UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**DANIEL ALVES CAVALCANTE**

# CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS VIA CORTES DE DEDEKIND

ARAGUAÍNA
2017

DANIEL ALVES CAVALCANTE

# CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS VIA CORTES DE DEDEKIND

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior.

ARAGUAÍNA
2017

**DANIEL ALVES CAVALCANTE**

**CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS VIA CORTES DE DEDEKIND**

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior .

Aprovada em: / / .

BANCA EXAMINADORA

________________________________________
Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior (orientador)

________________________________________
Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hancco

________________________________________
Profa. Msc. Samara Leandro Matos da Silva

Aos meus pais.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, quero agradecer a Deus pela minha existência, saúde, paz e proteção durante todos os dias na realização deste sonho. Por ter me dado força e proteção a cada amanhecer para poder lutar incansavelmente pelos meus objetivos.

Agradeço de coração à minha família, meu pai Antonio Alves, minha mãe Raquel Neta, minha amada irmã Daniela Alves e minha namorada Eva Mires. Vocês foram mais do que importantes para minha formação; foram minha base, meu incentivo. Sou grato por ter todos vocês.

Quero agradecer a todos os professores do colegiado do curso de matemática que contribuíram diretamente para minha formação e para meu crescimento intelectual. Sou grato por todas as orientações, reclamações, dicas e por acreditarem na minha pessoa, pois não estaria aqui sem a contribuição de cada um. Em especial, quero agradecer ao professor Dr. José Carlos de Oliveira Junior, meu orientador, que não foi só um orientador, mas um amigo. Creio eu que o seu incentivo e sua dedicação para com seus alunos estão fazendo e sempre farão a diferença. Não tenho palavras para agradecer por tudo que fez para com minha pessoa, pelas orientações, sugestões e luz quando me deparei na escuridão das dúvidas. Enfim, por tudo, o meu muito obrigado.

Agradeço também a todos os colegas de curso, aos alunos de monitoria que de certa forma contribuíram para meu desenvolvimeto dentro da Universidade. E, principalmente, aos meus amigos de turma, Eduardo Dias, João Marcos, Rosalina Viana e Luan Alves pelos nossos estudos e discussões que foram primordiais para o meu aprendizado. Aos meus amigos do projeto Eu Quero Almas, Márcio Coutinho, João Alves, Samuel Pinheiro e Joeberth Costa pelas orações e carinho com minha pessoa. Graças dou também ao meu amigo e pastor James Barbosa e a toda sua família. Enfim, meu eterno agradecimento a todos.

”Sempre faço o que não consigo fazer para aprender o que não sei”.

Pablo Picasso

RESUMO

Esta monografia tem por principal objetivo a construção dos números reais via cortes de Dedekind. Para alcançá-lo, falaremos da caracterização do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ pelos axiomas de Peano e, a partir dos naturais, construiremos o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ via relação de equivalência em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Em seguida, também via relação de equivalência, construiremos o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ e apresentaremos algumas das propriedades de seus elementos. A fim de chegarmos ao nosso objetivo de pesquisa, mostraremos a insuficiência de $\mathbb{Q}$ para medir alguns segmentos de reta. Posteriormente, faremos a construção do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ a partir dos cortes de Dedekind e apresentaremos as principais propriedades deste conjunto, destacando, sobretudo, aquela que o difere de $\mathbb{Q}$.

**Palavras-chave:** Construção dos Números Reais. Cortes de Dedekind. Teorema de Dedekind.

ABSTRACT

This monograph has as main objective the construction of the real numbers via cuts of Dedekind. To do so, we will discuss the characterization of the set of natural numbers $\mathbb{N}$ by the Peano axioms and, from the natural numbers, we will construct the set of integers $\mathbb{Z}$ via equivalence relation in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Then, also via equivalence relation, we will construct the set of rational numbers $\mathbb{Q}$ and present some of the properties of its elements. In order to reach our research goal, we will show the insufficiency of $\mathbb{Q}$ to measure some line segments. Then, we will construct the set of real numbers $\mathbb{R}$ from the Dedekind cuts and we will present the main properties of this set, especially highlighting the one that differs from $\mathbb{Q}$.

**Keywords:** Construction of the Real Numbers. Cuts of Dedekind. Dedekind's Theorem.

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

Os números reais são tão familiares nos estudos, seja qual for o nível de ensino, pois estão lá nos auxiliando nas somas, nas multiplicações e a entender noções geométricas. Desde muito cedo, as crianças já aprendem a noção de quantidade e a quantificar mesmo sem irem à escola. E quando passamos a frequentar a escola isso passa a ser desenvolvido ao longo dos estudos na educação básica. Assim, os números reais passam a ser tão comuns no nosso dia a dia que não paramos para nos perguntar o significado de um número, de onde eles vieram ou se simplesmente apareceram como passo de mágica. Mas essas perguntas são, de fato, comuns ao ser humano, como mostra alguns livros de história da matemática como [5] ou mesmo livros de história da humanidade, que dizem perceber que a história dos números está intrínseca na história da natureza humana.

Neste trabalho, apresentaremos a construção do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais pelo método dos cortes de Dedekind de forma rigorasa e, ao mesmo tempo, acessível e didática. Apesar dos cortes receberem seu nome e construírem o conjunto $\mathbb{R}$, Dedekind não foi o único a conseguir construir rigorosamente este conjunto numérico. Georg Cantor também apresentou uma construção pelo método das sequências de Cauchy a partir do conjunto dos números racionais.

Para atingir nosso objetivo, iremos apresentar no Capítulo 2 a construção do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais por meio dos axiomas de Peano. Em seguida, iremos construir o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros através de uma relação de equivalência em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Com posse dos inteiros, iremos construir o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais via relação de equivalência em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Ressaltaremos as propriedades mais importantes destes três conjuntos juntamente à relação de ordem em cada um deles. No mesmo capítulo, iremos definir corpos e mostrar que os conjuntos $\mathbb{N}$ dos números naturais e $\mathbb{Z}$ dos números inteiros não são corpos. Já o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é um corpo ordenado. Esta seção sobre corpos será importante para compreender que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um corpo.

No Capítulo 3, iremos definir quando dois segmentos de reta são comensuráveis e apresentar a descoberta da incomensurabilidade entre a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles com um de seus catetos. Com isso, ressaltaremos a grande crise da filosofia de ensino pitagórica e a insuficiência de $\mathbb{Q}$ para medir certos segmentos de reta, dando origem a um novo conjunto numérico, que chamaremos de conjunto dos números irracionais.

Já no Capítulo 4, faremos a construção dos números reais via cortes de Dedekind partindo do conjunto dos números racionais. Iremos definir, primeiramente, cortes de Dedekind e caracterizar aqueles que são cortes racionais e aqueles que são cortes irracionais. Em seguida, mostraremos que o conjunto de todos os cortes forma um conjunto que, munido com determinadas operações, é um corpo ordenado. A este conjunto, chamaremos de conjunto dos números reais e denotaremos por $\mathbb{R}$. E, finalmente, mostraremos a principal propriedade que difere o conjunto dos números reais do conjunto dos números racionais.

Enfatizamos aqui que, para uma leitura fluente, o leitor deve ter familiaridade com conceitos da Álgebra, como relação de equivalência e o conjunto dos restos da divisão de um número inteiro por $m$, $\mathbb{Z}_m$. Uma bibliografia que pode servir de base para estes conceitos é [4].

# Capítulo 2

# Os Conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$

Neste capítulo, falaremos das principais características, propriedades e definições dos conjuntos numéricos. Daremos uma ênfase maior ao conjunto dos números racionais por ser nosso objeto de partida na construção do corpo dos números reais. Não iremos demonstrar alguns resultados, simplesmente por questão de foco ao tema central. Vamos admitir que o leitor tenha o mínimo possível de familiariade com os conjuntos enunciados e suas principais propriedades.

Nos basearemos em [7] para apresentarmos esta seção.

## 2.1 Conjunto $\mathbb{N}$ dos Números Naturais

Nesta seção, falaremos da caracterização do conjunto dos números naturais e de sua construção rigorosa. Desde os primórdios, o conceito de número natural era bem presente, pois havia entre os povos a grande necessidade de enumeração, quantificação e contagem de objetos em geral. E há registro de que os números naturais tiveram sua origem no simples fato de contar objetos, partindo do elemento que hoje chamamos de número $1$. Os número naturais compõem o primeiro conjunto numérico a ser enunciado na história dos números. Formalizaremos este conceito de número natural com os axiomas do matemátio Italiano Giuseppe Peano (1858 - 1932). Não nos preocuparemos em definir um número natural, pois Peano não se ocupou com esse fato, mas sim com a sua caracterização e como os mesmos se comportam.

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, toda sua teoria e propriedades podem ser caracterizadas pelos seguintes axiomas:

A1. Existe uma função $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. E denotaremos a imagem do elemento $n \in \mathbb{N}$ por $s(n)$. A imagem $s(n)$ de cada número natural $n \in \mathbb{N}$ chama-se sucessor de $n$. A função $s$ é injetiva, isto é, números naturais diferentes tem sucessores diferentes, ou ainda, dados quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $s(n) = s(m) \Rightarrow n = m$.

A2. Existe um único elemento $1 \in \mathbb{N}$ tal que $s(n) \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A3. Se tivermos um conjunto $K \subset \mathbb{N}$ tal que $1 \in K$ e se, para todo $n \in K$, tem-se $s(n) \in K$, então $K = \mathbb{N}$.

Os axiomas de Giuseppe Peano podem ser reescritos da seguinte forma:

A'1. Todo número natural tem um único sucessor, que por sua vez ainda será um número natural.

A'2. Podemos dizer que existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro natural $n \in \mathbb{N}$.

A'3. Se um conjunto qualquer possui o número $1$ e o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto é o conjunto dos números naturais. O mesmo quer dizer que todo número natural pode ser obtido a partir do número $1$, bastando tomar o sucessor de $1$, e sucessor do sucessor de $1$ e assim por diante.
O axioma A3 também é conhecido como princípio de indução, e é bastante útil para demonstrarmos proposições que envolvem os naturais.

**Exemplo 2.1.** *Mostre que* $s(n) \neq n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Considere o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N}; s(n) \neq n\}$. Temos que $1 \in X$, pois, pelo axioma A2, $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, em particular, $1 \neq s(1)$. Suponha agora que é verdadeiro para um certo $n \in X$, isto é, $s(n) \neq n$. Temos que provar que $s(n) \neq s(s(n))$. Mas o axioma A1 nos garante a injetividade da função $s$, e, portanto, $s(n) \neq s(s(n))$, uma vez que $n \neq s(n)$. Assim, $X = \mathbb{N}$ pelo axioma A3. □

Se retirarmos a palavra "único" do axioma A2, não mudará o mesmo em nada, pois a unicidade do elemento $1$ ainda é válida diante dos demais axiomas. A demonstração deste fato, deixaremos como exercício para o leitor.

Com a caracterização deste conjunto, e por consequência da função $s$ ser injetiva, podemos dar uma aritmética para $\mathbb{N}$, definindo a adição e multiplicação de números naturais. Dados quaisquer que sejam os números naturais $m, n \in \mathbb{N}$, a soma de $m$ e $n$ é denotada por $n + m$ e a multiplicação por $n.m$. As operações de $\mathbb{N}$ são definidas da seguinte forma:

$$n + 1 = s(n);$$

$$n + s(m) = s(m + n);$$

$$n + m = s^m(n).$$

É notável que somar $n$ a $1$ é tomar o sucessor de $n$. E em geral, somar $n + m$ significa tomar o sucessor de $n$, $m$ vezes. Por exemplo, $7 + 3 = s^3(7) = s(s(s(7))) = s(s(8)) = s(9) = 10$.

Se sabemos somar $n + m$ também sabemos somar $n + (m + 1)$, que é somar $(n + m) + 1$ o sucessor de $n + m$.

Quanto à multiplicação, temos as seguintes propriedades que nos levam a definir a multiplicação de $n.m$.

$$n.1 = n;$$

$$n.(m + 1) = n.m + n.$$

Em outros termos, temos que multiplicar $n$ por $1$ não altera o resultado. Se sabemos operar $n.m$ também somos capazes de operar $n.(m + 1)$, que significa operar $n$ com sucessor de $m$. Então, $n.(m + 1) = n.m + n$. Apesar de ser estranho a multiplicação também é uma soma, isto é, multiplicar $n.m$ significa somar $n$ vezes o número $m$ ou somar $m$ vezes o número $n$. Observe que a partir da definição de soma e produto, já podemos notar que as propriedades associativa na adição e destributiva na multiplicação estão intrínsecas na definição de adição e multiplicação de números naturais. Além dessas duas propriedades, os números naturais gozam das propriedades,

$$m + n = n + m,\ m.n = n.m;$$

$$m + n = p + m \Rightarrow n = p,\ m.n = p.m \Rightarrow n = p.$$

Não daremos mais detalhes sobre as mesmas, porém o leitor interessado em mais detalhes pode consultar o livro [7].

Quando estamos na educação básica, nas séries iniciais, aprendemos a somar e multiplicar primeiro os números naturais. Lá, aprendemos também que, ao somar dois números naturais quaisquer, o resultado sempre é maior que qualquer um dos dois números que foram somados. Percebemos que os números naturais possuiem uma organização. Todas essas noções que aprendemos a partir da adição e multiplicação de números naturais se resumem na ordenação dos números naturais. Então, a partir da adição, podemos definir uma relação de ordem nos números naturais. Dados dois números naturais $n, m$, dizemos que $n$ é menor que $m$, e escrevemos,

$$n < m$$

se existe um número natural $q \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + q$. Neste mesmo caso, podemos dizer também que $m$ é maior que $n$ e escrever $m > n$. Quando denotarmos $n \leq m$, significa que $n$ é menor do que ou igual a $m$. Assim, com a relação de ordem em $\mathbb{N}$, e dados $n, m$ números naturais, exatamente uma das três opções ocorre: $n = m$ ou $n < m$ ou $n > m$. Esta propriedade é chamada de Tricotomia.

Pelas definições de soma, multiplicação e relação de ordem em $\mathbb{N}$, podemos mostrar o seguinte resutado:

**Proposição 2.2.** *Para todo* $n \in \mathbb{N}$*, não existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $n < p < n + 1$.
*Demonstração:*

A proposição acima diz que, entre um número natural $n$ e seu sucessor, não existe nenhum outro número natural. Para podermos demonstrar esse resultado, suponhamos que existe o tal natural $p$, isto é, $n < p < n+1$. Por definição, temos que $p = n + r$ e $n + 1 = p + s$ para alguns $s, r \in \mathbb{N}$. Somando 1 na equação $p = n + r$, segue da comutatividade que $p + 1 = n + r + 1 = n + 1 + r$. Como $n + 1 = p + s$, então $p + 1 = p + s + r$, que usando o corte da adição, e cortando $p$, implica que $1 = s + r$. Absurdo, pois a soma de dois números naturais é sempre o sucessor de algum número natural, e esse número não pode ser 1, visto que $s$ e $r$ no mínimo podem assumir valor 1. Logo, $s + r \neq 1$. □

Existem outras propriedades dos números naturais que não foram enunciadas aqui, neste capítulo. Julgamos que assim será melhor, pois nosso foco principal, como já foi dito, é enfatizar o conjunto dos números reais. Ao leitor interessado em uma melhor compreensão sobre os números naturais e suas propriedades, veja, por exemplo, [7] e [10].

## 2.2 Conjunto $\mathbb{Z}$ dos Números Inteiros

Ao longo da vida, o homem sempre foi desafiado pelas circunstâncias do cotidiano, por problemas e pelas situações do dia a dia, e nesse contexto surge a matemática, na tentativa de explicar e resolver de forma clara os desafios surgidos na vivência do cotidiano das pessoas.

