UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA

JULIANA DA SILVA CARDOSO

UMA INTRODUÇÃO AOS RESULTADOS DO TIPO AMBROSETTI-PRODI

ARAGUAÍNA - TO
2019

JULIANA DA SILVA CARDOSO

UMA INTRODUÇÃO AOS RESULTADOS DO TIPO AMBROSETTI-PRODI

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Raimundo Cavalcante Maranhão Neto.

ARAGUAÍNA - TO
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

C268i Cardoso, Juliana da Silva .
Uma Introdução aos Resultados do Tipo Ambrosetti-Prodi. / Juliana da Silva Cardoso. – Araguaína, TO, 2019.
43 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2019.
Orientador: Raimundo Cavalcante Maranhão Neto

1. Ambrosetti-Prodi. 2. Soluções de Equações. 3. Equações Diferenciais. 4. Análise. I. Título

CDD 510

JULIANA DA SILVA CARDOSO

UMA INTRODUÇÃO AOS RESULTADOS DO TIPO AMBROSETTI-PRODI

Trabalho apresentado a discplina de Trabalho de Conclusão de Curso II, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins (UFT), Campus de Araguaína, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciada em Matemática.
Orientador: Prof. Me. Raimundo Cavalcante Maranhão Neto.

Aprovada em: / / .

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Raimundo Cavalcante Maranhão Neto (Orientador)

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior (Avaliador)

Profa. Dra. Samara Leandro Matos da Silva (Avaliadora)

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço as pessoas mais importantes na minha vida, minha mãe Helena e ao meu pai Francisco, sem os quais não teria chegado até aqui. Me acompanham desde o inicio, sempre dando imenso apoio, carinho,amor, acreditanto em mim. Sou grata por tudo. São minha motivação.

Agradeço ao meu irmão Fernando, por todo apoio, atenção, e incentivo a continuar tentando, o meu irmão "gêmeo"que me possibilitou inúmeros momentos de diversão. Agradeço a minha irmã Bruna que esteve comigo durante todos esses anos da graduação, me ouviu, ficou ao meu lado em momentos dificeis e alegres. Obrigada pela compreensão, incentivo, ajuda e paciência (muita paciência!). Você foi muito importante nessa jornada, ela ficou mais bela com você do meu lado. Agradeço também aos momentos de descontração e gargalhadas típicas de nós três.

Agradeço a Tia Raimunda e a Rafaela por nos receberem tão bem, as primeiras a nos acolher quando chegamos em Araguaína. Nos deu apoio e carinho. Sou imensamente grata!

A prof. Rosária e ao Prof. Matheus pelos convites que me divertiram e me relaxaram bastante, além de todo o apoio que deram durante o curso. Ao prof. Dernival e a prof. Sariza, por ótimos momentos de descontração. Agradeço a Miriam pelas comidas maravilhosas, momentos de diversão únicos e pratos que eu não conhecia. Agradço a Maiza por conversas e por me proporcioar vários livros da área do meu curso.

Agradeço ao prof. Luciano pelo apoio, pelas conversas, sugestões e grande incentivo, tornou-se um amigo. Agradeço ao Ronaldo, pela paciência, atenção e ajudas de última hora, grande amigo que a vida me deu.

Agradeço a minha querida turma que ingressou em 2015/02, que são Daniel, Evanilde, João Marcos, Kelly, Joyce, Mário, Mailson, Thalia, Thiago, por me fazerem sorrir durante o curso e me animarem quando tudo tava tenso. Cada momento extrovertido me proporcionou muita diversão. Agradeço ao Mário, pelas piadas, algumas mesmo que sem graça, me fizeram muito sorrir. Além dos grupos de estudo que fizemos com muita frequência no início do curso, que me ajudaram em inúmeras disciplinas. Agradeço também ao pessoal que fazia parte da turma e que por muitos motivos não continuou. Aos colegas e amigos que fiz durante o curso, como Surama, Kelson, Elissama, Hevellyn, Eliciany, entre tantas pessoas, com quem aprendi e me diverti.

E agradeço especialmente a Evanilde e Kelly, me proporcionaram momentos de muita aprendizagem, descontração e amizade. Me ouviram em momentos difíceis, ficaram do meu lado em meus ataques de mal humor e foram amigas quando precisei, momentos preciosos que me trouxeram até aqui. Sou muito grata pela amizade.

Agradeço ao trote intelectual no início do curso, que me deu o maior susto que eu podia imaginar quando entrei e que só me preparou para os "trotes reais"durante o curso.

Agradeço a prof. Samara por me dar a chance de tentar entrar na iniciação científica, foi um sim muito significativo. Agradeçoo ao prof. André e prof. Deive, que foram os coordenadores no período em que fui bolsista do Lmat. Ao prof. Alvaro por algumas sugestões no trabalho. Agradeço aos demais professores que me ajudaram durante o curso.

Agradeço ao prof. José Carlos pela oportunidade de me viciar em séries, as quais eu não tive acesso até chegar na universidade e também a de conhecer e experimentar nutella. Agradeço principalmente pela oportunidade de participar da Iniciação científica sob sua supervisão, aprendi muito, e pude discutir e tirar muitas dúvidas sobre o tema do trabalho. Por ter respeitado meu tempo e por ter tamanha paciência durante a bolsa, coisa que nunca tive. Obrigada!

Agradeço ao prof. Raimundo por aceitar o desafio e me orientar no Trabalho de conclusão de curso, pelas dúvidas e momentos de discussão do trabalho, aprendi muito. Agradeço por ter me ajudado tanto para que eu pudesse concluir o trabalho. Sou muito grata!

Agradeço aos professores da banca por se disponibilizarem a avaliar e contribuir com o trabalho.

Agradeço a todos os meus colegas e amigos que me ajudaram durante o percurso, os sorrisos no Lmat, lugar onde fiquei tanto durante o curso. Ninguém caminha sozinho, por isso, agradeço a todos que durante o período do curso passaram pela minha vida, que direta ou indiretamente me ajudaram, não só no TCC, mas também nas disciplinas do curso. Vocês foram muito importantes para minha formação.

RESUMO

O estudo de funções e suas propriedades é o foco de algumas áreas da matemática, tais como a Análise, Equações Diferenciais e Matemática Aplicada. O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre Resultados do Tipo Ambrosetti-Prodi, que consistem em resolver uma equação (P) da forma $G(u, s) = 0$, encontrando um parâmetro real s e um valor $s_1 \in \mathbb{R}$, em que a equação (P) não tenha solução quando $s < s_1$, tenha pelo menos uma solução quando $s = s_1$ e tenha pelo menos duas quando $s > s_1$. É apresentado um estudo para três equações, uma simples e as outras duas equações diferenciais, são elas: $f(u) = s$, $u'(x) + f(u(x)) = s$ e $u'(x) + f(x, u(x)) = s$. Este trabalho baseou-se nos primeiros capítulos do artigo [1], possui abordagem qualitativa e a pesquisa é de cunho bibliografico, visto que procurou compreender o comportamento das soluções de uma equação sem nos preocuparmos em encontrá-las.

Palavras-chave: Ambrosetti-Prodi; Soluções de Equações, Equações Diferenciais.

Abstract

The study of functions and their properties is the focus of some areas of mathematics, such as Analysis, Differential Equations and Applied Mathematics. The objective of this work is to present a set of Ambrosetti-Prod type results, which consists of solving a (P) equation of the form $G(u, s) = 0$, finding a real parameter s and a value $s_1 \in \mathbb{R}$, where the equation (P) is no longer a solution when $s < s_1$, has at least one solution when $s = s_1$ e have at least two when $s > s_1$. We present a study of three equations, a simple one, and the other two differential equations, namely: $f(u) = s$, $u'(x) + f(u(x)) = s$ e $u'(x) + f(x, u(x)) = s$. This work was based on the first chapters of the article [1], it has a qualitative approach and the research is a bibliographical one, since it tried to understand the behavior of the solutions of an equation without worrying about finding them.

Key words: Ambrosetti-Prodi; Solutions of Equations, Differential Equations.

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

As equações diferenciais possibilitam estudar e modelar fenômenos, que podem ser naturais, econômicos, tecnológicos, entre outros. Um exemplo é estudar o crescimento e decrescimento populacional de determinada espécie, por meio de um modelo matemático. Uma equação é dita diferencial quando ela envolve funções e suas derivadas. E elas podem ser classificadas como ordinárias, quando possui uma variável, e parciais quando possuem mais de um variável e as derivadas parciais da função aparecem.

O presente trabalho estuda os Resultados do Tipo Ambrosetti-Prodi, que aplicados a uma equação do tipo $G(u, s) = 0$ tal que, ao encontrar um número s_1 e variar o parâmetro s em relação a ele, teremos pelo menos uma solução quando $s = s_1$, pelo menos duas soluções quando $s > s_1$ e nenhuma solução quando $s < s_1$. Para mais curiosidades sobre o tema, ver [1], onde o leitor poderá ver as equações aqui estudadas e muitas outras, assim como aprofundar sobre o assunto.

