n+1}x \to S_{n+1} \subseteq A,$$

o que implica em A ser transitivo, o que é verdade, logo $S_\omega x \subseteq A$. □

Com auxílio do AR é possível provar que todo conjunto é bem-fundado, para certificarmos disto, formalizaremos em um teorema.

Teorema 3.6. *Todo conjunto A é bem-fundado.*

Demonstração: [2] □

Corolário 3.7. *Todo conjunto transitivo A tem uma função de cota.*

Para referências futuras, vamos apresentar um conjunto que será de muita ajuda em nossa discussão. Tal conjunto pode ter sua existência demonstrada por indução transfinita, esse conjunto é formado pelo conjunto de cotas de um ordinal α . Definimos, então, $S(\alpha) = P(\bigcup_{\beta\alpha} S(\beta))$, sendo β os ordinais que precedem α .

Os lemas que serão enunciados agora serão aceitos sem demonstração para que possamos ser sucintos nesta seção e apresentemos o nosso esboço de forma a não se estender muito. Mas, se o leitor se interessar pelas demonstrações dos mesmos, sugerimos [1, 2].

Lema 3.8. *Seja α um conjunto bem-fundado para todo $a \in t$, então t também é bem-fundado.*

Lema 3.9. *Seja $Ord\,\alpha$, e $Ord\,\alpha$ é bem-fundado então a cota de $Ord\ \alpha = \alpha$.*

Lema 3.10. *Se x é bem-fundado, o conjunto potência $P(x)$ também o é.*

Possuímos dois conceitos essenciais para a nossa discussão. Nossa intenção agora é mostrar que $ConsisZF \to ConsisZF + AR$, e como inicialmente falamos, vamos considerar ZF sem o AR e AE, a retirada ou a inclusão deste último não afeta nossa intenção, logo ela é opcional, neste caso pode ser que em algum momento iremos considerá-lo como parte de ZF. Antes de mostrarmos a consistência de $ConsisZF + AR$, vamos a um exemplo que resumirá nossa demostração. Considere um modelo T para um sistema de axiomas A para uma determinada linguagem formal. Pode ser do nosso interesse considerar, em especial, um subconjunto M cujos $x \in M$ também estão em T, e obedecem uma determinada propriedade $L(x)$ da linguagem formal [7, 8]. O que podemos concluir com este subconjunto é que teremos propriedades que são independentes do modelo T, e isso será consequência do fato de que T é um modelo para o sistema de axiomas A. Vamos formalizar isso, mas primeiro vamos propor uma definição sobre uma fórmula ser relativizada a uma propriedade $L(x)$.

Definição 3.11. Seja F uma fórmula, então F^L será a demonstração da fórmula aplicada à propriedade $L(X)$.

O que queremos com isso é que os quantificadores, tanto o existencial quanto o universal, estejam sujeitos a $L(x)$. Isso significa que:

- $\exists xY$ torna-se $\exists x(L(x) \wedge Y)$;
- $\forall xY$ torna-se $\forall x(L(x) \to Y)$.

Sendo assim, quando falarmos de F_L queremos dizer que toda F está relativizada à condição $L(x)$. O lema a seguir é trivial, mas necessário para que seja claro o que estamos fazendo.

Lema 3.12. *Se F é válida, então sua relativização a uma propriedade $L(x)$ também o é.*

Demonstração: Suponhamos F válida para qualquer conjunto X, onde as constantes e as relações correspondentes a uma linguagem formal estão definidas e válidas também em um subconjunto $\{x \mid x \in S \wedge L(x)\}$. Então, segue que F^L é verdadeiro é consequentemente válida. □

Agora façamos com que $L(x)$ seja a propriedade *"o conjunto x é bem-fundado"*. Com isso poderemos desenvolver o teorema a seguir adaptando nossa propriedade àquela que sugerimos.

Teorema 3.13. *Seja A um axioma em ZF, então A^L é demonstrável em ZF.*

De outro modo, queremos mostrar com este teorema que os conjuntos bem-fundados são modelos para ZF. Para isso, precisamos garantir que um conjunto x, bem-fundado, satisfaça cada um dos axiomas de ZF. Aqui vamos considerar aqueles que enunciamos, inclusive o AR e o AE, então vamos mostrar que isto é possível.

A_1) **Axioma do Conjunto Vazio:** Como $\emptyset$ é bem fundado, o axioma é satisfeito.

A_2) **Axioma da Extensionalidade:** Uma vez que se há um $x \in y$ e se y é bem-fundado e o mesmo para $\{x, y\}$, então x também é, desta forma o axioma é satisfeito.

A_3) **Axioma do conjunto Soma e Potência:** Se x é bem-fundado, o conjunto soma de x também é e o mesmo ocorre para seu conjunto potência, logo este axioma também é satisfeito.

A_4) **Axioma do Infinito:** O conjunto ω, dos inteiros, é bem-fundado o que satisfaz este axioma.

A_5) **Axioma da Escolha:** Seja $f(\alpha)$ uma função escolha para os conjuntos A_α. Se a função que vai de $f(\alpha) \rightarrow A_\alpha$ é bem-fundada, então a função que vai de $\alpha \rightarrow f(\alpha)$ também é, satisfazendo este axioma.

A_6) **Axioma da Substituição:** Seja $y = \varphi(x)$ uma função definida para conjuntos bem-fundados, e que, consequentemente tomará como valores apenas conjuntos bem-fundados, deste modo o contradomínio de φ é bem-fundado.

A_7) **Axioma da Regularidade:** Seja x elemento minimal de um conjunto C, não vazio. Se $y \in x$, então há uma função de cota em y e se tomarmos $c(y) = sup\{c(Y)\}$, ou seja, $c(x) = \{z \mid z > y\}$, que é uma função de cota em C, então C é bem fundado e portanto o axioma é satisfeito.