Imagine agora, um comerciante que vende sacos de soja de $60kg$ cada, e deseja classificar, marcar de alguma forma as quantidades vendidas de um saco. Os registros históricos mostram que, na antiguidade, os comerciantes tinham o seguinte hábito: se eles vendessem uma quantidade inferior a quantidade máxima do saco, por exemplo, $25kg$, os mesmos desenhavam com carvão no mesmo saco o número 25 e um traço na frente, $-$. Isso indicava que naquele saco tinha $25kg$ a menos da quantidade original do saco. Por outro lado, se quisessem representar a quantidade que tinha no saco após a venda dos $25kg$, eles colocavam a quantidade existente em outro saco e marcavam com carvão a quantidade de $35kg$ e outro símbolo na frente no formato de uma cruz, $+$, indicava a quantidade restante após a venda. Esse fato e dentre outros ajudaram a desenvolver o conceito de número inteiro. Assim, podemos obter o conjunto dos números inteiros tomando o simétrio aditivo de cada número natural, e com o acréssimo do elemento 0. Mas o que são os simétricos dos naturais? Por mais que essa noção intuitiva tenha total sentido, precisa-se de uma formalidade Matemática para este conjunto.

Apresentaremos a seguir uma construção rigorosa desses números.

### 2.2.1 Construção dos números inteiros

Em virtude do rigor matemático, e diante da necessidade do nosso trabalho, precisamos apresentar uma construção rigorosa desses números, por mais que a noção de número inteiro citada acima tenha total sentido e esteja correta. Queremos que o leitor entenda a noção intuitiva de número inteiro e a construção dos mesmos do pondo de vista do rigor matemático, e perceba também que há algo de comum na interseção das duas.

Usaremos o conjunto dos números naturais para podermos construir os números inteiros através das noções básicas de relação de equivalência .

O elemento $0$ não surgiu da necessidade de contagem, mas sim, a fim de representar um vácuo, um espaço com ausência de algum objeto, e após anos ele se tornou símbolo matemático e se incorporou ao números naturais por ser introduzido ao sistema numérico hindu-arábico. A partir de agora, por finalidades do que queremos construir, iremos considerar o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ..\}$. Isso não torna os axiomas de Peano insuficientes, bastando adequá-los.

Iremos definir um número inteiro como uma classe de equivalência dada por uma relação de equivalência no conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Assim, o conjunto dos números inteiros será o conjunto formado por todas essas classes de equivalência.

A princípio, precisamos definir uma relação em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e mostrar que, de fato, é uma relação de equivalência.

**Definição 2.3.** *Para quaisquer que sejam os pares ordenados $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, assumiremos que $(a, b)$ está relacionado com $(c, d)$ quando for satisfeita a condição de $a + d = b + c$. Quando isso acontecer, iremos escrever $(a, b) \backsim (c, d)$.*

**Proposição 2.4.** *A relação $\backsim$ definida acima é de equivalência.*
*Demonstração:*

Mostraremos que a relação descrita acima é de equivalência, isto é, é reflexiva, simétrica e transitiva

1. Reflexividade: Se $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, vamos mostrar que $(a, b) \backsim (a, b)$. De fato, pois $a + b = b + a$ e, como estamos trabalhando em $\mathbb{N}$, vale a comutatividade. Logo, $(a, b) \backsim (a, b)$.

2 Simetria: Se $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $(a, b) \backsim (c, d)$, vamos mostrar que $(c, d) \backsim (a, b)$. Sim, pois, se $(a, b) \backsim (c, d)$, então $a + d = b + c$ e, portanto, $c + b = d + a$. Logo, $(c, d) \backsim (a, b)$.

3 Transitividade: Se $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, com $(a, b) \backsim (c, d)$ e $(c, d) \backsim (e, f)$, vamos mostrar que $(a, b) \backsim (e, f)$. De fato, pois, se $(a, b) \backsim (c, d)$ e $(c, d) \backsim (e, f)$, temos que $a + d = b + c$ e $c + f = d + e$. Assim, de $a + d = b + c$, vem que $a + d = b + d + e - f$ $\Rightarrow a + d + f = b + e + d \Rightarrow a + f = b + e$. Logo, $(a, b) \backsim (e, f)$. $\square$

Se tivermos $(a, b)$ sendo um elemento qualquer de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, denotaremos por $\overline{(a, b)}$ a classe de equivalência do par ordenado $(a, b)$ obedecendo a relação $\backsim$ acima, ou seja:

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; (x,y) \backsim (a,b)\}.$$

**Exemplo 2.5.** *Considere* $(1,2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$*. Temos que a classe de equivalência deste elemento, via a relação* $\backsim$*, é o conjunto* $\overline{(1,2)} = \{(0,1),(2,3)(3,4),(4,5),...\}$*. Agora, se considerarmos os pares ordendos* $(3,7),(3,6)$ *e* $(5,6)$*, tem-se:*
$\overline{(3,7)} = \{(1,5),(2,6),(3,7),(4,8),...\}$*;*
$\overline{(3,6)} = \{(0,3),(1,4),(2,5),(4,7),...\}$*;*
$\overline{(5,6)} = \{(0,1),(2,3),(3,4),(4,5),...\}$*.*
*Veja que* $\overline{(1,2)} = \overline{(5,6)}$*, pois* $(1,2) \backsim (5,6)$ *e* $\backsim$ *é uma relação de equivalência. Se pegarmos um elemento aleatório de uma classe qualquer e construirmos outra classe com esse elemento, obedecendo a relação descrita, tais classes sempre serão iguais, pois a relação* $\backsim$ *é uma relação de equivalência.*

A relação de equivalência definida anteriormente nos dá uma partição de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cuja a interseção das partes é vazia, a saber, esta relação nos possibilita particionar $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ em classes de equivalência. Então, diante dessa partição, podemos definir os números inteiros da seguinte forma:

**Definição 2.6.** *A relação de equivalência* $\backsim$ *nos dá o conjunto quociente* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\backsim$*, que será denotado por* $\mathbb{Z}$*, constituído pela família das classes de equivalência* $\overline{(a,b)}$*, em que* $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$*, e chamaremos* $\mathbb{Z}$ *o conjunto dos números inteiros. Portanto.*

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\backsim\, = \{\overline{(a,b)}; (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

Queremos que o leitor saiba distinguir perfeitamente que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \neq \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\backsim$. Veja que os pares ordenados $(1,2)$ e $(5,6)$ pertencem $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, e são absolutamente distintos, isto é, $(1,2) \neq (5,6)$, em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, mas em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\backsim$ suas classes são iguais, ou seja, $\overline{(1,2)} = \overline{(5,6)}$. Isso acontece, pois, quando passamos a relação $\backsim$ em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, particionamos este conjunto em subconjuntos distintos que são as suas classes. Note que os elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ são pontos do tipo $(a,b)$, onde $a, b \in \mathbb{N}$; já em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\backsim$, os elementos são conjuntos de pontos, como mostra o Exemplo 2.5 .

A partir de agora, não faremos nenhuma confusão se chamarmos $\overline{(a,b)}$ de um número inteiro qualquer. Com essa definição de números inteiros, é possível dar uma estrutura aritmética para $\mathbb{Z}$. Por exemplo, é possível definir soma entre dois números inteiros e, também, o simétrico aditivo de um número inteiro. Constrói-se, então, uma operação que não há nos naturais, a saber, a subtração entre dois números inteiros. Não iremos estudar a fundo as operações em $\mathbb{Z}$, para não fugirmos do nosso foco. Porém, se o leitor tiver interesse em estudar todas as operações e suas respectivas demonstrações de forma rigorosa, pode consultar [6] e [12].

Sejam $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$ dois números inteiros. A soma destes dois números é definida por

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} := \overline{(a+c, b+d)}$$

e mostra-se que a mesma está bem definida. Caso o leitor queira ver a demonstração, consulte a bibliografia [12], página 31. Além disso, a adição é associativa e comutativa e existe um elemento neutro que denotaremos por $\overline{(0,0)}$, tal que

$$\overline{(a,b)} + \overline{(0,0)} = \overline{(a+0,b+0)} = \overline{(0+a,0+b)} = \overline{(0,0)} + \overline{(a,b)} = \overline{(a,b)}.$$

Novamente, estas propriedades são demonstradas via definição de número inteiro.

Em $\mathbb{Z}$, temos também o cancelamento da adição. Para quaisquer que sejam os números inteiros $\theta, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, e que cada número é uma classe de equivalência de um par ordenado de números naturais. É possível mostrar, então, que $\theta + \alpha = \beta + \alpha$, implica em $\theta = \beta$, propriedade esta que os números naturais também possuem. Uma propriedade que os números inteiros têm, mas os naturais não, é a da existência do elemento inverso aditivo ou elemento oposto.

Para cada número inteiro $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, existe um único número inteiro $\overline{(a',b')} \in \mathbb{Z}$ tal que $\overline{(a,b)} + \overline{(a',b')} = \overline{(0,0)}$, que se chama de simétrico aditivo de $\overline{(a,b)}$ e é denotado por $-\overline{(a,b)}$. Assim, segue o seguinte lema cuja demonstração pode ser encontrada em [12].

**Lema 2.7.** *Dado $\alpha \in \mathbb{Z}$, existe um único $-\alpha \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha + (-\alpha) = \overline{(0,0)}$.*

Assim, com a existência e unicidade do elemento oposto, conseguimos definir a operação de subtração em $\mathbb{Z}$. Dados dois números em $\mathbb{Z}$, digamos $\beta$ e $\gamma$, a subtração $\beta - \gamma$ é nada mais que somar a $\beta$ o oposto de $\gamma$, que por sua vez é $-\gamma$. Então, $\beta - \gamma = \beta + (-\gamma)$, por definição. Em $\mathbb{Z}$ podemos difinir também uma operação que chamamos de multiplicação de números inteiros. Dados $\overline{(a.b)}, \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$. A multiplicação de números interios é definida dor

$$\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)} := \overline{(a.c + b.d, a.d + b.c)}.$$

Além disso, a multiplicação é associativa, comutativa e tem $\overline{(1,0)}$ como elemento neutro da multipicação.

Apesar de não fazermos um estudo aprofundado na construção rigorosa dos números inteiros, desafiamos o leitor a consultar a bibliografia [12], que constrói categoricamente este conjunto em questão, provando muitas de suas propriedades. Aqui, falaremos apenas de maneira sucinta aquilo que julgarmos pertinente aos objetivos do trabalho.

Em $\mathbb{Z}$, também existe uma relação de ordem, igual mostramos para o conjunto dos números naturais. Dados dois números inteiros $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$, dizemos que

$$\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$$

quando

$$a + d \leq b + c.$$

e lê-se $\overline{(a,b)}$ é menor do que ou igual a $\overline{(c,d)}$. Neste mesmo caso, podemos escrever $\overline{(c,d)} \geq \overline{(a,b)}$ significando que $c + b \geq d + a$; lê-se que o elemento $\overline{(c,d)}$ é maior ou igual a $\overline{(a,b)}$. Os símbolos "$<$"e "$>$"são definidos de forma análoga.

A relação $\leq$ possui as propriedades do seguinte lema:

**Lema 2.8.** *Sejam* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$. *Então,*
*1.* $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$;
*2.* $\alpha \leq \beta$ *e* $\gamma \geq \overline{(0,0)} \Rightarrow \alpha.\gamma \leq \beta.\gamma$;
*3. Exatamente uma das situações acontece:* $\beta = \overline{(0,0)}$ *ou* $\beta > \overline{(0,0)}$ *ou* $\beta < \overline{(0,0)}$.

A demonstração pode ser encontrada em [12].

Somar um número inteiro a relação $\leq$ ela se mantém pra qualquer número $\gamma$. Isso mostra que $\mathbb{Z}$ é totalmente ordenado.

**Lema 2.9.** *Sejam* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. *Então, uma e apenas uma das condições ocorre:*

$$\alpha < \beta, \text{ ou } \alpha > \beta \text{ ou } \alpha = \beta.$$

A demonstração o leitor pode ver em [12]

Existem muitas outras propriedades no conjunto dos números inteiros, as quais, como já dissemos, não apresentaremos por questões de completude. É vasta a quantidade de literaturas que abordam este tema. Por exemplo, o leitor pode encontrar mais informações em [6] e [12].

Uma observação relevante a ser feita é que o conjunto $\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$ com a seguinte identificação: Vamos identificar cada número $a \in \mathbb{N}$ com o número inteiro $\overline{(a,0)} \in \mathbb{Z}$. Com esta identificação, temos que

$$a + b = \overline{(a,0)} + \overline{(b,0)} = \overline{(a+b,0)}$$

e

$$ab = \overline{(a,0)}.\overline{(b,0)} = \overline{(ab,0)}$$

para todos os elementos $a, b \in \mathbb{N}$. Portanto, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Neste novo conjunto numérico, a equação $x + 2 = 1$ é solucionável. A saber, considere $x = \overline{(a,b)}$, $2 = \overline{(2,0)}$ e $1 = \overline{(1,0)}$. Assim, procuramos números naturais $a$ e $b$ de tal modo que

$$\overline{(a,b)} + \overline{(2,0)} = \overline{(1,0)} \Leftrightarrow \overline{(a+2,b)} = \overline{(1,0)} \Leftrightarrow a + 2 + 0 = b + 1 \Leftrightarrow a + 2 = b + 1.$$

Ou seja, qualquer elemento $x = \overline{(a,b)}$ em que seu representante esteja relacionado com o elemento $(1,2)$ é solução da equação dada. Note que este elemento, $(1,2)$, é exatamente o elemento $-1$, pois

$$\overline{(1,2)} + 1 = \overline{(1,2)} + \overline{(1,0)} = \overline{(2,2)} = \overline{(0,0)}.$$

## 2.3 Conjunto $\mathbb{Q}$ dos Números Racionais

Desde a era primitiva, se podia identificar a necessidade da população de se organizar em grupos. Poder demarcar terrenos, quantificar objetos, e assim por diante, como já mencionamos na Secão 2.1 eram tarefas rotineiras. Mas, com a evolução do homem e das organizações em sociedade, o conjunto dos números naturais não foi suficiente para fazer algumas representações; por exemplo, comparar duas grandezas ou quantas vezes uma grandeza é proporcional a outra. Isso só seria possível com os números naturais se essas comparações fossem exatas, mas nem sempre isso acontecia.

Há registros de que o conjunto dos números racionais, representado pela letra $\mathbb{Q}$, tenha surgido muito antes dos números inteiros. Como no Egito Antigo, por exemplo, onde o Rio Nilo transbordava nas enchentes, deixando grande parte dos terrenos de plantio totalmente submersa. Ao baixar das águas, era preciso demarcar o terreno de plantio de cada agricultor, e os mesmos demarcavam com corda feito em nó, e passavam a observar quantas unidades de corda cabiam dentro do lado do terremo que estava sendo marcado. Mas, por mais que fossem precisos nas marcações, nem sempre era possível representar as tais medidas em números inteiros. Então, isso levou ao surgimento das frações positivas, uma pequena introdução aos racionais.

Vamos tentar resolver a seguinte equação $2x = 9$, na posse apenas dos números inteiros. Observe que $2.4 = 8$ e $2.5 = 10$. Espera-se, então, que a solução da equação dada seja um número inteiro $x$ tal que $4 < x < 5$, o que é um absurdo pela Proposição 2.2. Para se resolver esta equação, portanto, é necessário um novo conjunto numérico diferente do conjunto dos números inteiros. Faremos a seguir uma construção rigorosa desse conjunto, nos baseando em [12].

