UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITARIO DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUCAS COSTA BRITO

O TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO DE RIESZ

ARAGUAÍNA
2016

LUCAS COSTA BRITO

O TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO DE RIESZ

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. Msc. Renata Alves da Silva.

ARAGUAÍNA
2016

LUCAS COSTA BRITO

O TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO DE RIESZ

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em _____/_____/________.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Msc. Renata Alves da Silva – UFT/Câmpus Araguaína

Prof. Msc. André Luiz Ortiz da Silva – UFT/Câmpus Araguaína

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior – UFT/Câmpus Araguaína

Aos meus pais: Djalma e Luiza

A minha tia: Iraci Ferreira Brito

DEDICO

“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível.”

(Charles Chaplin)

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pois sem ele nada disso estaria acontecendo. Agradeço por ter me dado a possibilidade de viver e de me proporcionar saúde para continuar nesse caminho para obter uma melhor formação profissional.

À toda a minha família: avós, tios, tias, padrinho, madrinhas, primos, primas, cunhado e cunhada, mas em especial aos meus pais, Djalma Ferreira Brito e Luiza Coêlho da Costa, que sempre me apoiaram nos meus estudos no meu dia-a-dia. A minha irmã Lorena Costa Brito, que também sempre me apoiou e incentivou durante a minha formação acadêmica e ao meu irmão Dennys Passos, que sempre esteve junto comigo e que me proporcionou a alegria de ter a minha primeira sobrinha Maria Antônia, que é um presente do Senhor Deus para a nossa família.

A todos os meus colegas e amigos que estiveram sempre comigo nessa caminhada: José Domingos e Kelson Feitosa pelas tantas madrugadas de estudos, junto aos sábados e domingos, faça chuva ou faça sol, Regina, Ruth, Glêcyanne, Antônia Gleice, Sílvia, Paulo Denizar, Waleska, Mattheus, Aline, Juslainy, Elizângela, Denilton, Jamison, Jocer Neto, Kelliton, Jailson, Tallys, Danrley, Daniella, Elívio, Ana Claudia, José Eurivan, Letícia, Artur, Luan, Rosalina, Gecivaldo, Marlene e Karla que por diversas vezes, ficamos horas estudando para provas e trabalhos e que nas horas vagas, tinha aquele lanche e aquelas conversas jogadas fora para discontrair e tirar o estresse. Aos colegas Lee-Andro e João Marcos por ter me ajudado em manusear o Látex. Em geral, agradeço a todos os discentes do colegiado de Matemática, que ao meu ver, todos são capazes de se tornarem professores críticos e revolucionários.

Quero agradecer também a três vigilantes da UFT, que durante a minha passagem pela a Universidade pude adquirir um laço de amizade em que vou levar para o resto da minha vida: Edilene, Edilma e Naisa.

E por fim, a todos os docentes do colegiado de Matemática que contribuíram gradativamente para minha formação acadêmica: Elisângela, William, Plínio, Glelson, Marcos, Douglas, Odair, Rosária, Walace, Elzimar, Kathia, Jarderson, Freud, Alvaro, André, Claudenice, Fernanda, José Carlos, Osvaldo, Sinval, Yukiko, Robledo, Samara, Roselba e Lilyan. Em especial, a Professora Mestre Renata Alves da Silva, que eu já a considero uma Doutora, por ter aceitado me orientar neste trabalho, dando todo o apoio, suporte, atenção e muita paciência, algo que foi bastante necessário, e o mais relevante, toda a dedicação comigo durante as orientações, para que o nosso trabalho ficasse da melhor maneira possível.

RESUMO

Neste trabalho, iremos apresentar um dos resultados mais relevantes quando se estuda funcionais lineares na Álgebra Linear ou na Análise Funcional, o famoso teorema da Representação de Riez, onde faremos uma análise do ponto de vista algébrico. Neste, provaremos que todo funcional linear pode ser representado por um produto interno definido em um Espaço Vetorial. Um funcional linear nada mais é que uma aplicação linear de um espaço vetorial qualquer em um corpo de escalares. Restringiremos o nosso estudo apenas a espaços vetoriais de dimensão finita e ao corpo de escalares o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Esse resultado para espaços de dimensão infinita é visto na Análise Funcional, disciplina de uma pós-graduação em matemática, diante disso, foge do nosso objetivo. Sendo assim, o trabalho se baseou em pesquisas bibliográficas, buscando trabalhos acadêmicos e livros que abordam esse assunto. Com isso, realizamos fichamentos desses trabalhos, onde desmembramos conceitos, teoremas, demonstrações que foram de suma importância para o entendimento do tema.

Palavras-chave: Álgebra Linear. Espaço Vetorial. Funcional Linear. Teorema da Representação de Riesz.

ABSTRACT

In this work, we will present one of the most relevant results when studying linear functionalities in Linear Algebra or Functional Analysis, the famous Riez Representation Theorem, where we will perform an algebraic analysis. In this, we prove that every linear functional can be represented by an internal product defined in a Vector Space. A linear functional is nothing more than a linear application of any vector space in a scalar body. We will restrict our study to only finite-dimensional vector spaces and to the scalar body the set of real numbers R. This result for spaces of infinite dimension is seen in Functional Analysis, the discipline of a postgraduate in mathematics. our goal. Thus, the work was based on bibliographical research, searching for academic papers and books that deal with this subject. With this, we make files of these works, where we dismember concepts, theorems, demonstrations that were of paramount importance for the understanding of the theme.

Keywords: Linear Algebra. Vector space. Linear Functional. Representation of Riesz's Theorem.

Sumário

1

Introdução

A Álgebra Linear é uma teoria cujo principal objeto de estudo são os espaços vetoriais de dimensão finita. Além de analisarmos de maneira rigorosa, ela se preocupa também em apresentar um outro objeto que possui igual importância: as transformações lineares. Estas formam uma classe de funções entre espaços vetoriais que, a grosso modo, relacionam suas estruturas algébricas (soma e produto por escalar.) Quando passamos a aprender espaços vetoriais de dimensão infinita (os espaços dos polinômios, por exemplo), precisamos de uma parte da teoria de Análise Funcional para uma melhor compreensão.