Como todos os axiomas que enunciamos em ZF foram satisfeitos, o **Teorema 3.13** está demonstrado. Finalmente podemos propor o teorema a seguir e demonstrá-lo.

Teorema 3.14. $ConsisZF \rightarrow ConsisZF + AR$

Demonstração: Vamos supor que $ZF + AR$ seja inconsistente, com isso temos que há uma proposição válida em $ZF + AR$ na forma $AR \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow X \wedge \neg X$, onde A_n são os axiomas de ZF, mas sabemos também que todos os axiomas de ZF relativizados a uma $L(x)$ são válidos, então temos que $AR_L \wedge A_{1,L} \wedge A_{2,L} \wedge \cdots \wedge A_{n,L} \rightarrow X_L \wedge \neg X_L$ é válida também. E temos que tanto $A_{n,L}$ quanto AR_L são demonstráveis em ZF. Assim, podemos concluir que $ZF \rightarrow X_L \wedge \neg X_L$, e logo ZF é inconsistente. Então a negação de nossa afirmação inicial só pode ser verdadeira. $\square$

O que fizemos com os conjuntos bem-fundados foi construir um modelo interno, que nada mais é do que um sub-modelo caraterizado por uma propriedade. No modelo interno dos bem-fundados não modificamos a relação $\in$, que vem sendo usada desde o nosso tratamento com os ordinais. O método que desenvolvemos acima é análogo ao que foi usado por Gödel para mostrar que GCH é consistente, o que provaremos no capítulo seguinte. É possível também mostrar que AR é independente, mas não o faremos aqui.

A seguir enunciaremos um teorema que será de uso posterior. E após ele seguiremos com uma discussão sobre conjuntos altos de infinito. O teorema que esboçaremos será relativo aos *conjuntos extensionais*. Um conjunto H é denominado extensional quando dados $x, y \in H$ temos que $x \neq y$ implica que existe um $v \in H$, tal que $(v \in x \wedge v \in y)$ ou $(\neg v \in x \wedge v \in y)$. Para estes tipos de conjuntos temos o teorema a seguir.

Teorema 3.15. *Seja H extensional, existe um H', transitivo, tal que, dada uma φ que é um-a-um de $H \to H'$, φ é $\in$ -isomorfismo, ou seja, $x \in y \to \varphi(x) \in \varphi(y)$.*

Demonstração: [2] □

3.2 Axiomas altos de infinito

Nesta seção mostraremos que é possível enunciar dois axiomas que são não-demonstráveis em ZF, mas que, no entanto, muito provavelmente são verdadeiros. Também veremos que pode-se ter extensões do ZF, de modo que algumas das proposições sejam poderosas de tal forma que sua existência não pode ser garantida por processos recursivos. Pode-se inferir que o propósito deste capítulo é nos aproximar cada vez mais de um conjunto de todos os conjuntos, mas não chegaremos a tal ponto, até porque conhecemos que tal conjunto produz contradições. Mas com resultados que em breve mostraremos, poderemos responder perguntas do tipo "Se um sistema D de axiomas finito de ZF for consistente, não é possível mostrar que D implica em ZF?" Tal pergunta seria até uma tentativa de mostrar a consistência de ZF já que com D reduziríamos a um conjunto finito de axiomas. Esta seção terá ideias e conceitos que serão importantes para capítulos sobre a Consistência da Hipótese do Contínuo.

Vamos começar com dois axiomas sobre modelos.

Axioma 10. *M*

Seja M um conjunto e dada uma relação binária do tipo $\in \subseteq M \times M$ isso torna M um modelo para ZF.

Axioma 11. *SM*

Seja um conjunto M que tenha uma relação R, tal que $R = \{< x, y >| \ x \in y \wedge x, y \in M\}$. Então, o que temos é que M é um modelo para ZF sob a relação R.

Perceba que o modelo M possui a relação $\in$, que conhecemos como a relação $\in$-padrão, tornando desta forma M um modelo padrão. Os dois axiomas não podem ser demonstrados em ZF, isso se deve ao fato de que ambos são proposições em ZF. No entanto, é muito provável que M e SM sejam verdadeiros e por isso não há problema em tê-los como axiomas. Essa garantia pode ser dada simplesmente considerando que, para M ser verdadeiro bastaria garantir a existência de conjuntos, uma vez acreditando que, como M pode ser dado como uma proposição única em ZF, mesmo que os axiomas neste último sejam infinitos, acredita-se que há conjuntos, então acredita-se que não há contradições em ZF. Já mostrar que SM é verdadeiro bastaria (aqui vale ressaltar que essa é uma tentativa informal por motivos que já foram citados) que seja possível construir a partir de um modelo, sub-modelos internos contáveis. Para isso usaríamos o **Teorema de Löwenheim-Skolem**. Como estamos considerando que já há uma certa familiaridade com este teorema, faremos apenas um esboço de como se poderia tentar mostrar que SM é verdadeiro. O teorema, de forma sucinta, consiste em escolhermos sucessivamente conjuntos que satisfazem certas propriedades desde que os mesmos existam. Aqui, para o nosso propósito, poderíamos usar o teorema para mostrar que o conjunto M é modelo de ZF, se provarmos que há um sub-modelo caracterizado por R em M de forma que este é contável ou não ultrapassa a cardinalidade de M. É possível fazer tal processo em ZF de forma finita, bastando apenas restringir a relação $\in$ a esta coleção contável de conjuntos, e que consequentemente teríamos um modelo padrão contável para ZF. No entanto, não há em ZF uma propriedade $A(n, x)$ que exprima a propriedade x que queremos considerar na ordem n. Sendo assim, acreditamos que SM seja verdadeiro.