O meu contato com a temática se deu a partir da oportunidade proporcionada pela pesquisa no Programa de Iniciação Científica (PIBIC), financiado pela Universidade Federal do Tocantins (UFT). Diante dessas experiências pude aprofundar os estudos e, aos poucos, sistematizar ideias que se desdobraram na produção deste trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

O objetivo geral deste trabalho é apresentar um breve estudo da base matemática necessária para compreender problemas do tipo Ambrosetti-Prodi e mostrar os resultados para as equações supracitadas, buscando, quando possível, apresentar exemplos. Nesse sentido, os objetivos específicos são:

- Estudar a equação simples $f(u) = s$ e apresentar exemplo que satisfaça tal equação;
- Resolver a equação $u^{'}(x) + f(u(x)) = s$ e mostrar as possíveis soluções;

- Estudar a equação $F(u)(x) = u^{'}(x) + f(x, u(x)) = s$ e mostrar a existência e não existência de solução.

Nesta perspectiva, o presente trabalho tem como questionamento central a seguinte problemática: Como estudar as soluções para uma equação diferencial ordinária variando os valores do parâmetro s em relação a um número $s_1 \in \mathbb{R}$, encontrado previamente?

Em cada uma das equações estudadas há uma forma diferente de encontrar o parâmetro supracitado. As questões a seguir surgiram como desdobramentos da pergunta principal:

- O que acontece com as soluções da equação simples ao variar s?
- Quais soluções satisfazem a segunda equação?
- Como resolver a terceira equação usando os resultados do tipo Ambrosetti-Prodi?

A pesquisa possui abordagem qualitativa, que segundo [8] é caracterizada por interpretação de fenômenos e discussão de significados, preocupa-se com o processo e suas construções e compreender o estudo de teorias. A pesquisa desenvolvida neste trabalho é de cunho bibliográfico, pois é realizada a partir do estudo de trabalhos já publicados, que são usados como fontes. Segundo [10], apesar de todo trabalho apresentar referencial teórico, existem trabalhos em que o estudo bibliográfico também tem o foco em apronfundar o tema pesquisado, debatendo ideias e detalhando o estudo. Para discutirmos os Resultados do tipo Ambrosetti-prodi, utilizamos como fonte o artigo [1], que norteia toda a nossa pesquisa. Os materiais usados foram livros e artigos para o estudo e compreensão dos conceitos abordados. Foi realizado um levantamento bibliográfico baseado nos assuntos necessários para o desenvolvimento do tema. Trabalhamos também com o software GeoGebra, fundamental para construção de gráficos, em que apresentamos exemplos de funções estudadas.

Para lidar com as questões da pesquisa, o estudo dos Resultados do tipo Ambrosetti-Prodi consiste em discutir a existência de soluções dessas equações que será desenvolvida nos capítulos seguintes.

O trabalho está estruturado em quatro capítulos. O capítulo dois apresenta definições e teoremas considerados para o estudo. No capítulo três mostramos o estudo para três equações envolvendo o tema principal. NO capítulo quatro, apresentamos alguns comentários e conclusões. Para uma boa leitura do trabalho é ideal que o leitor tenha noções de cálculo diferencial.

Capítulo 2

NOÇÕES PRELIMINARES

Este capítulo traz definições e teoremas que fundamentam a construção dos capítulos do TCC. Os conceitos aqui apresentados são baseados em [3, 5, 6, 7, 9], livros de Cálculo e Análise.

2.1 Definições e Resultados Básicos

Definição 2.1.1. *Dizemos que uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in A$ se para todo $\varepsilon > 0$ dado existir $\delta > 0$ tal que*

$$|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Diremos que $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua quando f for contínua em todos os pontos do seu domínio.

Exemplo 2.1.1. *Vamos mostrar que a função $f(x) = x^2$ é continua no ponto $p = 3$, $f(3) = 9$.*

Devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \ \text{ então } \ |x^2 - 9| < \varepsilon.$$

Relacionamos $|x^2 - 9|$ com $|x - 3|$ e obtemos $|x^2 - 9| = |(x + 3)(x - 3)|$. Logo, temos que mostrar

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow |x + 3||x - 3| < \varepsilon$$

Podemos considerar um $C > 0$, tal que $|x+3| < C$. Então

$$|x+3||x-3| < C|x-3|.$$

Podemos fazer $C|x-3| < \varepsilon$ usando $|x-3| < \frac{\varepsilon}{C} = \delta$. Como $x \to 3$, podemos restringir x em um intervalo contendo 3, $(\delta - 3, \delta + 3)$, para pensar na escolha do C. Se considerarmos $|x-3| < 1$ teremos: $-1 < x-3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4$. E assim, $5 < x+3 < 7$,de modo que teremos $|x+3| < 7$ e uma possível escolha para C é 7. Agora, temos duas restrições sobre $|x-3|$, que são

$$|x-3| < 1 \text{ e } |x-3| < \frac{\varepsilon}{C} = \frac{\varepsilon}{7}.$$

Para satisfazer ambas as desigualdades, tomemos δ como o menor dos dois, $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$. Dado $\varepsilon > 0$, se tomarmos $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$, teremos

$$|x-3| < \delta \Rightarrow |x^2-9| = |x-3||x+3| < 7.\frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon.$$

Teorema 2.1.1. *Uma função f é contínua em um número c se,e somente se,*

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c),$$

O que é equivalente às três condições:

1. $f(c)$ está definida (c está no domínio da f);
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ existe;
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Corolário 2.1.1. *Toda função polinomial é contínua em $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.*

Demonstração. A demonstração deste corolário pode ser vista em [5], p.112. ■

Definição 2.1.2. *Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Dizemos que f tende a infinito quando x tende a infinito, chamado de limite infinito no infinito, quando para todo $M > 0$ existir um número correspondente $N > 0$ tal que*

$$x > N \Rightarrow f(x) > M.$$

Neste caso, escrevemos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Definição 2.1.3. *Dizemos que limite de $f(x)$ quando x tende a $-\infty$ é $+\infty$, se dado $M > 0$ qualquer existe $N < 0$ de modo que:*

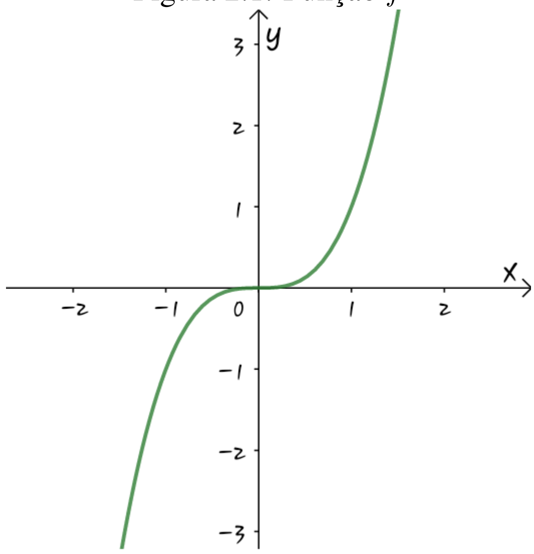
$$x < N \Rightarrow f(x) > M.$$

Para exemplificar, considere a função $f(x) = x^3$, quando calculamos o limite no infinito, temos infinito. O valor de $f(x)$ fica arbitrariamente grande quando o valor de x cresce arbitrariamente. De fato, dado $M > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$x > N \Rightarrow x^3 > M.$$

Podemos ver o comportamento na figura 2.1.

Figura 2.1: Função f



Fonte: Arquivo pessoal.

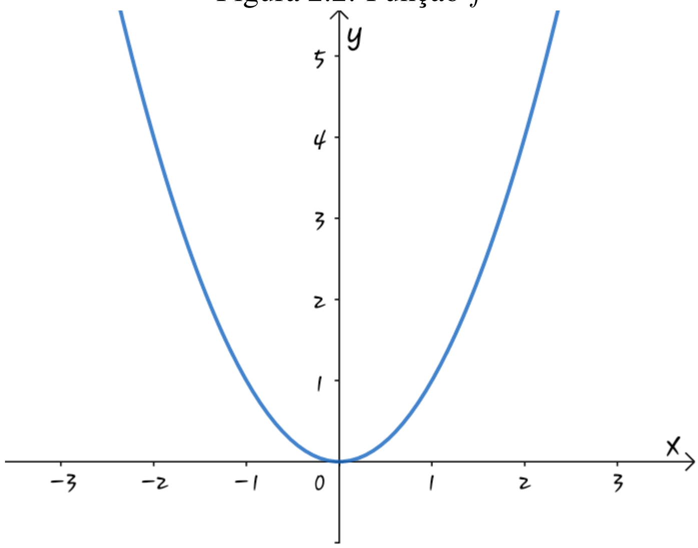
Se pegarmos um valor $M \geq 1000$, encontraremos um $N \geq 10$ e então a função tende a $+\infty$. De maneira análoga, podemos considerar um valor $M \leq -1000$, encontraremos um valor $N \leq -10$.

No caso da definição 2.1.3, considere $f(x) = -x^3$.

Definição 2.1.4. *Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é coerciva quando $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.*

Um exemplo deste caso é a função definida por $f(x) = x^2$. Podemos ver seu gráfico na figura 2.2.

Figura 2.2: Função f



Fonte: Arquivo pessoal.

Definição 2.1.5. *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Será limitado superiormente quando existir um valor $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \geq x$, $\forall x \in A$. Qualquer valor b que satisfaça essa condição é chamado cota superior.*

Considere o conjunto dado por $A = \{-2, -4, -6, -8, ...\}$. Pela definição, uma cota superior é qualquer número que satisfaça $x \geq -2$, como 5, 2, ou mesmo -2.

Agora, de forma análoga, podemos definir conjunto limitado inferiormente.