### 2.3.1 Construção dos números racionais

A fim de definir os racionais, utilizaremos o conceito de relação de equivalência a partir dos números inteiros, da mesma forma que fizemos na construção dos números inteiros a partir dos naturais.

Lembre que $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b);\ a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}.$$

**Definição 2.10.** *Para quaisquer que sejam $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, considere a relação $\backsim$ definida por*

$$(a, b) \backsim (c, d) \text{ se, e somente se, } ad = bc.$$

**Proposição 2.11.** *A relação $\backsim$ definida acima é uma relação de equivalência.*
*Demonstração:*

1. Reflexividade: Se $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, vamos mostrar que $(a, b) \backsim (a, b)$. De fato, pois $ab = ba$ pela comutatividade da multiplicação no conjunto dos números inteiros. Logo, $(a, b) \backsim (a, b)$. Portanto, $\backsim$ é uma relação reflexiva.

2. Simetria: Sejam $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tais que $(a, b) \backsim (c, d)$. Vamos mostrar que $(c, d) \backsim (a, b)$. Sim, de fato, pois, se $(a, b) \backsim (c, d)$, então $ad = bc$, que por sua vez implica em $cb = da$, isto é, $(c, d) \backsim (a, b)$. Portanto, $\backsim$ é uma relação simétrica.

3. Transitividade: Se $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ são tais que $(a, b) \backsim (c, d)$ e $(c, d) \backsim (e, f)$, vamos mostrar que $(a, b) \backsim (e, f)$. Sim, de fato, pois, se $(a, b) \backsim (c, d)$ e $(c, d) \backsim (e, f)$, temos que $ad = bc$ implica que $adf = bcf$ e $cf = de$ implica que $cfb = deb$. Assim, $adf = bde$ implica que $(af)d = (be)d$. Como $d \neq 0$ e sabendo que a lei do corte vale em $\mathbb{Z}$, então $(af)d = (be)d$ implica que $af = be$, isto é, $(a, b) \backsim (e, f)$. Isso mostra que $\backsim$ é uma relação de equivalência. $\square$

**Exemplo 2.12.** *Temos que* $(3, 2) \backsim (9, 6)$ *e* $(4, 8) \backsim (-2, -4)$, *pois* $3.6 = 2.9$ *e* $4.(-4) = 8.(-2)$.

**Exemplo 2.13.** *Observe que* $(8, 3) \backsim (16, 6) \backsim (-24, -9)$, *pois* $8.6 = 3.16$ *e* $16.(-9) = 6.(-24)$.

Para deixar o elemento $(a, b)$ mais próximo do que entendemos de número racional, denota-se $(a, b) = \dfrac{a}{b}$. Veja que é familiar:

$$(a, b) \backsim (c, d) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = bc.$$

Nesta nova notação, a classe de equivalência do elemento $\dfrac{a}{b}$ pela relação $\backsim$ é o conjunto

$$\overline{\frac{a}{b}} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; (x, y) \backsim (a, b)\}.$$

**Exemplo 2.14.** $\overline{\frac{2}{6}} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, ...\}$ *e* $\overline{\frac{5}{15}} = \overline{\frac{2}{6}} = \overline{\frac{6}{18}}$.

**Exemplo 2.15.** $\overline{\frac{3}{2}} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; 3y = 2x\} = \{\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{12}{8}, ...\}$. *Note que alguns elementos formados por números negativos também pertencem a esta classe. Por exemplo,* $\frac{-3}{-2} \in \overline{\frac{3}{2}}$, $\frac{-6}{-4} \in \overline{\frac{3}{2}}$ *enquanto* $\frac{3}{7} \notin \overline{\frac{3}{2}}$.

De forma análoga aos números inteiros, a relação de equivalência $\backsim$ nos dá uma partição de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, construindo um conjunto quociente, e esse conjunto quociente, formado pela família das classes de equivalência, chamaremos de $\mathbb{Q}$.

**Definição 2.16.** *Denotaremos por* $\mathbb{Q}$ *o conjunto dos números racionais que será o conjunto quociente de* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *pela relação de equivalência* $\backsim$, *ou seja:*

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\backsim = \{\overline{\frac{a}{b}};\ a \in \mathbb{Z}\ \text{ e }\ b \in \mathbb{Z}^*\}.$$

O leitor ja deve ter notado que os números racionais são formados por classes de equivalências de pares ordenados de números inteiros, assim como os inteiros são formados por classes de equivalência de pares ordenados de números naturais. Com posse desta definição de número racional, podemos dar uma aritmética para $\mathbb{Q}$. Em $\mathbb{Q}$, podemos definir duas operações chamadas adição e multiplicação. Para simplificar a notação, a partir de agora, escreveremos $\frac{a}{b}$ para significar $\overline{\frac{a}{b}}$. Para quaisquer que sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, tem-se que a adição e multiplicação são dadas, respectivamente, por:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad e \quad \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Ao elemento $\frac{ad+bc}{bd}$ chamamos de soma dos elementos $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$; já ao elemento $\frac{ac}{bd}$, chamamos de produto.

**Exemplo 2.17.** *Considere os dois números racionais* $\frac{5}{3}$ *e* $\frac{2}{6}$. *A soma e o produto destes elementos são, respectivamente,*

$$\frac{5}{3} + \frac{2}{6} = \frac{4.6+3.2}{3.6} = \frac{32}{18} = \frac{16}{9}$$

*e*

$$\frac{5}{3}.\frac{2}{6} = \frac{5.2}{3.6} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$$

O conjunto dos números racionais com as operações descritas acima herdam algumas propriedades algébricas dos números inteiros, assim como os números inteiros herdam algumas dos números naturais. Então, em $\mathbb{Q}$ existem os elementos neutros aditivo e multiplicativo, denotados, respectivamente, por $0$ e $1$. Além disso, para qualquer número racional $\alpha$ diferente do elemento neutro aditivo, existe um elemento inverso multiplicativo $\beta$ tal que $\alpha.\beta = 1$. Com, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Do mesmo modo que os inteiros, para cada $\beta \in \mathbb{Q}$, existe o oposto aditivo de $\beta$, como segue o lema.

**Lema 2.18.** *Dado* $\beta \in \mathbb{Q}$, *existe um único* $-\beta \in \mathbb{Q}$ *tal que* $\beta + (-\beta) = 0$.

Diante da unicidade de cada oposto aditivo de $\mathbb{Q}$, podemos definir a subtração de $\beta$ por $\alpha$, somando $\beta$ com o oposto de $\alpha$. Portanto, $\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$. Novamente, caso o leitor queira um estudo mais profundo da aritmética de $\mathbb{Q}$, pode consultar a bibliografia [12] capítulo 3, página 50.

Chamamos atenção também de que o par ordenado $(a, 1) \backsim (a, 1)$ pois $a.1 = 1.a \Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{a}{1}$. Observe também o que acontece na soma e no produto, $(a, 1) + (b, 1) = (a + b, 1)$ e $(a, 1).(b, 1) = (a.b, 1)$. Assim, os números racionais que possuem a segunda coordenada igual a 1 se comportam aritmeticamente como os números inteiros. Então, podemos dizer sem perda de generalidade e sob está identificação que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Agora, vamos resolver a equação apresentada no início desta seção, a saber, $2x = 9$, com posse dos números racionais. Ora, $2 = (2,1)$ e $9 = (9,1)$, (olhando como classe de equivalência). Chamando a incógnita $x$ de $x = (a,b)$, vamos determinar $a$ e $b$ inteiros de modo que a equação seja satisfeita. Temos que,

$$2x = 9 \Leftrightarrow (2,1).(a,b) = (9,1) \Leftrightarrow (2a,b) = (9,1) \Leftrightarrow 2a.1 = b9 \Leftrightarrow 2a = 9b$$

ou seja, qualquer número $(a,b)$ que seja equivalente a $(9,2)$ é uma solução da equação dada. Em $\mathbb{Q}$, portanto, esta equação é solucionável, e sua solução é o número racional $(9,2)$.

Da mesma forma que os números naturais e os números inteiros possuem uma ordenação, os números racionais também são ordenados. Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ com $b,d > 0$. Dizemos que

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d},$$

se

$$ad \leq bc,$$

lê-se $\frac{a}{b}$ menor do que ou igual a $\frac{c}{d}$. Os símbolos "$<$"e "$>$"são definidos de forma semelhante. De forma análoga aos números inteiros, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, exatamente uma das situações acontece: $\alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$ ou $\alpha > \beta$ que chamamos de tricotomia em $\mathbb{Q}$.

**Exemplo 2.19.** $\frac{2}{4} < 1,\ \frac{-2}{-3} < \frac{4}{2}$ *e* $\frac{-5}{23} < 0.$

## 2.4 Corpos

Nesta seção, iremos aprensentar a caracterização de corpos, pois nosso objetivo é construir o corpo dos números reais. Assim, começamos com a seguinte definição.

**Definição 2.20.** *Um conjunto não vazio $\mathbb{K}$ é um corpo se em $\mathbb{K}$ existirem duas operações, denotadas por + (adição) e . (multiplicação), que satisfazem certas condições, chamadas axiomas de corpo. A adição faz associar a cada par de elementos, $a\ b \in \mathbb{K}$ a sua soma $a + b \in \mathbb{K}$. Já o produto associa a cada par $a, b \in \mathbb{K}$ o elemento $a.b \in \mathbb{K}$. A adição e o produto satisfazem os seguintes os seguintes axiomas.*

*A1.* $a + b = b + a$ *para quaisquer que sejam* $a, b \in \mathbb{K}$.

*A2.* $a + (b + c) = (a + b) + c$ *para quaisquer que sejam* $a, b, c \in \mathbb{K}$.

*A3. Existe um elemento em $\mathbb{K}$, denotado por $0$, que satisfaz $0 + a = a + 0 = a$ para qualquer $a \in \mathbb{K}$.*

*A4. Todo elemento $a \in \mathbb{K}$ possui um simétrico $-a \in \mathbb{K}$, que chamaremos de inverso aditivo de $a$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.*

*M1.* $a.b = b.a$ *para quaisquer* $a, b \in \mathbb{K}$.

*M2.* $a.(b.c) = (a.b).c$ *para quaisquer que sejam* $a, b, c \in \mathbb{K}$.

*M3. Existe um elemento em* $\mathbb{K}$*, denotado por* $1$*, e chamado de elemento neutro do produto, tal que* $1.a = a.1 = a$ *para todo* $a \in \mathbb{K}$.

*M4. Todo* $a \neq 0$ *em* $\mathbb{K}$ *possui um elemento* $a^{-1} \in \mathbb{K}$*, chamado de inverso multiplicativo de* $a$*, tal que* $a^{-1}.a = a.a^{-1} = 1$.

Denota-se $(\mathbb{K}, +, .)$ o corpo $\mathbb{K}$ com as operações de adição e produto. Quando ficarem subentendidas estas operações no contexto dado, escreveremos apenas $\mathbb{K}$.

**Exemplo 2.21.** *O conjunto* $\mathbb{Z}_2$ *munido das operações usuais de adição e produto. Então,* $(\mathbb{Z}_2, +, .)$*, é um corpo.*

De fato, lembrando que $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$, vamos mostrar que $(\mathbb{Z}_2, +, .)$ satisfaz todos os axiomas de corpo. Como $\mathbb{Z}_2$ tem apenas dois elementos distintos $\overline{0}$ e $\overline{1}$, observe que $\overline{0} + \overline{1} = \overline{1} + \overline{0} = \overline{1}$, $\overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$, $\overline{1} + \overline{1} = \overline{0}$, $\overline{0}.\overline{0} = \overline{0}.\overline{1} = \overline{1}.\overline{0} = \overline{0}$ e $\overline{1}.\overline{1} = \overline{1}$. Note que o inverso aditivo de cada elemento é ele mesmo, e o inverso multiplicativo de todo elemento não nulo também, que nesse caso é o $\overline{1}$. $\square$

**Exemplo 2.22.** *O conjunto* $(\mathbb{Z}_4, +, .)$ *munido das operações usuais não é corpo.*

Basta verificar que o axioma $M4$ não é satisfeito, pois não existe em $\mathbb{Z}_4$ um elemento $\overline{a}$ tal que $\overline{2}.\overline{a} = \overline{1}$. Em outras palavras, o elemento $\overline{2}$ não possui inverso multiplicativo. Com efeito, temos que

$$\overline{2}.\overline{0} = \overline{0}, \overline{2}.\overline{1} = \overline{2}, \overline{2}.\overline{2} = \overline{0}, \overline{2}.\overline{3} = \overline{2}.$$

Isso mostra que $(\mathbb{Z}_4, +, .)$ não é um corpo.

A título de curiosidade, o conjunto $\mathbb{Z}_n$ munido com suas operações usuais será um corpo se, e somente se, $n$ for um número primo. Para o leitor interessado, a demonstração deste fato pode ser encontrado em [4], Capítulo IV, página 144.

**Exemplo 2.23.** *O conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais e* $\mathbb{Z}$ *dos números inteiros não são corpos. Basta verificar que os naturais não possuem o inverso aditivo e, portanto, o axioma* $A4$ *não é satisfeito. Quanto aos inteiros, veja que o axioma* $M4$ *não é satisfeito.*

**Exemplo 2.24.** *O conjunto* $\mathbb{Q}$ *dos números racionais munido das operações definidas anteriormente de adição e produto é um corpo.*

Deixaremos como exercício a cargo do leitor. Basta usar as definições em $\mathbb{Q}$ e mostrar que os axiomas de corpo são satisfeitos.

# Capítulo 3

# Grandezas Comensuráveis e Incomensuráveis

Neste capítulo, estudaremos as grandezas comensuráveis e as incomensurávies. Discutiremos quando dois segmentos de reta são comensúraveis dada uma unidade de medida fixa e sobre a crise da descoberta dos segmentos incomensuráveis com esta unidade. Estes últimos segmentos deram origem aos números que não são racionais, chamados, portanto, de números irracionais. Mostraremos a insuficiência de $\mathbb{Q}$ para medir alguns segmentos de reta.

Para a produção deste capítulo, iremos usar as bibliografias [1], [2] e [5] como base.

## 3.1 Segmentos Comensuráveis

Na Seção 2.3, ressaltamos a necessidade de povos antigos demacar/medir terras após as enchentes do Rio Nilo. Medir é comparar, estabelecendo antes uma certa unidade de medida fixa, e buscar saber qual a quantidade daquela unidade fixa será necessária para representar a tal grandeza que se tem. Ao fixar uma unidade de medida, podemos comparar grandezas e fazer proporções associadas à medida adotada. Então, por exemplo, podemos saber quantas unidades da medida é preciso para representar um certo comprimento, ou, em outras palavras, quantas vezes uma unidade de medida cabe dentro de um comprimento. Assim, precisamos dos números para representar uma medida de uma certa grandeza qualquer, dada uma unidade de grandeza padrão. Então, podemos definir um número, isto é, um número é o resultado de uma comparação de uma grandeza com uma unidade de medida, ou mais precisamente é o resultado de uma medida.

Os matemáticos, e especificamente os pitagóricos, tinham sua filosofia de medida, as grandezas comensuráveis. Faziam medida e comparações entre duas grandezas, como dois segmentos quaisquer, somente com a posse dos números inteiros positivos e a razão entre eles. Iremos ver de fato o que isso significa, o que seria comensurar dois segmentos de reta.

Consideremos dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e seus respectivos comprimentos $J$ e $J'$. Se for possível encontrar números inteiros positivos $m$ e $n$ e um segmento $\overline{EF}$, cuja o comprimento denotaremos de $s$, tais que se cumprem $J = ms$ e $J' = ns$ ou ainda, tomando a razão entre eles, $\frac{J}{J'} = \frac{ms}{ns} = \frac{m}{n}$, dizemos que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis.