Este trabalho tem como principal objetivo apresentar e demonstrar o Teorema da Representação de Riesz para espaços vetoriais de dimensão finita, que relaciona essencialmente um espaço vetorial V com o espaço vetorial formado pelas funções reais lineares definidas em V, chamado de espaço dual de V. Suas aplicações em outras áreas mais avançadas da matemática são diversas. Por exemplo, em Equações Diferenciais Parciais e em Análise Funcional, este teorema é encontrado de uma forma notória e fundamental.

Para cumprir com o intuito desta pesquisa, vamos descrever um aparato teórico necessário nos primeiros capítulos, explorando alguns resultados sobre espaços vetoriais com produto interno, normas provenientes de um produto interno e funcionais lineares.

Destacamos aqui que, para uma leitura fluente deste trabalho, o leitor precisa estar familiarizado com alguns conceitos da Álgebra Linear, como espaços vetoriais, dependência e independência linear, bases e transformações lineares.

2

Espaço Vetorial com Produto Interno

Neste capítulo, apresentaremos a ideia de espaço vetorial com produto interno. O produto interno enriquece a estrutura de um espaço vetorial e, além disso, nos permite definir vários conceitos de caráter geométrico: ângulo entre vetores, área de um paralelograma, distância e ortogonalidade.

Ressaltamos que, daqui em diante, trabalharemos apenas sobre o corpo dos números reais, salvo menção contrária.

2.1 Espaços com Produto Interno

Nesta seção, é importante ter em mente a definição e as propriedades de um espaço vetorial como também noções de dependência e independênica linear entre vetores. Uma bibliografia que pode ser estudada para lembrar desses conceitos é [3], capítulo 4.

Definição 2.1 *Seja V um espaço vetorial. Um produto interno em V é uma função que, a cada par de vetores $v_1, v_2 \in V$, associa um número real, denotado por $\langle v_1, v_2 \rangle$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

i) $\langle v, v \rangle \geq 0$ *para todo vetor* $v \in V$ *e* $\langle v, v \rangle = 0$ *se, e somente se,* $v = 0$*;*

ii) $\langle \alpha v_1, v_2 \rangle = \alpha \langle v_1, v_2 \rangle$ *para todo real* α*;*

iii) $\langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle$ *para todos os vetores* $v_1, v_2, v_3 \in V$*;*

iv) $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$ *para todos* $v_1, v_2 \in V$*.*

Seguem abaixo alguns exemplos de espaços vetoriais com produto interno.

Exemplo 2.2 *Em $\mathbb{R}^3$, para $v = (x_1, y_1, z_1)$ e $w = (x_2, y_2, z_2)$, definimos a função $\langle v, w \rangle$ como*

$$\langle v, w \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \in \mathbb{R}.$$

É possível mostrar que $\langle \ , \ \rangle$ *define um produto interno em* $\mathbb{R}^3$. *Esta função é chamada de produto interno (ou escalar) usual em* $\mathbb{R}^3$. *De modo análogo, define-se o que chamamos de produto interno usual para o espaço* $\mathbb{R}^N$, *com* $N \geq 1$ *um inteiro por*

$$\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_N y_N,$$

onde $v = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$ *e* $w = (y_1, y_2, \cdots, y_N)$ *são vetores em* $\mathbb{R}^N$.

Exemplo 2.3 *Seja* $\mathcal{P}$ *o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes em* $\mathbb{R}$ *definidos no intervalo* $[0, 1]$. *Considere a função* $\langle \ , \ \rangle$ *dada por*

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx,$$

onde $p, q \in \mathcal{P}$. *Neste caso,* $\langle \ , \ \rangle$ *define um produto interno em* $\mathcal{P}$.

De fato, para mostrar que a condição $i)$ é satisfeita, observe que

$$\langle p, p \rangle = \int_0^1 p^2(x)dx = 0 \Leftrightarrow p \equiv 0,$$

uma vez que p^2 é uma função contínua e não negativa. Para mais detalhes sobre isso, veja [11], página 130. As condições $ii)$, $iii)$ e $iv)$ seguem imediatamente. $\square$

Exemplo 2.4 *Seja* V *um espaço vetorial. Se* $\langle \ , \ \rangle$ *é um produto interno em* V, *então, fixado* $\alpha > 0$, *a função* $\langle \ , \ \rangle_1$ *definida por* $\langle v, w \rangle_1 = \alpha \langle v, w \rangle$ *para todos os vetores* $v, w \in V$ *também define um produto interno em* V.

A definição a seguir é a primeira de caráter geométrico, no que diz respeito a produto interno.

Definição 2.5 *Seja* V *um espaço vetorial com produto interno* $\langle \ , \ \rangle$. *Diz-se que dois vetores* v *e* w *de* V *são ortogonais (em relação a este produto interno) se* $\langle v, w \rangle = 0$. *No caso em que* v *e* w *são ortogonais, escrevemos* $v \perp w$.

Esta noção de ortogonalidade satisfaz as propriedades a seguir.

i) $0 \perp v$ para todo $v \in V$;

ii) $v \perp w$ implica que $w \perp v$;

iii) Se $v \perp w$ para todo $w \in V$, então $v = 0$;

iv) Se $v_1 \perp w$ e $v_2 \perp w$, então $(v_1 + v_2) \perp w$;

v) Se $v \perp w$ e λ é um escalar, $\lambda v \perp w$.

Vamos demonstrar cada uma dessas propriedades.

Demonstração:

i) Temos que $0 = 0 \cdot v$ e, com isso, $\langle 0, v\rangle = \langle 0 \cdot v, v\rangle = 0\langle v, v\rangle = 0$;

ii) Segue do fato de $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$;

iii) Escolhemos $w = v \in V$ e obtemos $0 = \langle v, w\rangle = \langle v, v\rangle$. Assim, da primeira condição de produto interno (veja a Definição 2.1), segue que $v = 0$;

iv) Segue do fato de $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$;

v) Por fim, como $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$, a propriedade fica demonstrada.

Exemplo 2.6 *Considere $\mathcal{P}$ o espaço vetorial dos polinômios sobre $[0,1]$, munido do produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ conforme Exemplo 2.3. Temos que os polinômios $p(x) = 3ax^2+2bx+c$ e $q(x) = 1$ para todo $x \in [0,1]$ são ortogonais em $\mathcal{P}$ quando $a+b+c = 0$.*

De fato, temos que

$$\int_0^1 p(x)q(x)dx = \int_0^1 (3ax^2 + 2bx + c)dx = a + b + c = 0.$$

Isso mostra que p e q são ortogonais em $\mathcal{P}$. □

Segue abaixo um resultado que estabelece uma relação entre ortogonalidade e independência linear.