Definição 2.1.6. *Considere $B \subset \mathbb{R}$. Será limitado inferiormente quando existir um valor $a \in$
$mathbbR$, tal que $a \leq x$, $\forall x \in B$. Qualquer a que satisfaça a condição é chamada cota inferior.*

Para exemplificar, podemos tomar o conjunto $\mathbb{N}$, os inteiros negativos e o zero são cotas inferiores.

Definição 2.1.7. *Considerando a definição de limitada superiormente, supremo de um conjunto é a menor das cotas superiores, escrevemos $b = \sup A$, satisfaz a três condições encontradas em [3]:*

$s_1)$ $b \geq x$, $\forall x \in A \subset \mathbb{R}$;

$s_2)$ *Seja* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $x \leq c$, $\forall x \in A$ *então* $b \leq c$;

$s_{21})$ *Se* $c < b$, $\exists\, x \in A$ *tal que* $c < x$.

A condição $s_1)$ nos diz que b é cota superior de A. A $s_2)$ nos diz que qualquer cota superior c de A será maior ou igual a b. Desse modo, a condição $s_{21})$ nos diz que nenhum elemento $c \in \mathbb{R}$ menor que b pode ser uma cota superior de A.

Para garantir a existência do supremo, vamos enunciar o postulado a seguir.

Postulado 2.1.1. *Existe um corpo ordenado $\mathbb{R}$, chamado corpo dos números reais, com $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, tal que todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$, limitado superiormente, possui supremo em $\mathbb{R}$.*

Definição 2.1.8. *Considerando a definição de limitada inferiormente, ínfimo de um conjunto é a maior das cotas inferiores e satisfaz as seguintes condições encontradas em [3]:*

$c_1)$ $a \leq y$, $\forall y \in B \subset \mathbb{R}$;

$c_2)$ *Seja* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $c \leq x$, $\forall x \in A$, *então* $a \geq c$;

$c_{21})$ *Se* $c > a$, $\exists x \in A$, *tal que* $c > x$.

A condição $c_1)$ nos diz que a é cota inferior de B. A $c_2)$ nos diz que qualquer cota inferior c de B será menor ou igual a a. Assim, a condição $c_{21})$ nos diz que nenhum elemento $c \in \mathbb{R}$ maior que b pode ser uma cota inferior de B.

Proposição 2.1.1. *Se um subconjunto de $\mathbb{R}$ for limitado inferiormente então ele possui ínfimo.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser vista em [9], p.17. ■

Definição 2.1.9. *Sejam $A \subset \mathbb{R}$ não vazio e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função.*

- *Dizemos que f possui um máximo global a em A se*

$$f(a) \geq f(x), \forall x \in A;$$

- *Dizemos que f possui máximo local em $a \in A$ se*

$$f(a) \geq f(x), \forall x \text{ para todo x próximo de } a.$$

Definição 2.1.10. *Sejam $D \subset \mathbb{R}$ não vazio e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função.*

- *Dizemos que f possui um mínimo global em $d \in D$ se*

$$f(d) \leq f(x), \forall x \in D;$$

- *Dizemos que f possui um mínimo local em $d \in D$ se*

$$f(d) \leq f(x), \forall x \text{ para todo x próximo de } d.$$

Exemplo 2.1.2. *Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua é de classe C^1 se a derivada de primeira ordem for contínua.*

Definição 2.1.11. *Seja uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ela é chamada T-periódica ou periódica de período T, se existir uma constante positiva tal que*

$$f(t) = f(t + T)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ (Def. encontrada em [12])

Definição 2.1.12. *Sejam $M \to \mathbb{R}$ e E um conjunto de funções $f : M \to \mathbb{R}$. Dizemos que E é equicontínuo em um ponto $a \in M$ se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in M, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon, \forall f \in E.$$

Definição 2.1.13. *Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para a função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo apenas de ε) tal que*

$$n > n_0 \Rightarrow \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ seja qual for } \; x \in X$$

2.2 Teoremas Auxiliares

Nesta seção, teremos a demonstração do Teorema dos Intervalos Encaixados, Teoremas de Weierstrass e Teorema do Valor Intermediário, que são usados nos capítulos seguintes, nos quais desenvolvemos o assunto principal do nosso trabalho. Por fim, enunciaremos um teorema muito importante, que nos audarará a demonstrar o teorema principal, mas que sua demonstração foge do foco do trabalho.

O teorema a seguir é de grande importância nesse trabalho, nos auxiliou na demonstração e compreensão dos demais.

Teorema 2.2.1 (Intervalos Encaixados)**.** *Seja uma sequência decrescente* $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ... \supset I_n \supset ...$ *de intervalos limitados e fechados* $I_n = [a_n, b_n]$. *A interseção* $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ *não é vazia. Isto é, existe pelo menos um número real* x *tal que* $x \in I_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Mais precisamente, temos* $\cap I_n = [a, b]$ *onde* $a = sup(a_n)$ *e* $b = inf(b_n)$.

Demonstração. Como, por hipótese, $I_n \supset I_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, em que $I_n = [a_n, b_n]$, temos:

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1.$$

Disso, podemos considerar dois conjuntos, $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ e $B = \{..., b_n, ..., b_2, b_1\}$ que são limitados. O conjunto A possui cota inferior a_1 e os b_n são cotas superiores, já o conjunto B possui cota superior b_1 e as a_n são cotas inferiores. Se considerarmos $a = \sup A$ e $b = \inf B$, teremos $a \leq b$. Daí,

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq a \leq b \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1.$$

Concluímos que a,$b \in I_n$, em que $[a, b] \subset I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ logo $[a, b] \subset \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Sendo $c > b = \inf B$, existe algum $b_n \in B$ tal que $c > b_n$ e $c \notin I_n$. Analogamente, ocorre para $c < a$. Portanto, $\cap I_n = [a, b]$. ∎

Teorema 2.2.2 (Weierstrass)**.** *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua. Então* f *possui máximo e mínimo global, isto é, existe* $c_1, c_2 \in [a, b]$ *tal que e* $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$, $\forall x \in [a, b]$

Dividiremos a demonstração em três partes, as quais chamaremos de "passo".

Demonstração. • 1º **Passo:** f é limitada.

Vamos provar que existem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$.

$(1) f$ é limitada superiormente.

Suponha, por redução ao absurdo, que dado $M \in \mathbb{R}$ qualquer, existe $x \in [a, b]$ em que $f(x) > M$. Assim, podemos considerar o intervalo $I = [a, b]$ e dividi-lo em seu ponto médio $x_1 = \dfrac{a + b}{2}$. Escolhemos um dos subintervalos em que f é ilimitada, seja em $[a, x_1]$ ou $[x_1, b]$

e chamaremos este de I_1. Se x_2 for o ponto médio de I_2 , temos que x_2 divide o intervalo I_1 em dois intervalos, sendo que em pelo menos um deles a f é ilimitada. Considerando isso, segue que:

$$I_o = [a, b],\ I_1 = [a_1, b_1],\ I_2 = [a_2, b_2], ...,\ I_n = [a_n, b_n].$$

São tais que:

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ...$$

e pelo Teorema 2.2.1, $\cap I_n \neq \varnothing$. Como $|I_n| = |b_n - a_n| \to 0$, segue que só pode ser $\cap I_n = \{c\}$

Como f é contínua e chamando $f(c) = d$, de forma que, próximo de c não se afaste muito de d. Pela Definição 2.1.1,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 t.q. |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - d| < \varepsilon.$$

Assim, obtemos o intervalo $J = (c - \delta, c + \delta)$ em que $x \in J, \Rightarrow d - \varepsilon < f(x) < d + \varepsilon$.

Como $J \subset [a, b]$, existe $I_n \subset J$, em que $I_n \subset [c - \delta, c + \delta]$.

Mas f é ilimitada superiormente, logo existe $x \in I_n | f(x) > d + \epsilon$. Mas isso é uma contradição. Isto mostra a existência do M.

$(2)f$ é limitada inferiormente.

Para isto, vamos mostrar agora a existência de m.

Considere g a função limitada superiormente, de maneira que:

$$g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, g(x) = -f(x).$$

Note que g é contínua. Daí, pela primeira parte g é limitada superiormente, ou seja, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$g(x) \leq k,\ \forall x \in [a, b]$$

$$\Leftrightarrow -f(x) \leq k,\ \forall x \in [a, b]$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq m = -k,\ \forall x \in [a, b].$$

Logo, a função f possui limite inferior e superior no intervalo $[a, b]$. Logo f é limitada.

- 2º **Passo:** f possui ínfimo e supremo.

Pelo $1^o passo$, ela é limitada. Logo,existe ínfimo e supremo, garantidos pelo Postulado 2.1.1 e pela Proposição 2.1.1.

- 3º **Passo:** M,$m \in Imf$, onde $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$,$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$

- Vamos demonstrar primeiro para $M \in Imf$.

Suponha que $M \notin Im(f)$, temos que a h é contínua em $[a, b]$

$$\begin{aligned} h\colon\ [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{M - f(x)}. \end{aligned}$$

Como h é contínua, pelo 1^o *passo* sabemos que ela é limitada no intervalo $[a, b]$.

Pelo 2^o *passo* e da definição de supremo, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in [a, b]$ tal que $M - f(x_n) < \dfrac{1}{n}$ e daí, $h(x_n) = \dfrac{1}{M - f(x_n)} > n$.

Aqui, chegamos ao fato que $h(x_n)$ não é limitada superiormente. Mas isso é uma contradição, pois h é contínua e limitada. Portanto, existe $c_2 \in [a, b]$ tal que $f(c_2) = M$, sendo c_2 máximo global.