Dois segmentos são dito comensuráveis se existir um terceiro segmento que caiba um número inteiro nós dois primeiros. Ou ainda, se pudermos escreve-los como a razão de suas medidas e for um número racional. Assim, comensurar é escrever na forma de razão $\frac{m}{n}$. Diante desta definição, deixaram-se levar a pensar que sempre era possível encontrar $m$, $n$ e $s$. Então, será que, sempre é possível comensurar dois segmentos? Mas, infelizmente, isso não é verdade. Quando dois segmentos não são comensuráveis, diz-se que os mesmos são incomensuráveis.

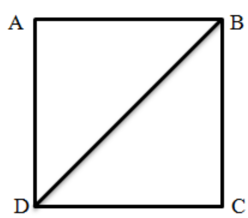
## 3.2 A Existência da Incomensurabilidade

Por muitos anos, a filosofia dos pitagóricos era que os números dominavam o universo, que tudo girava-se em torno deles. Então os números inteiros e a razão entre eles eram considerados os números plenos, capazes de suprir qualquer necessidade da época, podendo ser associados a todas as grandezas, tais como: área, volume e comprimento. Acreditava-se que os números racionais, por exemplo, eram capazes de comensurar qualquer dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Mas, em certo momento, descobriram que nem sempre isso era possível, ao estudar algumas figuras geométricas. A principal descoberta surge ao se estudar o quadrado, e através da utilização do Teorema de Pitagóras, mostra-se que a hipotenusa e um cateto de um triângulo retângulo isósceles não podem ser comensuravéis.

**Teorema 3.1.** *A hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles e um de seus catetos são segmentos incomensuravéis.*
*Demonstração:*

Consideremos um quadradado qualquer de vértices $ABCD$ e a diagonal $DB$. Usaremos o triângulo retângulo isósceles $DBC$, conforme a figura abaixo.

Figura: Quadrado




Fonte: Arquivo pessoal.

Suponha que $\overline{DC}$ e a diagonal $\overline{DB}$ sejam comensuráveis, isto é, existem dois números inteiros positivos $m$ e $n$, tais que $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{m}{n}$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que $(DB)^2 = (DC)^2 + (CB)^2$ e como o triângulo é isósceles, podemos escrever $(DB)^2 = 2(DC)^2$, ou seja, $(\frac{DB}{DC})^2 = 2$. Isto implica que $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Vamos supor sem perder a generalidade que $\dfrac{m}{n}$ seja uma fração irredutível, isto é, $mdc(m,n) = 1$. Se $(\frac{m}{n})^2 = 2$, então $m^2 = 2n^2$. Essa igualdade diz que $m^2$ é um número par e, consequentimente, $m$ é par. Assim, podemos escrever $m = 2q$ para algum $q \in \mathbb{N}$. Então, $2n^2 = m^2$, o que implica $2n^2 = 4q^2$, implicando em $n^2 = 2q^2$. De igual modo, temos que $n^2$ é número par. Isso cantradiz o fato de $mdc(m,n) = 1$, uma vez que ambos os números, $m$ e $n$, são múltiplos de 2. Portano, $\overline{DB}$ e $\overline{DC}$ não podem ser escritos como $\dfrac{m}{n}$. Também provamos que, a hipotenusa e um cateto de um triângulo retângulo isósceles não podem ser comensuráveis. $\square$

A descoberta da existência da incomensurabilidade, como acabamos de mostrar, trouxe grande crise à filosofia e aos fundamentos de matemática da escola pitagórica, pois tudo se embasava na crença de que os números inteiros e suas razões eram suficientes para expressar qualquer grandeza, e foi destruida. O fato de existirem segmentos incomensuráveis, mostrou a insuficiência dos sistemas numéricos já conhecidos, dando origem a um novo conceito de número, os números irracionais.

Se considerarmos um quadrado, com $1cm$ de lado, e traçando a diagonal $d$, segue do Teorema de Pitágoras que $d^2 = 1^2 + 1^2$, isto é, $d^2 = 2$. Essa equação atualmente é simples, mas, foi um dos grandes problemas na época. Não é atoa que o número $d$ foi o primeiro número irracional a ser descoberto.

Acredita-se que $d$ (diagonal do quadrado) e um de seus lados foi um dos primeiros pares de segmentos a serem descoberto a sua incomensurabiliade.

**Proposição 3.2.** *Se existir um número $d$ tal que $d^2 = 2$, então $d$ não é racional.*

A demonstração dessa proposição segue de forma análoga a demonstração do Teorema anterior. Basta supor por contradição que $d$ é racional, isso implica que $d = \frac{m}{n}$ e usar os mesmos passos.

Em outros termos, dizer que a diagonal do quadrado de lado 1 e um de seus lados não são comensuráveis significa dizer que não existe um segmento padrão $s$ tal que $d$ e 1 sejam ambos múltiplos de $s$.

A Proposição 3.2 é equivalente a dizer que não existe $d \in \mathbb{Q}$ tal que $d^2 = 2$. Mas será que o irracional $d$ é o único irracional existente ? Para podermos responder essa pergunta e introduzir a infinitude dos números irracionais, enunciaremos o seguinte teorema:

**Teorema 3.3.** *Para todo primo $p$, não existe $d \in \mathbb{Q}$ tal que $d^2 = p$.*

*Demonstração:*

Suponha que o tal $d$ exista. Logo, $d = \frac{m}{n}$, onde $mdc(m, n) = 1$. Assim, $(\frac{m}{n})^2 = p$ implica que $m^2 = n^2p$. Assim, $p|m^2$ e, como $p$ é primo, segue que $p|m$. Daí, tem-se $m = pk$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Substituindo em $n^2p = m^2$, obtemos $n^2p = p^2k^2$ e, logo, $n^2 = pk^2$. Veja que $p|n^2$ e, novamente por $p$ ser primo, temos que $p|n$. Mas isso é um absurdo, uma vez que o $mdc(m, n) = 1$. □

Esse resultado nos mostra que os irracionais $d$ tais que $d^2 = p$, onde $p$ é primo, constitue-se uma família de números irracionais, levando a concluir que existem infinitos números irracionais, em virtude de existirem infinitos números primos.

Feitas essas considerações, segue a seguinte definição.

**Definição 3.4.** *Um número irracional é um número que representa a medida de um segmento incomensurável com uma unidade padrão.*

Seguem outros exemplos de números irracionais

**Exemplo 3.5.** *O irracional $\pi$.*
*Se pegarmos o comprimento de uma circunferência e dividirmos pelo seu diâmetro, o resultado será um dos irracionais mais conhecidos, o número $\pi$. A demonstração da sua irracionalidade pode ser encontrada em [14].*

$$\pi = 3,1415926535897932...$$

**Exemplo 3.6.** *A constante de Euler $e$.*
*A base dos logarítmos naturais é dada por*

$$e = 2,7182818284590452...$$

*A demonstração da sua irracionalidade pode ser encontrada em [15].*

O conjunto dos números irracionais é denotado por $\mathbb{Q}^c$.

# Capítulo 4

# Construção dos Números Reais

A partir do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, percebemos a necessidade de ampliar esse conjunto, construindo então o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros. Mas notamos que os inteiros não foram suficientes para suprir algumas necessidades. Assim, dando a passagem de $\mathbb{Z}$ para o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Com os estudos do capítulo anterior, notamos que o conjunto dos números racionais possui certas lacunas ou, matematicamente, possui descontinuidades. Então, novamente surge a necessidade de ampliar nosso conjunto em questão, dando passagem para nosso próximo objeto de construção.

Neste capítulo, iremos construir um corpo que seja capaz de medir qualquer segmento de reta e que chamaremos de conjunto dos números Reais, contendo os racionais. O objetivo dessa nova construção é justamente suprir as necessidades existentes em $\mathbb{Q}$ de medir certos segmentos de reta, criando um conjunto completo. Para alcançar tal objetivo, iremos usar as teorias de cortes no conjunto dos racionais apresentada pelo matemático Alemão Julius Wilhelm Richard Dedekind.

Este capítulo será baseado em [1], [6], [12] e [13].

## 4.1 Cortes de Dedekind

Antes de iniciarmos as noções de cortes de Dedekind, vamos dizer que um número racional $b$ é mínimo de um conjunto $B \subset \mathbb{Q}$ se $b \in B$ e, para todo $x \in B$, tem-se $b \leq x$. Dizemos também que um número racional $a$ é máximo de um conjunto $A \subset \mathbb{Q}$ se $a \in A$ e, para $x \in A$, tem-se $x \leq a$.

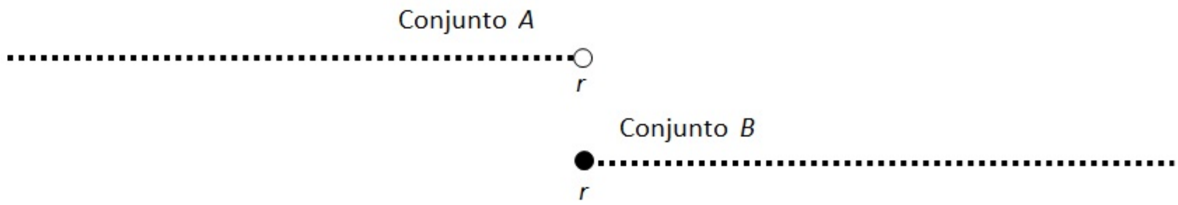
**Definição 4.1.** *Um par ordenado $(A, B)$ de subconjuntos de números racionais é um corte no conjunto dos racionais se satisfaz as seguintes condições:*

1. $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ *e* $A \cup B = \mathbb{Q}$;
2. *Se* $a \in A$ *e* $b \in B$, *então* $a < b$;

*3. A não possui elemento máximo.*

Contextualizando as condições de cortes, podemos expressá-las da seguinte forma: A condição 1 não há o que se falar. A condição 2 diz que, para quaisquer elementos $a \in A$ e $b \in B$, sempre deve acontecer que $a$ é menor que $b$. Em outras palavras, todos os elementos de $A$ são menores que os elementos de $B$, e isso implica que, $A$ e $B$ são conjuntos disjuntos. Já a condição 3 diz que em $A$ não existe um elemento máximo, ou seja para todo $a \in A$, sempre é possível encontrar $c \in A$ tal que $a$ é menor que $c$.

Equivalentimente, um corte separa a reta racional em dois subconjuntos de números racionais, o primeiro conjunto, $A$, com todos seus elementos à esquerda dos elementos do segundo conjunto, $B$. A imagem a seguir ilustra um corte, onde o conjunto $B$ possui $r$ como o menor elemento.




**Observação 4.2.** *Note que, se $\alpha = (A, B)$ é um corte e $a \in A$, então todos os elementos $x \in \mathbb{Q}$ tais que $x < a$ pertencem também a A. Com efeito, qualquer $x$ que não está em $A$ está em $B$ e, pela condição 2 de corte, $a < x$. Desta observação, conclui-se que A é um conjunto infinito. Um raciocínio semelhante mostra que $B$ também o é.*

**Definição 4.3.** *Sejam $(A, B)$ e $(C, D)$ dois cortes no conjunto dos números racionais. Assumiremos que*

$$(A, B) = (C, D) \Leftrightarrow A = C.$$

*Neste caso, também tem-se $B = D$.*

**Exemplo 4.4.** *Consideremos os conjuntos*

$$A = \{x \in \mathbb{Q};\ x < \frac{3}{5}\}$$

*e*

$$B = \{x \in \mathbb{Q};\ x \geq \frac{3}{5}\}.$$

*O par ordenado $(A, B)$ é um corte.*

Com efeito, a condição 1 é claramente satisfeita, pois $A$ e $B$ já são não vazios. Para ver que a união destes dois conjuntos forma $\mathbb{Q}$, seja $x$ um número racional. Então, pela tricotomia em $\mathbb{Q}$ (veja Subseção 2.3.1 do Capítulo 2), $x \in A$ ou $x \in B$. Assim, necessariamente $A \cup B = \mathbb{Q}$. Para provar a condição 2, considere $a \in A$ e $b \in B$ elementos quaisquer. Tem-se que $a < \frac{3}{5}$ e

$\frac{3}{5} \leq b$ e, portanto, $a < \frac{3}{5} \leq b$. A condição 3 requer um pouco mais de cautela. Seja $a \in A$. Considere $c = \frac{5a+3}{10}$. Como $a \in \mathbb{Q}$, segue que $c \in \mathbb{Q}$. Além disso,

$$c < \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{5a+3}{10} < \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5a+3 < 6 \Leftrightarrow 5a < 3 \Leftrightarrow a < \frac{3}{5}.$$

Isso mostra que $c \in A$. Resta mostrar que $a < c$. Note que

$$a < c \Leftrightarrow a < \frac{5a+3}{10} \Leftrightarrow 10a < 5a+3 \Leftrightarrow 5a < 3 \Leftrightarrow a < \frac{3}{5}.$$

Ou seja, $a < c$ é verdadeira. Daí, $A$ não possui elemento máximo.

Mostramos que, para qualquer $a < \frac{3}{5}$, sempre é possível entrar um $c \in \mathbb{Q}$ tal que $a < c < \frac{3}{5}$. Essas considerações mostram que $(A, B)$ é, de fato, um corte.

**Exemplo 4.5.** *Sejam os subconjuntos de números racionais*

$$C = \{x \in \mathbb{Q};\ x < \frac{1}{2}\}$$

*e*

$$D = \{x \in \mathbb{Q};\ x \geqslant \frac{1}{2}\}.$$

*O par ordenado $(C, D)$ é um corte.*

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que o par ordenado $(C, D)$ é um corte. Segue de forma análoga ao exemplo anterior.

**Proposição 4.6.** *Para todo número racional $r$, considere os subconjuntos de números racionais,*

$$A = \{x \in \mathbb{Q};\ x < r\}$$

*e*

$$B = \{x \in \mathbb{Q};\ x \geq r\}.$$

*Então, o par $(A, B)$ é um corte.*
*Demonstração:*

A condição 1 é facilmente verificada, pois $A$, $B$ já são não vazios. Para concluirmos que a união desses conjuntos forma $\mathbb{Q}$, seja $x$ um número racional qualquer. Pela tricotomia em $\mathbb{Q}$, segue que $x \in A$ ou $x \in B$. Assim, necessariamente $A \cup B = \mathbb{Q}$. para mostrarmos a condição 2, consideramos um elemento $a \in A$ e $b \in B$. Temos que $a < r$ e $r \leq b$, portanto $a < r \leq b$. Para mostrarmos a condição 3, seja $a \in A$ e $c = \frac{a+r}{2}$. Como $a \in \mathbb{Q}$, segue que $c \in \mathbb{Q}$. Além disso, note que

$$c < r \Leftrightarrow \frac{a+r}{2} < r \Leftrightarrow a + r < 2r \Leftrightarrow a < r.$$

Isto mostra que $c \in A$. Resta mostrar que $a < c$. Observe que

$$a < c \Leftrightarrow a < \frac{a+r}{2} \Leftrightarrow 2a < a + r \Leftrightarrow a < r.$$

Ou seja, $a < c$ é uma verdade. Portanto, o conjunto $A$ não possui elemento máximo.

Diante dessa proposição, onde $r$ é racional, podemos definir um corte racional.

