UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANA LUIZA PEREIRA ROSA PINHEIRO

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES: PROPOSTAS DIDÁTICAS

ARAGUAÍNA
2017

ANA LUIZA PEREIRA ROSA PINHEIRO

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES: PROPOSTAS DIDÁTICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.
Orientadora: Profª. Msc. Renata Alves da Silva.

ARAGUAÍNA
2017

ANA LUIZA PEREIRA ROSA PINHEIRO

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES: PROPOSTAS DIDÁTICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profª. Msc. Renata Alves da Silva.

Aprovado em: / / .

BANCA EXAMINADORA

Profª. Msc. Renata Alves da Silva (orientadora)

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Júnior

Profª. Msc. Samara Leandro Matos da Silva

Dedico este trabalho à minha família e ao meu esposo, pelo apoio incondicional, incentivo e compreensão sem igual.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus pelo dom da vida, por ter me guardado nas viagens de Colinas a Araguaína durante todo o curso e nas andanças a pé para a conclusão dos estágios, por nunca me deixar fraquejar durante toda essa caminhada e por ter me proporcionado-me a oportunidade de conhecer grandes amigos durante este período.

Aos meus pais Ivair Ferreira Rosa e Kellen Andréa Pereira de Araújo por sempre estarem ao meu lado mesmo nos momentos mais difíceis. Pelo amor e carinho que me proporcionaram ao longo de toda a minha vida, por sempre me incentivarem a estudar cada vez mais e por me custearem ao longo de praticamente todo o curso.

Aos meus irmãos Anna Sarah, Elizeu e Messias pela convivência e alegrias proporcionadas e também a minha cunhada Fabiana, que deu a luz ao meu melhor presente, meu sobrinho Samuel. À toda a minha família pela confiança depositada em mim. Amo muito todos vocês.

A minha avó Neiva Rosa Ferreira por me defender de tudo e de todos. Por me ajudar sempre em todos os momentos e principalmente no momento mais especial em minha vida que foi o meu casamento.

Ao meu esposo Cícero Júnior por sempre me incentivar quando eu mais precisei. Lembro-me bem de quando eu quis desistir do curso foi ele que convenceu-me a continuar com sua palavra amiga e aqui estou. Agradeço por todas as alegrias proporcionadas enquanto éramos colegas de universidade e ao longo da nossa vida juntos, por me aguentar todos os dias e pela sua fidelidade para comigo, por me ajudar com seus conhecimentos tanto nas disciplinas que conclui com sua ajuda quanto para o programa LaTeX que utilizei para redigir esse trabalho de conclusão de curso. Amo-te.

Aos meus amigos e colegas que conheci ao longo dessa jornada (aqui em ordem alfabética): Aline Mayra, Ana Claúdia, Carla, Cristiano, Dnilton, Edson, Fabrício, Fernanda, Gecivaldo, Isabelle, Ivonei, Jailson, Jamison, Jardeane, Jaziel, Jeruzalém, Magno Acácio, Magno Macedo, Marizane, Matheus, Renato, Tallys e Waleska.

Aos meus amigos e colegas que cederam abrigo para mim quando precisei: Áurea, Brunna, Daniella e João Marcos.

A minha amiga Bárbara que conheci a pouco mais de um ano, mas parece que nos conhecemos há anos. Por me aturar, por compartilhar alegrias e tristezas, pelas gentilezas concedidas a mim, pelos estudos juntas e conselhos dados, por poder fazer meu dia mais feliz com as nossas preguiças e conversas sobre as novelas preferidas.

A secretária do curso e minha madrinha Dênia por também me aturar, por compartilhar suas experiências comigo e por resolver várias coisas para mim relacionadas ao curso.

Agradeço as escolas Colégio Pré – Universitário e Escola Estadual Adolfo Bezerra de Menezes pela receptividade e oportunidade para que eu aprendesse e conhecesse mais sobre minha profissão ao longo dos estágios.

Agradeço também ao projeto PIBID no qual tive a oportunidade de participar, uma vez que pude aprender metodologias novas, a desenvolver uma escrita científica e a conhecer melhor minha profissão. Agradeço as escolas: Escola Estadual Marechal Rondon e Escola Municipal Dr. Simão Lutz Kossobutzki por cederem o espaço para que eu participasse desse projeto e pela confiança depositada a mim para que eu pudesse repassar os conhecimentos aos seus alunos.