(2) $m \in Imf$;

Vamos supor que $m \notin Im(f)$. De forma análoga ao passo anterior, temos h contínua em $[a, b]$:

$$\begin{aligned} h\colon\ [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{f(x) - m}. \end{aligned}$$

Como h é contínua, pelo 1^o *passo* sabemos que ela é limitada no intervalo $[a, b]$.

Pelo 2^o *passo* e da definição de supremo, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in [a, b]$ tal que $f(x_n) - m < \dfrac{1}{n}$ e assim, $h(x_n) = \dfrac{1}{f(x_n) - m} > n$.

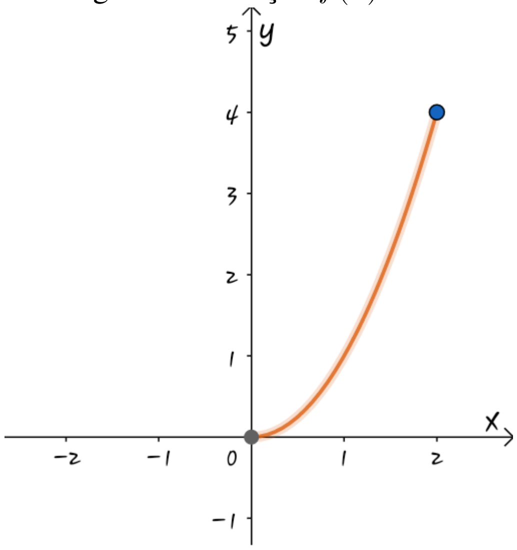
Aqui, chegamos ao fato que $h(x_n)$ é ilimitada. Mas isso é uma contradição, pois h é contínua e limitada. Portanto, existe $c_1, c_2 \in [a, b]$ tal que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$,$\forall x \in [a, b]$. ■

Uma explicação sobre essa demonstração pode ser encontrada em [11].

Exemplo 2.2.1. *Considere* $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ *a função dada por* $f(x) = x^2$.

Podemos vê-la na Figura 2.3:

Figura 2.3: Função $f(x) = x^2$



Fonte: Arquivo pessoal.

Sendo $x^2 \geq 0$, para todo x, então $f(x) \geq f(0)$. Logo, $f(0) = 0$ é o valor mínimo global. Observando, temos o máximo local em $f(2) = 4$. Uma das maneiras de determinar valores máximos e mínimos é com auxílio gráfico.

Teorema 2.2.3 (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua com $f(a) < c$ e $f(b) > c$. Então existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = c$. A função f assume todos os valores no intervalo $[a, b]$.*

Demonstração. Primeiro, vamos provar o caso em que $c = 0$. Para isso, supomos que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ e com f contínua.

Tome um $c \in I_0 = [a, b]$, sendo $c = \dfrac{a+b}{2}$. Teremos três possibilidades :

- $f(c) > 0$;
- $f(c) = 0$;
- $f(c) < 0$.

Se $f(c) = 0$, a demonstração está concluída.

Se $f(c) > 0$, escolhemos $[a, c]$, se $f(c) < 0$, escolhemos $[c, b]$. Em qualquer um dos dois, ao dividir teremos um novo intervalo , $I_1 = [a, b_1]$, $c = b_1$. Fazendo o mesmo procedimento, olhamos o ponto médio do intervalo $c_2 = \dfrac{a + b_1}{2}$ e voltamos as posssibilidades, e dessa vez, podemos pensar em $f(c_2) < 0$. Agora, temos o intervalo $I_2 = [a_1, b_1]$, $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$. Prosseguindo assim, temos uma familia de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ de forma que $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$ e o comprimento do intervalo I_n sendo $\dfrac{b-a}{2^n}$. Assim, quando $|I_n| = b_n - a_n \longrightarrow 0$, pelo Teorema 2.2.1, $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = x_0$. Lembrando que $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pela continuidade da f e por $a_n \to x_0$ e $b_n \to x_0$, temos

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$$

e

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0.$$

Logo, $0 \leq f(x_0) \leq 0$, e portanto $f(x_0) = 0$.

No caso geral, temos $f(a) < c$ e $f(b) > c$ e f contínua. Queremos mostrar que $\exists\, x_0 \in [a, b], f(x_0) = c$. Considere uma função auxiliar $g(x) = f(x) - c$. Sendo g contínua, $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$. Pela primeira parte da demonstração, existe um $c \in [a, b]$ de forma que $g(x_0)$. E assim , temos

$$f(x_0) - c = 0 \Rightarrow f(x_0) = c.$$

Portanto, provamos o caso geral. ■

Uma das aplicações do Teorema do Valor intermediário é encontrar raizes de equações e desempenha um papel importante na maneira de funcionar de ferramentas gráficas.

Um importante resultado na Análise e que apresentaremos a seguir é o Teorema de Arzelá-Ascoli, com várias aplicações e estudo de novas teorias. Ele é essencial para se estudar a existência de soluções de uma Equação Diferencial Ordinaria. Há uma grande quantidade de conceitos que o permeiam e que fogem ao objetivo do trabalho e não foram apresentados aqui.

Teorema 2.2.4 (Arzelá-Ascoli)**.** *Sejam $K \to \mathbb{R}$ compacto e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência equi-contínua e simplesmente limitada de funções de K em $\mathbb{R}$. Então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma sub-sequência uniformemennte convergente.*

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [6],p.227 ■

Capítulo 3

RESULTADOS DO TIPO AMBROSETTI-PRODI

Resultados do tipo Ambrosetti-Prodi aplicados a uma equação $G(u, s) = 0$ consistem em encontrar algum valor $s_1 \in \mathbb{R}$ e dependendo de um parâmentro $s \in \mathbb{R}$, tal que teremos nenhuma solução quando $s < s_1$; quando $s = s_1$ tenha pelo menos uma e quando $s > s_1$, pelo menos duas.

Neste capítulo, vamos apresentar um estudo de três equações do ponto de vista dos Resultados do tipo Ambrosetti-Prodi, a saber, são elas $f(u) = s$, $u'(x) + f(u(x)) = s$, e $u'(x) + f(x, u(x)) = s$, sendo nossa incógnita a variável u.

3.1 Equação Simples

O caso simples é dado pela equação:

$$f(u) = s. \tag{3.1}$$

Assumimos duas hipóteses sobre a função f:

A_1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua;

A_2) $\lim\limits_{|u| \to \infty} f(u) = +\infty$.

Agora, vamos provar o resultado do tipo Ambrosetti-Prodi para (3.1). Seja $J = [R_-, R_+]$ tal que fora desse intervalo, em $(-\infty, R_-)$ e $(R_+, +\infty)$ a função f cresce arbitrariamente.

Podemos fixar um valor m qualquer, tal que, fora do intervalo $[R_-, R_+]$, a imagem da função é sempre maior que m. Para isso, selecionamos um m adequado, por exemplo, $m = f(u_*)$, com $u_*, m \in \mathbb{R}$, tal que, existem R_+ e R_- tais que para todo $u < R_-$ e $R_+ < u$, nós temos $f(u) > m$, por construção.

Dado $u \in \mathbb{R}$ existem três possibilidades para u em relação a J:

- $u > R_+$;
- $u < R_-$;
- $u \in [R_-, R_+]$.

Quando $u > R_+$ e considerando $m = f(u_*)$, temos:

$$f(u) \geq f(u_*).$$

O mesmo ocorre para $u < R_-$, em que u fica pequeno, temos:

$$f(u) \geq f(u_*).$$

Analisamos o comportamento das duas primeiras possibilidades, sabemos que ocorre por A_2.

Agora, vamos analisar a terceira possibilidade, para $u \in [R_-, R_+]$. Temos um $J = [R_-, R_+]$, fechado, limitado e com $f_{|_{[R_-, R_+]}}$ contínua. Pelo Teorema de Weierstrass 2.2.2, f assume seu mínimo em $[R_-, R_+]$, ou seja,

$$\exists\, u_0 \in [R_-, R_+] | f(u_0) = \min_{[R_-, R_+]} f(u). \tag{3.2}$$

Considere $u_0 \in [R_-, R_+]$ e as duas primeiras possibilidades, o teorema nos garante um u_0, tal que $f(u_0)$ seja o menor valor assumido pela função. Assim, temos:

$$f(u) \geq f(u_*) \geq f(u_0), \forall u > R_+ \text{ou } u < R_-$$

e ainda,

$$f(u) \geq f(u_0), \quad \text{e } R_- \leq u \leq R_+.$$

Portanto, em qualquer dos dois casos

$$\exists u_0 \in \mathbb{R}, \text{ tal que } f(u_0) = s_1, \text{ em que } s_1 = \min_{\mathbb{R}} f.$$

Sabendo da existência do mínimo, vamos analisar o resultado do tipo Ambrosetti-Prodi para (3.1), quando $s = s_1$ e $s < s_1$:

a) Quando $s = s_1$, a equação $f(u) = s_1$ tem pelo menos uma solução. Neste caso, s coincide com $s_1 = \min_{\mathbb{R}} f$, sendo $u = u_0$;

b) No caso em que $s < s_1$, a equação $f(u) = s$ não possui solução. Isso ocorre porque não existe imagem da f abaixo do mínimo,que é o menor valor assumido pela função;

c) Agora, vamos considerar o caso $s > s_1$.

Para entendermos esse caso, consideramos 3.2, onde, diminuindo R_- e aumentando R_+ se necessário, teremos $f(R_-) > s_1$ e $f(R_+) > s_1$. Queremos provar que existem pelo menos duas soluções para (3.1) quando $s > s_1$.