O motivo de apresentar estes dois teoremas é explicitar um modo de construir extensões do ZF, simplesmente unindo a ele proposições intuitivamente verdadeiras, e muitas vezes essas preposições podem ser poderosas de tal forma que seus resultados nem sempre podem ser obtidos por um processo repetitivo. Um exemplo trivial é tentarmos mostrar a existência dos números inteiros. Sabe-se que podemos fazê-lo pelo Axioma dos Pares. No entanto, podemos ir mais adiante, podemos provar que existe um ω que é o conjunto que contém todos os inteiros e isso é possível pelo Axioma do Infinito. Desta forma, um conjunto maior é construído por um processo que não pode ser repetido. Chamamos esses tipos de axiomas de *Axiomas altos de infinito*. Vamos a um outro exemplo um pouco mais peculiar.

3.2.1 Cardinais Inacessíveis

Axioma 12. Seja α um cardinal incontável, temos então que:

1. Se $\beta < \alpha$, α não pode ser obtido pela soma dos cardinais β , e cada um dos β é menor do que α .

2. Se $\beta < \alpha$, então $\#(P(\beta)) < \alpha$.

O axioma propõe um α que não pode ser obtido pelos Axiomas do Conjunto Potência e Substituição, porque tais axiomas quando aplicados ao conjunto de cardinais menores α , que são modelos para ZF, não produzem resultados fora dele. Sendo assim, cardinais como α são conhecidos como incessíveis, tentar demonstrar sua existência em ZF resulta, consequentemente, em mostrar a consistência de ZF, o que já sabemos não ser possível, logo o axioma é não demonstrável em ZF, mas comumente aceita-se como verdade. Vale ressaltar que é sim possível obter outros cardinais inacessíveis por maneiras mais complicadas. [1, 2]

Enfim, conhecemos axiomas mais altos da teoria dos conjuntos, e um fato interessante é que a descoberta de novos axiomas possibilita a demonstração de uma preposição na teoria elementar dos conjuntos. Pode-se ter uma ideia de um esquema axiomático completo, com axiomas poderosos quanto os que mostramos, mas tal tentativa é impossível de realizar uma vez que sempre haverá um passo adiante. Uma última observação é que quando se depara com um axioma de infinito há um desafio se irá ou não aceitá-lo, pois cada vez que se postula um axioma deste tipo, nos aproximamos do paradoxo do conjunto de todos os conjuntos.

3.3 Teorema de Löwenheim-Skolem

Nesta última parte, queremos introduzir, de forma sucinta, o Teorema de Löwenheim-Skolem, pois o desenvolvimento que aqui será dado será importante para o capítulo seguinte. Como esperamos que já se tenha tido contato com tal teorema, iremos apenas enunciá-lo e posteriormente apresentar um outro que se utiliza deste teorema para ser demonstrado.

Teorema 3.16. *(Löwenheim-Skolem) Seja M um modelo para uma coleção T de símbolos de constantes e relacionais. Há um sub-modelo elementar de M cuja cardinalidade não ultrapassa a de T se T é infinito e será no máximo contável se T for finito.* [2]

Anteriormente vimos como usar este teorema para verificar a veracidade do axioma SM de forma a mostrar que há um conjunto M sob uma relação R que é modelo para ZF. Para que isso possa ser feito em ZF teríamos que restringir o número de frases declarativas que podem ser satisfeitas no modelo, e fazendo a conjunção de todas essas frases poderíamos nos ater a uma única proposição. Deste modo, vamos reformular o Teorema de Löwenheim-Skolem adaptado a ZF.

Teorema 3.17. *Seja $A(x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula em ZF. Pode-se demonstrar em ZF que para qualquer conjunto B existe um $B' \subset B$ de modo que $\#B' = max(\aleph_0, \#B)$ e $\forall\, \overline{x_i} \in B'$ temos que $A(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) \leftrightarrow A^{B'}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$.*

Demonstração: [3] □

Capítulo 4

A Consistência da GCH

Para darmos início a nossa discussão sobre a consistência de GCH, vamos antes esboçar a ideia de definição predicativa e impredicativa. Informalmente se define algo de forma predicativa quando as propriedades e variáveis que envolvem a definição são concebidos por conceitos previamente dados. Por exemplo, suponha que nos seja dados o conjuntos dos inteiros e as operações aritméticas, e que vamos definir um conjunto de inteiros por meio de uma propriedade $p(m)$ onde suas variáveis tomam valores do conjuntos dos inteiros. Deste modo, o conjunto formado por meio de $p(m)$ é definido de forma predicativa em termos de inteiros. No caso de uma definição impredicativa, não nos é dado nenhum conceito prévio obrigando, assim, a aceitar as propriedades como tendo certo sentido em sua totalidade. Com isso em mente, podemos resumir a ideia de Gödel para mostrar que GCH e AE (Axioma da Escolha) são satisfeitos em ZF. Para Gödel, se fosse possível repetir a construção predicativa até algum ordinal, os conjuntos que viessem como resultado destas construções formariam um modelo para ZF. A estes conjuntos formados por sucessões transfinitas de definições predicativas chamamos de *construtíveis*. E o modelo que estes conjuntos formam para ZF torna possível mostrar que GCH e AE são satisfeitos em ZF, dadas as motivações para que possamos obter a consistência de GCH provando que ZF seja consistente. Iniciaremos com algumas definições. Primeiro introduziremos um conjunto que nos auxiliará em resultados importantes posteriores, sendo assim sua compreensão é importante pois iremos utilizá-lo com uma certa frequência.

Definição 4.1. Seja um conjunto X. O conjunto X' é definido como sendo a união de X e de todos os y os quais existe uma fórmula $A(z, b_1, b_2, \ldots, b_k)$ em ZF tal que a fórmula A^X é a fórmula A com todas as variáveis ligadas restritas ao conjunto X. Deste modo podemos definir y como

$$y = \{z \in X | A(z, \overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots, \overline{b_k})\}$$

para $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots, \overline{b_k}$ em X.