Gostaria de agradecer aos professores que contribuíram com seus conhecimentos para que eu pudesse ter uma formação: Álvaro, André, Claudenice, Deive, Douglas, Elizângela, Fernanda, Flávio, Freud, Jamur, Janderson, José Carlos, Káthia, Marcos José, Misleine, Odair, Plínio, Raimundo, Robledo, Samara, Sinval e Yukiko.

A todo corpo admistrativo e discente dessa universidade que contribuíram diretamente ou indiretamente na minha jornada acadêmica.

Por fim gostaria de agradecer a minha orientadora Renata Alves da Silva por ter aceitado meu convite para ser minha orientadora, acreditando assim que eu poderia vir a desenvolver um bom trabalho, por ter me dado todo o suporte necessário para que eu concluísse esse trabalho.

A todos, minha eterna gratidão.

"A Matemática na prática é mais interessante, útil e necessária."

Elon Lages Lima

RESUMO

Este trabalho consiste em um estudo de Sistemas de Equações Lineares. Para isso, apresentamos a teoria de Matrizes e Determinantes, uma vez que são pré-requisitos para a sua compreensão. Um sistema de equações lineares é um conjunto de equações de grau um. Quando se estuda sistema lineares, o principal objetivo, é encontrar o seu conjunto solução, que muitas vezes, dependendo do número de equações e incógnitas, isso não se torna tão simples. Traremos neste trabalho os principais métodos de resolução de sistemas e também condições necessárias para a sua utilização. Ao final do trabalho, traremos duas propostas didáticas para o ensino de sistemas de equações lineares no ensino médio, uma vez que os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's trazem os embasamentos necessários, nos quais devemos tanto procurar relacionar sempre que possível a matemática com o cotidiano, pois isso traz um significado prático desse conteúdo ao aluno, como também abordar um novo conteúdo através de resolução de problemas saindo do método tradicional e tentando inovar com uma aula de resolução de exercícios contextualizada. A metodologia utilizada envolve uma pesquisa bibliográfica, através de leituras em artigos, monografias, trabalhos de conclusão de curso, dissertações, livros de Álgebra Linear e Álgebra com Aplicações.

Palavras-chaves: Sistemas de Equações Lineares. Métodos de Resolução. Propostas didáticas.

ABSTRACT

This work consists of a study of Systems of Linear Equations. For this, we present the theory of Matrices and Determinants, since they are prerequisites for their understanding. A system of linear equations is a set of equations of degree one. When studying linear systems, the main goal is to find your solution set, which often depending on the number of equations and unknowns, this does not become so simple. We will bring in this work the main methods of solving systems and also the necessary conditions for their use. At the end of the study, we will present two didactic proposals for the teaching of systems of linear equations in secondary education, since the National Curricular Parameters - PCN's provide the necessary basics, in which we must both seek to relate mathematical to everyday life, As this brings a practical meaning of this content to the student as well as addressing new content through problem solving from the traditional method and trying to innovate with a contextualized lesson of solving exercises. The methodology used involves a bibliographical research, through readings in articles, monographs, course papers, dissertations, Linear Algebra books and Algebra with Applications.

Keywords: Systems of Linear Equations. Methods of Resolution. Didactic proposals.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho surgiu através de um interesse pelo conteúdo de Sistemas de Equações Lineares quando cursei a disciplina de Álgebra Linear I, por perceber que o mesmo é bastante aplicável em diversas áreas e também no cotidiano.

Um Sistema Linear pode ser definido como um conjunto limitado de equações lineares, tendo em vista que estas equações devem ser consideradas em conjunto e não invidualmente, uma vez que a solução encontrada deve satisfazer todas as equações.

Para que consigamos encontrar a solução de um sistema linear, temos que resolvê-lo por algum método. Os métodos de resolução que serão apresentados no trabalho são: Substituição, Adição, Regra de Cramer, Escalonamento e Método de Gauss, onde traremos as particularidades de cada método e condições para a sua utilização.