Para isso, consideramos o intervalo $[R_-, R_+]$, lembrando $\min_{\mathbb{R}} f = f(u_0)$. Podemos dividi-lo em $[R_-, u_0]$ e $[u_0, R_+]$. Em relação a $J_1 = [R_-, u_0]$, o Teorema 2.2.3 afirma que a função assume todos os valores no intervalo, sendo a imagem fechada, limitada e contínua. Dessa forma,

$$\exists\, u_2 \in [R_-, u_0] | (f(u_2) = s$$

existe e

$$f(R_-) > s > f(u_0).$$

Podemos fazer o mesmo para o intervalo $J_2 = [u_0, R_+]$, ao aplicarmos o teorema do Valor Intermediário 2.2.3, com $f(u_0) < s$ e $f(R_+) > s$, existe $u_3 \in [u_0, R_+]$ tal que $f(u_3) = s$ e que

$$f(u_0) < s < f(R_+)$$

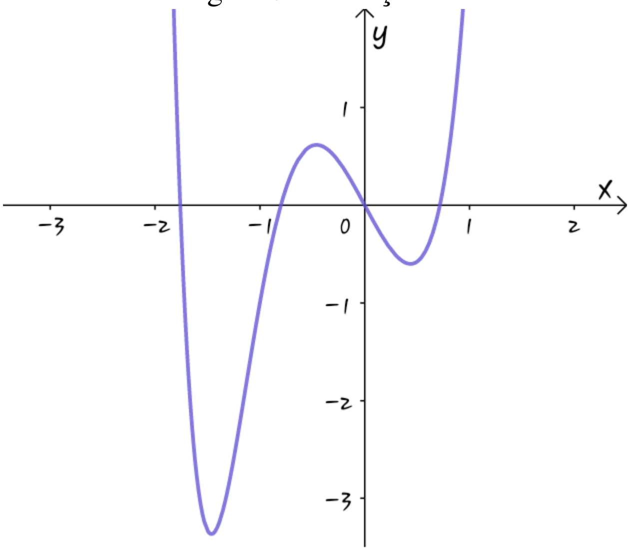
Portanto, o teorema do Valor Intermediário afirma a existência de $u_2 \in [R_-, u_0]$ e $u_3 \in [u_0, R_+]$, sendo $u_2 \neq u_3$. Logo, em c), existem pelo menos duas soluções distintas para a equação $f(u) = s$ quando $s > s_0$.

Assim, mostramos a existência de soluções para (3.1). Para exemplificar, vamos mostrar essa variação a seguir.

Exemplo 3.1.1. *Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função $h(u) = u^6 + u^5 + 3u^3 - 2u$. Apresentaremos os Resultados do tipo Ambrosetti-Prodi para ela.*

O gráfico da função é apresentado na figura 3.1:

Figura 3.1: Função h



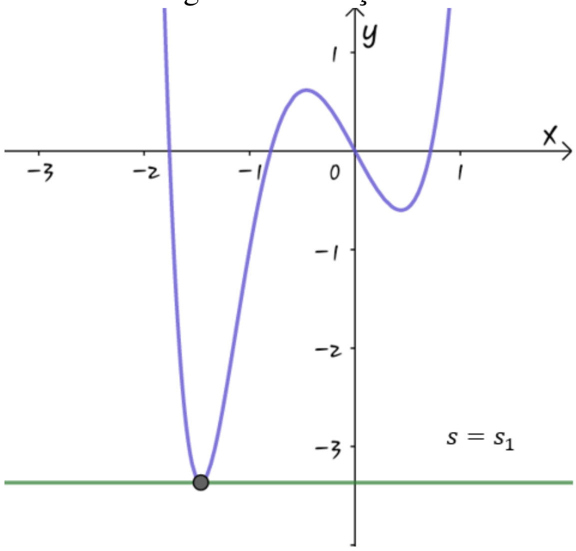
Fonte: Arquivo pessoal.

Note que a h, satisfaz as hipóteses. Em A_1, segue por ser uma função polinomial,vale o corolário 2.1.1. No caso de A_2, temos:

$$\lim_{u\to\infty} u^6 + u^5 + 3u^3 - 2u = \lim_{u\to\infty} u^6(1 + \frac{1}{u} + \frac{3}{u^3} + \frac{2}{u^5}) = +\infty.$$

Logo, é satisfeita. Analisando h do ponto de vista dos Resultados do Tipo Ambrosetti-Prodi, temos que quando $s = s_1 = \min_{\mathbb{R}} f$, a equação (3.1) tem pelo menos uma solução, vista na figura 3.2:

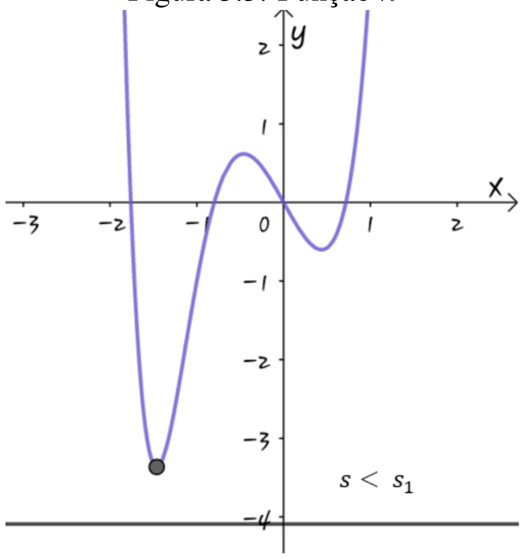
Figura 3.2: Função h



Fonte: Arquivo pessoal.

No caso em que $s < s_1$, a equação não possui solução.

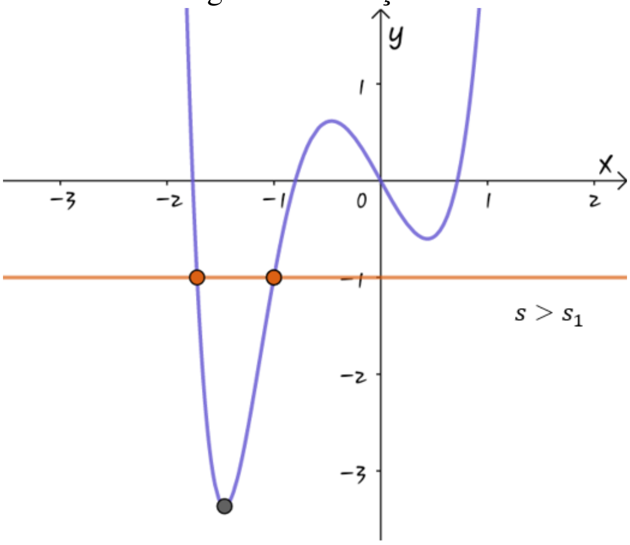
Figura 3.3: Função h



Fonte: Arquivo pessoal.

O terceiro caso em que $s > s_1$, a função admite pelos duas soluções, na figura 3.4, aparecem três.

Figura 3.4: Função h

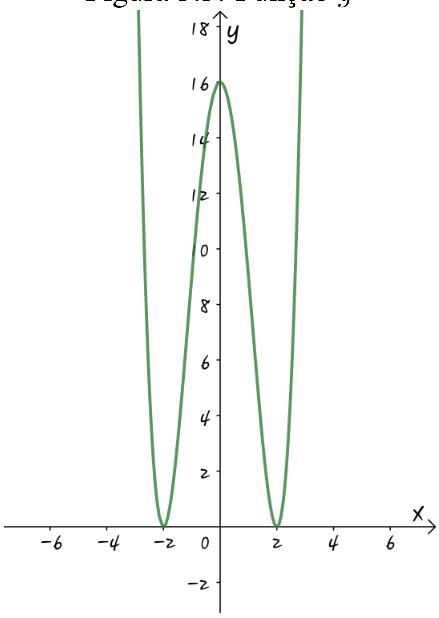


Fonte: Arquivo pessoal.

Exemplo 3.1.2. *Considere a função dada por* $g(u) = u^4 - 8u^2 + 16$.

O gráfico da função g é:

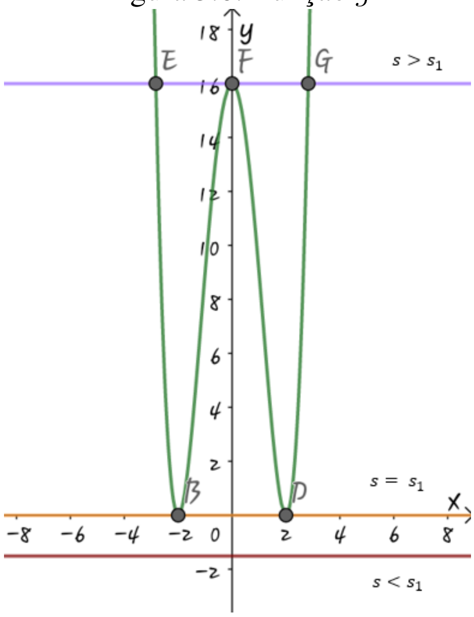
Figura 3.5: Função g



Fonte: Arquivo pessoal.

A g satisfaz as duas hipóteses, logo, podemos mostrar os Resultados do Tipo Ambrosetti-Prodi para ela. Veja que na figura 3.6, colocamos todos os casos, $g(u) = s = s_1$, $s < s_1$ e $s > s_1$.