**Definição 4.7.** *Um corte $(A, B)$, onde o conjunto $B$ possui menor elemento, é chamado de corte racional.*

Assim, todos os cortes dos exemplos anteriores são cortes racionais, pois o conjunto $B$ possui menor elemento. Então, todo corte racional é determinado por um número racional, levando em consideração a Proposição 4.6. Mas será que todo corte é racional? Não. Para justificarmos, iremos retornar ao Capítulo 3, Teorema 3.3, onde mostramos que não existe um número racional d tal que $d^2 = p$ com $p$ primo. Agora, veja o exemplo a seguir.

**Exemplo 4.8.** *Sejam os subconjuntos de números racionais*

$$E = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 2 \ \ ou \ \ x \leq 0\}$$

*e*

$$F = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 \geqslant 2 \ \ e \ \ x > 0\}.$$

*O par ordenado $(E, F)$ é um corte.*

De fato. veja que a condição 1 é facilmente verificada, pois $A$ e $B$ já são não vazios. Para concluirmos que a união de ambos forma $\mathbb{Q}$, dado um número $d$, pela tricotomia em $\mathbb{Q}$, segue diretamente que $d \in E$ ou $d \in F$. Logo, $E \cup F = \mathbb{Q}$. Para mostrarmos a condição 2, sejam $a \in E$ e $b \in F$. Isso implica que $a^2 < 2$ ou $a \leq 0$ e $b^2 \geq 2$ e $b > 0$. Assim, segue que $a^2 < 2 \leq b^2$ e isso implica que $a^2 < b^2$. Como $b > 0$, temos que $|a| < b$. Assim, $a \leq |a| < b$. Para mostrarmos a condição 3, precisamos mostrar que $E$ não possui elemento máximo. Se $x^2 < 2$, queremos mostrar que existe um número racional $y \in E$, com $y > x$ tal que $y^2 < 2$. Tomamos $y = x + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Precisamos determinar $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $y^2 < 2$. Então, $y^2 = (x + \frac{1}{n})^2 = (x^2 + 2x\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) = (2x + \frac{1}{n})\frac{1}{n} + x^2$. Dessa forma, temos que

$$y^2 < 2 \Leftrightarrow (2x + \frac{1}{n})\frac{1}{n} + x^2 < 2 \Leftrightarrow (2x + \frac{1}{n})\frac{1}{n} < 2 - x^2.$$

Veja que $n \geq 1$, então $1 \geq \frac{1}{n}$. Agora, observe que

$$(2x + \frac{1}{n}) \leq 2x + 1 \Rightarrow (2x + \frac{1}{n})\frac{1}{n} \leq (2x + 1)\frac{1}{n}.$$

Mas, veja que

$$(2x + 1)\frac{1}{n} < 2 - x^2 \Leftrightarrow \frac{n}{2x + 1} > \frac{1}{2 - x^2} \Leftrightarrow n > \frac{2x + 1}{2 - x^2}.$$

Portanto, basta tomarmos $n > \dfrac{2x+1}{2-x^2}$ para que tenhamos $y = x + \frac{1}{n}$ satisfazendo $y^2 < 2$. O caso em que $x \leq 0$ segue trivialmente, pois basta separar em dois casos: se $x < 0$, tomamos $y = \frac{x}{2} < 0$, que também pertence a $E$ e satisfaz $x < y$; se $x = 0$, tomamos $y = 0,5$, que também pertence a $E$ (pois $(0,5)^2 = 0,25 < 2$) e tem-se $x < y$.

Uma dúvida que pode surgir é sobre a existência de tal $n > \frac{2x+1}{2-x^2}$. Quem nos garante tal existência é o Teorema da Divisão de Euclides. Veja que o número $\frac{2x+1}{2-x^2}$ pode ser representado por $\frac{p}{q}$. Procuramos, então, um número natural $n$ tal que $n > \frac{p}{q}$. Para isso, dividimos $p$ por $q$ e obtemos um número natural $m$ tal que $p = mq + r$, onde $r$ é um inteiro satisfazendo $0 \leq r < q$. Desta forma, segue que $p < mq + q = (m+1)q$. Basta escolhermos, então, $n := m + 1$. $\square$

Assim, de fato, nem todo corte é determinado por números racionais. A proposição a seguir mostra a existência de infinitos cortes que não são racionais.

**Proposição 4.9.** *Sejam $r$ um número primo e os subconjuntos de números racionais*

$$A = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 < r \ \ ou \ \ x \leq 0\}$$

*e*

$$B = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 \geqslant r \ \ e \ \ x > 0\}.$$

*Então, o par ordenado $(A, B)$ é um corte.*

*Demonstração:*

A demonstração deste resultado segue os mesmos passos do Exemplo 4.8. Decidimos, mesmo assim, detalhar sua demonstração.

A condição 1 é facilmente verificada, pois $A$ e $B$ já são não vazios. Vamos mostrar que a união de ambos forma $\mathbb{Q}$. Da mesma forma que no Exemplo 4.8, mostra-se que $A \cup B = \mathbb{Q}$. Para mostrarmos a condição ,2 sejam $a \in A$ e $b \in B$. Isso implica que $a^2 < r$ ou $a \leq 0$ e $b^2 \geq r$ e $b > 0$. Tem-se que $a^2 < r \leq b^2$. Ou seja $a^2 < b^2$. Então $a < b$. Para mostrarmos a condição 3, precisamos mostrar que $A$ não possui elemento máximo. Se $x^2 < r$, queremos mostrar que existe um número racional $y \in A$, com $y > x$ tal que $y^2 < r$. Tomamos $y = x + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*$. Precisamos determinar $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $y^2 < r$. Então, $y^2 = (x + \frac{1}{n})^2 = (x^2 + 2x\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) = (2x + \frac{1}{n})\frac{1}{n} + x^2$. Dessa forma, temos que

$$y^2 < r \Leftrightarrow (2x + \frac{1}{n})\frac{1}{n} + x^2 < r \Leftrightarrow (2x + \frac{1}{n})\frac{1}{n} < r - x^2.$$

Veja que $n \geq 1$, então $1 \geq \frac{1}{n}$. Agora, observe que

$$(2x + \frac{1}{n}) \leq 2x + 1 \Rightarrow (2x + \frac{1}{n})\frac{1}{n} \leq (2x+1)\frac{1}{n}.$$

Mas, veja que

$$(2x+1)\frac{1}{n} < r - x^2 \Leftrightarrow \frac{n}{2x+1} > \frac{1}{r - x^2} \Leftrightarrow n > \frac{2x+1}{r - x^2}.$$

Portanto, basta tomarmos $n > \dfrac{2x+1}{r-x^2}$ para todo $r$ primo. Lembre-se que este $n$ existe pela Divisão de Euclides. $\square$

Com a existência de cortes que não sejam racionais, levamos nós a definir esse novo corte.

**Definição 4.10.** *Um corte $(A, B)$, onde o conjunto $B$ não possui menor elemento em $\mathbb{Q}$, denomina-se um corte irracional.*

A Proposição 4.9 fornece infinitos exemplos de cortes irracionais. Um detalhe para se mostrar essa afirmação é garantir que não existe um elemento mínimo para o conjunto $B$. Para asssim fazer, basta seguir passos análogos da demonstração da proposição em questão. Deixamos essa tarefa a cargo do leitor.

Com posse de todos os cortes racionais e irracionais, temos condições de introduzir um novo conceito de número.

**Definição 4.11.** *O conjunto $\mathbb{R}$ formado de todos os cortes racionais e irracionais é denominado conjunto dos números reais, e seus elementos (os cortes) são chamados de números reais.*

Em outras palavras, a união de todos os cortes racionais e irracionais em $\mathbb{Q}$ é o objeto que queríamos construir no início deste capítulo. Assim, segundo a definição, um corte será um número real. Então, quando o corte for racional, dizemos que o número é racional e, quando o corte for irracional, dizemos que o número é irracional.

A partir de agora, nos preocuparemos em munir o conjunto $\mathbb{R}$ dos cortes em $\mathbb{Q}$ com uma estrutura aritmética que possua as propriedades familiares dos números reais, como associatividade, comutatividade, existência de elemento inverso ou simétrico, e outras. Antes disso, vamos falar um pouco sobre ordenação.

## 4.2 Relação de Ordem no Conjunto $\mathbb{R}$

**Definição 4.12.** *Sejam $\alpha$ e $\beta$ dois números reais, onde $\alpha = (A, B)$ e $\beta = (C, D)$. Dizemos que $\alpha > \beta$, e lê-se $\alpha$ maior do que $\beta$ se existir um número $x$ que pertença a $A$ e a $D$ ao mesmo tempo. Mais precisamente,*

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{Q};\ x \in A \cap D.$$

*E dizemos que $\alpha < \beta$, e lê-se $\alpha$ menor do que $\beta$, se existir um número $x$ que seja de $B$ e de $C$ ao mesmo tempo. Mais precisamente,*

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{Q}; x \in B \cap C.$$

*Escreveremos também $\alpha \leq \beta$ (ou $\alpha \geq \beta$) para dizer que $\alpha$ é menor (respectivamente, maior) ou é igual a $\beta$.*

Considere os cortes dos Exemplos 4.4 e 4.5 dados, respectivamente, por

$$\alpha = \left(\{x \in \mathbb{Q}; x < \frac{3}{5}\}, \{x \in \mathbb{Q}; x \geq \frac{3}{5}\}\right)$$

e

$$\beta = \left(\{x \in \mathbb{Q}; x < \frac{1}{2}\}, \{x \in \mathbb{Q}; x \geq \frac{1}{2}\}\right).$$

Então, temos que $\alpha > \beta$, pois existe $x = 0,55$ tal que

$$0,55 \in \{x \in \mathbb{Q}; x < \frac{3}{5}\} \cap \{x \in \mathbb{Q}; x \geq \frac{1}{2}\}.$$

**Proposição 4.13.** *Sejam dois números reais $\alpha = (A, B)$ e $\beta = (C, D)$. Então,*
*1. $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow A \subset C$;*
*2. $\alpha < \beta \Leftrightarrow A \subset C$ e $A \neq C$.*
*Demonstração:*

1. ($\Rightarrow$) Nossa hipótese é que $\alpha \leq \beta$. Assim, temos dois caso a considerar: $\alpha = \beta$ e $\alpha < \beta$. Suponha que $\alpha = \beta$. Pela Definição 4.3, tem-se que $A = C$. Suponha, agora, que $\alpha < \beta$. Assim, existe $x \in B \cap C$, isto é, $x \in C$ e $x \in B$. Afirmamos que $A \subset C$. De fato, considere $a \in A$ e lembre-se que $x \in B$. Então, $a < x$ pela condição 2 de cortes. Isso implica que $a \in C$, pois, se $a$ não estivesse em $C$, necessariamente estaria em $D$, onde teríamos que $x < a$, mas isso é uma contradição. Logo. $A \subset C$.
($\Leftarrow$) Agora, nossa hipótese é que $A \subset C$. Se $A = C$, então $\alpha = \beta$ e nada há o que fazer. Se, porém, $A \subset C$ com $A \neq C$, então existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x$ pertence ao mesmo tempo a $C$ e a $B$ (pois não está em $A$). Isso quer dizer que $\alpha < \beta$, como queríamos demonstrar.

2. ($\Rightarrow$) Nossa hipótese é que $\alpha < \beta$. Logo, existe $x \in B \cap C$, ou seja, $x \in C$ mas $x \notin A$. Assim, temos que $A \neq C$. Afirmamos que $A \subset C$. De fato, considere $a \in A$ e $x \in B \cap C$. Se o elemento $a$ não pertencesse ao conjunto $C$, ele estaria contido em $D$ e, portanto, $x < a$ pois $x \in C$. Por outro lado, como $x$ também está em $B$ e $a$ está em $A$, segue que $a < x$. As duas desigualdades anteriores formam uma contradição. Assim, necessariamente, $A \subset C$.

($\Leftarrow$) Agora, nossa hipótese é $A \subset C$ e $A \neq C$. Assim, existe $x \in C$, mas $x \notin A$, donde tem-se que $x \in B \cap C$, isto é, $\alpha < \beta$. □

A Proposição 4.13 nos possibilita mostrar que o símbolo "<" satisfaz a propriedade de transitividade. Confira o lema abaixo.

**Lema 4.14.** *Sejam $\alpha = (A, B)$, $\beta = (C, D)$ e $\gamma = (E, F)$ números reais. Se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, então $\alpha < \gamma$.*
*Demonstração:*

Pela Proposição 4.13, segue que $A \subset C$, com $A \neq C$, e $C \subset E$, com $C \neq E$. Nesta situação, temos que $A \subset E$ e existe um elemento em $E$ que não pertence a $A$. Isso é o mesmo que $A \subset E$, com $A \neq E$, que, pela Proposição 4.13, significa $\alpha < \gamma$, como queríamos demonstrar. $\square$

**Proposição 4.15.** *Para quaisquer dois números reais $\alpha$ e $\beta$, temos que*
*1. Se $\beta > \alpha \Rightarrow \alpha < \beta$;*
*2. Se $\beta < \alpha \Rightarrow \alpha > \beta$.*
*Demonstração:*

Consideramos $\alpha = (A, B)$ e $\beta = (C, D)$.
1. Temos como hipótese que $\beta > \alpha$. Assim, existe $x \in C \cap B$. Mas isso é equivalente a escrever $x \in B \cap C$, isto é, $\alpha < \beta$.
2. Temos como hipótese que $\beta < \alpha$. Assim, existe $x \in D \cap A$. Ora, isso é equivalente a escrever $x \in A \cap D$, isto é, $\alpha < \beta$.
É importante ressaltar que, se os pares ordenados $(A, B)$ e $(C, D)$ mudarem a ordem, nada do que fizemos está correto. $\square$

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais também possui a propriedade de tricotomia, igualmente os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais.

**Teorema 4.16.** *Sejam dois números reais $\alpha$ e $\beta$. Então, apenas uma das três alternativas deve ocorrer:*

$$\alpha = \beta \quad ou \quad \alpha > \beta \quad ou \quad \alpha < \beta.$$

*Demonstração:*

Sejam $\alpha = (A, B)$ e $\beta = (C, D)$ cortes. Iremos dividir a demonstralçao em três casos.

Caso 1. Suponha que $\alpha = \beta$. Então, $\alpha > \beta$ não pode ocorrer, pois se $\alpha > \beta$, existe $x \in A \cap D$. Mas isso implica a existência de um $x \in A$ e $x \notin C$, contrariando o fato de que $A = C$. De forma análoga, se supomos que $\alpha = \beta$, então $\alpha < \beta$ não pode ocorrer, caso contrario existe $x \in B \cap C$. Mas isso implica a existência de $x \in C$ e $x \notin A$, contrariando o fato de que $A = C$. Portanto, se $\alpha = \beta$, então $\alpha > \beta$ e $\alpha < \beta$ não ocorrem.

Caso 2. Suponha agora que $\alpha > \beta$. Então, existe $x \in A \cap D$. Logo, $\alpha < \beta$ não pode ocorrer, pois, se $\alpha < \beta$ ocorrer, existe $x' \in B \cap C$, e teríamos que $x < x'$ e $x > x'$, que é um absurdo. $\alpha = \beta$ também não pode ocorrer, pois, se $\alpha = \beta$ ocorrer, pela Definiçao 4.3, $A = C$ o que contradiz o fato de existir $x \in A \cap D$, ou seja, $x \in A$ mas $x \notin C$. Portando, se $\alpha > \beta$, então $\alpha < \beta$ e $\alpha = \beta$ não ocorrem.