Os Sistemas Lineares são aplicáveis nas mais diversas áreas do conhecimento como: Física (dinâmica dos fluidos, circuitos elétricos, transferências de calor), Química (balanceamento de equações químicas), robótica, geração de imagens digitais, alimentação balanceada, tráfego de veículos, estatística, geodésia, cálculo de estruturas, GPS (Sistema de Posicionamento Global), estrutura de aviões, tomografia computadorizada entre diversas outras.

Existem também situações do cotidiano que envolvem sistemas lineares, três delas serão discorridas ao longo do trabalho. Defendemos que esses mesmos exemplos podem ser levados para sala de aula como forma de problemas para que uma aula de exercício possa sair do mecanicismo tradicional e passe a ser motivadora aos alunos.

A presente pesquisa tem por objetivo:

- Abordar conceitos básicos necessários para que qualquer leigo do assunto possa compreendar o tema principal desta pesquisa;
- Apresentar a teoria de Sistemas de Equações Lineares bem como seus métodos de resolução;
- Propor uma didática para auxiliar no ensino de Sistemas de Equações Lineares para alunos do Ensino Médio.

A metodologia adotada para a realização desta pesquisa foi a abordagem qualitativa com base em estudo bibliográfico.

O nosso trabalho está estruturado em quatro capítulos. O primeiro capítulo é a introdução, onde trazemos algumas considerações acerca do assunto.

No segundo capítulo, abordaremos a teoria de matrizes e determinantes para que o leitor possa se apropriar desses conteúdos que são essenciais para a compreensão do tema principal.

No terceiro capítulo, traremos inicialmente a teoria de sistemas de equações lineares e seus métodos de resolução, uma vez que é o conteúdo principal desta pesquisa e, ao final do capítulo, traremos alguns problemas contextualizados que envolvem o mesmo tema.

No quarto capítulo, há duas propostas didáticas para o ensino de sistemas de equações lineares na modalidade do ensino médio.

Por fim, tecemos as considerações finais nais quais sugerimos perspectivas futuras para os acadêmicos que desejarem pesquisar sobre esse conteúdo.

Capítulo 2

Matrizes e Determinantes

Neste capítulo, estudaremos matrizes, suas classificações, operações básicas entre elas e suas propriedades. Compreender bem as matrizes nos proporcionará ferramentas para que possamos desenvolver o conteúdo principal deste trabalho, a saber, apresentar a teoria de sistemas de equações lineares e seus métodos de resolução. Para isso, tomaremos como referência [6], [16] e [21].

2.1 Matrizes

Definição 2.1. *Chama-se matriz de ordem m por n a uma tabela de $m \times n$ elementos (números polinômios, funções etc.) disposto em m linhas e n colunas. O elemento na linha de número i e coluna de número j é representado por a_{ij}.*

Um exemplo geral de matriz com m linhas e n colunas é

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Uma matriz pode ser representada de formas diferentes.

- Por parênteses: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

- Colchete (como será adotada em todo o trabalho): $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

A título de nomenclatura, neste trabalho, vamos representar qualquer matriz por uma letra maiúscula do nosso alfabeto. Se uma determinada matriz A possui m linhas e n colunas, sua notação será $A_{m\times n}$. Se nos deparamos com uma matriz A cujo elemento que pertence à linha de número i e à coluna de número j é a_{ij}, podemos escrever também $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Chamaremos $m \times n$ a ordem da matriz $A_{m\times n}$ e, quando $m = n$, diremos apenas que a ordem da matriz $A_{n\times n}$ é n.

Exemplo 2.2. *Considere A a matriz de ordem 3×4 abaixo (três linhas e quatro colunas).*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 & 25 \\ 10 & 5 & 2 & 34 \\ 3 & 1 & 9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quanto aos elementos da matriz A, temos, por exemplo, $a_{23} = 2$, $a_{12} = 4$ e $a_{31} = 3$. Não existe, por exemplo, o elemento a_{41} da matriz A, pois ela possui apenas 3 linhas.

Devemos ter cuidado para não confundir linhas com colunas. Uma matriz 4×3 seria, por exemplo, como a matriz B a seguir:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 10 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 9 \\ 25 & 34 & 0 \end{bmatrix}.$$

Percebemos com esse exemplo que o número de linhas e de colunas interfere na estrutura da matriz.