Figura 3.6: Função g



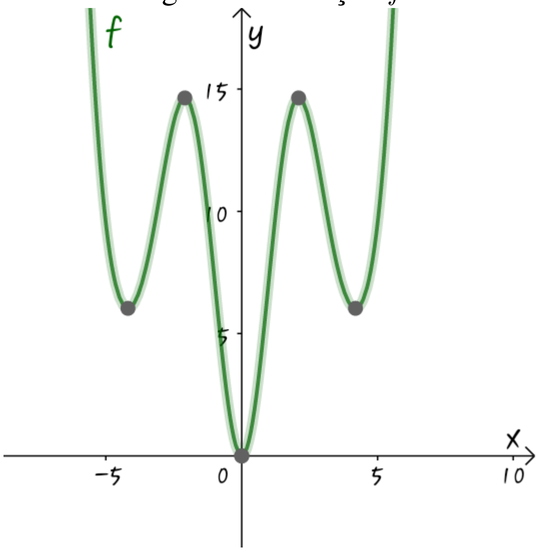
Fonte: Arquivo pessoal.

Temos pelo menos duas soluções quando $s > s_1$(reta roxa), nenhuma solução quando $s < s_1$ e pelo menos uma solução quando $s = s_1$. Diferente de 3.1.1, a g possui dois valores u diferentes tais que $\min g = s = s_1$.

Exemplo 3.1.3. *Outro exemplo interessante é função dada por* $f(u) = (u + 2\,\mathrm{sen}(u))^2$.

Veja o gráfico na Figura 3.7.

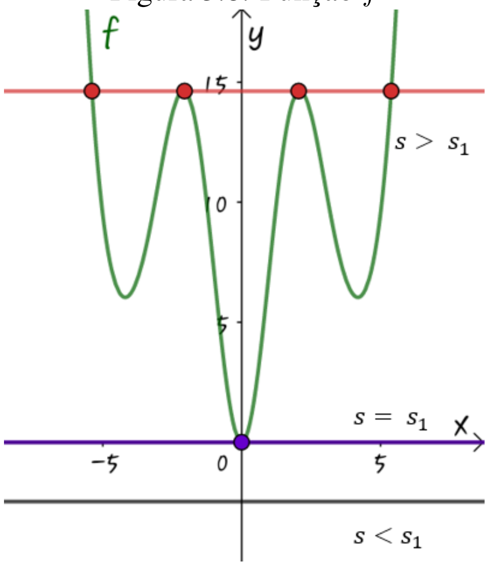
Figura 3.7: Função f



Fonte: Arquivo pessoal.

Perceba que a função f satisfaz as duas hipóteses. Colocamos na Figura 3.8 os Resultados do Tipo Ambrosetti-Prodi para a f.

Figura 3.8: Função f



Fonte: Arquivo pessoal.

Na figura percebemos que a f cresce arbitrariamente, variando o número de soluções quando $s > s_1$, no gráfico destacamos quatro. Pelos resultados do tipo Ambrosetti-Prodi temos pelo menos soluções quando $s > s_1$, nenhuma solução quando $s < s_1$ e pelo menos uma solução quando $s = s_1$.

3.2 Equação Periódica

A equação simples pode ser expressa em termos de equações diferenciais ao considerar o problema periódico:

$$u'(x) + f(u(x)) = s \tag{3.3}$$

$$u(0) = u(2\pi).$$

em que u e f são contínuas. A função f satisfaz a hipótese A_2. Pelos passos apresentados em [1] , para sabermos se u é solução, vamos multiplicar por u' e integrar usando a periodicidade e lembrando que $x \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} u'(x) + f(u(x)) = s \ . \ (u'(x)) \\ u(0) = u(2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (u'(x))^2 + f(u(x)).(u'(x)) = s.(u'(x)) \\ u(0) = u(2\pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} (u'(x))^2 dx + \int_0^{2\pi} f(u(x)).u'(x)dx = \int_0^{2\pi} s.u'(x)dx.$$

Vamos usar a regra da substituição para calcular $\int_0^{2\pi} f(u(x).u'(x)dx$. Substituindo os valores, temos $w = u(x)$ e $dw = u'(x)dx$. Logo,

$$\int_0^{2\pi} (u'(x))^2 dx + \int_{u(0)}^{u(2\pi)} f(w)dw = s.u(x)\Big|_0^{2\pi}.$$

Depois de integrarmos a $f(w)$, usamos a periodicidade:

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} (u'(x))^2 dx + F(w)\Big|_{u(0)}^{u(2\pi)} = s.u(x)\Big|_0^{2\pi}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} (u'(x))^2 dx + F(u(2\pi)) - F(u(0)) = s[u(2\pi) - u(0)]$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} (u'(x))^2 dx + 0 = 0 \ \Rightarrow \int_0^{2\pi} (u'(x))^2 dx = 0.$$

Sendo $(u'(x))^2 \geq 0$, e assumindo que $u'(x)$ seja contínua, pela observação em [4], p.(126), segue que $u' \equiv 0$ e u é constante. Portanto, as únicas soluções que satisfazem a equação (3.3) são as funções constantes. Logo,(3.3) recai na primeira equação, (3.1).

3.3 Problema Periódico Não Autônomo

Vamos considerar agora o problema periódico não autônomo:

$$F(u)(x) \equiv u'(x) + f(x, u(x)) = s \tag{3.4}$$

$$u(2\pi) = u(0).$$

As duas hipóteses assumidas para (3.4) são:

$NA_1)$ $f : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua;

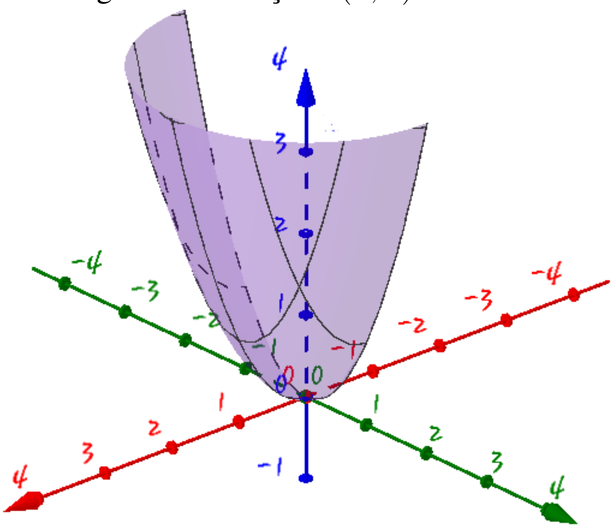
$NA_2)$ $f(x, u) \to +\infty$ quando $|u| \to \infty$ uniformemente em $[0, 2\pi]$.

A hipótese NA_2 nos diz que

$$\forall M > 0, \exists\, N > 0 |\, |u| > N \Rightarrow f(x, u) > M\,, \forall x \in [0, 2\pi].$$

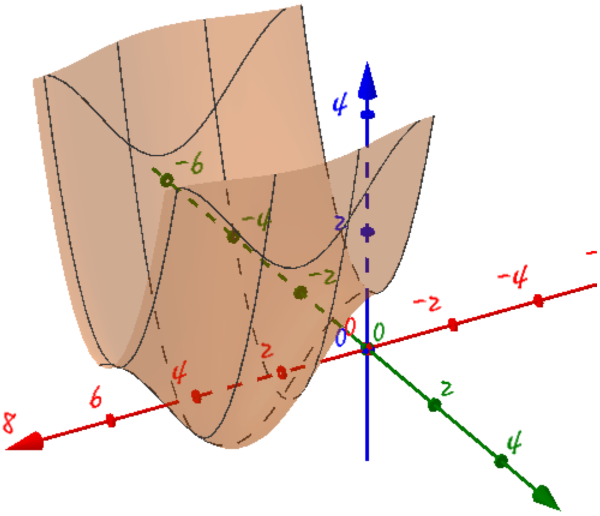
Para exemplificar as funções que satisfazem $NA_1)$ e $NA_2)$, vamos apresentar algumas.

Figura 3.9: Função $h(x, u) = u^2 + x^2$



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 3.10: Função $h(x,u) = u^2 + \cos(x)$



Fonte: Arquivo pessoal.

Para estudar este problema, vamos definir dois conceitos novos. Diremos que α é uma subsolução para a equação (3.4) se $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$ e α satisfaz a desigualdade:

$$F(\alpha)(x) \equiv \alpha'(x) + f(x, \alpha(x)) \geq s. \tag{3.5}$$

Podemos reescrever (3.5) da seguinte maneira:

$$\alpha'(x) \geq s - f(x, \alpha(x)) := f_1(x, \alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha(x) - f_1(x, \alpha) \geq 0.$$

Denominaremos supersolução de (3.4) toda função β tal que $\beta(0) = \beta(2\pi)$ e se β satisfaz a desigualdade:

$$F(\beta)(x) \equiv \beta'(x) + f(x, \beta) \leq .s \tag{3.6}$$

Também podemos reescrevê-la:

$$\beta'(x) \leq s - f(x, \beta(x) := f_2(x, \beta)$$

$$\Rightarrow \beta'(x) - f_2(x, \beta) \leq 0,$$

tendo em vista que $x \in [0, 2\pi]$. Podemos usar o Lema 3.3.1 encontrado em [2], onde é chamado de Corolário 2.1. Ele é um importante resultado na área de Equações Diferenciais e vamos enunciar-lo para demonstrar o Teorema principal.