O Caso 3 recai sobre o caso 2 quando usamos a Proposição 4.15. Veja que $\alpha < \beta$ implica que $\beta > \alpha$ e, assim, estamos no caso 2, onde não podem ocorrer $\beta = \alpha$ nem $\beta < \alpha$. $\square$

Para cada número racional $r$, usaremos a seguinte notação para o número real

$$r^{\bullet} = (\{x \in \mathbb{Q}; x < r\}), (\{x \in \mathbb{Q}; x \geq r\})$$

e para simplificarmos nossa escrita, escreveremos apenas $r^\bullet = (\{x < r\}, \{x \geq r\})$. Por exemplo, o elemento $0^\bullet$ é o número real dado por $0^\bullet = (\{x < 0\}, \{x \geq 0\})$.

Até aqui, já sabemos ordenar os elementos de $\mathbb{R}$. Mas podemos ampliar nosso conhecimento quanto a este conjunto.

**Definição 4.17.** *Seja $\alpha$ um número real. Dizemos que $\alpha$ é positivo se $\alpha > 0^\bullet$, e denotaremos de $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. $\alpha$ será negativo se $\alpha < 0^\bullet$, e denotaremos de $\mathbb{R}^-$ o conjunto dos números reais negativos.*

Enunciaremos a seguinte definição que será rica em informações para podermos apresentar mais resultados quanto aos números reais.

**Definição 4.18.** *Seja $Z$ um subconjunto de números racionais. Então, escreveremos $-Z = \{-z; z \in Z\}$. Caso exista o mínimo de $Z$, assumiremos que $Z' = Z \setminus \{\min Z\}$. Caso contrário, isto é, se o mínimo não existir, escreveremos $Z' = Z$. Também iremos escrever $Z'' = Z \cup \{\min Z^c\}$ se o mínimo de $Z^c$ existir, onde $Z^c$ é o complementar de $Z$ em $\mathbb{Q}$. Caso não exista, chamaremos $Z'' = Z$.*

**Teorema 4.19.** *Seja $\alpha = (A, B)$ um número real. Então, $\alpha^{\boxdot} = (-B', -A'')$ também será um número real. E, além do mais, as seguintes propriedades são válidas:*
*1. $\alpha \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \alpha^{\boxdot} \in \mathbb{R}^-$;*
*2. Se $\alpha \in \mathbb{R}^- \Rightarrow \alpha^{\boxdot} \in \mathbb{R}^+$.*
*Demonstração:*

Iremos dividir a demonstração em duas partes. Mostraremos primeiro que $\alpha^{\boxdot}$ é um número real, ou seja, que $\alpha^{\boxdot}$ é um corte. Posteriormente, iremos mostrar a propriedade 1. A propriedade 2, deixaremos a cargo do leitor a demonstração.

Parte 1. Queremos mostrar que $\alpha^{\boxdot} = (-B', -A'')$ é corte. A condição 1 é satisfeita, pois, como $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, então, por definição, $-A'' \neq \emptyset$ e $-B' \neq \emptyset$. Seja $x$ um número racional tal que $x \notin -A''$. Se $x \notin -A''$, então $x \notin -(A \cup \{\min A^c\})$, o que implica que $x \notin -(A \cup \{\min B\})$ e, portanto, $-x \notin (A \cup \{\min B\})$. Assim, $-x \neq \min B$ e $-x \notin A$. Então, necessariamente, $-x \in B$. Logo, $-x \in (B \setminus \{\min B\})$ o que é equivalente a $x \in -(B \setminus \{\min B\})$, isto é, $x \in -B'$. Portanto, $(-A'') \cup (-B') \supseteq \mathbb{Q}$. A inclusão contrária é óbvia. Para provarmos a condição 2, seja $r \in -B'$ e $s \in -A''$. Temos que $-r \in B'$ e $-s \in A''$. Isso implica que $-r \in (B \setminus \{\min\ B\})$ e $-s \in (A \cup \{\min B\})$, ou seja $-r \in B$ com $-r \neq \min B$ e $-s \in A$ ou $-s = \min B$. Assim, temos dois casos a considerar.

Caso 1: $-r \in B$ com $-r \neq \min B$ e $-s \in A$. Pela condição 2 de corte, segue que $-s < -r$, ou seja, $r < s$.

Caso 2: $-r \in B$ com $-r \neq \min B$ e $-s = \min B$. Então, por definição de mínimo, $-s \leq b$ para todo $b \in B$. Mas observe que $-r \neq \min B$. Logo, $-s < -r$, isto é, $r < s$. Isso mostra que, em qualquer caso, $r < s$. Para provar a condição 3, temos que provar que $-B'$ não pussui elemento máximo. Suponha que possua. Digamos que $x \in -B'$ é tal que $x \geq b$ para todo $b \in -B'$. Isso implica que $-x \leq -b$ com $-b \in B'$. Mas isso não pode ocorrer, uma vez que $-x \in B'$ e $B'$ não possui mínimo por definição. Portanto, $-B'$ não possui elemento máximo.

Parte 2: (1) $\alpha > 0^\bullet \Rightarrow \alpha^\boxdot < 0^\bullet$. Temos como hipótese que $\alpha > 0^\bullet$. Então, existe um número racional $x \in A$ e $x \in \{x \geq 0\}$, e isso implica que $x \in A \cup \{\min A^c\}$ e $x \geq 0$. Assim, $x \in A''$ e $x \geq 0$. Daí, $-x \in -A''$ e $-x \leq 0$. Se $x = 0$, como $A$ não possui elemento máximo (veja condição 3 da Definição 4.1) e $x = 0 \in A$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \in A$. Assim, $-\varepsilon < 0$ e $-\varepsilon \in -A''$, e isto é o mesmo que dizer que $\alpha^\boxdot < 0^\bullet$. Caso $x \neq 0$, temos que existe $-x \in -A'' \cap \{x < 0\}$, o que garante também que $\alpha^\boxdot < 0^\bullet$. □

## 4.3 Adição no Conjunto $\mathbb{R}$

Podemos dar uma aritmética para este novo conjunto numérico, definindo nele noções de soma e multiplicação entre dois números reais. Nesta seção, apresentaremos apenas a noção de soma. A partir de agora, para quaisquer dois subconjuntos de números racionais $A$ e $B$, denotaremos $A + B = \{a + b; a \in A \, e \, b \in B\}$.

**Observação 4.20.** *Note que, por definição e pela comutatividade dos números racionais, temos que $A + B = B + A$ para para quaisquer subconjuntos de números racionais $A$ e $B$.*

Definiremos primeiramente a adição ou soma entre dois números reais. Considere a função abaixo.

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha + \beta = (A + C, (A + C)^c), \end{array}$$

onde $\alpha = (A, B)$ e $\beta = (C, D)$. A operação acima está bem definida, e o teorema a seguir nos garante isso.

**Teorema 4.21.** *Sejam $\alpha = (A, B)$ e $\beta = (C, D)$ dois números reais. Então, $\theta = \alpha + \beta$ é um número real.*
*Demonstração:*

Para provarmos este teorema, precisamos provar que $\theta = (A + C, (A + C)^c)$ é um corte. A condição 1 é fácil de se verificar, pois $A + C \neq \emptyset$ por consequência de $\alpha$ e $\beta$ serem cortes. Veja também que $(A + C)^c \neq \emptyset$ , pois se tomarmos $a' \notin A$ e $c' \notin C$, teremos que $a + c < a' + c'$ para todo $a \in A$ e $c \in C$. Assim, $a' + c' \notin A + C$. Então, necessariamente, deve pertencer a $(A+C)^c$. Claramente, tem-se que $(A+C) \cup (A+C)^c = \mathbb{Q}$. Para mostrarmos a condição 2, seja

$s \in A+C$ e $t \in (A+C)^c$. Queremos mostrar que $s < t$. Por contradição, suponha que $t < s$. Ora, veja que $s = a + c$ com $a \in A$ e $c \in C$. Logo, $t < a + c$, implia que $t - c < a$. Assim, $t - c \in A$ pelas condições 1 e 2 de corte. Daí, segue que $t = (t-c) + c \in A + C$, ou seja, $t \in A + C$. Absurdo, pois $t$ está exatamente no complementar deste conjunto. O caso $s = t$ é claramente impossível, pois um elemento está em um conjunto e o outro está no conjunto complementar. Já a condição 3, para mostrarmos, iremos supor que $k_0 = a_0 + c_0$ seja o máximo de $A + C$. Isso implica que $a + c \leq a_0 + c_0 = k_0$ para todo $a \in A$ e $c \in C$. Daí, segue que $a \leq a_0 + c_0 - c$. Se é para todo $c \in C$, tomamos $c = c_0$. Então, $a \leq a_0$ para todo $a \in A$. Mas isso é um absurdo, pois $\alpha$ é corte e $A$ não tem elemento máximo. Portanto, $A + C$ não pode pusuir elemento máximo. Isso conclui a demonstração do teorema $\square$

Assim, somar dois números reais quaisquer, resulta em outro número real.

Para exemplificar o conceito de soma entre dois números reais, considere

$$\alpha = (\{x < 1\}, \{x \geq 1\})$$

e

$$\beta = (\{x < 3\}, \{x \geq 3\})$$

dois cortes. Por definição de soma, temos que

$$\alpha + \beta = (\{x < 1\} + \{x < 3\}, (\{x < 1\} + \{x < 3\})^c) = (\{x < 4\}, \{x \geq 4\}).$$

**Proposição 4.22.** *Sejam $\alpha, \beta$ e $\theta$ números reais. Então, são satisfeitas as seguintes propriedades:*

$P_1)$ $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

$P_2)$ $(\alpha + \beta) + \theta = \alpha + (\beta + \theta)$.

*Demonstração:*

Para fins de demonstração, sejam $\alpha = (A, B), \beta = (C, D)$ e $\theta = (E, F)$. Demonstraremos primeiro a propriedade $P_1$, e em seguida, $P_2$. Temos que

$$\alpha + \beta = (A + C, (A + C)^c) = (C + A, (C + A)^c) = \beta + \alpha.$$

Pois a comutatividade dos números racionais veja (observação) 4.20. Portanto, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. Para provar $P_2$, tem-se

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta) + \theta &= (A + C, (A + C)^c) + (E, F) \\
&= [(A + C) + E,\ ((A + C) + E)^c] \\
&= [A + (C + E), (A + (C + E))^c] \\
&= (A, B) + (C + E, (C + E)^c) \\
&= \alpha + (\beta + \theta),
\end{aligned}$$

onde usamos a associatividade em $\mathbb{Q}$. Portanto, $(\alpha+\beta)+\theta=\alpha+(\beta+\theta)$. □

A propriedade 1 da proposição acima se chama comutatividade, isto é, para quaisquer dois números reais, podemos comutar sua soma, $\alpha$ somado com $\beta$ será igual a $\beta$ somado com $\alpha$. Já a propriedade 2 se chama associatividade, isto é, somando os dois primeiros números reais a um terceiro é o mesmo que somar os dois últimos números reais ao primeiro.

Já sabemos somar dois números reais, e que valem algumas propriedades para os mesmos. A partir desses conceitos, podemos enunciar um resultado importante para a soma de dois números reais.

**Teorema 4.23.** *Para todo número real $\alpha$, existe um único número real $0^\bullet$ tal que $\alpha+0^\bullet=\alpha$.*
*Demonstração:*

Já temos o conhecimento da soma de dois números reais. Aqui, queremos provar que, para todo $\alpha\in\mathbb{R}$, temos que $\alpha+0^\bullet=\alpha$.

$$\alpha+0^\bullet=(A+\{x<0\},(A+\{x<0\})^c).$$

Queremos mostrar que $A=A+\{x<0\}$. Tomamos $r=p+q\in A+\{x<0\}$ com $p\in A$ e $q\in\{x<0\}$, isto é, $q<0$. Assim, temos que $r<p$. Então, $r\in A$ pelas condições 1 e 2 de corte. Logo, $A+\{x<0\}\subset A$. Agora, tomamos $r\in A$ e $t\in A$ tal $r<t$. Veja que podemos escrever $r=t+(r-t)$, onde $(r-t)\in\{x<0\}$, isto é, $(r-t)<0$. Então, $t+(r-t)\in A+\{x<0\}$, ou seja, $r\in A+\{x<0\}$. Logo, $A\subset A+\{x<0\}$. Portanto, $A=A+\{x<0\}$. Agora, provaremos a unicidade de $0^\bullet$, isto é, existe um, e apenas um número real $0^\bullet$ que satisfaz o teorema .

Suponha que existe outro elemento $0^\triangleright$ tal que $\alpha+0^\triangleright=\alpha$ e $\alpha+0^\bullet=\alpha$ para todo $\alpha\in\mathbb{R}$. Assim, temos que $0^\bullet+0^\triangleright=0^\bullet$ como também $0^\triangleright+0^\bullet=0^\triangleright$. Então, $0^\bullet=0^\triangleright$. Logo, o elemento $0^\bullet$ é único. E $0^\bullet$ será chamado de elemento neutro da soma de números reais. □

Para mostrarmos os próximos resultados que serão muito importantes para nossos estudos, iremos enunciar o seguinte lema, mas não daremos sua demonstração.

**Lema 4.24.** *Sejam $\alpha=(A,B)$ um número real e $t$ um número racional positivo. Então, existe $a\in A$ e $b\in B$ tal que $t=b-a$ e $b$ não é elemento mínimo de $B$.*
*Demonstração:*

Veja [6], Lema 3.4.5, ou [13], Lema 3.15. □

**Teorema 4.25.** *Para todo $\alpha\in\mathbb{R}$, existe um, e apenas um número real $\beta$ tal que $\alpha+\beta=0^\bullet$.*
*Demonstração:*

Sejam $\alpha=(A,B)$ e $\beta=\alpha^{\boxdot}=(-B',-A'')$ números reais. Queremos mostrar que $\alpha+\alpha^{\boxdot}=0^\bullet$, isto é, $\alpha+\alpha^{\boxdot}=(\{x<0\},\{x\geq 0\})$. Pela definição de soma de números reais, tem-se $\alpha + \alpha^{\boxdot} = (A + (-B'), (A + (-B'))^c)$. Seja $t \in A + (-B')$ tal que $t = a + b$ com $a \in A$ e $b \in -B'$. Se $b \in -B'$, então $-b \in B'$ e $-b \notin A''$, pois um elemento não pode pertencer a um conjunto e ao seu complementar. Assim, $-b \notin A$ e, portanto,

$$a < -b \Rightarrow t = a + b < 0 \Rightarrow t < 0.$$

Assim, $t \in \{x < 0\}$. Logo, $\{x < 0\} \supset (A + (-B'))$. Agora, tomaremos $t \in \{x < 0\}$. Pelo Lema 4.24, existe $p \in A$ e $q \in B'$ tal que $-t = q - p$, então $t = p + (-q)$ com $p \in A$ e $-q \in -B'$. Mas isso implica que $t \in (A + (-B')$. Logo, $(A + (-B')) \supset \{x < 0\}$. Portanto, $(A + (-B')) = \{x < 0\}$. Então, $\alpha + \beta = 0^\bullet$. □

Denotaremos a partir daqui $\beta = -\alpha$ e chamaremos este elemento de oposto (simétrico ou inverso) aditivo de $\alpha$.

**Proposição 4.26.** *Se $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha = -(-\alpha)$.*
*Demonstração:*

Pelo teorema anterior, vimos que $\alpha + \beta = 0^\bullet$, ou equivalentimente $\beta + \alpha = 0^\bullet$. Então, veja que o simétrico aditivo de $\alpha$ é $-\beta$, isto é, $\alpha = -\beta$, então $\alpha = -(-\alpha)$, pois $\beta$ é simétrico aditivo de $\alpha$, isto é, $\beta = -\alpha$. □

O Teorema 4.25 nos garante que, para todo número real $\alpha$, existe o seu simétrico aditivo $-\alpha$ tal que $\alpha + (-\alpha) = 0^\bullet$. Então, podemos efetuar as somas de $\alpha + \beta$ e $\alpha + (-\beta)$. Assim, podemos definir uma nova operação em $\mathbb{R}$, que chamaremos de subtração de números reais.