Com esta definição iniciamos um conceito que conhecemos como interpretação. Quando restringimos as variáveis de A para os elementos do conjunto X fizemos uma interpretação de A em X. O tipo de interpretação que fizemos é algo bem particular e que posteriormente indicaremos como relativização. Em palavras, estamos relativizando A em X, escreveremos então A^X; estes conceitos precederão o que conhecemos como Modelos Internos ou *Inner Models* [5]. Nossa segunda definição tratará de um outro conjunto.

Definição 4.2. *Seja α um ordinal. Defina-se M_α fazendo $M_0 = \emptyset$ e*

$$M_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta \text{ se } \alpha \text{ é um ordinal limite.}$$

Uma nota de observação a essa definição que estamos dando, e que posteriormente fará mais sentido, é que estamos a construir uma família de conjuntos M indexados por ordinais de forma a obtermos uma estrutura $(M, \in)$, isto é, um modelo M que possua uma relação $\in$ padrão e por meio de indução transfinita estamos a construir uma classe de forma predicativa. A ideia desta definição está relacionada com o universo de Von Neumann para uma classe universal. A terceira definição introduzirá a ideia de *conjuntos construtíveis*. Com este conjunto poderemos construir uma classe que servirá de modelo para ZF.

Definição 4.3. *Um conjunto x é construtível se existir um α ordinal e $x \in M_\alpha$.*

Dadas estas definições podemos agora representar a classe dos construtíveis como L. Estamos a supor que o leitor tenha conhecimento de que há diferença entre classe e conjunto [9, 10], ainda assim queremos salientar que L não é conjunto, uma vez que se construírmos um conjunto deste modo estaríamos caindo em um paradoxo, o que não nos é favorável. Representaremos também a classe universal, assim como indicada por Gödel, como V. Estas representações servirão para formularmos o seguinte axioma.

Axioma 13 (Axioma de Construtibilidade)**.** $V = L$

Intuitivamente queremos dizer que todos os conjuntos são construtíveis, no entanto não podemos formalizar deste modo pois os objetos em questão não são conjuntos. Agora podemos obter três resultados que servirão para o nosso objetivo específico deste capítulo.

Teorema 1. Seja A um axioma em ZF tal que sua interpretação na classe dos construtíveis A^L é demonstrável em ZF.

Teorema 2. Dado o Axioma da Construtibilidade $V = L$ sua interpretação na classe dos construtíveis $(V = L)^L$ é demonstrável em ZF.

Teorema 3. $(V = L) \rightarrow AE + GCH$ é demonstrável em ZF.

Uma breve discussão sobre esses três teoremas se faz necessário uma vez que temos como objetivo mostrar que GCH e AE são consistentes quando adicionados a ZF. O primeiro resultado nos dará como consequência um modelo, neste caso o modelo dos *construtíveis*, que iremos construir para ZF. O segundo nos garantirá que $V = L$ (Axioma de construtibilidade), que será dado como uma única fórmula em ZF, pode também ser adicionado ao nosso modelo, ou seja, $V = L$ também é construtível. Este resultado tem uma sutileza interessante pois nele obteríamos que a propriedade usada em ZF para definir um determinado conjunto quando restrita a um modelo M qualquer será a mesma usada em ZF, isso irá introduzir o conceito de *Relações absolutas*. E, por último, com o terceiro teorema poderemos garantir que se há uma contradição em $ZF + AE + GCH$, poderemos, então, ter uma contradição em ZF. Em outras palavras, temos que $V = L \to AE \wedge GCH$ não pode ser refutado em ZF.

4.1 Teorema 1

Teorema 1. Seja A um axioma em ZF tal que sua interpretação na classe dos construtíveis A^L seja demonstrável em ZF.

Para demonstrar este teorema teremos que garantir que os conjuntos construtíveis satisfazem todos os axiomas de ZF.

A_1) **Axioma do Conjunto Vazio**

Como $\emptyset$ está contido em qualquer conjunto, é trivial que $\emptyset \in L$.

A_2) **Axioma da Extensionalidade**

Utilizando a definição que demos para X e X', podemos obter que $X' \subset P(X) \cup X$ para qualquer X. Daí podemos tirar que $y \in x$. Sendo assim, se $x \in M_\alpha$, $y \in x$ e α é limite, então $y \in \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$ de modo que teremos $y \in M_\alpha$, o que por definição faz com $y \in L$, o que pode também ser comprovado pela transitividade de M_α,

$$x \in M_\alpha, y \in x \to y \in M_\alpha.$$

Também poderemos inferir de forma mais direta que

$$x \in L, y \in x \to y \in L.$$

Concluindo, temos um conjunto construtível que satisfaz o axioma da extensionalidade.

A_3) **Axioma dos Pares Não-Ordenados**

Vamos supor que $x \in M_\alpha$, $y \in M_\beta$ e $\alpha \leq \beta$. Então $x, y \in M_\beta$, desse modo, por definição temos que: Sendo β ordinal, com $M_0 = \emptyset$, $M_{\beta+1} = \bigcup\{M_\beta\}$, e sendo $M_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$, consequentemente teremos o conjunto $\{x, y\} = \{z | z \in M_\alpha \wedge (z = x \vee z = y)\}$ de modo que $\{x, y\} \in M_{\beta+1}$, o que satisfaz a nossa definição de conjunto construtível.

A_4) **Axioma do Conjunto Soma ou União**

Seja $x \in M_\alpha$ para algum α ordinal. Definimos um conjunto $\bigcup x$ como

$$\bigcup x = \{z | z \in M_\alpha \wedge \exists y(y \in M_\alpha \wedge y \in x \wedge z \in y)\}.$$

O que fizemos acima foi apenas usar o Axioma do Conjunto Soma original tomando como elementos os conjuntos que estão em M_α. Desse modo, teremos $\bigcup x \in M_\alpha$. Como M_α é transitivo, então

$$x \in M_\alpha, y \in x \rightarrow y \in M_\alpha,$$

$$z \in y, y \in M_\alpha \rightarrow z \in M_\alpha,$$

$$z \in M_\alpha, M_\alpha \in M_{\alpha+1} \rightarrow, z \in M_{\alpha+1},$$

sendo assim

$$x \in \bigcup x, x \in L \rightarrow \bigcup x \in L,$$

e como $\bigcup x$ é o conjunto soma, então o Axioma da Soma satisfaz os construtíveis.

