

ãogreen18

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

THIAGO CARVALHO SOUSA

APLICAÇÃO DOS HARMÔNICOS NAS CORDAS DE UM VIOLÃO

ARAGUAÍNA
2017

THIAGO CARVALHO SOUSA

APLICAÇÃO DOS HARMÔNICOS NAS CORDAS DE UM VIOLÃO

Trabalho de conclusão de curso submetido ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. MSc. Samara Leandro Matos da Silva.

ARAGUAÍNA
2017

THIAGO CARVALHO SOUSA

APLICAÇÃO DOS HARMÔNICOS NAS CORDAS DE UM VIOLÃO

Trabalho de conclusão de curso submetido ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. MSc. Samara Leandro Matos da Silva.

APROVADA: 09/05/2017.

BANCA EXAMINADORA

Profa. MSc. Samara Leandro Matos
da Silva
(Orientadora)

Prof. MSc. Deive Barbosa Alves

Prof. MSc. Flávio Guilherme de
Abreu Drumond

Agradecimentos

Sou grato a Deus por todos os benefícios a mim concedidos. Neste momento conclusivo de minha graduação estou feliz por Ele ter me dado graça para percorrer este caminho que tem sido importante para meu amadurecimento e que tem feito com que eu contemple a perfeição de tudo o que Ele criou.

Sou grato aos meus pais pela paciência, amor e incentivo a mim dispensados, sentimentos dos quais reconheço não merecer. Agradeço à minha irmã, meu irmão e minha cunhada pelas orações e encorajamento oferecidos. Estou feliz de por poder citar alguém muito especial, minha noiva Maisa, que conheci nestes últimos momentos dessa fase da minha vida, pois seu exemplo para mim foi motivador e por muitas vezes me encheu de ânimo e determinação.

Agradeço ao meu professor Robledo por me mostrar a beleza que a disciplina de Física tem e também por aceitar ser meu orientador em um tema que muitos recusaram. Sou igualmente grato à minha professora Samara por substituir meu professor Robledo após sua transferência e também por sua paciência em todo o processo de orientação que foram indispensáveis para que eu pudesse chegar à conclusão do mesmo.

Resumo

O presente estudo apresenta a relação existente entre a Física, a Música e a Matemática. Após uma breve introdução histórica, alguns conceitos de teoria musical são expostos. Posteriormente algumas definições relacionadas às ondas sonoras e aos harmônicos que podem ser encontrados em cordas com extremidades fixas são expostos a fim de relacioná-los com a construção da escala de um violão. Este trabalho mostra como os harmônicos podem ser utilizados para encontrarmos a posição correta dos trastes de um violão. Em sua parte final descreve as conclusões obtidas por Pitágoras após seus experimentos com um monocórdio, visando compreendê-lo sob a perspectiva dos harmônicos e reafirmando sua validade por meio do estudo de um caso particular de uma corda de violão.

Palavras-chave: Física. Matemática. Música. Harmônicos. Pitágoras.

Abstract

This study presents the relation between Physics, Music and Math. Some concepts of the musical theory are exposed after a brief historical introduction. Posteriorly some concepts related to sound waves and harmonics that can be found in strings with fixed ends are exposed in order to relate it to the construction of guitar scales. The present work shows how the harmonics can be used to find the correct position of guitar frets. At the conclusion, this work show Pitagora's results after his tests with a monochord in order to understand it in the harmonics' perspective and reassure its validity by means of a study of a particular guitar string case.

Keywords: Physical. Math. Music. Harmonics. Pythagoras.

Sumário

Introdução	7
1 Introdução à Teoria Musical	9
1.1 Breve Histórico	9
1.2 Afinação	11
1.3 Escala	11
1.3.1 Escala Cromática	11
1.4 Ciclos das Quintas e Quartas	12
2 Fundamentação Teórica de Física	14
2.1 Ondas	14
2.2 Natureza das ondas	15
2.3 Tipos de ondas	15
2.4 Elementos de uma Onda	15
2.5 Ondas Sonoras	17
2.6 Reflexão de um pulso	18
2.7 Reflexão de ondas	18
2.8 Interferência de ondas	19
2.9 Ondas estacionárias	19
2.10 Harmônicos	19
3 Construção da escala de um violão	22
3.1 Pitágoras e os Intervalos musicais	22
3.2 Análise de um encordoamento	22
3.3 Harmônicos numa corda de violão	23
3.3.1 Frequências dos harmônicos	23
3.3.2 Comprimento da corda	24
3.4 O experimento de Pitágoras sob a ótica da teoria apresentada	25
Considerações Finais	27
Referências Bibliográficas	28

Introdução

Muitos de nós manuseamos objetos ao nosso redor sem ter a mínima ideia de sua origem e sem compreender como se dá o seu funcionamento. O mesmo ocorre com os músicos e os seus instrumentos, uma parcela considerável dos instrumentistas, sejam profissionais ou não, sequer têm alguma noção sobre que conhecimentos científicos que estão envolvidos na fabricação de seus instrumentos. Isto não é necessariamente um problema, pois neste fato não há nenhum impedimento para que as pessoas operem com muita habilidade seus celulares, carro ou seus instrumentos musicais.

Entretanto, conhecer com mais propriedade o mundo ao nosso redor pode vir a ser uma experiência animadora. Os avanços científicos são resultados de questionamentos que buscavam compreender o comportamento das coisas e dos fenômenos que nos rodeiam. Podemos citar como exemplo as leis de Newton, a Probabilidade, a Estatística e toda a contribuição que estas áreas nos proporcionam. Entender essas áreas de conhecimentos pode até não ser essencial, mas sem dúvida alguma, modifica completamente nossa forma de enxergar o mundo.

Esta investigação também originou-se com base em um questionamento, motivado pelo interesse de entender o porquê da escala de um violão ser construído da forma que é, o motivo pelo qual a simples mudança de tamanho de uma corda pode gerar sons diferentes que soam de maneira harmoniosa.

Este trabalho está organizado em três capítulos. No primeiro há uma breve introdução histórica no qual é apresentado o fato de que o interesse pela música precede o conhecimento científico sistematizado conforme o conhecemos, posteriormente são apresentados conceitos de teoria musical a fim de dar base para o que será afirmado posteriormente.

No segundo capítulo há uma apresentação teórica de física, na qual alguns conceitos acerca das ondas e dos harmônicos são trazidos. Esses dois primeiros capítulos são a base para o seguinte. Nesse terceiro capítulo são trazidas algumas argumentações que visam responder ao questionamento que deu origem a este estudo, bem como buscamos compreender, à luz do conceito de harmônicos, as conclusões de Pitágoras após seus estudos com um monocórdio.

Os experimentos de Pitágoras podem ser comprovados sob mais de uma perspectiva, uma rápida pesquisa na internet disponibilizará uma quantidade razoável de materiais com diferentes abordagens. No presente trabalho seguimos um caminho simples, por

meio do uso de razões matemáticas e um estudo dos conceitos de harmônicos em uma corda com suas extremidades fixas, que é o caso do violão.

Capítulo 1

Introdução à Teoria Musical

1.1 Breve Histórico

Ao entrarmos em lojas de instrumentos musicais, ficamos impressionados com a diversidade de instrumentos e modelos disponíveis. Com o passar dos anos pode-se perceber o grande avanço da tecnologia, e como esse avanço tem contribuído para a confecção desses instrumentos musicais. Neste capítulo, abordaremos alguns conceitos fundamentais da teoria musical que serão necessários para o estudo dos capítulos seguintes.

O estudo da história mostra-nos a maneira como essa arte (a música) está envolta em histórias muito antigas, mostrando-nos os encantos e efeitos produzidos pela música e como ela despertou o interesse de antigas civilizações em tempos remotos.