Lema 3.3.1. *Suponha que existem funções C^1 - T -periódicas α, β tais que $\alpha \leq \beta$ e*

$$\alpha'(x) - f(x, \alpha) \geq 0$$

$$\beta'(x) - f(x, \beta) \leq 0$$

quando $\alpha(x) \leq u \leq \beta(x)$.
Então a equação 3.4 (que será estudada no próximo capítulo) tem pelo menos uma solução periódica u, tal que

$$\alpha(x) \leq u(x) \leq \beta(x)$$

Demonstração. Tradução e alteração nossa, para mais informações e ver a demonstração, ver p. 541 de [2] ■

Ele nos garante a existência de u solução de (3.4) tal que $\alpha(x) \leq u(x) \leq \beta(x)$. Ela é estrita se α e β satisfazem

$$\alpha(x) < \beta(x), \ x \in [0, 2\pi].$$

Logo, o Lema 3.3.1 nos garante pelo menos uma solução, caso encontremos α e β.

Agora, vamos enunciar e demonstrar o Teorema 3.3.1, encontrado em [1].

Teorema 3.3.1. *Se f satisfaz NA_1 e NA_2, então existe $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que (3.4) tem zero, pelo menos uma ou pelo menos duas soluções de acordo com $s < s_1$, $s = s_1$ ou $s > s_1$ respectivamente.*

Para a demonstração, vamos considerar o seguinte conjunto:

$$S_1 = \{s \in \mathbb{R}; \text{a equação (3.4) tem pelo menos 1 solução}\}.$$

P_1) $S_1 \neq \emptyset$.

Seja a função contínua $x \mapsto f(x, 0)$, com $x \in [0, 2\pi]$, pelo Teorema de Weiestrass 2.2.2, ela assume máximo e mínimo dentro do intervalo $[0, 2\pi]$. Então, podemos considerar um $s^* > \max_{x \in [0,2\pi]} f(x, 0)$ e usar a coercividade para encontrar um $R^*_- < 0$ tal que $f(x, R^*_-) > s^*$ para todo $x \in [0, 2\pi]$.

Desse modo, R_-^* é subsolução estrita e zero uma supersolução estrita para a equação (3.4). De fato, se substituirmos em (3.5) e (3.6), temos:

$$\alpha = R_-^* \, , \, F(R_-^*)(x) = 0 + f(x, R_-^*) > s^*$$

e

$$\beta = 0 \, , \, F(\beta)(x) = 0 + f(x, 0) < s^*,$$

com $R_-^* < 0$. Pelo Lema 3.3.1, existe pelo menos uma solução de (3.4) entre elas e o conjunto S_1 não é vazio e $s^* \in S_1$.

$P_2)$ Se $\tilde{s} \in S_1$ e $s > \tilde{s}$, então $s \in S_2 := \{s \in \mathbb{R};$ a equação (3.4) tem pelo menos duas soluções$\}$.

Considere $\tilde{u}(x)$ solução de (3.4) e $s > \tilde{s}$, temos:

$$\begin{cases} \tilde{u}'(x))^2 + f(x, \tilde{u}(x)) = \tilde{s} < s \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}(2\pi) \end{cases} \quad \tilde{u}(x) \text{ é supersolução de (3.4).}$$

Considere $R_- < \min_{[0,2\pi]} \tilde{u}(x)$ e $R_+ > \max_{[0,2\pi]} \tilde{u}(x)$, pela coercividade em NA_2), temos:

$$f(x, R_-) > s \text{ e } f(x, R_+) > s, \forall x \in [0, 2\pi].$$

Assim, R_- e R_+ são subsoluções estritas e $\tilde{u}(x)$ é supersolução por construção. Seja $u_1(x) = R_-$ e $u_2(x) = R_+$, em que

$$\begin{cases} u_1'(x) + f(x, u_1(x)) > s \\ u_1(0) = u_1(2\pi) \end{cases} \text{ e } \begin{cases} u_2'(x) + f(x, u_2(x)) > s \\ u_2(0) = u_2(2\pi) \end{cases} .$$

Como $R_- < \min \tilde{u}(x) \leq \tilde{u}(x)$ e $\tilde{u}(x) \leq \max \tilde{u}(x) < R_+$, logo:

$$R_- < \tilde{u}(x) < R_+, \ \forall x \in [0, 2\pi].$$

Uma vez que R_- é subsolução, $\tilde{u}(x)$ é supersolução e a desigualdade acima, pelo Lema 3.3.1 podemos encontrar um $u_-(x)$ tal que

$$R_- < u_-(x) < \tilde{u}(x), \forall x \in I.$$

De maneira análoga, $\tilde{u}(x)$ é supersolução e R_+ é subsolução, usamos o Lema novamente e encontramos um u_+, tal que

$$\tilde{u}(x) < u_+(x) < R_+, \forall x \in [0, 2\pi].$$

Assim, temos $u_-(x) \neq u_+(x)$. Então, temos pelo menos duas soluções $u_-(x)$ e $u_+(x)$ para (3.4) tal que

$$R_- < u_-(x) < \tilde{u}(x) < u_+(x) < R_+, \forall x \in [0, 2\pi].$$

$P_3)$ $s_1 = \inf S_1$ é finito e $S_2 \supset (s_1, +\infty)$.

Seja $K = f(x_0, u_0) \in \mathbb{R}$ com $(x_0, u_0) \in I \times \mathbb{R}$ é um ponto qualquer. Pelas hipóteses $NA_1)$ e NA_2, existe R_-,$R_+ \in \mathbb{R}$ com

$$f(x, u) \geq K, \forall u \notin [R_-, R_+]. \tag{3.7}$$

Considere $c = \min\limits_{[R_-,R_+]} f(x, u)$ e $(x, u) \in I \times \mathbb{R}$, que existe pelo Teorema de Weierstrass 2.2.2. Dado $u \in \mathbb{R}$, temos três alternativas:

1) $u > R_+ \Rightarrow f(x, u) > K = f(x_0, u_0) \geq \min_{[R_-,R_+]} f(x, u) = c\,(u_0 \leq R_+)$;

2) $u < R_- \Rightarrow f(x, u) > K = f(x_0, u_0) \geq \min_{[R_-,R_+]} f(x, u) = c\,(u_0 \geq R_-)$.

Nos casos acima, as imagens são maiores que c e $u > R_+$ e $u < R_-$ já satisfazem 3.7. Vamos ver o que acontece no intervalo $[R_-, R_+]$.

3) $u \in [R_-, R_+] \Rightarrow f(x, u) \geq min_{[R_-,R_+]} f(x, u) = c$.

Portanto, vale que $f(x, u) \geq c$, $\forall (x, u) \in I \times \mathbb{R}$.

A equação (3.4) não tem solução quando $s < c$. Seguindo os passos em [1], pág. 293, temos:

$$\int_0^{2\pi} u'(x)dx + \int_0^{2\pi} f(x, u(x))dx = \int_0^{2\pi} sdx$$

$$\Rightarrow u(2\pi) - u(0) + \int_0^{2\pi} f(x, u(x))dx = 2\pi.s$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} c.dx \leq \int_0^{2\pi} f(x, u(x))dx = 2\pi.s$$

$$\Rightarrow 2\pi.c \leq 2\pi.s \Rightarrow c \leq s.$$

Portanto, se $s \in S_1$, então $s \geq c$. Isso mostra que o conjunto S_1 é limitado inferiormente. Logo, não há solução quando $s < c$. Todos os valores de S_1 estão à direita de c. Seja assim, $s_1 = \inf S_1$. A segunda parte da afirmação, $S_2 \supset (s_1, +\infty$, segue de $P_2)$.

P_4) Para cada $s_2 > s_1$, o conjunto de todas as soluções possíveis de (3.4) com $s \leq s_2$ é limitada.

Vamos considerar um $R_2 > 0$ tal que $f(x,u) > s_2$ sempre que $|u| \geq R_2$, cuja a existência é garanttida pela hipótese NA_2.

Seja $y \in [0,2\pi]$ de maneira que $u(y) = \max\limits_{x \in I} u(x)$ para alguma solução possivel u para (3.4) em que $s \leq s_2$. Se $y \in (0,2\pi)$ e sabendo que os pontos de máximo e de mínimo possuem derivada nula, temos:

$$0 = u'(y) = s - f(y,u(y)) \leq s_2 - f(y,u(y))$$

$$\Rightarrow 0 \leq s_2 - f(y,u(y)) \Leftrightarrow f(y,u(y)) \leq s_2,$$

de tal forma que, por 3.2, $\max\limits_{x\in[0,2\pi]} u(x) = u(y) < R_2$.

Assim, se $y \in (0,2\pi)$, então, $\forall x \in [0,2\pi]$ e $\forall u$ solução de (3), vamos ter:

$$u(x) \leq \max_{x \in I} u(x) = u(y) < R_2.$$

Se $y = 0$ ou $y = 2\pi$, então teremos $\max u(x) = u(0) = u(2\pi)$. E assim, $u'(0) \leq 0$ e $u'(2\pi) \geq 0$ onde as derivadas em questão são as laterais de u, de modo que:

$$0 \leq u'(2\pi) = s - f(2\pi, u(2\pi)) \leq s_2 - f(2\pi, u(2\pi)$$

$$\Rightarrow 0 \leq s_2 - f(2\pi, u(2\pi)) \Rightarrow f(2\pi, u(2\pi) \leq s_2,$$

e daí,

$$u(x) \leq \max_{x\in[0,2\pi]} u(x) = u(2\pi) < R_2 \, \forall x \in [0,2\pi].$$

Portanto,

$$u(x) \leq R_2, \forall x \in [0,2\pi] \text{ e } u \text{ solução de (3.4) com } \; s < s_2.$$

Então, todas as soluções de (3.4) são limitadas superiomente.