A_5) **Axioma do Infinito**

Para demonstrarmos que há um conjunto definido pelo Axioma do infinito que é construtível precisaremos de dois lemas.

Lema 4.4. Seja $A(x)$ a fórmula *x é um ordinal*. Então

$$\forall x(x \in L \rightarrow (A(x) \longleftrightarrow A^L(x))).$$

De modo geral, se X é um conjunto ou classe qualquer,

$$\forall y(y \in X \rightarrow (A(x) \longleftrightarrow A^X(x))).$$

Demonstração: Como a fórmula A^X está restrita aos elementos x, se $x \in L$, pela transitividade de L, a condição $A(x)$ permanece a mesma em L. $\square$

Lema 4.5. $\forall \alpha$, sendo alfa ordinal teremos que $\alpha \in M_{\alpha+1}$

Demonstração: É trivial que $\emptyset \in M_1$. Seja agora α o menor α para o qual o **Lema 4.5** seja falso. Então tomemos um β tal que

$$\beta < \alpha \to \beta \in M_{\beta+1},$$
$$\beta \in M_{\beta+1} \to \beta \in X,$$

com $X = \bigcup_{\lambda \leq \alpha} M_\lambda$. Considerando a fórmula $A(x)$ definida como *"x é um ordinal"*, como X é transitivo e pelo **Lemas 4.4**, tem-se que

$$x \in X \to (A^X(x) \leftrightarrow A(x)),$$

de modo que, dado que o conjunto $\lambda = \{x \in X | A^X(x)\}$ é um conjunto de ordinais e como λ é bem ordenando por $\in$ e X é transitivo, então λ é um ordinal. Sendo assim, λ excede os ordinais $\beta < \alpha$, desse modo podemos inferir que $\alpha \leq \lambda$.

Seja agora X' definido como sendo a união do conjunto X e de todos λ, então

$$\alpha \in X, X \in X' \to \alpha \in X'$$

e como $X' \subseteq M_{\alpha+1}$ e $\alpha \in X'$, então $\alpha \in X', X' \in M_{\alpha+1} \to \alpha \in M_{\alpha+1}$. □

Poderíamos usar estes argumentos com ω e concluir que $\omega \in L$ de modo que o Axioma do Infinito é satisfeito nos construtíveis. Pode-se chegar a esta mesma conclusão de forma bem mais simplificada, no entanto teríamos que formular os lemas dados posteriormente. Perceba que o Axioma do Infinito depende de três conjuntos definidos em axiomas posteriores, estes conjuntos são: $\emptyset$, Ux e $\{a, b\}$. Como tais conjuntos são satisfeitos quando relativizados a L, é trivial que o Axioma do Infinito também seja satisfeito.

A_6) **Axioma da Regularidade**

Sabemos que L, a classe dos construtíveis, é uma substrutura de V e também que ambas as estruturas possuem a relação $\in$-padrão. Desse modo devemos provar que se dado um $x \in L$ não vazio, tendo $y \in x$, teríamos então que $x \cap x = \emptyset$. Seja α um fórmula que defina x, com α satisfeito em ZF. Se tomarmos um $y \in x$, pela transitividade de L resulta que $y \in L$. Deste modo, α é satisfeito em L, como α é o AR, temos que os construtíveis satisfazem AR.

A_7) **Axioma do conjunto Potência**

Mostrar que o Axioma do Conjunto Potência satisfaz a classe L não é tão simples e trivial como os anteriores. Há uma certa sutileza em como iremos prosseguir. Façamos então $x \in L$ e $P(x)$ o conjunto potência de x. Aqui vale deixar explícito que estamos utilizando o Axioma original do Conjunto Potência e não a sua relativização a L. Seja

$$P^L(x) = \{y | y \in P(X) \land y \in L\},$$

onde $y \in P^L(x)$ e $\varphi(y)$ seja o menor α tal que $y \in M_\alpha$. Pelo Axioma da Substituição existe um $Ord\beta$ que é supremo dos ordinais no contradomínio de φ (posteriormente daremos um valor específico para β). Logo,

$$y \in P^L(x) \to y \in M_\beta.$$

Vamos considerar o conjunto $P = \{y | y \in M_\alpha \land \forall t(t \in M_\beta \to (t \in y \to t \in x))\}$. E como $P \in M'_\beta$ então P é o próprio $P^L(x)$ e como esse está em M_β o Axioma do Conjunto Potência satisfaz a condição de ser construtível.

A_8) **Axioma da Substituição**

A demonstração que o Axioma da Substituição satisfaz os construtíveis utiliza o **Teorema Löwenheim-Skolem**. Para esta demonstração deixamos as referências [1, 3].

4.2 Teorema 2

Teorema 2. Dado o Axioma da Construtibilidade, $V = L$, sua interpretação na classe dos construtíveis $(V = L)^L$ é demonstrável em ZF.

Relações Absolutas

Antes de seguir para a demonstração do **Teorema 2** vamos introduzir o conceito de relação absoluta, o que será útil para o resultado. Primeiramente mostraremos que $X' = Y$ pode ser expresso em ZF e consequentemente teremos que $V = L$ também pode. Consideremos que para cada $r \geq 0$ seja X_r o conjunto de todos os conjuntos S de n-tuplos $< x_1, \dots, x_n >$ para os quais existe uma fórmula $A(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ com exatamente r quantificadores. Façamos com que os parâmetros $\overline{t_i} \in X$ tal que $S = \{< x_1, \dots, x_n > | A^X(x_1, \dots, x_n); (\overline{t_1,}, \dots, \overline{t_m})\}$. Exemplificando, a relação $Y = X_0$ é expressa enumerando todas as fórmulas, sem quantificadores e por indução sobre o comprimento das fórmulas e definindo S que resulta de cada fórmula.