Na mitologia grega encontramos a história de Orfeu, neto de Zeus, que, conforme a Enciclopédia Barsa, foi presenteado por seu pai, Apolo, com uma flauta, tornando-se um músico incomparável. Sua música teria efeitos grandiosos, de modo que “as próprias feras ficavam mansas, as aves silenciavam, os rios paravam seu curso e as árvores dançavam ao seu ritmo” (ORFEU, 1995, p.432). A revista *Scientif American* de Setembro de 1997 relata que em 1995, nos Alpes da Eslováquia, o paleontólogo Ivan Turk encontrou em um acampamento de caça Neandertal um osso da coxa de um urso, com idade entre 43.000 e 82.000 anos aproximadamente. Nele foram feitos buracos dispostos de maneira que era possível produzir intervalos de tons e semitons, mostrando que o conhecimento de conceitos fundamentais para a formação de escalas musicais era utilizado muito antes dos conceitos da matemática e da física serem estudados de maneira formalizada.

Ainda conforme esta revista, após a publicação de uma foto do artefato em um jornal, o musicólogo Bob Fink percebeu que a localização dos furos demonstrava relações matemáticas muito claras, importantes para que o instrumento produzisse sons harmoniosos. Embora não possamos fazer afirmações claras acerca da compreensão matemática dos povos daquela época, fica claro que existia um certo conhecimento de proporção de medidas. Bob Fink analisou o osso e constatou que “A distância entre o segundo e o

Figura 1.1: Reconstrução do osso de urso.



Fonte: Hypescience (2016).

terceiro furo era duas vezes a distância entre o terceiro e o quarto. Isso indicava a Fink que a flauta podia produzir tons inteiros e semitons, os elementos fundamentais da escala diatônica”¹ (WONG, 1997, p.28).

Na parte superior da Figura 1.1 temos uma fotografia do osso mencionado acima e na parte inferior, podemos ver uma reconstrução computadorizada do osso, onde é possível ter uma noção de como estavam dispostos os demais furos da flauta.

Muitos tratados foram escritos acerca desse assunto, contribuindo com o desenvolvimento da teoria musical. A informação mais antiga acerca do estudo dos intervalos musicais diz respeito aos experimentos de Pitágoras (572-495 a.C.). Abdounur (1999, p.5) afirma que:

Pitágoras deu continuidade a seus experimentos investigando a relação entre o comprimento de uma corda vibrante e o tom musical produzido por ela. Caracterizando a primeira lei descoberta empiricamente, o experimento de Pitágoras é ainda a primeira experiência registrada na história da ciência, no sentido de isolar algum dispositivo para observar fenômenos de forma artificial.

Pitágoras estudou os intervalos musicais tendo como ponto de partida sua perspectiva filosófica que exaltava a importância dos números inteiros para a explicação de muitos fenômenos que nos rodeiam. Conforme EVES (1999, p.103):

¹Original: *The distance between the second and third holes was twice that between the third and fourth holes. This indicated to Fink that the flute could produce whole tones and half tones, the fundamental elements of the diatonic.*

A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros. Isso levava a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética (no sentido de teoria dos números), junto com a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes liberais básicas do programa de estudos pitagórico. Esta filosofia levou a uma grande ajuda no desenvolvimento da teoria musical. Pitágoras, utilizando um monocórdio fez alguns experimentos em que o comprimento da corda era reduzido aos tamanhos referentes à $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ do tamanho da corda sendo possível assim encontrar a oitava, a quinta justa e a quarta justa, notas importantes na escala musical. Esses resultados obtidos por Pitágoras “levaram os pitagóricos a iniciar o estudo científico das escalas musicais”.

Este assunto será retomado no terceiro capítulo deste trabalho, onde iremos estudar essas constatações de Pitágoras por uma outra perspectiva.

1.2 Afinação

Com o avanço do conhecimento musical, bem como de seus instrumentos, que muitas vezes seriam tocados em conjunto, tornou-se necessária a formalização e a padronização dos processos de afinação dos mesmos.

A afinação é o ajuste da altura dos sons, tomando como referência uma altura que serve como padrão. Goldemberg (2007, p. 66) define a afinação como “um sistema idealizado de relações entre as frequências de uma escala”. A padronização dos sistemas de afinação sofreu diversas alterações nos mais diversos lugares, e em diferentes culturas. A afinação padrão para a grande maioria dos músicos e fabricantes de instrumentos musicais é a afinação em que o diapasão tem a frequência de 440 Hertz. Desse modo, independente de onde um instrumento possa ser usado, todos poderão soar com a mesma frequência, evitando desconfortos gerados pela diferença nos sons.

Vários métodos foram estabelecidos ao longo da história. Em quase todo o mundo, em especial no ocidente, há uma padronização largamente aceita, de modo que a oitava é dividida em partes iguais, obtendo-se assim o que denominamos de escala. “Desde aproximadamente o início do período renascentista até hoje em dia, a música ocidental tem se baseado principalmente em escalas diatônicas de sete notas e doze semitons cromáticos” (ZUMPARO; GOLDEMBERG, 2007, p. 1). Diversas maneiras de se montar uma escala foram apresentadas ao longo da história, cada uma dessas padronizações de afinação são denominadas de temperamento. “Uma quantidade considerável de temperamentos foi utilizada, procurando sempre atender às necessidades harmônicas das épocas em que foram criados” (GOLDEMBERG, 2007, p. 68).

1.3 Escala

A palavra Escala tem sua origem na língua grega, assimilada posteriormente pela língua latina, chegando até nossos dias. Conforme Houaiss (2010), escala é a organização sequencial de sons. Logo, “Escala é uma seqüência de notas que, gradualmente, sobem para as agudas e descem às graves” (PARISI, 1983, p.8).

1.3.1 Escala Cromática

Na escala musical utilizada no ocidente, a oitava é dividida em doze partes iguais. Essa escala recebe o nome de escala cromática, onde ela é composta pelas doze notas que formam intervalos de semitom (meio tom), isto é, a menor distância entre duas notas. A escala cromática compreende todas as notas que podemos tirar do nosso instrumento. Existem sete notas musicais que são bastante conhecidas. Elas são denominadas notas naturais: Dó-Ré-Mi-Fá-Sol-Lá-Si. Existe uma notação universal de designação das notas, que chamamos de cifras.

Tabela 1.1: Notas naturais

Nome	Cifra
Dó	<i>A</i>
Ré	<i>B</i>
Mi	<i>C</i>
Fá	<i>D</i>
Sol	<i>E</i>
Lá	<i>F</i>
Si	<i>G</i>

Fonte: Arquivo pessoal.

A distância que separa uma nota da outra é chamada intervalo. Essa distância na escala cromática é de um semitom. Um semitom é a distância de uma casa à outra do braço de um violão, ou a distância entre duas teclas vizinhas de um piano. Entre algumas notas naturais existe um intervalo de um tom, e entre esse intervalo existe um intervalo de um semitom, com uma nota enarmônica entre elas. A únicas exceções são os intervalos entre as notas $E - F$ e $B - C$, onde não há semitons, conforme a tabela 1.1. Então, percebe-se que na verdade existem 12 notas (7 naturais e 5 enarmônicas).

Na tabela acima, temos mais dois símbolos que são utilizados no cifrado, o sustenido (\sharp) e o bemol (b). A nota $C\sharp/Db$, por exemplo, é denominada Dó Sustenido, ou Ré Bemol.

As escalas musicais se repetem de maneira infinita, ou seja, ao se avançar da nota C até a nota B , podemos prosseguir, voltando novamente à nota Dó, o mesmo vale para o processo inverso. Logo, o único limite que existe é a extensão da escala do instrumento musical. Na Figura 1.2 temos a representação da afinação de um violão.

Figura 1.2: Notas musicais no braço do violão.