**Definição 4.27.** *A subtração de dois números reais $\alpha$ e $\beta$ é dada por $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$.*

Em outras palavras, tomar a subtração de $\alpha$ e $\beta$ significa somar $\alpha$ com o simétrico aditivo de $\beta$.

Relembrando o que já aprendemos até aqui, quanto ao conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, já sabemos ordenar, somar, comutar, associar e subtrair quaisquer dois elementos em $\mathbb{R}$. Para continuarmos com nosso estudo, introduziremos um novo conceito, o módulo. O módulo ou valor absoluto de um número $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Definição 4.28.** *Seja $\alpha$ um número real. O módulo de $\alpha$ é dado por:*

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, \ se \ \alpha \geq 0^\bullet \\ -\alpha, \ se \ \alpha < 0^\bullet. \end{cases} \tag{4.1}$$

**Proposição 4.29.** *Para todo número real $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que*
1. $|\alpha| \geq 0^\bullet$;
2. $|\alpha| = 0^\bullet \Leftrightarrow \alpha = 0^\bullet$.

*Demonstração:*

1. Vamos mostrar que $|\alpha| \geq 0^\bullet$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha \geq 0^\bullet$, então $|\alpha| = \alpha \geq 0^\bullet$. Daí, segue que $|\alpha| \geq 0^\bullet$. Sendo assim, a igualdade é satisfeita. Veja que, se $\alpha < 0^\bullet$, então $-\alpha > 0^\bullet$. Daí, $|\alpha| = -\alpha > 0^\bullet$. Então, $|\alpha| > 0^\bullet$.

2. Mostraremos agora que $|\alpha| = 0^\bullet \Leftrightarrow \alpha = 0^\bullet$.

($\Rightarrow$) Temos como hipótese que $|\alpha| = 0^\bullet$. Se $\alpha > 0^\bullet$, então $|\alpha| = \alpha > 0^\bullet$. Logo, $|\alpha| > 0^\bullet$. Mas isso não pode ocorrer, pois contraria a nossa hipótese de $|\alpha| = 0^\bullet$. Se $\alpha < 0^\bullet$, então $-\alpha > 0^\bullet$. Logo, $|\alpha| = -\alpha > 0^\bullet$, donde segue que $|\alpha| > 0^\bullet$. Veja que caímos na mesma contradição. Portanto, $|\alpha| = 0^\bullet$ pela tricotomia em $\mathbb{R}$.

($\Leftarrow$) Agora, nossa hipótese é que $\alpha = 0^\bullet$. Se $\alpha = 0^\bullet$, então $|\alpha| = \alpha = 0^\bullet$ por definição . □

Mostramos que o módulo de todo número real é maior ou igual a zero. Mas podemos ter ainda mais propriedades sobre módulo com o seguinte teorema.

**Teorema 4.30.** *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, então*

1. $|\alpha| \geq \alpha$*;*
2. $|-\alpha| = |\alpha|$.

*Demonstração:*

Mostraremos a 1, e a 2 deixaremos a cargo do leitor. Se $\alpha \geq 0^\bullet$, então $|\alpha| = \alpha$. Assim, temos que a igualdade é satisfeita. Se $\alpha < 0^\bullet$, então $-\alpha > 0^\bullet$. Daí, $|\alpha| = -\alpha > 0^\bullet > \alpha$. Isso, mediante o Lema 4.14, implica que $|\alpha| > \alpha$. Logo, a desigualdade é satisfeita. Assim, $|\alpha| \geq \alpha$ □

## 4.4 Multiplicação no Conjunto $\mathbb{R}$

Nesta seção, definiremos a multiplicação de números reais e provaremos algumas de suas propriedades. Para fins de notação, denotaremos o produto de dois subconjuntos de números racionais $A$ e $B$ por $A \cdot B = \{a.b;\ a \in A \text{ e } b \in B\}$. Se $\alpha = (A, B)$ é um número real positivo, então escreveremos $A_+ = A \setminus x < 0$.

De forma análoga ao que acontece na soma de números reais na seção anterior, o produto de dois números reais também será um número real. Considere,

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha.\beta = \Big( (A_+ \cdot B_+) \cup \{x < 0\}, ((A_+ \cdot B_+) \cup \{x < 0\})^c \Big). \end{array}$$

A operação acima está bem definida, e mostraremos com a demonstração do teorema a seguir:

**Teorema 4.31.** *Sejam $\alpha = (A, B)$ e $\beta = (C, D)$ dois números reais positivos. Então, $\theta = \alpha.\beta$ é um número real.*

*Demonstração:*

Provaremos que, de fato, $\alpha.\beta$ é um número real, ou seja, provaremos que

$$\theta = \Big( (A_+ \cdot C_+) \cup \{x < 0\}, ((A_+ \cdot C_+) \cup \{x < 0\})^c \Big)$$

é corte.

Mostraremos que todas as condições de cortes são satisfeitas. Veja que $((A_+ \cdot C_+) \cup \{x < 0\}) \neq \emptyset$. Mostraremos que $((A_+ \cdot C_+) \cup \{x < 0\})^c \neq \emptyset$. Suponha que seja vazio. Assim,

$$((A_+ \cdot C_+) \cup \{x < 0\}) = \mathbb{Q} \Leftrightarrow (A_+ \cdot C_+) = \{x \geq 0\}.$$

Como $\alpha$ e $\beta$ são números reais positivos, tomamos $0 < b \in B$ e $0 < d \in D$. Tem-se que $a < b$ e $c < d$ para todo $a \in A_+ \ e \ c \in C_+$. Mas isso implica que $a.c < b.d$ para todo $a \in A_+$ e $c \in C_+$. Absurdo, pois o conjunto $A_+.C_+$ é formado por todos os números racionais não negativos. Vamos mostrar a condição 2. Seja $r \in ((A_+ \cdot B_+) \cup \{x < 0\})$ e $s \in ((A_+ \cdot B_+) \cup \{x < 0\})^c = (A_+ \cdot B_+)^c \cap \{x < 0\}^c = (A_+ \cdot B_+)^c \cap \{x \geq 0\}$, então $s \in \{x \geq 0\}$. Queremos mostrar que $r < s$. Observe que $r = s$ é claramente falso, pois não é possível que $r = s \in ((A_+ \cdot B_+) \cup \{x < 0\})$ e pertença ao seu complementar. Se $r \in ((A_+ \cdot B_+) \cup \{x < 0\})$, então $r \in (A_+ \cdot B_+)$ ou $r \in \{x < 0\}$. Assim, suponha que $r \in \{x < 0\}$ e $s \in \{x \geq 0\}$. Logo, $r < s$. Agora, se $r \in (A_+ \cdot C_+)$, ou seja, $r = a.c$ para alguns $a \in A_+$ e $c \in C_+$, temos que $s < r = a.c$. Se $c = 0$, tem-se $s < 0$ com $s \in \{x \geq 0\}$. Absurdo. Mas se $c \neq 0$, temos que $s < a.c$, isto é, $\dfrac{s}{c} < a$, ou seja, $\dfrac{s}{c} \in A$. Como $s \in \{x \geq 0\}$, tem-se que $s = (\frac{s}{c}).c \in A_+ \cdot C_+$. Então, $s \in ((A_+ \cdot C_+) \cup \{x < 0\})$. Absurdo, pois $s$ pertence ao complementar deste conjunto. Logo, necessariamente, $r < s$. Já a condição 3, iremos supor que $(A_+ \cdot C_+)$ tenha máximo, digamos $m = a_0.c_0 \in (A_+ \cdot C_+) \cup \{x < 0\}$. Observe que $m = a_0.c_0 \neq 0$, pois $\alpha$ e $\beta$ já são cortes positivos pela hipótese do teorema. Então, $a.c \leq a_0.c_0$ para todo $a \in A_+$ e $c \in C_+$. Tomando $c = c_0$, tem-se que $a.c_0 \leq a_0.c_0$, implica que $a \leq a_0$ para todo $a \in A_+$. Assim, $A_+$ tem elemento máximo. Mas veja que $a \in A_+ \cup \{x < 0\} = A$. Isso implica que $A$ também tem elemento máximo, que é um absurdo. Isso conclui a demonstração do teorema. □

Então, a multiplicação de números reais fica bem definida. Veja que podemos ter outros possíveis casos para $\alpha$ e $\beta$. Assim, iremos ampliar mais a noção de multiplicação de números reais. Utilizando a função módulo de um número real, podemos dar uma definição para multiplicação de números reais que não sejam apenas positivos.

**Definição 4.32.** *Sejam $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$. Então, a multiplicaçao de $\alpha.\beta$ é definida por:*

$$\alpha.\beta = \begin{cases} |\alpha|.|\beta|, \ se \ \alpha < 0^\bullet \ e \ \beta < 0^\bullet; \\ -(|\alpha|.|\beta|), \ se \ \alpha > 0^\bullet \ e \ \beta < 0^\bullet; \\ -(|\alpha|.|\beta|), \ se \ \alpha < 0^\bullet \ e \ \beta > 0^\bullet; \\ 0^\bullet, \ se \ \alpha = 0^\bullet \ ou \ \beta = 0^\bullet. \end{cases}$$

Pela definição de produto, segue de imediato que $\alpha.0^\bullet = 0^\bullet$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Por consequência da definição de multiplicaçaõ de números reais, surgem as seguintes propriedades de números reais.

**Teorema 4.33.** *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então, são válidas as seguintes propriedades:*
$P_1.)$ $\alpha.1^\bullet = \alpha$;
$P_2.)$ $(-\alpha).(-\beta) = \alpha.\beta$;
$P_3.)$ $(-\alpha).\beta = \alpha.(-\beta) = -(\alpha.\beta)$.
*Demonstração:*

Para provarmos a $P_1$, sejam $\alpha = (A, B)$ e $1^\bullet = (\{x < 1\}, \{x \geq 1\})$ números reais positivos. Temos que

$$\begin{aligned} \alpha.1^\bullet &= (A_+ \cdot \{x < 1\}_+ \cup \{x < 0\}, (A_+ \cdot \{x < 1\}_+ \cup \{x < 0\})^c) \\ &= (A_+ \cdot [0, 1) \cup \{x < 0\}, (A_+ \cdot [0, 1) \cup \{x < 0\})^c). \end{aligned}$$

Queremos provar que $A_+ \cdot [0, 1) \cup \{x < 0\} = A$. Seja $y \in (A_+ \cdot [1, 0) \cup \{x < 0\})$, então $y \in A_+ \cdot [0, 1)$ ou $y \in \{x < 0\}$. Se $y \in \{x < 0\}$, então $y \in A$, pois deve existir $\delta > 0$ em $A$ tal que $y < 0 < \delta$, pois $\alpha$ é positivo. Se $y \in A_+ \cdot [0, 1)$, então $y = a.b$ com $a \in A_+$ e $b \in [0, 1)$. Daí, segue que $a.b \leq a$ para todo $a \in A_+$ e, portanto, $y = a.b \in A$. Então, $A \supset A_+ \cdot [0, 1) \cup \{x < 0\}$. Agora, tomamos $y \in A$. Se $y < 0$, temos que $y \in \{x < 0\} \Rightarrow y \in A_+ \cdot [1, 0) \cup \{x < 0\}$. Se $y \geq 0$, então $y \in A_+$. Como $A_+$ não possui elemento máximo, existe $\delta > y$ em $A_+$. Diante disso, escreveremos $y = \delta.\dfrac{y}{\delta}$ onde $\delta \in A_+$ e $0 \leq \dfrac{y}{\delta} < 1$, isto é $\dfrac{x}{\delta} \in [0, 1)$. Mas, isso implica que $y \in A_+ \cdot [0, 1) \cup \{x < 0\}$. Dessa forma, $A_+ \cdot [0, 1) \cup \{x < 0\} \supset A$. Portanto, $A_+ \cdot [0, 1) \cup \{x < 0\} = A$.

Já para a propriedade 2, iremos considerar quatro casos possíveis.
Caso 1. Se $\alpha$ e $\beta$ são positivos, então, pela definição de produto de dois números reais, $\alpha.\beta = |\alpha|.|\beta| = |-\alpha|.|-\beta| = (-\alpha).(-\beta)$.
Caso 2. Se $\alpha$ é positivo e $\beta$ é negativo, segue que

$$\alpha.\beta = -(|\alpha|.|\beta|).$$

Agora, como $-\alpha < 0$ e $-\beta > 0$, segue da definicão de multiplicação de números reais e do Teorema 4.30 que

$$(-\alpha).(-\beta) = -(|-\alpha|).(|-\beta|) = -(|\alpha|.|\beta|).$$

Caso 3. Se $\alpha$ for negativo e $\beta$ for positivo, o resultado segue de maneira semelhante ao Caso 2.
Caso 4. Se $\alpha$ e $\beta$ são negativos, então $|\alpha| = -\alpha$ e $|\beta| = -\beta$. Assim, temos que

$$\alpha.\beta = |\alpha|.|\beta| = (-\alpha).(-\beta).$$

A proprieade $P_3$, o leitor pode estudar a demonstração em [6] Capítulo 4, página 107. □

Mostramos que a multiplicação em $\mathbb{R}$ goza de todas as propriedades citada no teorema acima.O elemento $1^{\bullet}$ da propriedade $P_1$ se chama elemento neutro da multiplicação, pois multiplicar $1^{\bullet}$ por qualquer $\alpha$ não altera o valor de $\alpha$, onde $\alpha$ *e* $1^{\bullet}$ pertencem a $\mathbb{R}$. Já as propriedades $P_2$ e $P_3$ formam as famosas regras de sinais, pois operar $(-\alpha).(-\beta)$ é o mesmo que operar $\alpha.\beta$, e operar $(-\alpha).\beta$ é o mesmo que operar $\alpha.(-\beta)$ e assim por diante. Por exemplo, menos com menos dá mais, pois $(-1).(-1) = 1$ ou ainda $(-a).(-b) = a.b$.

**Teorema 4.34.** *Para quaisquer que sejam $\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$, são válidas as seguintes propriedades:*
$P_1)$ $\alpha.\beta = \beta.\alpha$;
$P_2)$ $\alpha.(\beta.\theta) = (\alpha.\beta).\theta$;
$P_3)$ $\alpha.(\beta + \theta) = \alpha.\beta + \alpha.\theta$.
*Demonstração:*

Com posse das propriedades já demonstradas até aqui, temos condições de provar esse teorema. Utilizaremos todas elas implicitamente para mostrar a propriedade $P_1$. As propriedades $P_2$ e $P_3$, deixaremos a demonstração a cargo do leitor, ou então o mesmo pode consultar a bibliografia [6] Capítulo 4, página 109.