Por indução em r define-se agora $Y = X_r$ dizendo que um S de n-tuplos pertence a X_r tal que

$\exists T$ de $(n+1)$-tuplos em X_{n-1} de modo que $< x_1, \dots, x_n >\in S \leftrightarrow \exists x_0 \in X$ ou

$\exists T$ de $(n+1)$-tuplos em X_{n-1} de modo que $< x_1, \dots, x_n >\in S \leftrightarrow \forall x_0 \in X$ tal que $< x_0, x_1, \dots, x_n >\in T$.

Podemos definir X' como sedo a união de X e de todos os n-tuplos que ocorrem em X_r. Agora perceba que os conjuntos M_α foram definidos por uma simples indução transfinita em termos da operação $X \to X'$, então podemos expressar $V = L$ em ZF como uma frase declarativa. A demonstração do **Teorema 2** dependerá de mostrarmos que a definição que fizemos de M_α quando relativizada a L permanece a mesma. Pode-se concluir que a satisfação dessa definição quando relativizada a L deve-se ao fato de L ser um modelo para ZF. No entanto, o fato de $(M_\alpha)^L$ ser construído de modo que seja idêntico ao M_α e consequentemente resultando $(V = L)^L$ se deve a um fato mais geral que não depende de L ser modelo de ZF.

Seja uma fórmula qualquer $c(x)$. E suponhamos que $c(x)$ é transitivo, ou seja,

$$c(x) \wedge y \in x \to c(y).$$

Assim, para qualquer fórmula A que seja restrita a $c(x)$, i.e., $A(x)^c$, então se dado um t fixo, podemos fazer $c(x) \equiv x \in t$. Na nossa aplicação principal teríamos $c(x)$ com $x \in L$ e perceba que a relativização a um conjunto é um caso particular do tipo relativização que acabamos de descrever. Sendo assim, podemos apresentar a definição de *relação absoluta*.

Definição 4.6. Seja $A(x_1, \dots, x_n)$ e $B(x)$ fórmulas, define-se uma relação absoluta se para todas as relações transitivas,

$$B(x_1) \wedge B(x_2) \wedge \cdots \wedge B(x_n) \wedge A^B(x_1, \dots, x_n) \to A(x_1, \dots, x_n).$$

Além disso, se dado B' como uma outra condição tal que $\forall x B(x) \to B'(x)$, então

$$B(x_1) \wedge B(x_2) \wedge \cdots \wedge B(x_n) \wedge A^B(x_1, \dots, x_n) \to A^{B'}(x_1, \dots, x_n).$$

De forma intuitiva queremos dizer que para verificar uma fórmula $A(x_1, \dots, x_n)$ basta verificar em qualquer classe transitiva que contenha todos os objetos que são definidos por A. Não podemos concluir que $A \to A^B$ uma vez que não há garantias de que B seja suficientemente grande. Podemos introduzir, por outro lado, uma definição mais restrita de relação absoluta. Nesta, tendo A como relativizado a uma classe B, onde os axiomas de ZF são satisfeitos quando relativizados a B, então poderíamos ter $A \to A^B$. Vejamos alguns exemplos de relações que não são absolutas.

1. $y = P(x)$. Uma vez que y pode ser o conjunto dos subconjuntos de x em B, no entanto isso não nos garante que seja o verdadeiro conjunto potência.

2. A relação $\#y < \#x$. Mesmo que não seja possível obter um função um-a-um de x em y na classe B, não significa que ela exista.

Agora vejamos os seguintes exemplos de relações absolutas. Pode-se verificar seu caráter absoluto tomando como absoluto as relações precedentes e também é possível verificar que a transitividade de B exerce um papel fundamental em algumas relações, como por exemplo em $z =< x, y >$.

1. $x \in y$
2. $x = y$
3. $x \subseteq y$
4. $\subset y$
5. $x = \emptyset$
6. $z = x \cap y$
7. $z = \{x, y\}$
8. $z =< x, y >$
9. x é um par ordenado
10. $z = x \times y$
11. x é uma função
12. $Ordx$ (x é um ordinal)
13. $x = \omega$
14. $Y = X_r$
15. $Y = X'$
16. $x = M_\alpha$
17. $Ord\alpha$ e $x = M_\alpha$

Finalizamos, então, as nossas discussões sobre relações absolutas. Agora vamos à demonstração do **Teorema 2**.

Teorema 2. $(V = L)^L$

Demonstração: Já demonstramos que existe um M_α para cada α que satisfaz uma certa propriedade. E como essa demonstração utilizou apenas axiomas de ZF e estes são satisfeitos em L, então existe um M_α em L que satisfaz a condição relativizada $(M_\alpha)^L$. Sendo assim, se $x \in L$, existe um α tal que $x \in M_\alpha$. Também vimos que $\alpha \in L$. E pelos resultados das relações absolutas, temos então que M_α, quando definida relativamente à classe L, é ainda M_α. De modo que $x \in M_\alpha$ é satisfeito quando relativizada a L. □

4.3 Teorema 3

Teorema 3. $(V = L) \to AE + GCH$ é demonstrável em ZF.

Já sabemos que $V = L$ é satisfeito em L, o que nos resta agora é mostrar que

$$V = L \to AE \wedge GCH.$$

Vamos dividir essa demonstração em duas etapas. Primeiro mostraremos que $V = L$ implica no Axioma da Escolha e posteriormente que implica na Hipótese do Contínuo Generalizada. Vamos iniciar essa primeira etapa enunciando um teorema.