Fonte: Portalmusica (2016).

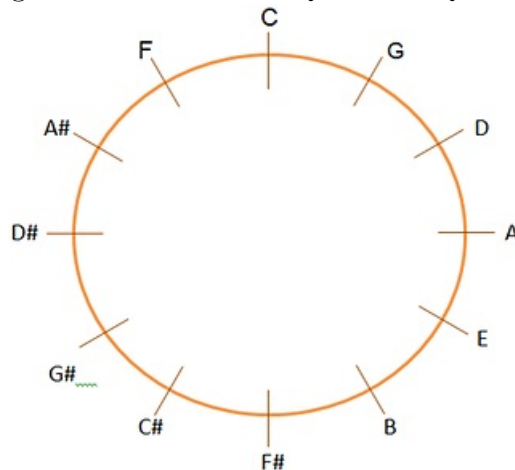
1.4 Ciclos das Quintas e Quartas

O conceito desses dois ciclos é importante para a compreensão de algumas afirmações já apresentadas e outras que ainda vão ser expostas neste trabalho. Uma vez que serão relacionados com o assunto dos harmônicos.

O ciclo de quintas é uma sequência de notas que distam umas das outras formando intervalos de quinta justa. O ciclo de quartas, por sua vez, é uma sequência que distam umas das outras formando intervalos de quarta justa.

A Figura 1.3 é a representação do ciclo de quintas (avanzando no sentido horário), e do ciclo de quartas (sentido anti-horário). Isto é, partindo de qualquer nota do ciclo, a próxima no sentido horário é tida como a quinta justa da anterior, e a próxima nota no sentido anti-horário é a quarta justa.

Figura 1.3: Ciclos das Quintas e Quartas.



Fonte: Descomplicandoamusica (2016).

Vejamos um exemplo de cada um dos ciclos começando pela nota C (Dó):

- Ciclo de quintas: no ciclo de quintas temos a sequência $C - G - D - A - E - B$. Em termos práticos, duas notas distam uma da outra formando um intervalo de quinta justa quando a distância entre elas é de 3 tons e meio, ou então, 7 semitons. Observando a representação acima do braço de um violão, Figura 1.2, basta escolher uma nota e avançar 7 casas, a nota encontrada é a quinta justa da nota anterior.
- Ciclo de quartas: no ciclo de quartas podemos montar a seguinte sequência $C - F - A\# - D\# - G\# - C\# - F\#$. Duas notas distam uma da outra formando um

intervalo de quarta justa quando a distância entre elas é de 2 tons e meio, ou seja, 5 semitons. Observando novamente a Figura 1.2, a partir de uma nota, podemos avançar 5 casas, a nota encontrada é a quarta justa da nota anterior.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica de Física

Neste capítulo faremos a apresentação de alguns conceitos físicos necessários para a compreensão do tema desenvolvido no presente trabalho. Algumas dessas definições serão apresentadas de maneira mais breve e uma atenção maior será dada àquelas que estão diretamente relacionados ao nosso estudo das ondas sonoras e dos harmônicos.

2.1 Ondas

Os autores Ramalho Júnior, Ferraro, e Soares (2007) definem onda como sendo uma perturbação que se propaga num meio. Tal perturbação ocorre de maneira periódica em um meio material ou no espaço. A propagação de uma onda transporta energia de um ponto a outro, entretanto, não transporta matéria.

As ondas estão presentes no nosso dia a dia de diferentes maneiras. Quando um objeto atinge a água são geradas ondas que se propagam formando circunferências concêntricas, como mostra a Figura 2.1.

Figura 2.1: Ondas concêntricas.



Fonte: Esquerda (2016).

Os raios X são ondas eletromagnéticas muito úteis, elas são capazes de atravessar corpos de baixa densidade, como os músculos do nosso corpo, e são absorvidos por matérias mais densas como os ossos. O uso dessas ondas permite a produção de radiografias, conforme exemplificado na Figura 2.2. "Hoje o raio X possui vasto campo de aplicação, pois são utilizados, por exemplo, no tratamento de câncer, na pesquisa sobre a estrutura cristalina dos sólidos, na indústria e em muitos outros campos da ciência e da tecnologia" (SANTOS, 2017).

Figura 2.2: Radiografia carpal.



Fonte: Unieradiologia (2016).

O som produzido por um instrumento musical (Figura 2.3) é um exemplo de onda sonora. Quando um músico executa alguma peça musical em seu violão, perturbações são produzidas e estas se propagam ao longo das cordas.

Figura 2.3: Cordas de um violão vibrando.



Fonte: Iniciantes do violão (2016).

2.2 Natureza das ondas

”Segundo a sua natureza, as ondas são classificadas em mecânicas ou eletromagnéticas. As ondas mecânicas existem apenas em um meio material e são governadas pelas leis de Newton” (HALLIDAY; WALKER, 2009, p. 116). Podemos citar como exemplos as ondas sonoras e as ondas do mar. As ondas mecânicas se propagam em meios materiais como o ar, água, paredes de concreto, pela corda de um instrumentos musical e outros.

Ao contrário das ondas mecânicas, as ondas eletromagnéticas não se propagam necessariamente por um meio material. Deste modo, elas não vibram os pontos do seu meio de propagação. Alguns exemplo são: a luz, as ondas de rádio, e raios X. “Estas ondas não precisam de um meio material para existir. As ondas luminosas provenientes das estrelas, por exemplo, atravessam o vácuo do espaço para chegar até nós” (HALLIDAY; WALKER, 2009, p. 116).

2.3 Tipos de ondas

Ramalho Júnior, Ferraro, e Soares (2007) definem algumas classificações de ondas quanto à direção de propagação e à direção de vibração. Quanto à sua direção de propagação, as ondas podem ser classificadas em unidimensionais, bidimensionais e tridimen-

sionais. Em relação a sua direção de vibração, podem ser classificadas em longitudinais e transversais.

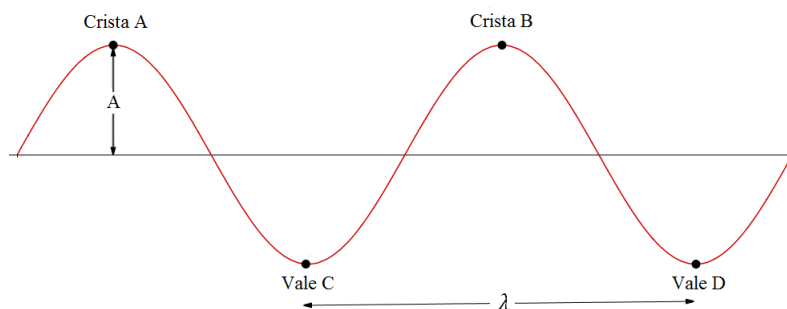
As ondas longitudinais se propagam num meio de modo que a direção da vibração é a mesma da sua propagação, ou seja, sua propagação é paralela à direção do movimento dos elementos da onda. As ondas transversais têm a direção de propagação perpendicular à direção da vibração.

2.4 Elementos de uma Onda

De acordo com Ramalho Júnior, Ferraro, e Soares (2007), as ondas podem ser caracterizadas com base em alguns elementos que a constituem, conforme mostra a Figura 2.4.

Os pontos A e B na Figura 2.4, são os pontos máximos, chamados de crista. Os pontos C e D recebem o nome de vale. A amplitude (A) é a distância entre a posição de equilíbrio e uma crista ou um vale. A distância entre duas cristas ou dois vales é chamada de comprimento de onda (λ). Tanto a amplitude quanto o comprimento da onda são medidos em metros (m). As medidas acima, bem como as demais apresentadas neste trabalho seguem o Sistema Internacional de Unidades (SI).

Figura 2.4: Elementos de uma onda.



Fonte: Arquivo pessoal.