Proposição 2.7 *Seja $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$ um conjunto de vetores não nulos e dois a dois ortogonais num espaço vetorial V, isto é, $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ para $i \neq j$. Então, o conjunto $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é linearmente independente.*

Demonstração: Suponha que $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$ com $a_{i's} \in \mathbb{R}$, e vamos mostrar que $a_i = 0$ para $i = 1, 2, \cdots, n$. Para isso, temos que

$$\langle a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n, v_i\rangle = \langle 0, v_i\rangle.$$

Como os $a_{i's}$ são constantes, pela definição de produto interno, tem-se

$$a_1\langle v_1, v_i\rangle + a_2\langle v_2, v_i\rangle + \cdots + a_i\langle v_i, v_i\rangle + \cdots + a_n\langle v_n, v_i\rangle = 0.$$

A soma do lado esquerdo desta igualdade é igual a $a_i\langle v_i, v_i\rangle$, pois, por hipótese, $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ quando $i \neq j$. Assim, $a_i\langle v_i, v_i\rangle = 0$. Desde que $\langle v_i, v_i\rangle \neq 0$, posto que $v_i \neq 0$, tem-se $a_i = 0$ para $i = 1, 2, \cdots, n$. Isso mostra que o conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é linearmente independente e conclui a demonstração da proposição. □

Definição 2.8 *Diz-se que uma base* $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *de um espaço vetorial* V *é uma base ortogonal se* $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ *para* $i \neq j$, *isto é, se os vetores da base são dois a dois ortogonais.*

Exemplo 2.9 *As bases* $\{(1,0),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ *e* $\{(1,-1,0),(0,0,1),(1,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ *são bases ortogonais de* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$, *respectivamente.*

Para ver isto, basta utilizar a definição de produto interno usual dada pelo Exemplo 2.2. □

2.2 Norma Proveniente de um Produto Interno

A noção de norma em um espaço vetorial V é essencialmente geométrica. Ela nos fornece uma noção de distância entre vetores e nos possibilita dar um significado à palavra "próximo"quando dizemos que dois vetores estão próximos um do outro. Ou seja, com a noção de norma, podemos dizer que matrizes estão próximas, funções estão próximas e conjuntos estão próximos, caso cada elemento pertença a um espaço vetorial munido de uma norma. Além disso, esta noção caracteriza a ideia de continuidade, fundamental quando se quer estudar o comportamento das imagens de uma função f nas proximidades de um elemento fixo de seu domínio.

Definição 2.10 *Seja* V *um espaço vetorial. Uma norma em* V *é uma função* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ *que satisfaz:*

i) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;

ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e todo* $v \in V$;

iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *para quaisquer* $v, w \in V$ *(Desigualdade Triangular).*

Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial munido de uma norma $\|\cdot\|$.

Exemplo 2.11 *Nos espaços euclidianos* $\mathbb{R}^n$, *a função* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ *dada por*

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},$$

onde $v = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *é uma norma chamada norma euclidiana.*

Exemplo 2.12 *Também são normas em* $\mathbb{R}^n$ *as funções que, a cada vetor* $v = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *associa o número não negativo*

$$\|v\|_M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}$$

e

$$\|v\|_S = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

A primeira é conhecida com norma do máximo, e a segunda, como norma da soma.

Deixaremos como exercício para o leitor a comprovação de que os dois últimos exemplos são verdadeiros. $\square$

Exemplo 2.13 *Considerando* $V = \mathbb{R}^3$, *temos que*

- $\|(1,-2,-3)\|_M = \max\{|1|, |-2|, |-3|\} = 3$;
- $\|(1,-2,-3)\|_S = |1| + |-2| + |-3| = 6$;
- $\|(1,-2,-3)\| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$.

O próximo exemplo é, talvez, o mais interessante desta seção. Ele faz uma relação entre a seção anterior e esta.

Exemplo 2.14 *Seja* V *um espaço vetorial com produto interno* $\langle\ ,\ \rangle$. *Então, a partir deste produto interno,* V *recebe naturalmente a estrutura de espaço normado. Em outras palavras, se* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ *for uma função definida por*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle},$$

então, $\|\cdot\|$ *satisfaz:*

i) $\|v\| \geq 0$ *e* $\|v\| = 0$ *se, e somente se* $v = 0$;

ii) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e todo* $v \in V$;

iii) $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$ *(Desigualdade de Cauchy-Schwartz);*

iv) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *para quaisquer* $v, w \in V$.

Em particular, $\|\cdot\|$ *é uma norma, chamada norma proveniente do produto interno* $\langle\ ,\ \rangle$.

Para demonstrarmos a primeira propriedade, pela definição de produto interno, tem-se $\|v\| \geq 0 \forall v \in V$. Além disso,

$$\|v\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle v, v\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

Para a segunda propriedade, basta notar que $\|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle v, v\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle v, v\rangle} = |\alpha|\|v\|$. Já para a propriedade *iii*), desigualdade de Cauchy-Schwartz, ela é verdadeira quando $w = 0$. Agora, supondo que $w \neq 0$ e tomando $\alpha \in \mathbb{R}$ um número qualquer, por i) sempre vale que $\|v + \alpha w\|^2 \geq 0$. Daí, temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \|v + \alpha w\|^2 &= \langle v + \alpha w, v + \alpha w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle + 2\langle v, \alpha w\rangle + \alpha^2\langle w, w\rangle \\ &= \alpha^2\|w\|^2 + 2\alpha\langle v, w\rangle + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Assim, como $\|w\|^2 \neq 0$, obtemos uma equação do segundo grau que é sempre não negativa. Logo, o seu discriminante $\triangle$ deve ser negativo ou nulo. Assim,

$$\triangle = 4\langle v, w\rangle^2 - 4\|v\|^2\|w\|^2 \leq 0,$$

ou, equivalentemente,

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|,$$

que é a desigualdade requerida. Finalmente, mostramos a terceira condição, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e obtendo

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle &= \langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \\ &\leq \langle v, v\rangle + 2|\langle v, w\rangle| + \langle w, w\rangle \\ &\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2, \end{aligned}$$

que, tomando a raiz quadrada, é precisamente a desigualdade. $\square$

Exemplo 2.15 *Seja $V = \mathbb{R}^2$, pela norma proveniente do produto interno usual, temos que $\|(3,2)\| = \sqrt{\langle(3,2),(3,2)\rangle} = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$.*

O teorema a seguir generaliza, num certo sentido, o Exemplo 2.12.