Teorema 4.7. *Seja $A(u, v; X, Y)$ uma fórmula em ZF tal que se Y é uma boa ordem em X, a relação $u < v \leftrightarrow A(u, v; X, Y)$ induz uma boa ordem no conjunto X'.*

Demonstração: Enumerando as fórmulas em número contável $B(x; t_1, \ldots, t_n)$, sabemos que podemos exprimir uma relação $R(u, v; t_1, \ldots, t_n)$ em ZF. Seja $u = \{x \in X | B_{n,X}(x; t_1 \ldots, t_n)\}$. Dada uma boa ordem em Y, ela será uma boa ordem natural no conjunto de todos $(k+1)$-tuplos possíveis $< n; t_1, \ldots, t_k >$ em que $t_1 \in X$. Para cada $u \in X'$ podemos definir $\varphi(u)$ como sendo o primeiro $(k+1)$-tuplos, para algum k, sob esta ordem de tal modo que $R(u, \varphi(u))$ é satisfeita, permitindo, assim, que A seja definido fazendo $u < v$ significar $\varphi(u), \varphi(v)$. □

Agora vamos definir uma boa ordem em M_α. Se uma boa ordem for definida em M_β para $\beta < \alpha$ teremos então uma boa ordem em $\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$. Sendo assim, o **Teorema 4.7** nos permitiria uma boa ordem em M_α. Consequentemente, se $V = L$ é satisfeito, seja $\varphi(x)$ o menor α tal que $x \in M_\alpha$. Defina-se $x < y$ se $\varphi(x) < \varphi(y)$ ou se $\varphi(x) = \varphi(y) = \alpha$ com x precedendo y na boa ordem em M_α. Logo, teríamos uma única fórmula induzindo uma boa ordem em todos os conjuntos, ou seja, $V = L \to AE$.

Para mostrarmos que $V = L \to GCH$, vamos iniciar com um teorema.

Teorema 4.8. *Se $x \in M_\alpha$, com α infinito, $y \subseteq x$, então $\exists \beta \, \#\beta = \#\alpha$ e $y \in M_\beta$.*

Esse teorema é o ponto crítico do nosso problema, uma vez que, se demonstrado, poderíamos inferir que $\omega \in M_\omega$ e assim teríamos que o conjunto dos inteiros é construído em um número contável de passos. E como sabemos que o conjunto que contém os ordinais que são contáveis possui cardinalidade igual a $\aleph_1$ e $\#M_\alpha = \aleph_0$ se α for contável, então teríamos para o contínuo $\#C = \aleph_1$. Uma observação interessante sobre o **Teorema 4.8** é que sua demonstração nos dá um outro método de mostrarmos que Axioma do Conjunto Potência satisfaz L, pois se $x \in M_\alpha$ então $P(x) \in M_\beta$ com β sendo o primeiro ordinal de cardinalidade superior a α.

Lema 4.9. *Seja T um conjunto extensional com $\#T = \#\alpha$ tal que $M_\alpha \subseteq T$ e M_β, β e γ são elementos de T de modo que a proposição "β constrói" é válida quando relativizada a T.*

Demonstração: [2] □

Por resultados anteriores sabemos que existe um, e apenas um, $\in$ -isomorfismo em um conjunto B transitivo. Seja, então, uma φ a função identidade sobre M_α, que é transitivo. Assim, $\varphi(y) = y$ uma vez que $y \subseteq x$ e φ é a identidade sobre x. Como y não tem que ser identidade sobre β, então façamos $\varphi(\beta) = \beta'$, com β um ordinal relativo a B. Pelo caráter absoluto da propriedade ser um ordinal, então β' existe e é um ordinal e $\beta' \subseteq B$ pela transitividade de B. Assim, chegaremos em $\#\beta' \leq \#B$ e, consequentemente, $\#\beta' \leq \#\alpha$. Logo, $y \in M_\beta$ é satisfeito quando relativizado a B e pelo seu caráter absoluto, $\gamma \in M_\beta$ também é satisfeita. Sendo isso, precisamente, o que o teorema diz.

Pelo **Teorema 4.8**, podemos demonstrar GCH. Primeiro, sabemos que para todo α infinito $\#M_\alpha = \#\alpha$, este resultado vem por indução e o caso para $\alpha = \aleph_0$ é trivial. Em geral, para algum α e um conjunto $X_\alpha = \{M_\beta | \beta < \alpha\}$ temos que $\#X_\alpha \leq \#\alpha \cdot \#\alpha = \alpha$. Deste modo, o número de fórmulas para definir M_α tem cardinalidade igual ou menor que $\#\alpha$. Sendo assim, $\#M_\alpha \leq \#\alpha$ uma vez que $\beta \in M_{\beta+1}$, então $\#M_\alpha \geq \#\alpha$ e assim $\#M_\alpha = \#\alpha$.

Assim, se α é cardinal, $\alpha \in M_{\alpha+1}$ e β é o cardinal que segue α , então $P(\alpha) \subseteq M_\beta$ e, assim, $\#P(\alpha) \leq \#\beta$. Pelo **Teorema de Cantor**, temos que $\#P(\alpha) > \#\alpha$ e, portanto, $\#P(\alpha) = \#\beta$, o que é exatamente a GCH.

Demonstramos os três resultados principais e, embora para qualquer axioma A_n, teremos que ZF seja um sistema axiomático infinito, mostramos como fazer uma demonstração de $A_{n,L}$ em ZF. Assim, considerando ZF um sistema formal, fizemos então a demonstração de

$$(CosisZF) \to (ConsisZF + AE + GCH).$$

Sendo assim, se dada uma contradição em $ConsisZF + AE + GCH$ teremos um processo efetivo para transformar em uma contradição em ZF.