Para que tenhamos ondas estacionárias a onda deve ter tamanhos específicos, e podemos calcular essas medidas por meio da equação abaixo:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}. \quad (2.1)$$

O período (T) de uma onda é o tempo gasto para que a onda repita sua configuração. Acima vimos a definição do comprimento de onda, o período então seria o tempo que um ponto da onda gasta para percorrer o seu comprimento, de modo que, depois disso ele vai repetir o seu movimento. Utilizando os últimos conceitos de comprimento de onda e período, podemos determinar a velocidade de propagação da onda (v) por meio da equação:

$$v = \frac{\lambda}{T}. \quad (2.2)$$

A unidade de medida padrão é m/s.

A quantidade de vezes que uma onda repete o seu movimento em uma determinada unidade de tempo é chamada de frequência e denotada pela letra f . O padrão utilizado para medir o tempo é um segundo (s). A frequência é medida em hertz (Hz) em homenagem ao físico alemão Heinrich Rudolf Hertz.

Na primeira linha da Tabela 2.1 temos um período que foi necessário para que uma onda fizesse seu movimento uma vez. Na linha de baixo temos um período de 1 segundo no qual a onda repetiu seu movimento f vezes.

Tabela 2.1: Frequência e período.

Tempo (s)	Repetições
T	1
1	f

Fonte: Arquivo pessoal.

Aplicando a regra de três obtemos que,

$$f \cdot T = 1.$$

Onde concluímos,

$$f = \frac{1}{T}. \quad (2.3)$$

Substituindo (2.2) em (2.3):

$$v = f \cdot \lambda \quad (2.4)$$

Como nosso estudo concentra-se nas cordas de violão, quando falarmos de velocidade (v), estaremos nos referindo à velocidade de propagação da onda em uma corda. "As grandezas físicas que determinam a velocidade de uma onda transversal em uma corda são a *tensão* na corda e sua *massa por unidade comprimento*" (YOUNG; FREEDMAN, 2003, p. 245, grifos dos autores) que podem ser calculada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad (2.5)$$

onde, T é a tensão e μ a densidade da corda.

2.5 Ondas Sonoras

Ondas sonoras são ondas de origem mecânica e por isso não se propagam no vácuo. Essas ondas se propagam através de meios materiais comprimindo-os e expandindo-os. "As variações na pressão fazem com que os nossos tímpanos vibrem com a mesma frequência da onda, o que produza sensação auditiva" (RAMALHO JÚNIOR; FERRARO; SOARES, 2007, p.459).

Na Figura 2.5 temos um diapasão, utilizado para afinar instrumentos musicais. Ao ser tocado por outro objeto o diapasão começa a vibrar e emite uma onda sonora específica.

Pessoas com boa audição são capazes de captar e identificar diversos sons como, por exemplo, os sons emitidos por animais, as vozes de outras pessoas, instrumentos musicais e etc. "A orelha é o órgão sensorial que transforma as ondas sonoras em estímulos elétricos, que seguem até o cérebro, onde são interpretados, produzindo, assim, sensações sonoras diferentes" (SILVA; BARRETO FILHO, 2008, v.3, p.304).

A audição humana é sensível a sons com frequências entre 20 Hz (infrassons) e 20.000 Hz (ultrassons). "Alguns animais podem ouvir sons com frequências mais baixas ou bem

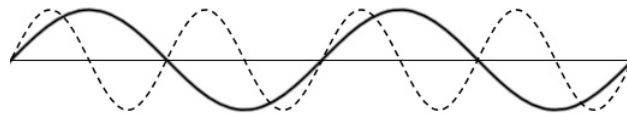
Figura 2.5: Diapasão.



Fonte: Wikipedia.org (2016).

mais altas. Os cães são sensíveis à frequência mínima de 15 Hz e os morcego à frequência máxima de 15.000 Hz ” (TREFIL; HAZEN, 2006). A altura diz respeito à frequência da onda sonora. Quanto maior for a frequência sonora de um som, mais agudo ele será. De outra forma, pode dizer-se que quanto maior for a frequência, mais alto é o som. Comparando as duas ondas representadas na Figura 2.6 podemos perceber a diferença, onde a linha contínua representa uma onda com frequência mais baixa do que a linha pontilhada.

Figura 2.6: Sons graves e agudos.



Fonte: Arquivo pessoal.

Em materiais referentes ao estudo da música, a diferença entre a altura de duas frequências é comumente chamada de intervalo (i). Dadas duas frequências f_1 e f_2 onde $f_1 \geq f_2$ o intervalo entre elas é dado pela relação:

$$i = \frac{f_1}{f_2}. \quad (2.6)$$

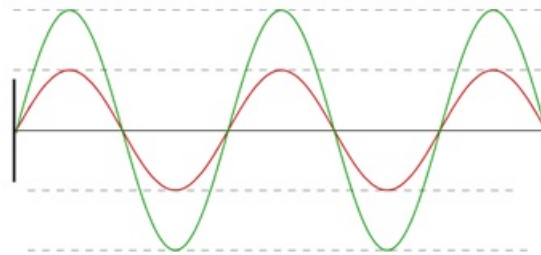
Quando $f_1 = f_2$, então $i = 1$, neste caso, os sons estão em uníssono. Quando $i = 2$, significa que f_1 possui o dobro f_2 ($f_1 = 2f_2$), neste caso, entre elas há um intervalo de uma oitava. Na música, isto significa que as duas frequências estão emitindo a mesma nota, mas uma está mais aguda do que a outra.

“A qualidade fisiológica pela qual diferenciamos os sons fracos dos sons fortes é denominada intensidade auditiva ou sonoridade, ou ainda nível sonoro do som” (RAMALHO JÚNIOR; FERRARO; SOARES, 2007, v.2, p.464). Quanto maior for a intensidade do som, maior será a amplitude de suas ondas.

Na Figura 2.7 temos a representação de duas ondas com a mesma frequência, entretanto, uma delas, que está representada na cor verde, possui o dobro da intensidade da outra, ilustrada na cor vermelha.

Comumente esse conceito é confundido com o de altura. Quando alguém próximo de nós está ouvindo música no volume máximo de seu carro, por exemplo, diz-se que o som está muito alto. No entanto, aprendemos acima que o conceito de altura está relacionado ao fato de determinado som ser grave ou agudo, assim, se determinada música está incomodando pela quantidade de barulho produzido, ela está sendo reproduzida com alta intensidade.

Figura 2.7: Ondas com intensidades diferentes.

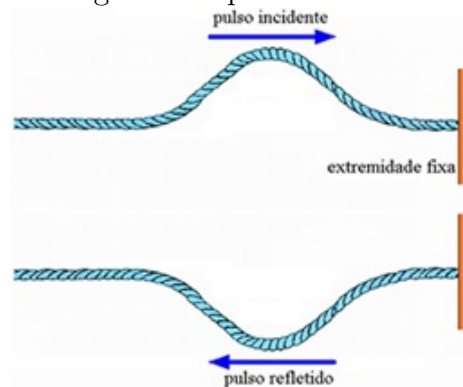


Fonte: Arquivo pessoal.

2.6 Reflexão de um pulso

Consideremos uma corda com uma de suas extremidades presa e a outra sofre um pulso (impulso incidente) que ao atingir a extremidade presa da corda retornará no sentido contrário. Este fenômeno denomina-se reflexão de um pulso.

Figura 2.8: pulso refletido.