Para mostrar a limitação inferior, vamos fazer de forma análoga usando $\min\limits_{x \in I} u(x)$. Seja $-R_2 < 0$ tal que $f(x,u) > s_2$, sempre que $|u| \geq R_2$.

Considere $y_2 \in [0,2\pi]$ de forma que $u(y_2) = \min u$ para alguma solução de (3.4) em que

$s \leq s_2$. Se $y \in (0, 2\pi)$, temos

$$0 = u'(y_2) = s - f(y_2, u(y_2)) \leq s_2 - f(y_2, u(y_2))$$

$$\Rightarrow 0 \leq s_2 - f(y_2, u(y_2)) \Leftrightarrow f(y_2, u(y_2)) \leq s_2.$$

Temos que se $y \in (0, 2\pi)$, então para todo $x \in [0, 2\pi]$ e u solução de (3.4), vamos ter:

$$u(x) \geq \min u(x) = u(y) > -R_2.$$

Se $y = 0$ ou $y = 2\pi$, teremos $\min u(x) = u(0) = u(2\pi)$. Então, $u'(0) \geq 0$ e $u'(2\pi) \leq 0$ derivadas laterais,

$$0 \leq u'(0) = s - f(0, u(0)) < s_2 - f(0, u(0))$$

$$\Rightarrow 0 \leq s_2 - f(0, u(o)) \Rightarrow f(0, u(0)) \leq s_2$$

e então,

$$u(x) \geq \min u(x) = u(0) > -R_2, \, \forall x \in [0, 2\pi].$$

Assim, $u(x) \geq -R_2, \forall x \in [0, 2\pi]$ e u solução de (3.4) com $s < S_2$.

$P_5)$ $s_1 \in S_1$.

Consideremos uma sequência decrescente (σ_n) em (s_1, ∞) convergindo para s_1 e seja (u_n) uma correspondente sequência das soluções de (3.4). Desse modo, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$u_n'(x) + f(x, u_n(x)) = \sigma_n \;\text{ e }\; u_n(0) = u_n(2\pi). \tag{3.8}$$

Por P_4 o conjunto $E = \{u_n;\; n \in \mathbb{N}\}$ é limitado, isto é, existe $R > 0$ tal que $|u_n(x)| \leq R, \forall x \in I = [0, 2\pi]$.

Sejam $x_0 \in I$ e $\varepsilon > 0$. Afirmamos que, existe $\delta > 0$, tal que:

$$x \in I = [0,\, 2\pi],\, |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |u_n(x) - u_n(x_0)| < \varepsilon,\, \forall n \in \mathbb{N}$$

ou seja, afirmamos que E é equicontínuo em x_0 e como x_0 é qualquer segue que E é equicontínuo.

Como f é contínua, existe $C > 0$ real tal que $-C < f(x,\, u) < C$ para todo $(x,\, u) \in$

$I \times [-R,\, R]$. Assim, qualquer que sejam $x \in I$ e n natural,

$$-C < f(x,\, u_n(x)) < C \;\Rightarrow\; C > -f(x,\, u_n(x)) > -C \;\Rightarrow\; \sigma_n + C > \sigma_n - f(x,\, u_n(x)) > \sigma_n - C$$

Como,

$$s_1 < \sigma_n \leq \sigma_1,\; \forall n \in \mathbb{N},$$

temos:

$$\sigma_1 + C \geq \sigma_n + C > \sigma_n - f(x,\, u_n(x)) > \sigma_n - C > s_1 - C,\; \forall x \in I,\; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Desse modo, existe um número real $M > 0$ tal que:

$$|\sigma_n - f(x,\, u_n(x))| < M,\; \forall x \in I,\; \forall n \in \mathbb{N}$$

e daí, para $x \in I$ qualquer:

$$|u_n(x) - u_n(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x} u_n'(t)\, dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} |u_n'(t)|\; dt = \int_{x_0}^{x} |\sigma_n - f(t,\, u_n(t))|\, dt \leq M \int_{x_0}^{x} dt.$$

Ou seja,

$$|u_n(x) - u_n(x_0)| \leq M|x - x_0|.$$

Tomando $\delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$, temos:

$$x \in I,\; |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |u_n(x) - u_n(x_0)| < \varepsilon,$$

o que prova que E é equicontínuo.

Agora, pelo Teorema 2.2.4, (u_n) possui uma subsequência convergindo uniformemente para uma $\tilde{u} : I \times [-R,\, R] \to \mathbb{R}$. De (3.8) segue que, aplicando a limite:

$$\tilde{u}'(x) + f(x, \tilde{u}(x)) = s_1 \;\text{ e }\; \tilde{u}(0) = \tilde{u}(2\pi).$$

Logo, $s_1 \in S_1$, existindo pelo menos uma solução para $s = s_1$. A demonstração do 3.3.1 está concluída.

Capítulo 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O contato com a temática se deu por meio do PIBIC, quando cursava o 4º período. Nele, escolhemos o artigo [1] que está em inglês. A proposta era estudarmos os primeiros capítulos, bem como a matemática necessária para entendê-la. Iniciamos com a tradução, que foi uma parte dificil, já que não conhecia muito bem Inglês.

Destaco a complexidade dá temática na área da matemática, assim como a língua estrangeira. Isso trouxe um grande enriquecimento na minha formação, pois pude estudar mais coisas do que via no curso. Por causa da pesquisa no PIBIC, tive a oportunidade de enviar trabalhos em eventos, isso ampliou minha visão de mundo.

Desse modo, o desenvolvimento do trabalho possibilitou uma visão diferenciada das equações diferenciais, tanto em relação a abordagem de estudo das soluções que teve como foco a existência e não existência de soluções, como o que poderia vir a ser a solução, uma área vasta e em constante desenvolvimento que tem inúmeras aplicações. Este trabalho foi um pequeno recorte e que abre possibilidades de pesquisa sobre o tema por quem tiver interesse e afininade com a área de estudo.

A principio, para o desenvolvimento do capítulo dois, selecionamos alguns pontos principais para apresentar em meio a abrangência do tema abordado. O trabalho possibilitou me aprofundar no estudo das três equações apresentadas. Na primeira equação, a saber $f(u) = s$, foi possível apresentar os Resultados do tipo Ambrosetti-Prodi e apresentar de maneira simples a definição e exemplificá-la para um boa compreensão. Na segunda equação, depois de resolvê-la por métodos de cálculo, mostramos que a solução que a satisfazia eram as constantes, recaindo na primeira.

A terceira equação é um problema mais complexo, possui uma quantidade maior de conceitos e se mostrou um grande desafio. Nela, se concentrou parte do desenvolvimento do trabalho. Mostramos a existência de solução para ela e aprofundamos mostrando que os resultados também valem. Apresentamos que, não existe solução, quando $s < s_1$,existe pelo menos duas, $s > s_1$ e pelo menos uma quando $s = s_1$. Ambas as equações tiveram métodos diferentes apresentados por [1].

Referências Bibliográficas

[1] MAWHIN, Jean. *Ambrosetti-Prodi Type Results in Nonlinear Boundary Value Problems.* Université de Louvain, Institut Mathématique, B-1348, Belgium.

[2] MAWHIN, Jean. Recent Results On Periodic Solutions Of Differential Equations. in: *International Conference on Differential Equations.* Academic Press, New York, - 1975. p.541.

[3] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise.* Vol. 1. – 12 ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2008. (Projeto Euclides)

[4] LIMA, Elon Lages. *Análise Real*: Funções de uma variável. Vol. 1. – 8 ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2008. (Coleção Matemática Universitária)

[5] STEWART, James. *Cálculo.* 2 ed. Rio de Janeiro: Pioneira Thomson Learning, 2006.

[6] FIGUEIREDO, Djairo Guedes. *Análise I* Vol. 1. 5a ed. São Paulo-SP: LTC, 1996.

[7] ÁVILA, Geraldo. *Análise Matemática para Licenciatura* Vol. 1. 3a ed. São Paulo-SP: Editora Edgard Blucher LTDA, 2001.

[8] ASSIS, M. C. *Metodologia do Trabalho Científico* Disponível em: http://biblioteca.virtual.ufpb.br/files/metodologia_do_trabalho_cientifico_1360073105.pdf. Acesso em: 20 de Abril de 2019.

[9] CORRÊA, F. J. S. de A. *Introdução à Análise Real* Disponível em: http://www.mat.unb.br/furtado/homepage/verao/livro_de_analise-novo.pdf .Acesso em: Janeiro de 2019

[10] PRODANOV, Cleber Cristiano. FREITAS, Cesar Hernani. *Metodologia do Trabalho Científico:* métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho academico. a ed. Novo Hamburgo, 2013.

[11] LIMA, Renan. *Demonstração do Teorema de Weierstrass* Canal:Matemática Universitária. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=E7Md8cUu1rw&list=PLQf0cz1lFUmOtYKMiGkATzPMPAjSWG4sv&index=2&t=780s .Acesso em: Setembro de 2018

[12] SAUTER, Esequia.AZEVEDO,Fabio Souto de.org. *Análise de Fourier Um Livro Colaborativo* Disponível em: https://www.ufrgs.br/reamat/TransformadasIntegrais/livro-af/sdf-funx00e7x00f5es_perix00f3dicas.html. Acesso em: Julho de 2019