Teorema 2.16 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma base de V. Então, escrevendo $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$ de maneira única, a função*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_E : V &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ v &\mapsto |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \end{aligned}$$

define uma norma em V.

Demonstração: Vamos provar que $\|\cdot\|$ satisfaz as três condições da definição de norma. Claramente, $\|v\| \geq 0$ para todo $v \in V$. Suponha que $\|v\| = 0$. Então,

$$|x_1| + |x_2 + \cdots + |x_n| = 0 \Leftrightarrow |x_1| = |x_2| = \cdots = |x_n| = 0.$$

Ou seja, $\|v\| = 0$ se, e somente se, $v = 0$. Para provar a segunda condição de ser norma, fazemos

$$\|\lambda v\| = \|\lambda x_1v_1 + \|\lambda x_2v_2 + \cdots + \lambda x_nv_n\| = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| + \cdots + |\lambda x_n| = |\lambda|(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|) = |\lambda|\|v$$

Para provar a Desigualdade Triangular, considere $w = y_1v_1 + y_2v_2 + \cdots + y_nv_n \in V$ um vetor qualquer. Tem-se

$$\begin{aligned} \|v+w\| &= \|(x_1+y_1)v_1 + (x_2+y_2)v_2 + \cdots + (x_n+y_n)v_n\| = |x_1+y_1| + |x_2+y_2| + \cdots + |x_n \\ &\leq \textstyle\sum_{i=1}^n(|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que $\|\cdot\|_E$ define uma norma em E. $\square$

2.3 Aplicações Lineares Contínuas

O Teorema da Representação de Riesz, principal objetivo deste trabalho, lida com aplicações contínuas em seu resultado, o que torna necessária sua compreensão.

Definição 2.17 *Sejam V e W espaços vetorias normados. Uma aplicação $f : V \to W$ é contínua no ponto $a \in V$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|x-a\| < \delta$, então $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Se f for contínua em todos os pontos de V, dizemos que f é contínua em V ou, simplesmente, que f é contínua.*

Exemplo 2.18 *Considere a tranformação linear $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x$. Vamos mostrar que T é contínua.*
De fato, dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\delta = \varepsilon > 0$ tal que, se $\|x-a\| < \delta$ então $\|f(x)-f(a)\| = \|x - a\| < \delta$, como $\delta = \varepsilon$ obtemos $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Portanto, T é contínua.

Um fato interessante acontece quanto às aplicações lineares definidas em espaços vetoriais de dimensão finita. Mostraremos a seguir, que toda aplicação linear $T : V \to W$, onde $dimV < \infty$, é contínua.

Teorema 2.19 *Sejam V e W espaços vetoriais normados. Se $dimV < \infty$ e $T : V \to W$ é linear, então T é contínua.*

Demonstração: Seja $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma base de V. Assim, todo $x \in V$ pode ser escrito como $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$, com $x_{i's} \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que T é contínua no ponto $a = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \in V$. Para isso, note que, pela linearidade de T e pela desigualdade triangular,

$$\begin{array}{rcl}\|T(x) - T(a)\| = \|T(x-a)\| & = & \|\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)T(v_i)\| \\ & \leq & \sum_{i=1}^{n}|x_i - a_i|\|T(v_i)\| \\ & \leq & M\sum_{i=1}^{n}|x_i - a_i|\end{array}$$

onde $M = \max\{\|T(v_i)\|;\ i = 1, 2, \cdots, n\}$. Vamos considerar agora em V a norma da soma, conforme Teorema 2.16. Com ela, a desigualdade acima se torna

$$\|T(x) - T(a)\| \leq M\|x - a\|.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M} > 0$ para obtermos

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(a)\| \leq M\|x - a\| \leq \frac{M\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Portanto, T é contínua. □

Exemplo 2.20 *Como $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = x$ é linear e $dim\mathbb{R} = 1$, então pelo teorema acima, T é contínua.*

Uma observação importante que deve ser feita quanto à demonstração acima é que a escolha da norma da soma para o espaço vetorial V não altera a generalidade do teorema. Na verdade, podíamos ter escolhido qualquer outra norma para V, posto que todas as normas são equivalentes em espaços de dimensão finita, isto é, dadas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ normas em V, existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$c_1\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq c_2\|v\|_1$$

para todo vetor $v \in V$. Isso mostra que qualquer norma $\|\cdot\|_V$ em V satisfaz $\|\cdot\|_V \leq C\|\cdot\|_S$, onde $C > 0$ e $\|\cdot\|_S$ é a norma da soma. Isso explica o porquê escolhemos a norma da soma na demonstração precedente. Para maiores detalhes, veja [11], teorema 8, página 19.

2.4 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

A partir de uma base qualquer de um espaço vetorial, existe um processo para se obter uma base ortogonal. A princípio, daremos um exemplo deste processo para uma base $\beta = \{v_1, v_2\}$ de um espaço vetorial V e, em seguida, generalizaremos.

Exemplo 2.21 *Sejam V um espaço vetorial e $\beta = \{v_1, v_2\}$ uma base de V. A partir de β, encontre uma base γ formada por vetores ortogonais.*

Solução: Queremos encontrar, a partir de β, uma nova base γ para V de tal forma que γ seja uma base ortogonal. Para isso, definamos $v_1' = v_1$. Vamos encontrar agora um vetor v_2' ortogonal a v_1', isto é, um vetor v_2' que satisfaça $\langle v_2', v_1'\rangle = 0$. Considere, então, $v_2' = v_2 - cv_1'$, onde c é uma constante que ainda vamos definir. Queremos que $\langle v_2', v_1'\rangle = 0$, ou seja, $\langle v_2 - cv_1', v_1'\rangle = 0$. Isto significa que, se escolhermos c igual a

$$c = \frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle},$$

teremos que v_1' e v_2' são ortogonais. Assim, podemos tomar a base $\gamma = \{v_1', v_2'\}$ como pedida no exemplo, onde $v_1' = v_1$ e $v_2' = v_2 - \dfrac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle}v_1'$. A independência linear dos vetores do conjunto γ segue da Proposição 2.7. □