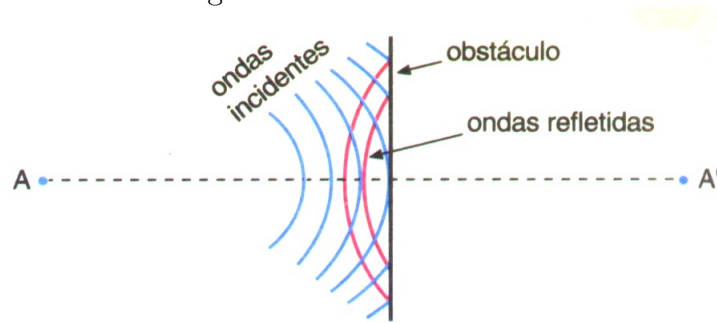
Fonte: Silva (2016).

Como a corda está fixada em uma de suas extremidades, “o aspecto da perturbação será invertido em relação ao pulso incidente e dizemos que ocorreu uma inversão de pulso” (SILVA; BARRETO FILHO, 2008, v.3, p.279). Ou seja, quando um pulso é gerado, conforme a Figura 2.8, ele percorre toda a extensão da corda e ao chegar em sua extremidade fixa, o pulso é refletido, seguindo o sentido inverso do seu movimento inicial.

2.7 Reflexão de ondas

Quando uma onda atinge um obstáculo, ela retorna ao meio em que foi propagada. Após ser refletida, a onda preserva as mesmas características da onda incidente. A Figura 2.9 é um exemplo de reflexão de ondas sonoras. Após atingir um obstáculo fixo o som é refletido preservando a sua direção, mas com o sentido oposto, o que denomina-se inversão de fase. A onda refletida possui a mesma velocidade de propagação, o mesmo comprimento de onda e a mesma frequência.

Figura 2.9: onda refletida.



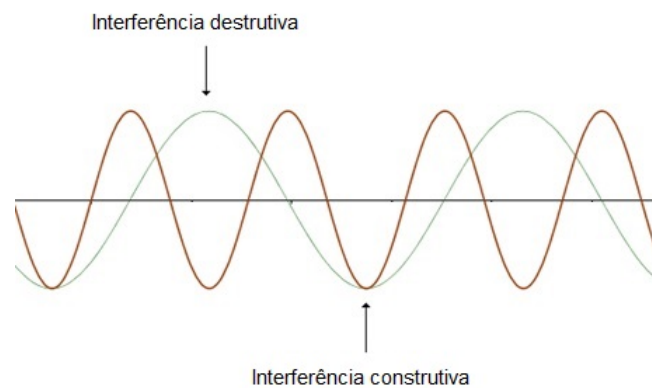
Fonte: sofisica (2016).

2.8 Interferência de ondas

A interferência de ondas é o cruzamento de ondas que se movimentam em um meio. Essa interferência pode se dar devido a duas ou mais ondas provindas de fontes distintas. Inclusive, algumas delas podem ser a reflexão de ondas após atingir um obstáculo. Essas interferências podem ser denominadas construtivas ou destrutivas.

Na interferência construtiva há uma concordância de fase entre os pulsos (crista ou vale com vale). Na interferência destrutiva, o ponto de máximo (crista de uma onda) ocupa o mesmo ponto de outra que será um ponto de mínimo (vale).

Figura 2.10: interferência de ondas



Fonte: Arquivo pessoal.

Na interferência de duas ondas, a amplitude (A_T) da onda resultante é a obtida pela soma das suas amplitudes, ou seja,

$$A_T = A_1 + A_2. \quad (2.7)$$

Onde A_T é a amplitude total, A_1 e A_2 as amplitudes das ondas 1 e 2 respectivamente.

2.9 Ondas estacionárias

Conforme Ferraro, Ramalho Júnior e Soares (2007) essas ondas são resultado da superposição (interferência) de duas ondas com comprimento, frequência e direção idênticos,

contudo, em sentidos contrários. Comumente isto ocorre entre uma onda e a reflexão da mesma.

Na Figura 2.11 temos uma onda (vermelho) e a reflexão da mesma.

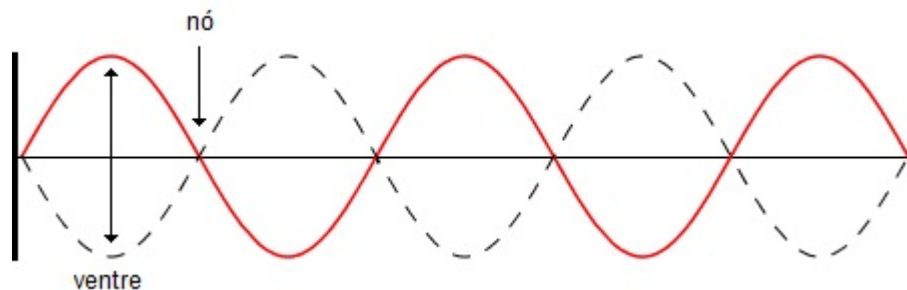


Figura 2.11: Onda estacionária

Cada ponto onde a amplitude é máxima é chamado de ventre (ou antinó). Nesses pontos ocorrem interferências construtivas. Onde os pontos vibram com amplitude nula, isto é, onde há interferência destrutiva denomina-se nó. Conforme Tipler e Mosca (2009) esses pontos não se movem, o mesmo ocorre com os pontos da extremidade da corda. Esse padrão só ocorre em algumas frequências específicas. “Para dada corda, ou para dado tubo, há certas frequências para as quais a superposição resulta em um padrão estacionário de vibração chamado de onda estacionária” (TIPLER; MOSCA, 2009, p.279). Ou seja, para que haja esse padrão na superposição de ondas, de modo que sua reflexão seja idêntica à onda original, ela precisa vibrar em frequências específicas, e para sabermos que frequências são essas precisamos calcular as frequências dos harmônicos.

2.10 Harmônicos

Como já foi dito anteriormente, existem frequências específicas para que haja a formação de ondas estacionárias. Tomando como exemplo uma corda de tamanho L com duas extremidades fixas encontraremos alguns nós da mesma com o intuito de determinar as localizações desses determinados pontos.

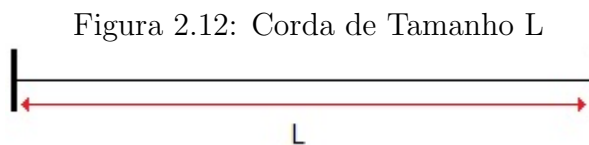


Figura 2.12: Corda de Tamanho L

Fonte: Arquivo pessoal.

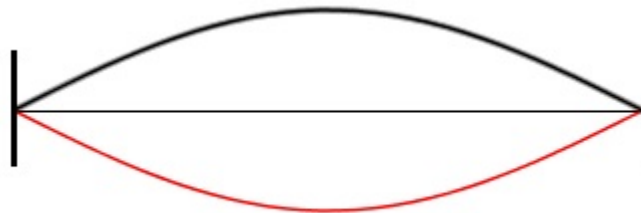
No primeiro harmônico, conforme podemos ver na Figura 2.13, há a formação de um único ventre, e temos metade do comprimento da onda (λ). Assim:

$$L = \frac{\lambda}{2}$$

ou seja

$$\lambda_1 = 2L \tag{2.8}$$

Figura 2.13: Primeiro Harmônico



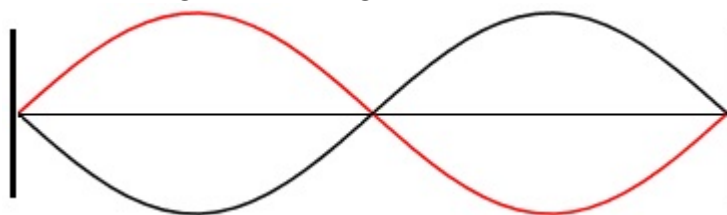
Fonte: Arquivo pessoal.

Daí temos que o comprimento da onda é igual ao dobro do comprimento da corda. Como a velocidade de propagação da onda é dada pelo produto entre o comprimento da onda e a frequência, equação (2.4), temos:

$$f_1 = \frac{v}{2L} \quad (2.9)$$

onde f_1 é a frequência do primeiro harmônico. Ou seja, se dividirmos v pelo dobro do comprimento da corda vamos encontrar a frequência do primeiro harmônico.