Capítulo 5

Considerações Finais

Iniciamos este trabalho construindo nosso sistema axiomático, o Zermelo-Fraekel Choice (ZFC), com todos os nove axiomas e os conceitos decorrentes. Com o conceito de número ordinal podemos determinar um representante canônico para classes de conjuntos ordenados. Posteriormente apresentamos o conceito de cardinal e o Teorema de Cantor que concluíram, então, os conceitos necessários para enunciarmos a Hipótese do Contínuo (CH) e a Hipótese do Contínuo Generalizada (GCH). Já no capítulo 3 esboçamos, com o Axioma da Regularidade, uma demonstração de consistência relativa, fazendo com que os conjuntos bem-fundados formassem um modelo para ZF. Desse modo, se relativizarmos qualquer axioma de ZF para a classe formada pelos conjuntos bem-ordenados ele ainda seria demonstrável em ZF. O método que usamos para essa demonstração é similar ao que utilizamos para provar um dos resultados principais deste trabalho; sendo assim, esse preâmbulo serviu como apresentação do método de Gödel para a consistência da Hipótese do Contínuo Generalizada (GCH). No capítulo 4, desenvolvemos o conceito de conjunto construtível, construímos uma classe L formada apenas por esse tipo de conjunto e apresentamos o Axioma da Construtibilidade. Em seguida, enunciamos os três resultados principais deste trabalho na forma de três teoremas que, se demonstrados, provam que para um sistema formal, a Hipótese do Contínuo Generalizada (GCH) seria consistente. No desenvolvimento destes resultados provamos que L é um modelo de ZF e para isso relativizamos cada um dos axiomas de ZF em L. E como todos foram satisfeitos tínhamos, então, um modelo de ZF. Em seguida, provamos, com auxílio do conceito de relação absoluta, que até mesmo o Axioma da Construtibilidade pode ser relativizado em L. Por último, com o Teorema 3 buscamos provar que o Axioma da Construtibilidade implicaria no Axioma da Escolha (AE) e Hipótese do Contínuo Generalizada (GCH). Completando as demonstrações desses teoremas poderíamos, então, ter que, considerando ZF um sistema formal, que se não há contradição em ZF então não teríamos contradição se adicionarmos o Axioma da Escolha e a Hipótese Generalizada do Contínuo. E caso esse último apresente uma contradição poderíamos, então, ter uma contradição em ZF. Desse modo cumprimos com os nossos objetivos e acreditamos que este trabalho poderá servir de material introdutório para a investigação de resultados mais atuais sobre a Hipótese do Contínuo Generalizada (GCH).

Referências

[1] GÖDEL, Kurt. LOURENÇO, Manuel S. **O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo**. *Antologia Organizada e Traduzida por Manuel S. Lourenço*. 2. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2009.

[2] GÖDEL, Kurt. **The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis**. Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 24 (1938), pp. 556–557. Journal Of Symbolic Logic, [S.L.], v. 5, n. 3, p. 116-117, set. 1940. Cambridge University Press (CUP). http://dx.doi.org/10.2307/2266868. Disponível em: https://www.pnas.org/content/24/12/556. Acesso em: 04 nov. 2019.

[3] COHEN, Paul J. **Set Theory an the Continuum Hypothesis**. 1. ed. Cambridge: Dover Publications, 2008.

[4] AURICHI, Leandro Fiorini. **Sobre a hipótese do contínuo: algumas aplicações e equivalências**. 2005. 134 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível em: https://www.ime.usp.br/ laurichi/diss.pdf. Acesso em: 4 nov. 2019.

[5] **CONSTRUTÍVEIS e forcing como interpretações**. Direção de Alfredo Roque Freire. Brasilia: Youtube, 2020. Disponível em: https://youtu.be/SDAX53G7T9M. Acesso em: 21 ago. 2020

[6] SUPPES, Patrick. **Axiomatic Set Theory**. New York: Dover Publications, 1972.

[7] TARSKI, Alfred. Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences. New York: Dover Publications, 1945. Tanslated by: Olaf Helmer.

[8] LEARY, Christopher C.; KRISTIANSEN, Lars. **A Friendly Introduction to Mathematical Logic**. 2. ed. Massachusetts: Milne Library, 2015.

[9] BERNAYS, Paul. **Axiomatic Set Theory**. 2. ed. New York: Dover Publications, 1991.

[10] PINTER, Charles C.. A Book of Set Theory. Mineola: Dover Publications, 2014.

[11] SHELAH, Saharon. **Advances in Cardinal Arithmetic**. Finite And Infinite Combinatorics In Sets And Logic, [S.L.], p. 355-383, 1993. Springer Netherlands. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-011-2080-7_25.

[12] SHELAH, Saharon. **Cardinal arithmetic for skeptics**. Bulletin Of The American Mathematical Society, [S.L.], v. 26, n. 2, p. 197-211, 1 abr. 1992. American Mathematical Society (AMS). http://dx.doi.org/10.1090/s0273-0979-1992-00261-6.

[13] WOODIN, William Hugh. **The Continuum Hypothesis, Part I**. Notices Of The American Mathematical Society: Notices of the American Mathematical Society, [S.L.], v. 48, n. 6, p. 567-576, jul. 2001. Disponível em: https://www.ams.org/journals/notices/200106/fea-woodin.pdf. Acesso em: 08 abr. 2020.

[14] WOODIN, William Hugh. **The Continuum Hypothesis, Part II**. Notices Of The American Mathematical Society, [S.L.], v. 48, n. 7, p. 681-690, ago. 2001. Disponível em: https://www.ams.org/journals/notices/200107/fea-woodin.pdf. Acesso em: 08 abr. 2020.

[15] SHELAH, Saharon. **The generalized continuum hypothesis revisited**. Israel Journal Of Mathematics, [S.L.], v. 116, n. 1, p. 285-321, dez. 2000. Springer Science and Business Media LLC. http://dx.doi.org/10.1007/bf02773223.