Exemplo 2.22 *Seja $\beta = \{(3,2),(2,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Vamos obter a partir de β uma base ortogonal em relação ao produto interno usual de $\mathbb{R}^2$.*

Solução: Sejam $v_1 = (3,2)$ e $v_2 = (2,1)$ os vetores da base β. Vamos repetir os passos feitos no exemplo anterior. Defina $v_1' = v_1 = (3,2)$ e seja $v_2' = v_2 - cv_1'$, onde c é igual a $\dfrac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle}$. Calculando, segue que

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle}v_1' = (2,1) - \frac{\langle (2,1),(3,2)\rangle}{\langle (3,2),(3,2)\rangle}(3,2) = \left(\frac{2}{13}, -\frac{3}{13}\right).$$

Note que, de fato, vale

$$\langle v_1', v_2' \rangle = \left\langle (3,2), \left(\frac{2}{13}, -\frac{3}{13}\right) \right\rangle = \frac{6}{13} - \frac{6}{13} = 0.$$

A base requerida do exemplo pode ser aquela formada por v_1' e v_2'.

O processo anterior de ortogonalização de dois vetores pode ser generalizado para uma base $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de um espaço vetorial de maior dimensão. Vamos fazer isso agora. Defina $v_1' = v_1$ e, como no Exemplo 2.21, seja $v_2' = v_2 - cv_1'$ o vetor ortogonal a v_1', com $c = \dfrac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle}$. Como visto, v_1' é ortogonal a v_2'. Temos que encontrar agora um vetor v_3' que seja ortogonal ao mesmo tempo a v_1' e v_2'. Para tanto, definimos v_3' da forma

$$v_3' = v_3 - mv_2' - kv_1'$$

e vamos determinar os valores de m e k para os quais $\langle v_3', v_1' \rangle = 0$ e $\langle v_3', v_2' \rangle = 0$. Com isso, desenvolvendo estas duas condições, obtemos

$$\begin{aligned} \langle v_3', v_1' \rangle = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \langle v_3 - mv_2' - kv_1', v_1' \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \langle v_3, v_1' \rangle - m\langle v_2', v_1' \rangle - k\langle v_1', v_1' \rangle = 0. \end{aligned}$$

Assim, como $\langle v_2', v_1' \rangle = 0$, temos $\langle v_3', v_1' \rangle = 0$ se, e somente se, $k = \dfrac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle}$. De forma análoga encontramos a constante m, fazendo $\langle v_3', v_2' \rangle = 0$, temos

$$\begin{aligned} \langle v_3', v_2' \rangle = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \langle v_3 - mv_2' - kv_1', v_2' \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \langle v_3, v_2' \rangle - m\langle v_2', v_2' \rangle - k\langle v_1', v_2' \rangle = 0. \end{aligned}$$

Com isso, temos que $m = \dfrac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle}$. Portanto, se tomarmos $v_3' = v_3 - \dfrac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \dfrac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$, teremos que $\{v_1', v_2', v_3'\}$ forma um conjunto de vetores dois a dois ortogonais. Prosseguindo desta maneira, obtemos uma base ortogonal γ de V, como queríamos desde o início.

Este processo de ortogonalização de vetores é conhecido como *processo de ortogonalização de Gram-Schmidt*. Para mais detalhes, veja [3] e [18].

Exemplo 2.23 *Seja $\beta = \{(1,1,1), (0,2,1), (0,0,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Vamos obter a partir de β uma base ortogonal em relação ao produto interno usual de $\mathbb{R}^3$.*

Solução: Sejam $v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,2,1), v_3 = (0,0,1)$. Seguindo o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, é possível mostrar que $v_1' = v_1 = (1,1,1)$,

$$v_2' = v_2 - cv_1' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' = (0,2,1) - \frac{\langle (0,2,1), (1,1,1) \rangle}{\langle (1,1,1), (1,1,1) \rangle}(1,1,1) = (-1,1,0).$$

e

$$\begin{aligned} v_3' = v_3 - mv_2' - kv_1' &= v_3 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' \\ &= (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1), (-1,1,0) \rangle}{\langle (-1,1,0), (-1,1,0) \rangle}(-1,1,0) \\ &\quad - \frac{\langle (0,0,1), (1,1,1) \rangle}{\langle (1,1,1), (1,1,1) \rangle}(1,1,1) \\ &= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

Note que $(1,1,1) \perp (-1,1,0)$, $(1,1,1) \perp \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$ e $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \perp (-1,1,0)$, como desejávamos. $\square$

3

Funcionais Lineares e o Teorema da Representação de Riez

Neste capítulo, apresentaremos a teoria de funcionais lineares, ferramenta muito importante na Álgebra Linear e na Análise Funcional para obtenção de vários resultados nessas áreas. Iremos considerar apenas funcionais lineares definidos sobre espaços vetoriais reais de dimensão finita. A teoria de funcionais lineares definidos em espaços de dimensão infinita sobre um corpo qualquer é estudada, por exemplo, na Ánalise Funcional, que foge do nosso objetivo. A partir de agora, falaremos apenas funcionais lineares, ficando subentendido que se trata de funcionais lineares definidos em espaços vetoriais reais de dimensão finita.

O objetivo maior desse capítulo é apresentar o teorema de Representação de Riesz que diz que todo funcional linear pode ser representado por um produto interno.

Definição 3.1 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Toda aplicação linear $T : V \to \mathbb{R}$ é chamada de funcional linear.*

Exemplo 3.2 *Mostre que todo funcional linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é do tipo $T(x, y) = ax + by$ com a e $b \in \mathbb{R}$.*

De fato, seja $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Assim, para todo $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, podemos escrever

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

Aplicando a transformação T em ambos os lados da igualdade, temos que

$$T(x, y) = T(x(1, 0) + y(0, 1)) = xT(1, 0) + yT(0, 1).$$

Logo, podemos tomar $a, b \in \mathbb{R}$ como $T(1, 0)$ e $T(0, 1)$, respectivamente. Portanto, podemos escrever $T(x, y) = ax + by$, como queríamos mostrar. Note que neste caso, $T(x, y) = ax + by = \langle (x, y), (a, b) \rangle \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, onde $\langle, \rangle$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$.

Lema 3.3 *Sejam V um espaço vetorial normado e $dim V < \infty$. Então, todo funcional linear $f : V \to \mathbb{R}$ é contínuo.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.19, temos que f é contínuo. $\square$

O lema seguinte é, num certo sentido, a recíproca do Teorema da Representaçao de Riesz, que será apresentado mais adiante.