Exemplo 2.3. *Podemos construir um exemplo de uma matriz $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ tal que o elemento seja definido pela expressão $a_{ij} = 3i – j$ com $1 \leq i \leq 2$ e $1 \leq j \leq 3$. Para determinar a matriz A, escrevendo*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},$$

temos que

- $a_{11} = 3 \cdot 1 – 1 = 3 – 1 = 2$
- $a_{12} = 3 \cdot 1 – 2 = 3 – 2 = 1$
- $a_{13} = 3 \cdot 1 – 3 = 3 – 3 = 0$

Vamos agora determinar os elementos da linha 2, em que $i = 2$ e j varia de 1 a 3:

- $a_{21} = 3 \cdot 2 – 1 = 6 – 1 = 5$

- $a_{22} = 3 \cdot 2–2 = 6–2 = 4$
- $a_{23} = 3 \cdot 2–3 = 6–3 = 3$

Portanto,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Uma matriz $A_{m\times n}$ pode receber um certo nome dependendo da quantidade de suas linhas e colunas, dos elementos que as compõem ou somente por ter características particulares. Devemos nos atentar a essas especificidades, pois em vários momentos podemos nos deparar com esses tipos de matrizes em exercícios e/ou textos, onde devemos ter o conhecimento sobre essas classificações.

Definição 2.4. *Uma matriz $A = A_{m\times n}$ se chama matriz quadrada se o número de linhas dela é igual ao seu número de colunas, ou seja, $m = n$. Isto quer dizer que a matriz A é de ordem m. Neste tipo de matrizes, chamamos de diagonal principal o conjunto dos elementos a_{ii} quando i varia de 1 a m.*

Exemplo 2.5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A diagonal principal desta última matriz é $\{0, 1\}$.

Definição 2.6. *Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é chamada de matriz nula se $a_{ij} = 0$ para quaisquer que sejam i e j.*

Exemplo 2.7.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.8. *Uma matriz $A_{m\times n}$ é chamada de matriz coluna se possuir somente uma coluna, ou seja, se $n = 1$.*

Exemplo 2.9.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ \pi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.10. *Uma matriz $A_{m\times n}$ é chamada de matriz linha se possuir somente uma linha, ou seja, se $m = 1$.*

Exemplo 2.11.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 9 \end{bmatrix} \; e \; \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.12. *Uma matriz quadrada $A_{n\times n}$ é chamada de matriz diagonal se $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.*

Exemplo 2.13.

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \; e \; \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.14. *Uma matriz quadrada em que os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e os demais elementos iguais a 0 é chamada de matriz identidade.*

Exemplo 2.15.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; e \; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.16. *Uma matriz quadrada em que todos os seus elementos abaixo da diagonal principal são nulos é chamada de matriz triangular superior. Isto é o mesmo que dizer que $a_{ij} = 0$ quando $i > j$.*

Exemplo 2.17.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & -1 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \; e \; \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.18. *Uma matriz quadrada em que todos os seus elementos acima da diagonal principal são nulos é chamada de matriz triangular Inferior. Podemos também dizer isto da seguinte forma: $a_{ij} = 0$ quando $i < j$.*

Exemplo 2.19.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{bmatrix} \; e \; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.20. *Uma matriz quadrada é dita ser simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$ sejam quais forem os valores de i e j.*

Exemplo 2.21.

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 6 & 7 \\ 0 & 6 & 9 & 8 \\ 1 & 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 7 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Segue da definição que, em uma matriz simétrica, a parte superior da diagonal principal é refletida na parte inferior desta.

Definição 2.22. *Considere $A = (a_{ij})_{m\times n}$ uma matriz de ordem $m\times n$. Chamamos de transposta de A, e denotamos por A^t, à matriz $A^t = (a_{ji})_{n\times m}$.*

Segue da definição acima que a transposta de uma matriz de ordem $m \times n$ tem n linhas e m colunas. O elemento a_{13} da matriz A ocupa a posição a_{31} na matriz transposta. Essencialmente, para obtermos a transposta de uma matriz A, basta fazermos com que suas linhas se tornem colunas e as colunas linhas.