Figura 2.14: Segundo Harmônico



Fonte: Arquivo pessoal.

A Figura 2.11 é uma representação do comportamento da onda no segundo harmônico. Onde podemos ver a formação de dois ventres. Logo:

$$\lambda_2 = L \quad (2.10)$$

Daí,

$$f_2 = \frac{v}{L} \quad (2.11)$$

Onde f_2 é a frequência do segundo harmônico. Podemos perceber, comparando (2.9) e (2.11), que o segundo harmônico tem o dobro da frequência do primeiro harmônico.

Agora, como último exemplo, temos na figura a representação do comportamento de uma onda no seu terceiro harmônico. Note que,

$$\lambda_3 = \frac{2}{3}L. \quad (2.12)$$

Logo:

$$f_3 = \frac{3v}{2L} \quad (2.13)$$

onde f_3 é a frequência do terceiro harmônico.

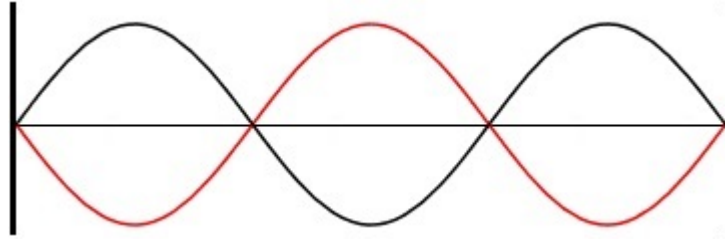


Figura 2.15: Terceiro Harmônico

Observa-se que o valor da frequência do terceiro harmônico é o triplo da frequência do primeiro. Deste modo, podemos generalizar para qualquer harmônico, conforme Ramalho Júnior, Ferraro e Soares (2007):

$$f_n = n \cdot \frac{v}{2L} \quad (2.14)$$

Podemos ainda apresentar todos os harmônicos em função do primeiro:

$$f_n = n \cdot f_1 \quad (2.15)$$

Capítulo 3

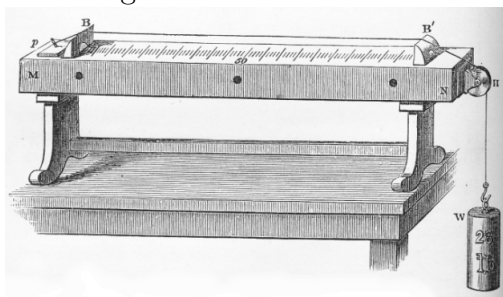
Construção da escala de um violão

O propósito do presente capítulo é aplicar o conteúdo exposto nos dois capítulos anteriores, mostrando como a Física, a Matemática e a Música podem se relacionar, especificamente no que diz respeito à construção da escala de um violão.

3.1 Pitágoras e os Intervalos musicais

Atribui-se a Pitágoras (582-500 a.C) a autoria dos estudos científicos mais antigos acerca da relação entre a matemática e a música por meio de seus experimentos com um monocórdio, Figura 3.1, um instrumento que possui apenas uma corda por meio do qual foi possível estabelecer relações entre intervalos musicais e a razões numéricas. Eves afirma que “Esses resultados, os primeiros fatos da física-matemática, levaram os pitagóricos a iniciar o estudo científico das escalas musicais” (EVES, 2011, 103).

Figura 3.1: Monocórdio.



Fonte: Laboratoriodeluthieria (2017).

Para executar esse instrumento, encostava-se um objeto com uma das mãos em um ponto específico da corda, de modo que ao perturbar a corda com a outra mão, apenas uma fração do seu tamanho viesse a soar, gerando assim uma frequência distinta daquela produzida pela corda com toda sua extensão vibrando.

Pitágoras reduziu o tamanho da corda de seu monocórdio utilizando proporções com os números de 1 a 4, e fazendo a corda do seu instrumento soar com as seguintes razões do seu tamanho original: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$. “Para o pensador grego, a perfeição das relações obtidas estava ligada ao fato de que os números 1, 2, 3 e 4, utilizados nas frações da corda, eram parte de uma relação mística com o número quatro” (BARNABÉ, 2011, 24-25).

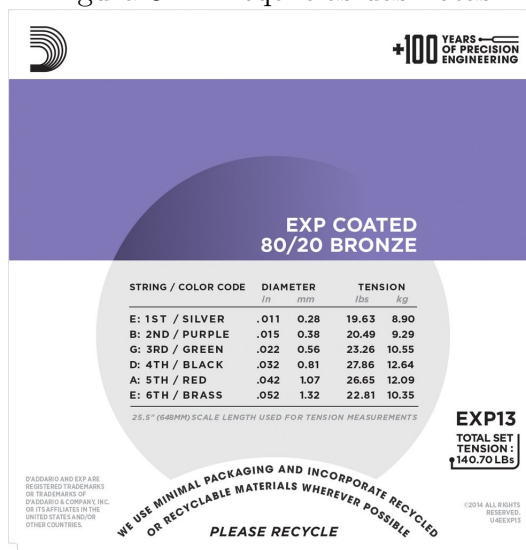
A conclusão de pitágoras foi que ao tocar a corda com $\frac{1}{2}$ do seu tamanho o monocórdio reproduziria o som da nota original uma oitava acima, se o tamanho fosse $\frac{2}{3}$ o som seria

equivalente a uma quinta justa e $\frac{3}{4}$ soaria como uma quarta justa.

3.2 Análise de um encordoamento

Para desenvolver nosso estudo tomaremos como exemplo as especificações de uma embalagem do encordoamento Daddario EXP Coated 80/20 Bronze (Figura 3.2) e das informações disponíveis no site do próprio fabricante, das quais podemos extrair as informações que nos serão necessárias para desenvolvermos nosso estudo.

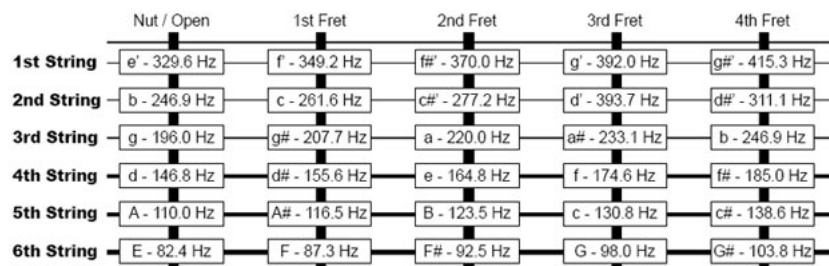
Figura 3.2: Freqüências das notas.



Fonte: Daddario (2017).

O fabricante parte do pressuposto de que o comprimento da escala do violão é de $0,648m$. Neste trabalho tomaremos como referência a quinta corda do encordoamento, que ao ser tocada livremente faz soar a nota A, cuja frequência, conforme a Figura 3.3 é de $110,0Hz$.

Figura 3.3: Freqüências das notas.



Fonte: Daddario (2017).

A Figura 3.3 foi retirada do site do fabricante do encordoamento que estamos analisando (Figura 3.2). Nela podemos ver as frequências das notas das cordas soltas, e também quando são apertadas até a sua quarta casa.

3.3 Harmônicos numa corda de violão

Quando um *luthier*¹ vai construir a escala de um violão ou instrumento similar, ele faz uso de uma tabela na qual estão especificadas as medidas que ele necessitará utilizar para construir um instrumento que soe harmoniosamente enquanto o músico posiciona sua mão ao longo da escala do seu instrumento.