Lema 3.4 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com $dim V < \infty$ munido da norma $\|\cdot\|$. Fixado $v \in V$, a aplicação definida por:*

$$\begin{array}{rcl} T : V & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \langle u, v \rangle \end{array}$$

é um funcional linear contínuo sobre V.

Solução: De fato, sejam $u, u' \in V$,

i) $T(u + u') = \langle u + u', v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u', v\rangle = T(u) + T(u')$.

ii) $T(\alpha u) = \langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle = \alpha T(u)$.

Portanto, T é linear e conseguentemente é contínuo pelo Lema 3.3.

Exemplo 3.5 *Sejam $V = \mathbb{R}^n$, $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma base de V e $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. A função definida por:*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \end{array}$$

é linear. Reciprocamente, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é linear, então f é da forma $f(v_1, v_2, \cdots, v_n) = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, onde $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ e $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$.

De fato, verifiquemos que a aplicação é linear. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$, com $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ e $v = b_1v_1 + b_2v_n + \cdots + b_nv_n$, onde $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$. Então,

i) $f(u + v) = (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \cdots + (a_n + b_n)v_n = (a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots, a_nv_n) + (b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n) = f(u) + f(v)$.

ii) $f(\alpha u) = \alpha a_1v_1 + \alpha a_2v_2 + \cdots + \alpha a_nv_n = \alpha(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) = \alpha f(u)$.

Portanto, f é linear. Agora, vamos mostrar que todo funcional linear em $\mathbb{R}^n$ é da forma $f(v_1, v_2, \cdots, v_n) = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. Considere $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Definindo-se $a_j = f(e_j)$ para $j = 1, 2, \cdots, n$. Com isso,

$$f(v) = f(e_1, e_2, \cdots, e_n) = f\left(\sum_{j=1}^{n} v_je_j\right) = \sum_{j=1}^{n} v_jf(e_j) = \sum_{j=1}^{n} v_ja_j = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n.$$

3.1 Espaço Dual

Nesta seção seguinte, apresentaremos o espaço de todos os funcionais lineares e seus principais resultados. Dentre eles, o Teorema da representação de Riesz que nos dá uma caracterização de um funcional linear.

Seja V um espaço vetorial e considere $\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$ o conjunto de todos os funcionais lineares em V. Com a estrutura dada por

$$\begin{aligned}(f+g)(v) &= f(v)+g(v)\\ (\alpha f)(v) &= \alpha f(v)\ \forall f,g\in\mathcal{L}(V,\mathbb{R}),\ \alpha\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

é possível mostrar que $\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. O espaço vetorial $\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$ é chamado de espaço dual de V e é denotado por V^*.

Há uma noção de norma neste espaço, a qual apresentaremos agora. De acordo com o Teorema 2.19, temos que toda aplicação linear $T: V\to F$, onde V tem dimensão finita, é contínua. Lá mostramos que $\|T(x-y)\|\leq c\|x-y\|, \forall x,y\in V$, tomando $y=0$, temos $\|T(x)\|\leq c\|x\|$, onde $c = max\{\|T(v_i)\|;\|T(v_i)\|, i = 1,2,\cdots,n\}$, com $v_i\in\beta=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, base de V. Desta forma, $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}\leq c, \forall x\in V\setminus\{0\}$. Isto quer dizer que o conjunto

$$A=\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}; x\in E\setminus\{0\}\right\} \tag{3.1}$$

é limitado superiormente.

Proposição 3.6 *Seja V um espaço vetorial normado. A função $\|\cdot\|: V^*\to\mathbb{R}^+$ definida por:*

$$\|T\|=\sup\left\{\frac{|T(u)|}{\|u\|}; u\in V\setminus\{0\}\right\}=\sup_{u\neq 0}\frac{|T(u)|}{\|u\|},$$

é uma norma.

Demonstração: É fácil ver que $\|T\|\geq 0$ e que $\|T\|=0$ se, e somente se, $T(x)=0$ para todo $x\in V$. Também se verifica

$$\|\lambda T\|=\sup_{x\neq 0}\frac{|\lambda T(x)|}{\|x\|}=\sup_{x\neq 0}\frac{|\lambda||T(x)|}{\|x\|}=|\lambda|\sup_{x\neq 0}\frac{|T(x)|}{\|x\|}=|\lambda|\|T\|.$$

Além disso,

$$\|S+T\|=\sup_{x\neq 0}\frac{|(S+T)(x)|}{\|x\|}\leq\sup_{x\neq 0}\frac{|S(x)|+|T(x)|}{\|x\|}\leq\sup_{x\neq 0}\frac{|S(x)|}{\|x\|}+\sup_{x\neq 0}\frac{|T(x)|}{\|x\|}=$$
$\|S\|+\|T\|$. □

Teorema 3.7 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita e seja $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma base de V. Então, existe uma única base dual $\beta^* = \{f_1, f+2, \cdots, f_n\}$ de V^* tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, em que*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{3.2}$$

$\forall\ i, j = 1, 2, \cdots, n.$

Além disso, para cada vetor $v \in V$, temos $v = \sum_{i=1}^{n} f_i(v) v_i$ e, para cada funcional linear $f \in V^*$, temos que $f = \sum_{j=1}^{n} f(v_j) f_j$.

Demonstração: Sejam a base $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ e $f_i : V \to \mathbb{R}$, com $i = 1, 2, \cdots, n$, os funcionais lineares que satisfazem $f_i(v_j) = \delta_{ij}\ \forall\ j = 1, 2, \cdots, n$. Vamos mostrar que $\beta^* = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ forma uma base para V^*. Para isso, mostraremos que

i) β^* é um conjunto Linearmente Independente.
De fato, se

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i = 0,$$

então

$$0 = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(v_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{ij} = c_j,\ \ \forall\ j = 1, 2, \cdots, n.$$

Logo, β^* é um conjunto linearmente independente.

ii) β^* gera V^*.
Temos que mostrar que, para todo $f \in V^*$, existem $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n$. Note que, para $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \in V$ tem-se $f_i(v) = a_i f_i(v_i) = a_i$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} f(v) = f\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} f_i(v) f_{v_i} \\ &= \alpha_1 f_1(v) + \alpha_2 f_2(v) + \cdots + \alpha_n f_n(v), \text{ onde } \alpha_i = f(v_i) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, $\beta^* = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ é uma base de V^*. Agora, para $f \in V^*$, $\exists\ c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que $f = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$. Temos que $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(v_j) = c_j$. Assim,

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) f_i.$$

Por fim, para $v \in V$, $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. Como $f_i(v) = a_i$, temos

$$v = f_1(v)v_1 + f_2(v)v_2 + \cdots + f_n(v)v_n = \sum_{i=1}^{n} f_i(v)v_i.$$

Isso demonstra o Teorema. □

Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão n e m, respectivamente. Temos o seguinte resultado.