Exemplo 2.23. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Sua transposta é, então, a matriz

$$A^t = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma, considere

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sua transposta é a matriz

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.24. *Dada uma matriz quadrada A de ordem n, chamamos de inversa de A a uma matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$, onde I é a matriz identidade de ordem n. Escrevemos A^{-1} para a inversa de A.*

Exemplo 2.25. *Seja $A = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 22 & 8 \end{bmatrix}$. encontre a sua inversa.*

Procurando a inversa da matriz A, temos que, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. tal que $A \cdot B = I$ e $B \cdot A = I$.

Estabelecendo a primeira condição,

$$\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 22 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12a + 4c & 12b + 4d \\ 22a + 8c & 22b + 8d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 12a + 4c = 1 \\ 22a + 8c = 0 \end{cases} e \begin{cases} 12b + 4d = 0 \\ 22b + 8d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, temos

$$a = 1.$$
$$b = -\frac{1}{2}.$$
$$c = -\frac{11}{4}.$$
$$d = \frac{3}{2}.$$

Teremos então,

$$\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 22 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{11}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, $A \cdot B = I$. *Também*

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{11}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 22 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, $B \cdot A = I$ *e, portanto,*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{11}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

é a inversa da matriz A. $(B = A^{-1})$.

2.2 Igualdade entre Matrizes

É possível dar uma noção de igualdade entre matrizes. Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ será dita igual à uma matriz $B = (b_{ij})_{p\times q}$ se, e somente se, satisfizer as seguintes condições.

- Ambas matrizes possuem a mesma ordem, isto é, $m = p$ e $n = q$.
- Todo elemento da matriz A deverá ser igual ao elemento da matriz B que ocupa sua mesma posição, isto é, deve valer $a_{ij} = b_{ij}$ para quaisquer que sejam i e j.

Exemplo 2.26. *Vamos determinar o valor de c e d supondo que as matrizes A e B abaixo sejam iguais.*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4c-1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 8-d & 4 \end{bmatrix}.$$

Após verificarmos que as matrizes são de mesma ordem, iremos conferir se seus respectivos elementos são iguais. Temos

- $a_{11} = 2$ *e* $b_{11} = 2$*;*
- $a_{22} = 4$ *e* $b_{22} = 4$.

Para descobrirmos os valores de c e d, sabemos que o elemento $a_{12} = 4c - 1$ deve ser igual ao elemento $b_{12} = 11$. Com isso, podemos encontrar o valor de c, fazendo

$$4c - 1 = 11$$

$$4c = 12$$
$$c = \frac{12}{4}$$
$$c = 4.$$

Sabemos também que o elemento $a_{21} = 3$ deve ser igual ao elemento $b_{21} = 8 - d$. Com isso, podemos encontrar o valor de d, fazendo

$$3 = 8 - d$$

$$-d = 3 - 8$$

$$-d = -5 \times (-1)$$

$$d = 5.$$

2.3 Operações com Matrizes

Além da igualdade entre matrizes, podemos definir operações entre elas.

Definição 2.27. *A soma de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ com outra matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$ é definida como sendo a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, isto é, para quaisquer que sejam i e j.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{n\times m} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots \\ b_{21} & b_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Nesse caso, as reticências que aparecem nessas matrizes querem dizer que esse mesmo padrão prevalece para quantas linhas e colunas a matriz possuir.

Exemplo 2.28.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 11 & 6 \\ 13 & 13 \end{bmatrix}.$$

Podemos perceber que a forma como foi definida a soma de matrizes se assemelha as propriedades da adição de números reais. Vale ressaltar que tudo que fizemos até aqui sobre a adição de matrizes é análogo para operação subtração.

Já que estas duas operações possuem semelhanças com a operação de adição e subtração nos números reais, as propriedades também são iguais. Mais especificamente, dadas as matrizes A, B e C de mesma ordem, temos:

1. $A + B = B + A$ (comutatividade);
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associatividade);
3. $A + 0 = A$, onde 0 representa a matriz nula de ordem $m \times n$.

A demonstração destes fatos é deixada como exercício para o leitor.

Definição 2.29. *Tomemos uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $k \in \mathbb{R}$. A matriz $C = kA$ é definida por*

$$C = k \cdot A = (ka_{ij})_{m\times n}.$$

Vejamos agora a matriz geral para essa operação:

$$k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & k \cdot a_{23} & \cdots & k \cdot a_{2n} \\ k \cdot a_{31} & k \cdot a_{32} & k \cdot a_{33} & \cdots & k \cdot a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & k \cdot a_{m3} & \cdots & k \cdot a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Isso quer dizer que, se multiplicamos um escalar fora de uma matriz qualquer, ele irá multiplicar todos os elementos que compõem essa matriz.