Considerando as informações apresentadas na seção anterior, podemos encontrar o correto posicionamento das casas de um violão que segue os padrões apresentados acima. Este é um caso de ondas estacionárias numa corda com as duas extremidades fixas. Assim, podemos fazer uso das equações apresentadas no capítulo anterior. Nosso primeiro passo será calcular a frequência de alguns harmônicos da quinta corda do violão.

3.3.1 Frequências dos harmônicos

Primeiramente, precisamos encontrar o comprimento da onda no primeiro harmônico, pela equação (2.8):

$$\lambda_1 = 2 \cdot 0,648 = 1,296m$$

Calculando a velocidade da onda, pela equação (2.4):

$$v = \lambda \cdot f = \lambda_1 \cdot f_1 = 1,296 \cdot 110 = 142,56m/s$$

Assim, podemos encontrar a frequência do primeiro harmônico, por (2.14):

$$f_n = n \cdot \frac{v}{2L} = 1 \cdot \frac{142,56}{1,296} = 110Hz$$

Ou seja, o primeiro harmônico possui a mesma frequência da corda solta. A partir desse, por meio da equação (2.15) encontramos as frequências dos harmônicos seguintes:

$$\begin{aligned} f_n &= n \cdot f_1 \\ f_2 &= 2 \cdot f_1 = 220Hz \\ f_3 &= 3 \cdot f_1 = 330Hz \\ f_4 &= 4 \cdot f_1 = 440Hz \\ f_5 &= 5 \cdot f_1 = 550Hz \end{aligned}$$

É possível perceber que os harmônicos formam uma P.A. de razão igual a 110, que é a frequência do seu primeiro harmônico.

3.3.2 Comprimento da corda

Como já foi apresentado, o primeiro harmônico é encontrado tocando-se a corda solta, isto é, com todo o seu comprimento, em nosso caso $L = 0,648m$. Vejamos em que local da escala do violão poderemos encontrar as demais notas referentes aos seus harmônicos.

No segundo harmônico, o comprimento de sua onda é:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2L}{2} = L \Rightarrow \lambda_2 = 0,648m.$$



Fonte: Respingosblog (2016).

Ao apertarmos uma corda do violão em determinado local do seu braço, a corda continua presa entre duas extremidades fixas, que neste caso são o cavalete e o dedo que estará posicionado em uma de suas casas, vide Figura 3.4. Ao fazermos isto é como se estivéssemos reduzindo o tamanho da nossa corda.

Para calcularmos qual parcela do comprimento dessa corda deve soar gerando a frequência do segundo harmônico, podemos considerar que uma pessoa apertou a corda do violão, de modo que apenas uma fração do seu comprimento total esteja soando, chamaremos esse comprimento de corda de L_2 .

Pela equação (2.5), podemos concluir que a velocidade da onda permanece a mesma, pois ela não depende do seu comprimento. Pela equação (2.4) nota-se que o comprimento de onda também deve ser o mesmo de λ_2 , haja visto que sua velocidade não mudou e que a frequência que queremos encontrar é a mesma do segundo harmônico.

Essa corda terá um tamanho L_2 de comprimento, uma frequência de 220Hz e uma onda com $0,648\text{m}$ de comprimento. Essa fração da corda ao ser tocada tem toda sua extensão soando livremente, tendo em vista que ao posicionar o dedo na escala do violão é como se o tamanho da corda fosse reduzido, desconsiderando o restante de seu comprimento. Assim, podemos encontrar seu comprimento considerando o seu primeiro harmônico:

$$\lambda_n = \frac{2L_2}{n} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2L_2}{1} \Rightarrow 0,648 = 2L_2 \Rightarrow L_2 = 0,324\text{m}$$

Logo, precisamos que nossa corda tenha apenas $0,324\text{m}$ de seu comprimento inicial soando para obtermos a frequência desejada. Assim, comparando a corda com o tamanho L_1 e o tamanho L_2 :

$$\frac{L_2}{L} = \frac{0,324}{0,648} = \frac{1}{2}$$

Daí, conclui-se que o segundo harmônico é encontrado quando fazemos a corda soar com apenas metade do seu tamanho original. Logo, a frequência dobra quando diminuimos pela metade o tamanho de uma corda. Se a frequência dobrar, encontramos a mesma nota soando uma oitava acima, sendo esta uma das constatações de Pitágoras em seu experimento com o monocórdio.

Quanto ao comprimento de corda para que ela soe com a frequência do terceiro harmônico, o raciocínio é análogo. Primeiramente, vamos encontrar o comprimento de sua onda, por (2.12):

$$\lambda_3 = \frac{2}{3}L = 0,432\text{m}$$

¹Profissional que constrói ou faz manutenção em instrumentos musicais.

Analogamente, a corda deve ser reduzida a um tamanho L_3 de modo que sua frequência seja igual à do terceiro harmônico (330Hz) da corda do violão considerada em toda sua extensão. Pelas mesmas razões apresentadas para o segundo harmônico, conclui-se que o comprimento da onda no primeiro harmônico dessa fração da corda será o mesmo que λ_3 da corda com seu tamanho inicial.

O primeiro harmônico desse pedaço da corda é dado por:

$$\lambda_n = \frac{2L_2}{n} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2L_3}{1} \Rightarrow 0,432 = 2L_2 \Rightarrow L_2 = 0,216\text{m}$$

Comparando o comprimento desse pedaço da corda com toda a sua extensão:

$$\frac{L_3}{L} = \frac{0,216}{0,648} = \frac{1}{3}$$

Como esse pedaço da corda produz uma nota com a mesma frequência que terceiro harmônico da corda com tamanho L , conclui-se que terceiro harmônico é encontrado quando a corda é tocada com a terça parte do seu tamanho original.

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos formar a Tabela:

Tabela 3.1: Comprimentos de corda e frequência de harmônicos.

Harmônico	comprimento da corda (m)	Frequência Hz
1º	0,648	110
2º	0,324	220
3º	0,216	330
4º	0,162	440
5º	0,1296	550

Fonte: Arquivo pessoal.

Na Tabela acima temos listados os tamanhos que a corda deve ter para que soe a frequência dos cinco primeiros harmônicos.

3.4 O experimento de Pitágoras sob a ótica da teoria apresentada

Nesta seção, vamos analisar as conclusões sobre intervalos musicais obtidas por Pitágoras. O ponto de partida para seus estudos está fundamentado em sua concepção acerca dos números inteiros, bem como das relações que podem ser estabelecidas entre eles, como a divisão.

Continuaremos considerando a mesma corda de violão que temos estudado desde o início do capítulo e os resultados serão comparados com as informações da Figura 3.3. Vale ressaltar que os valores são aproximações. "Esse erro ou desvio é chamado de coma pitagórica" (ZUMPANO; GOLDEMBERG, 2007, p.3). Para uma análise mais detalhada dessa diferença de aproximação, sugere-se a leitura do artigo de Zumpano e Goldemberg citado acima.

Conforme já foi dito, Pitágoras constatou que ao fazer metade da corda soar, ele estaria produzindo uma oitava acima da nota original. Quanto a isto, em nossa argumentação anterior, este fato já foi afirmado.

Outra fração que Pitágoras analisou foi a de $\frac{2}{3}$ da corda. Considerando que a corda utilizada por ele tivesse as mesmas propriedades da que estamos considerando neste trabalho, podemos calcular a frequência dessa nota.

Com base no que já vimos, sabemos que $\frac{2}{3}$ de uma corda gera a mesma nota que $\frac{1}{3}$ dessa corda, pois a primeira fração é o dobro da segunda, onde uma tem o dobro da frequência da outra, estando separadas pelo intervalo de uma oitava. Logo, se encontrarmos a nota que $\frac{1}{3}$ da corda gera, encontraremos a nota referente a $\frac{2}{3}$.