Proposição 3.8 *O espaço $\mathcal{L}(V, W)$ das transformações lineares de V em W tem dimensão finita, e sua dimensão é igual a* $\dim V \cdot \dim W = n \cdot m$.

Demonstração: Este resultado pode ser encontrado em [9], página 88.

Corolário 3.9 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita igual a m. Então, o espaço dual $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ tem a mesma dimensão que V.*

Demonstração: De fato, pela Proposição 3.8, tem-se

$$\dim V^* = \dim \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) = \dim V \cdot \dim \mathbb{R} = m \cdot 1 = m.$$

Assim, V^* tem a mesma dimensão de V. □

Pelo corolário acima, temos que V^* e V são isomorfos, uma vez que possuem a mesma dimensão.

O exemplo a seguir pode ser encontrado em [16].

Exemplo 3.10 *Encontre uma base do espaço dual* $(\mathbb{R}^2)^*$.

Vimos pelo Corolário 3.9 que $\dim(\mathbb{R}^2)^* = 2$. Assim, para determinarmos uma base do dual $(\mathbb{R}^2)^*$, vamos encontrar dois elementos linearmente independentes, digamos ϕ_1 e ϕ_2, em $(\mathbb{R}^2)^*$. Considere $\beta = \{v_1 = (3, 2), v_2 = (4, 2)\}$ uma base (poderia ser qualquer outra base) de $\mathbb{R}^2$ e $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aplicações lineares definidas por $\phi_1(v_1) = 1$, $\phi_1(v_2) = 0$, $\phi_2(v_1) = 0$, $\phi_2(v_2) = 1$. Pelo Exemplo 3.2, temos que ϕ_1 e ϕ_2 são da forma $\phi_1 = ax + by$ e $\phi_2 = cx + dy$. Assim,

$$\phi_1(3, 2) = 3a + 2b = 1 \quad \text{e} \quad \phi_1(4, 2) = 4a + 2b = 0,$$

$$\phi_2(3, 2) = 3c + 2d = 0 \quad \text{e} \quad \phi_2(4, 2) = 4c + 2d = 1$$

para algumas constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Para ϕ_1, vale

$$\begin{cases} 3a + 2b = 1, \\ 4a + 2b = 0. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por -1 e somando ambas equações, temos que $-3a - 2b + 4a + 2b = -1 + 0$, ou seja, $a = -1$. Substituindo na primeira equação o valor de a, segue que $b = 2$. Assim, $\phi_1(x, y) = -x + 2y$ para todo vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Agora, para ϕ_2, temos

$$\begin{cases} 3c + 2d = 0, \\ 4c + 2d = 1. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por -1 e somando ambas as equações, obtemos $-3c - 2d + 4c + 2d = 0 + 1$, isto é, $c = 1$. Substituindo o valor de c na segunda equação, finalmente, obtemos $d = -\frac{3}{2}$. Portanto, a base pedida no exemplo pode ser uma formada pelos funcionais lineares

$$\phi_1(x, y) = -x + 2y \qquad \text{e} \qquad \phi_2(x, y) = x - \frac{3}{2}y.$$

Note que, pelo produto interno usual, temos $\phi_1(x, y) = \langle (x, y), (-1, 2) \rangle$ e $\phi_2(x, y) = \langle (x, y), (1, -\frac{3}{2}) \rangle$.

Apresentamos a seguir o principal teorema deste trabalho: O Teorema da Representação de Riesz. Vimos no Lema 3.4 que, quando fixamos uma entrada de um produto interno e permitimos que a outra entrada varie, esta função é um funcional linear contínuo. Podíamos pensar numa certa recíproca para este resultado: Será que todo funcional linear contínuo é desta forma? O teorema adiante mostra que sim. Ou seja, todo funcional linear contínuo é, na verdade, representado pelo produto interno definido no espaço em questão.

Teorema 3.11 *(Teorema da representação de Riesz) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido do produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e $f \in V^*$. Então, existe um único $w_f \in V$ tal que $f(v) = \langle v, w_f \rangle$ para todo $v \in V$. Além disso, $\|f\| = \|w_f\|$.*

Demonstração: Vamos provar inicialmente a unicidade do elemento w_f. Supondo que existam dois elementos, digamos w_f e u_f, com tal propriedade, obtemos

$$\langle v, w_f \rangle = \langle v, u_f \rangle$$

para todo vetor $v \in V$. Isto é, $\langle v, w_f - u_f \rangle = 0$ para todo $v \in V$. Tomando exatamente $v = w_f - u_f$, segue que $\langle w_f - u_f, w_f - u_f \rangle = 0$. Pela definição de produto interno, necessariamente, $w_f = u_f$. Isto mostra a unicidade requerida. Para mostrar a existência do elemento w_f, considere $N = \{v \in V;\ f(v) = 0\}$ o núcleo de f.

i) Se $N = \{0\}$, para cada v não nulo, tem-se $f(v) \neq 0$. Fixamos, neste caso, qualquer $z \in V \setminus \{0\}$ e, então, para cada $v \in V$ não nulo, chamando $u = v - \frac{f(v)}{f(z)}z$, segue que $f(u) = f(v) - \frac{f(v)}{f(z)}f(z) = f(v) - f(v) = 0$. Ou seja, $u \in N = \{0\}$, isto é, $u = 0$. Assim,

$$0 = \langle u, z \rangle = \langle v, z \rangle - \frac{f(v)}{f(z)}\langle z, z \rangle,$$

ou, equivalentemente,

$$f(v) = \left\langle v, \frac{f(z)z}{\|z\|^2} \right\rangle = \langle v, w_f \rangle,$$

onde $w_f = \dfrac{f(z)z}{\|z\|^2}$. Isso demonstra o teorema para este caso.