Exemplo 2.30.

$$-2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.31.

$$4 \cdot \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -4 \\ -20 & 36 \end{bmatrix}.$$

Vejamos algumas propriedades derivadas das propriedades anteriores . Tomemos as matrizes A e B quaisquer de mesma ordem, digamos $m \times n$, e escalares k, k_1 e k_2 reais. Vale que

1. $k(A + B) = kA + kB$ (aplicamos a propriedade distributiva);

2. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$ (aqui também aplicamos a propriedade distributiva);

3. $0 \cdot A = 0$ (se multiplicarmos o escalar 0 por uma matriz qualquer, obteremos a matriz nula);

4. $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$ (aplicamos a propriedade associativa).

A demonstração destes fatos também será deixada a cargo do leitor.

Definição 2.32. *(Multiplicação de Matrizes) Tomemos duas matrizes quaisquer $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times q}$. Definimos a matriz $AB = (c_{i\times k})_{m\times q}$ onde:*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + \ldots + a_{in}b_{nk}.$$

Sobre esta definição, ressaltamos:

1. Só podemos efetuar a multiplicação de matrizes quando a primeira possuir o número de colunas igual ao número de linhas da segunda matriz. Neste caso, a matriz resultante, $C = AB$, será de ordem $m \times q$.

2. Os elementos c_{ik} resultantes da multiplicação das matrizes são obtidos através da multiplicação dos elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos da j-ésima coluna da segunda matriz, somando em seguida esses produtos.

Exemplo 2.33.

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2\cdot 5+9\cdot 4 & 2\cdot 2+9\cdot 8 \\ 7\cdot 5+3\cdot 4 & 7\cdot 2+3\cdot 8 \\ 4\cdot 5+(-1)\cdot 4 & 4\cdot 2+(-1)\cdot 8 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 46 & 76 \\ 47 & 38 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}.$$

O que fizemos neste exemplo, primeiramente, foi verificar se é possível efetuar a multiplicação dessas matrizes. Como foi visto acima, só podemos multiplicar matrizes se o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda matriz. São duas colunas na primeira matriz e duas linhas na segunda matriz. Logo, podemos multiplicá-las. Lembrando que a matriz resultante desse produto deve ter o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda matriz, sendo assim uma matriz 3×2, prosseguimos com os cálculos. Ao terminar de calcular os produtos e somá-los devidamente, encontramos a matriz resultante deste produto.

Exemplo 2.34.

$$\begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 2 & 3 \\ 20 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}.$$

Analisando as matrizes dadas para que possamos prosseguir com o exemplo, vemos que o número de colunas da primeira matriz é diferente do número de linhas da segunda matriz, o que nos impossibilita de prosseguir com os cálculos.

Exemplo 2.35.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \\ 9 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}_{4\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3+0\cdot 5 & 1\cdot 6+0\cdot 6 & 1\cdot 2+0\cdot 4 \\ 4\cdot 3+5\cdot 5 & 4\cdot 6+5\cdot 6 & 4\cdot 2+5\cdot 4 \\ 9\cdot 3+3\cdot 5 & 9\cdot 6+3\cdot 6 & 9\cdot 2+3\cdot 4 \\ 7\cdot 3+2\cdot 5 & 7\cdot 6+2\cdot 6 & 7\cdot 2+2\cdot 4 \end{bmatrix}_{4\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 37 & 54 & 28 \\ 42 & 72 & 30 \\ 31 & 54 & 22 \end{bmatrix}.$$

Novamente, o que analisamos primeiro foi se é possível efetuar a multiplicação dessas matrizes. Vimos que são duas colunas na primeira matriz e duas linhas na segunda matriz e, assim, prosseguimos com os cálculos.

As propriedades da definição de multiplicação de matrizes diferem daquelas de números reais em alguns pontos. O produto de matrizes possui as seguintes propriedades.

1. $AB \neq BA$ (propriedade comutativa não é válida em geral na multiplicação);

   Exemplo 2.36. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.