A terça parte de uma corda gera a frequência do terceiro harmônico, vide Tabela 3.1, ou seja, sua frequência é de $330Hz$. Assim, $\frac{2}{3}L$ vai soar com frequência igual a $165Hz$. Este é o valor aproximado da frequência da quarta corda quando está com sua segunda casa pressionada, conforme a figura 3.3, ou seja a nota E . De acordo com a Figura 1.3 esta nota é a quinta justa da nota A , que é a nota da quinta corda solta, assim como Pitágoras também concluiu.

Assim, $\frac{2}{3}$ de uma corda gera a nota da quinta justa e $\frac{1}{3}$ gera uma nota equivalente a esta, isto é, a quinta justa, uma oitava acima.

A última conclusão de Pitágoras acerca desse assunto é que ao fazer $\frac{3}{4}$ de uma corda soar poderíamos encontrar a sua quarta justa. Faremos uso de uma proporção que conhecemos, que é $\frac{1}{4}L$. Um quarto do tamanho de uma corda gera uma nota que é a mesma nota gerada pelo tamanho original da corda, pois ela representa a metade da metade do tamanho de L . Logo, considerando nosso exemplo, esta fração gera a nota A duas oitavas acima da nota original.

Como $\frac{1}{4}L$ é a terça parte de $\frac{3}{4}L$, isto significa que a nota A é a quinta justa de outra nota, isto é, seu terceiro harmônico. Pela Figura 1.3 podemos ver que A é a quinta justa de D . Assim, a nota que estávamos procurando é a nota D , a quarta justa de A , o que está de acordo com a Figura 1.3.

Considerações Finais

A Música por si mesma já é cativante, porém, compreender um pouco de todo o conhecimento que está por trás da mesma a torna bem mais interessante. Neste trabalho foi possível estabelecer algumas relações dela com a Matemática e a Física. Este trabalho é um exemplo de que nenhuma área de conhecimento deve ser estudada de maneira isolada das demais e que encontrar pontos em comum pode ser enriquecedor para quem os estuda.

Por meio do uso de razões matemáticas e dos conceitos relacionados aos harmônicos foi possível analisar, de maneira sucinta, algumas relações existentes entre essas áreas de conhecimento. Tomando como referencial teórico os estudos de Pitágoras foi possível analisar o assunto por perspectivas diferentes e reforçando as afirmações apresentadas.

O estudo das ondas na corda de um violão é um pequeno exemplo de como podemos relacionar conteúdos de áreas distintas, mostrando sua aplicabilidade. Embora o propósito deste estudo não tenha sido o de apresentar uma proposta de ensino, o mesmo pode servir como ponto de partida para a preparação de uma aula ou oficina, tanto de Física, quanto de Matemática. Sendo esta uma possível contribuição para outros trabalhos relacionados ao tema exposto.

Referências Bibliográficas

- [1] ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e música: o pensamento analógico na construção dos significados**. 7 ed. São Paulo: Escritura, 1999.
- [2] BARNABÉ, Fernando Moreira. **A melodia das Razões e Proporções: a música sob o olhar interdisciplinar do professor de matemática**. 2011. 68f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2011.
- [3] ORFEU. In: ENCICLOPÉDIA BARSA. Rio de Janeiro: Encyclopaedia Britannica do Brasil, 1995.
- [4] DADDARIO.COM. **DAstringtensionguide**. Disponível em: <<http://http://www.daddario.com/DAstringtensionguide.Page?sid=b3fa1402-b2da-40b5-a02a-c2f5cb017ac6>> Acesso em: 22 abr. 2017.
- [5] DESCOMPLICANDOAMUSICA.COM. **Ciclo das quintas**. Disponível em: <<http://www.descomplicandoamusica.com/ciclo-das-quintas/>> Acesso em: 08 abr. 2016.
- [6] ESQUERDA.NET. **Como explicar ondas gravitacionais**. Disponível em: <<http://www.esquerda.net/artigo/como-explicar-ondas-gravitacionais-tua-avo/41226>> Acesso em: 10 out. 2016.
- [7] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2011.
- [8] GOLDEMBERG, Ricardo. **A prática da entoação nos instrumentos de afinação não-fixa**. Opus, Goiânia, v.13, n.1, p.65-74, Jun. 2007.
- [9] HALLIDAY, Resnick; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física**. 8. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. v. 2.
- [10] HOUAISS, Antônio. **Minidicionário Houaiss da língua portuguesa**. 4. ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2010.
- [11] HYPESCIENCE.COM. **Flauta da era das cavernas é encontrada, ouça sua música**. Disponível em: <<http://hypescience.com/flauta-da-era-das-cavernas-e-encontrada-ouca-sua-musica/>> Acesso em: 15 out. 2016.
- [12] INICIANTESDOVIOLÃO.COM.BR. **Qual violão devo comprar? Dica para iniciantes**. Disponível em: <<http://iniciantesdoviola.com.br/qual-violao-devo-comprar-dica-para-iniciantes/>> Acesso: 10 out. 2016.

- [13] LABORATORIODELUTHIERIA.COM. **Série harmônica**. Disponível em: <<http://https://laboratoriodeluthieria.wordpress.com/tag/serie-harmonica/>> Acesso em: 24 abr. 2017.
- [14] PARISI, Daril. **Guia de Técnica para Guitarra**. São Paulo: Ricordi, 1983.
- [15] PORTALMUSICA.COM. **Memorizando as notas no braço do violão e guitarra**. Disponível em: <<http://www.portalmusica.com.br/memorizando-as-notas-no-braco-do-violao-e-guitarra/>> Acesso em: 07 abr. 2016.
- [16] RAMALHO JUNIOR, Francisco; FERRARO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo A. de Toledo. **Os fundamentos da Física**. 9. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2007. v. 2.
- [17] RESPINGOSBLOG.BLOGSPOT.COM. **O caso do violão imperdível**. Disponível em: <<http://respingosblog.blogspot.com.br/2016/03/o-caso-do-violao-imperdivel.html>> Acesso em: 28 abr. 2017.
- [18] SANTOS, Marco Aurélio da Silva. **” Raios X”**. Disponível em <<http://brasilecola.uol.com.br/fisica/raios-x.htm>>. Acesso em 18 de maio. 2017.
- [19] SILVA, Claudio Xavier da; BARRETO FILHO, Benigno. **Física aula por aula**. São Paulo: FTD, 2008. v.3.
- [20] SILVA, Domiciano Correa Marques Da. **Reflexão de onda em uma corda**. Disponível em <<http://brasilecola.uol.com.br/fisica/reflexao-onda-uma-corda.htm>> Acesso em 20 de outubro de 2016.
- [21] SOFISICA.COM.BR. **Reflexão**. Disponível em: <<http://www.sofisica.com.br/conteudos/Ondulatoria/Acustica/reflexao.php>> Acesso em 20 dez. 2016.
- [22] TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física**. 6.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. v. 1.
- [23] TREFIL, James S.; HAZEN, Robert M. **Física viva: Uma introdução à física conceitual**. Rio de Janeiro: LTC, 2006. v.2.
- [24] UNIERADIOLOGIA.COM.BR. Radiografia Carpal. Disponível em: <<http://unieroradiologia.com.br/exames/radiografia-carpal/>> Acesso em 10 out. 2016.
- [25] WIKIPEDIA.ORG. Diapasão. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Diapas>>
- [26] WONG, Kate. Neanderthal Notes - Did ancient humans play modern scales?. **Scientific American**, New York, v.277, n.3, set.1997.
- [27] YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. **Física II: Termodinâmica e ondas**. 10.ed. São Paulo: Addison Wesley, 2003.
- [28] ZUMPARNO, Nivia G.; GOLDEMBERG, Ricardo. **Princípios de técnica e história do Temperamento Musical**. Sonora, v.2, n.4, p.1-10, 2009.