ii) Suponha que $N \neq \{0\}$. Sabemos da Álgebra Linear que o conjunto N é um espaço vetorial, digamos, com base $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$. Ora, podemos completar esta base, $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_k, u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, com vetores linearmente independentes $u_1, u_2, \cdots, u_n$ de forma a obter uma base do espaço V. Ainda sobre esta base, podemos supor, pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt (veja Seção 2.4) que ela é ortogonal, isto é, que todos os vetores do conjunto $\{v_1^{'}, v_2^{'}, \cdots, v_k, u_1^{'}, u_2^{'}, \cdots, u_n^{'}\}$ são dois a dois ortogonais. Se f se anulasse também em todos os vetores $u_1, u_2, \cdots, u_n$, então f seria identicamente nula e, neste caso, basta tomar $w_f = 0$ para o resultado do teorema valer trivialmente. Vamos supor, então, que $f(u_i) \neq 0$ para algum $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Com isso, para cada $v \in V$, consideramos $u = v - \dfrac{f(v)}{f(u_i)} u_i$. Como antes, é fácil ver que $u \in N$ e, portanto, ele é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \cdots, v_k$ que pertencem ao núcleo N. Isso implica que u é ortogonal a u_i, ou seja,

$$0 = \langle u, u_i \rangle = \langle v, u_i \rangle - \frac{f(v)}{f(u_i)} \langle u_i, u_i \rangle,$$

ou, equivalentemente,

$$f(v) = \left\langle v, \frac{f(u_i)u_i}{\|u_i\|^2} \right\rangle,$$

o que prova o teorema, bastando tomar $w_f = \dfrac{f(u_i)u_i}{\|u_i\|^2}$.

Agora, mostraremos que $\|f\| = \|w_f\|$. Veja que

$$\frac{|f(v)|}{\|v\|} = \frac{|\langle v, w_f \rangle|}{\|v\|} \leq \frac{\|v\|\|w_f\|}{\|v\|} = \|w_f\|, \ \forall \ v \neq 0 \in V$$

Assim, $\sup\limits_{v \neq 0} \dfrac{|f(v)|}{\|v\|} \leq \|w_f\|$, ou seja, $\|f\| \leq \|w_f\|$. Como $\dfrac{|f(v)|}{\|v\|} \leq \|w_f\|, \forall \ v \neq 0 \in V$, em particular vale para $v = w_f \neq 0$. Logo,

$$\frac{|T(v)|}{\|v\|} = \frac{|\langle w_f, w_f \rangle|}{\|w_f\|} = \frac{\|w_f\|^2}{\|w_f\|} = \|w_f\|$$

O caso $v = 0$ é evidente. $\square$

Exemplo 3.12 *Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual $\langle , \rangle$. Considere o funcional linear definido por:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto 3x - y + 2z. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Representação de Riez, existe $w_f \in \mathbb{R}^3$ *tais que* $f(v) = \langle v, w_f \rangle$ *para todo* $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*. Podemos observar que* $w_f = (3, -1, 2)$*. Temos ainda pelo* **??** *que* $\|f\| = \|w_f\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$.

4 Considerações Finais

Neste trabalho, o objetivo principal, foi apresentar o Teorema da Representação de Riesz. Este teorema tem grande relevência quando se trabalha com funcionais lineares definidos em espaços de dimensão finita ou infinita. Nos limitamos trabalhar aqui apenas com funcionais lineares definidos em espaços vetoriais de dimensão finita. Para esse fim, tratamos da teoria de espaços vetoriais com produto interno, aplicações contínuas, funcionais lineares sobre $\mathbb{R}$ e Espaço Dual, que é o espaço de todos funcionais lineares. Através do Teorema da Representação de Riesz, mostramos que todo funcional linear pode ser representado por um produto interno. Ou seja, todo funcional linear pode ser visto como um produto interno.

Acreditamos que o nosso objetivo foi alcançado, pois conseguimos apresentar de maneira clara e bastante detalhada toda a teoria necessária para a compreensão do teorema.

Esperamos que esse trabalho possa servir de inspiração para a realização de outros trabalhos na área. Como sugestão, poderia se trabalhar esse mesmo teorema agora para espaços vetoriais de dimensão infinita. É um tema mais avançado, visto que essa teoria é apresentada em um curso de pós-graduação na área de matemática, na disciplina de Análise Funcional.

Referências

[1] ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. **Álgebra linear contemporânea**. Porto Alegre: Bookman, 2006.

[2] BARSOTTI, Leo. **Álgebra Linear**. 2. ed. Curtiba: A. M. Cavalcante e Cia, 1976.

[3] BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harba, 1980.

[4] CALLIOLI, Carlos. A; DOMINGUES, Hygino. H; COSTA, Roberto. C. F **Álgebra Linear e Aplicações**. 6. ed. São Paulo: Atual, 1990.

[5] KOLMAN, Bernard. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. 6. ed. Rio de Janeiro: Prentice – Hall do Brasil, 1998.

[6] LANG, Serge. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.

[7] LAWSON, Terry. **Álgebra Linear**. São Paulo: Edgard Blucher, 1997.

[8] LEON, Steven J. **Álgebra Linear com Aplicações**. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2008.

[9] LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[10] . **Análise Real: Funções de n variáveis**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[11] LIMA, Elon Lages. **Análise Real: Funções de uma variável**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

[12] LIPSCHUTZ, Seymour. **Álgebra Linear: teoria e problemas**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1994.

[13] MASSAGO, Sadao. **Espaço Dual, Transposta e Adjunta**. São Carlos: Departamento de Matemática, UFSCar, 2009. Disponível em <file:///C:/Users/Renata/Downloads/al2-dual%20(1).pdf>. Acesso em: 24 jul. 2016.

[14] MEDEIROS, Luis Adauto; ANDRADE, Nirzi Gonçalves de; WANDERLEY, Augusto Maurício. **Álgebra Vetorial e Geometria**. Rio de Janeiro: Campus, 1980.

[15] MURDOCH, David C. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1972.

[16] OLIVEIRA, Igor Maciel Resende de. **Espaços Vetoriais Normados e o Teorema da Representação de Riesz**. Goiânia: 2015. Disponível em <http://www.ifg.edu.br/matematica/images/donwloads/imroevntrr.pdf>. Acesso em: 24 jul. 2016.

[17] SANTOS, Nathan Moreira dos. **Vetores e Matrizes**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.

[18] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.