Iremos considerar dois casos para $\alpha$ e $\beta$.
Caso 1 Se $\alpha = 0^{\bullet}$ ou $\beta = 0^{\bullet}$, segue da definição de multiplicação que $\alpha.\beta = \beta.\alpha$.
Caso 2. Vamos considerar que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, onde $\alpha = (A, B)$ e $\beta = (C, D)$. Pela comutatividade dos números racionais, temos que

$$\begin{aligned} \alpha.\beta &= ((A_+ \cdot C_+) \cup \{x < 0\}, ((A_+ \cdot C_+) \cup \{x < 0\})^c) \\ &= ((C_+ \cdot A_+) \cup \{x < 0\}, ((C_+ \cdot A_+) \cup \{x < 0\})^c) \\ &= \beta.\alpha. \end{aligned}$$

Ressaltamos que os demais casos ($\alpha > 0$ e $\beta < 0$, $\alpha < 0$ e $\beta > 0$, e $\alpha < 0$ ou $\beta < 0$) se resumem ao Caso 2, usando a definição de multiplicação e que $|\gamma| \geq 0$ para todo número real $\gamma$ (veja parte 1 da Proposição 4.29). □

**Teorema 4.35.** *Sejam $\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$. Então, são válidas as seguintes propriedades:*
$P_1$ $\alpha > 0^{\bullet}$ *e* $\beta > 0^{\bullet} \Rightarrow \alpha.\beta > 0^{\bullet}$;
$P_2$ $\alpha.\beta = 0^{\bullet} \Rightarrow \alpha = 0^{\bullet}$ *ou* $\beta = 0^{\bullet}$;
$P_3$ $\alpha < \beta$ *e* $\theta > 0^{\bullet} \Rightarrow \alpha.\theta < \beta.\theta$;
$P_4$ $\alpha < \beta$ *e* $\theta < 0^{\bullet} \Rightarrow \alpha.\theta > \beta.\theta$.
*Demonstração:*

De forma análoga, usaremos os teoremas e propriedades já demonstradas até aqui para provarmos as propriedades $P_1$ e $P_2$. As demais o leitor pode resolver como exercício, ou pode estudá-las na mesma referência citada no teorema anterior.

$P_1$. A propriedade 1 é fácil de ser demonstrada. Veja que $\alpha, \beta > 0^\bullet$ por hipótese já. Assim, pelo Teorema 4.31, deve existir $a \in A_+$ e $c \in C_+$ tal que $a.c \in A_+ \cdot C_+$, pois $A$ e $C$ não estão contidos no conjunto $\{x < 0\}$. Mas veja que podemos dizer que $(A_+ \cdot C_+) \cup \{x < 0\}$ também não está contido em $\{x < 0\}$. Portanto, segue que $\alpha.\beta > 0^\bullet$ por definição. Para mostrarmos a propriedade 2, iremos supor por contradição que $\alpha \neq 0^\bullet$ e $\beta \neq 0^\bullet$. Assim, teremos quatro casos a se considerar.
Caso 1. Se $\alpha > 0^\bullet$ e $\beta > 0^\bullet$, então por $P_1$ segue que $\alpha.\beta > 0^\bullet$. Absurdo.
Caso 2. Se $\alpha < 0^\bullet$ e $\beta < 0^\bullet$, então temos $-\alpha > 0^\bullet$ e $-\beta > 0^\bullet$. Pela Propriedade 1, tem-se $(-\alpha).(-\beta) > 0^\bullet$. Absurdo.
Caso 3. Se $\alpha > 0^\bullet$ e $\beta < 0^\bullet$, então temos que $\alpha > 0^\bullet$ e $-\beta > 0^\bullet$. Logo, $\alpha.(-\beta) > 0^\bullet \Rightarrow \alpha.\beta < 0^\bullet$. Absurdo.
Caso 4. Se $\alpha < 0^\bullet$ e $\beta > 0^\bullet$, então $-\alpha > 0^\bullet$ e $\beta > 0^\bullet$. Logo, $(-\alpha).\beta > 0^\bullet \Rightarrow \alpha.\beta < 0^\bullet$. Absurdo. Portanto, $\alpha$ e $\beta$ não podem ser ambos diferentes de $0^\bullet$; um deles deve ser igual a $0^\bullet$. □

Assim como há o oposto aditivo de cada elemento $\alpha$ em $\mathbb{R}$, há também o oposto (ou inverso) multiplicativo de $\alpha$ quando este número for diferente de $0^\bullet$. Neste caso, chamamos de inverso de $\alpha \neq 0^\bullet$ o número real $\alpha^{-1}$ tal que

$$\alpha.\alpha^{-1} = 1^\bullet.$$

O teorema a seguir nos diz que este inverso existe e é único para cada elemento diferente de $0^\bullet$.

**Teorema 4.36.** *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^*$, existe um único $\alpha' \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha.\alpha' = 1^\bullet$.*

Não iremos demonstrar esse teorema, mas o leitor pode ver a demonstração em [12], bastando analisar os Teoremas 5.3.16 e 5.3.18, páginas 75 e 76.

Os Teoremas desta seção mostram que o conjunto $\mathbb{R}$ munido das operações $+$ e . é um corpo. Como $\mathbb{R}$ também possui uma ordem, dizemos que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado.

## 4.5 $\mathbb{Q}$ como Subconjunto de $\mathbb{R}$

Nesta seção, mostraremos que o corpo ordenado dos racionais $\mathbb{Q}$ possui uma identificação algébrica com um subconjunto dos números reais, concluindo que, de fato, $\mathbb{R}$ é uma extensão de $\mathbb{Q}$, isto é, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. E para finalizar, mostraremos a principal característica que difere $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$.

Para fins de nosso objetivo, iremos denotar o conjunto dos cortes de todos os números reais racionais por $\overline{\mathbb{Q}}$, e mostraremos que $\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}}$, onde essa igualdade é levado em conta uma função que preserva a estrutura de soma e multiplicação e a ordem também.

**Proposição 4.37.** *Seja $f : \mathbb{Q} \to \overline{\mathbb{Q}}$ definida por $f(r) = r^\bullet$. Neste caso, temos que a função $f$ é injetiva preserva a relação de ordem, e, além disso, para todo $r, t \in \mathbb{Q}$,* *1.* $f(r+t) = f(r) + f(t)$*;*

*2.* $f(r.t) = f(r).f(t)$*;*

*3. se* $r < t \Leftrightarrow f(r) < f(t)$*.*

Para uma demonstração completa deste resultado pode ser encontrada em [13], Proposição 3.32.

Assim, acabamos de identificar que $\mathbb{Q}$ possui uma cópia algébrica em $\mathbb{R}$, a saber, $\overline{\mathbb{Q}}$. Note que a Proposição 4.37 mostra que os elementos de $\overline{\mathbb{Q}}$ e os elementos de $\mathbb{Q}$ se comportam da mesma maneira. Por exemplo, os elementos de $\overline{\mathbb{Q}}$ possuem oposto aditivo e, os não nulos, possuem inverso multiplicativo. E todos esses elementos estão em associação biunívoca com os elementos de $\mathbb{Q}$, de uma tal forma que preserve inclusive a ordem dos elementos. Assim, podemos fazer uma identificação de $r$ com $r^\bullet$ pelo fato de preservarem as mesmas propriedades nos dois corpos.

Sabemos que $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$ por construção, ou ainda mais, $\mathbb{R}$ é constituido por todos os cortes racionais ou irracionais como mostra a Definição 4.11. Dessa forma, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, olhando esta inclusão sob o ponto de vista da identificação $f$ dada pela proposição anterior. Essa identificação nos permite escrever $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ o conjunto de todos os números irracionais. Então, terminamos aqui a construção dos números reais via cortes de Dedekind.

Agora, mostraremos a principal característica que torna o conjunto dos racionais diferente do conjunto dos números reais. Em outras palavras, mostraremos uma propriedade existente em $\mathbb{R}$, mas não existente em $\mathbb{Q}$. Para essa finalidade, iremos enunciar um teorema que garante a existência dessa propriedade, que levou o nome de Teorema de Dedekind.

**Teorema 4.38.** *Sejam $A$ e $B$ subconjuntos de números reais tais que:*

1. $A \cup B = \mathbb{R}$;
2. $A \cap B = \emptyset$;
3. $A \neq \emptyset$ *e* $B \neq \emptyset$;
4. *Se* $\alpha \in A$ *e* $\beta \in B$*, então* $\alpha < \beta$*.*

*Nestas condições, existe um, e apenas um número real $\theta$ tal que $\alpha \leq \theta \leq \beta$ para todo $\alpha \in A$ e $\beta \in B$.*

Preferimos fazer apenas comentários e apresentar de forma clara o que diz este teorema, em vez de fazermos a demonstração. O leitor poderá consultar a mesma em [13], Teorema 3.36.

Note que, apesar de haver semelhança, as condições desse teorema difirem das condições de cortes. Basta observar que os subconjuntos são de números reais, onde $A$ e $B$ podem ser subconjuntos de números racionais e irracionais por exemplo, e não somente de números racionais como mostra a definição de corte na Definição 4.1, e a união dos mesmos forma $\mathbb{R}$ e não $\mathbb{Q}$. O ponto forte do Teorema de Dedekind é a afirmação de que todo corte possui um número real como elemento separador, o que difere dos racionais, pois nem todo corte possui um número racional como elemento separador.

Vimos anteriormente que é impossível resolver a equação $x^2 = 2$ de posse apenas dos números racionais. Será que conseguimos resolver esta equação com os números reais? O exemplo a seguir garante que sim.

**Exemplo 4.39.** *Sejam os subconjuntos de números reais*

$$A = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 < 2 \ \ ou \ \ x \le 0\} \ \ e \ \ B = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 \geqslant 2 \ \ e \ \ x > 0\}.$$

Veja que as condições do Teorema 4.38 são satisfeitas (isso foi feito no texto com a notação de cortes). Assim, pelo Teorema de Dedekind, existe um único número real $\theta$ tal que $a \le \theta \le b$ para todo $a \in A$ e para todo $b \in B$. A prova de que $\theta^2 = 2$ segue dos seguintes passos. Primeiramente, supomos que $\theta^2 < 2$ e determinamos $\delta_1 > 0$ de tal forma que $a = \theta + \delta_1$ satisfaz $a^2 < 2$ e $a > \theta$, uma contradição, pois $a \in A$. Se, por outro lado, $\theta^2 > 2$, é possível encontrar $b = \theta - \delta_2 \in B$ tal que $\theta > b$, uma outra contradição. Resta apenas, então, a alternativa $\theta^2 = 2$. Ou seja, a equação $x^2 = 2$ é solucionável em $\mathbb{R}$. A propósito, o leitor já deve saber que há uma notação familiar para $\theta$, a saber, $\theta := \sqrt{2}$.

A título de curiosidade, sabemos que todo número real $x$ satisfaz $x^2 \ge 0$. Dito isto, qual seria o conjunto numérico capaz de resolver a equação $x^2 = -1$? Desafiamos o leitor a construir tal conjunto.

# Capítulo 5

# Considerações Finais

Ao construir os números reais, Dedekind contribuiu de forma significativa para o avanço e formalização do conceito destes elementos, pois, até então, os matemáticos sabiam apenas da existência de um outro conjunto numérico por consequência da descoberta da incomensurabilidade de dois segmentos de reta. Dedekind formalizou o conceito de número real e, através de sua construção, mostrou que existe uma continuidade na reta real ou, falando de forma intuitiva, mostrou que a reta real não possui lacunas como ocorre com o conjunto dos números racionais. Isso proporcionou um amplo desenvolvimento e mais clareza no ensino dos objetos matemático que utilizam como base o conjunto dos números reais, como o estudo das funções reais e o cálculo diferencial e integral.

Sabemos que quase todos os objetos matemáticos ensinados na educação básica têm como base os números reais. Então, pensando por esse ângulo, acreditamos que o estudo da construção dos números reais é de extrema importância para o professor de matemática da educação básica e de outros níveis, pois este estudo permite uma abordagem mais amplas e diversificada do que são números reais e quais são suas propriedades, principalmente na primeira série do ensino médio, onde trahalha-se conjuntos numéricos, pois dúvidas podem surgir. Por exemplo: Suponha que um aluno da primeira série do ensino médio tenha a curiosidade de perguntar o que são números reais e quais são suas propriedades. Além do mais, um bom aluno pode insistir e perguntar ao seu professor de matemática o que difere o conjunto dos números reais do conjunto dos números racionais. Mesmo que, para os demais, estes conjuntos apresentam um diferença notável. Talvez, responderíamos que todo conjunto não vazio e limitado superiormente de números reais possui supremo. Ótimo! A resposta não estaria errada, porém o aluno não sabe o que é supremo. Então, acredito que essa não seja uma boa resposta, admitindo o nível de conhecimento do aluno. Dessa forma, o estudo da construção dos números reais permite o professor de matemática responder tais perguntas sem precisar usar o conceito de supremo. Permite, ainda mais, uma diversidade de respostas quanto alguma dúvida que possa vir a surgir no ensino e aprendizagem de números reais.

Pesquisar nesse tema foi desafiador, mas muito prazeroso. Desafiador, porque tive que pesquisar algo que não fazia parte da grade curricular do meu curso, tendo muitas dificuldades ao longa da pesquisa. Outra grande dificuldade foi a falta de bibliografias, que tornou a minha pesquisa ainda mais árdua. Todavia, isso e nada foi suficiente para tirar a minha persistência e meu desejo de aprender e poder me aperfeiçoar. Hoje, me sinto mais capacitado para lecionar números reais e para poder explorar suas propriedades. Graças a essa pesquisa tive outra visão no sentido de conceituar um número real. Esta pesquisa não só me permitiu entender, de fato, como se deu a construção dos números reais, mas, por incrível que pareça, passei a ter mais clareza quanto às quatro operações básicas da matemática, uma total ligação entre elas, e hoje eu diria que a operação mais importante é a adição.

Acreditamos que esta pesquisa seja fonte de conhecimeto, aprendizagem e de inovação no sentido de melhor ensino e aprendizagem nas aulas de matemática, para professores que buscam o aperfeiçoamento no ensino de mátematica. Pois, do começo ao fim, fomos buscar uma maneira de apresentar uma construção dos números reais acessível, dialogada e didática sem perda do rigor da construção. Buscamos de maneira estratégica e de todos os ângulos apresentar uma fonte de pesquisa para todos que queiram se aperfeiçoar no que se diz respeito a números reais e sua contrução via cortes de Dedekind.

# Referências


[1] ÁVILA, Geraldo Savero de Souza. **Análise Matemática**: Para Licenciatura. 03. ed. São Paulo: Bluher, 2006.

[2] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 02. ed. São Paulo: Blucher, 1996.

[3] COELHO, Flavio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. **Um Curso de Álgebra Linear**. 2 ed. São Paulo: Edusp, 2013.

[4] DOMINGUES, Hygino H; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna**. 04. ed. São Paulo: Atual, 2003.

[5] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: UNICAMP, 2004. v. 1.

[6] LOBEIRO, Adilandri Mércio. **Construção dos Números Reais: Um Enfoque Usando Cortes de Dedekind**. Disponível em: < http://www.dma.uem.br/kit_antigo/corpos.pdf >. Acesso em: 10 ago. 2017.

[7] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. 07. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1976. v. 1. (Projeto Euclides)

[8] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. v. 1. (Projeto Euclides)

[9] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. v. 2. (Projeto Euclides)

[10] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**: Funções de uma Variável. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. v. 1. (Coleção matemática universitária)

[11] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. v. 2. (Projeto Euclides)

[12] MACHADO, Gabriela Maria. **A Construção dos Números**. São Carlos, 13 de Março de 2014. Disponível em: < https://www.dm.ufscar.br/dm/index.php/component/attachments/download/43 >. Acesso em: 07 jun. 2017.

[13] QUEIROZ, Fabiana Moura. **Um Estudo sobre Construções dos Números Reais**. Goiânia, 2015, Disponível em : < https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/4555/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Fabiana%20Moura%20de%20Queiroz%20-%202015.pdf >. Acesso em: 15 jul. 2017.

[14] VASCONCELES, Getulio de Assis. **A Irracionalidade e transcendência do Número** $e$. Rio Claro: 2013.

[15] OLIVEIRA, João Milton. **A Irracionalidade e transcendência do Número** $\pi$. Rio Claro: 2013.