   Fazendo $A \cdot B$ *temos que o resultado é* $A \cdot B = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$.

   Agora, fazendo $B \cdot A$ *o resultado é* $B \cdot A = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$.

   Portanto, vimos que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

2. $AI = IA = A$ (a matriz identidade I é o elemento neutro da multiplicação);

3. $A(B + C) = AB + AC$ (aplicamos a propriedade distributiva à esquerda);

4. $(A + B)C = AC + BC$ (aplicamos a propriedade distributiva à direita);

5. $(AB)C = A(BC)$ (propriedade associativa);

6. $(AB)^t = B^t A^t$ (devemos observar a ordem de A e B);

7. $0 \cdot A = 0$ *e* $A \cdot 0 = 0$ (toda matriz multiplicada pela matriz nula será também uma matriz nula).

2.4 Determinantes

A partir daqui, traremos a teoria de determinantes bem como determiná-los. Abordaremos definições fundamentais para que possamos compreender o conteúdo de determinante. Começaremos com o conceito de permutação.

Definição 2.37. *Dados* n *objetos distintos, digamos* $b_1, b_2, \ldots, b_n$*, uma permutação destes objetos equivale a dizer que devemos dispô-los em uma determinada ordem.*

Podemos citar como exemplo que $(4\ \ 5\ \ 6)$ é uma permutação dos números 4, 5 e 6; $(5\ \ 4\ \ 6)$ é uma outra possível permutação. Podemos obter o número de permutações sabendo apenas a quantidade de objetos que queremos permutar. Para isso, se temos n objetos a serem permutados, o número de permutações possíveis será $n!$ (lido como n fatorial) e $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Por exemplo, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutações. Convenciona-se que $0! = 1$

Definição 2.38. *Dada uma permutação de números inteiros* $1, 2, 3, \ldots, n$*, diz-se que há uma inversão quando um inteiro antecede outro menor que ele.*

Exemplo 2.39. *Consideremos as permutações de* 4*,* 5 *e* 6 *e vejamos abaixo em cada permutação o número de inversões.*

Permutação	*Número de inversões*
(4 5 6)	*0*
(4 6 5)	*1*
(5 4 6)	*1*
(5 6 4)	*2*
(6 4 5)	*2*
(6 5 4)	*3*

Apenas para fixar ideias, vamos explicar o último caso desta tabela: (6 5 4) onde há três inversões. Note que o 6 está antes dos números 5 e 4, números menores que ele. Isso caracteriza duas inversões. O 5, por sua vez, está antes do 4, e isso nos fornece mais uma inversão, totalizando 3 inversões na permutação (6 5 4).

Exemplo 2.40. *Considerando duas permutações dos números* 4 *,5,* 6 *e* 7*, note que (6 5 4 7) possui* 3 *inversões e (7 6 5 4) possui* 6 *inversões.*

Agora, podemos falar sobre Determinantes de Matrizes.

Definição 2.41. *Considere* $A = (a_{ij})$*. Definimos* $det(a_{ij}) = \sum_{\rho}(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}, \ldots, a_{nj_n}$*, onde* $J = (j_1, \ldots, j_n)$ *é o número de inversões da permutação* $(j_1 j_2 \ldots j_n)$ *e* ρ *indica que a soma é estendida a todas as* $n!$ *permutações de (1 2 . . . n).*

Podemos fazer três observações em relação a essa definição.

1. Se a permutação dada na fórmula acima tem um número ímpar de inversões, o coeficiente $(-1)^J$ do termo correspondente no somatório terá sinal negativo; caso contrário, terá sinal positivo;

2. Em cada termo do somatório, existem apenas um elemento de cada linha e um elemento de cada coluna da matriz;

3. Fazendo a reordenação dos termos do somatório, podemos mostrar que é possível definir o determinante por

$$det(a_{ij}) = \sum_{\rho}(-1)^J a_{j_1 1}a_{j_2 2}a_{j_3 3}, \ldots, a_{j_n n}$$

   variando apenas os primeiros índices e fixando os segundos.

No momento em que nos referimos a determinantes devemos lembrar que é um número que está associado a uma determinada matriz quadrada. Tendo a matriz $A = (a_{ij})$, representamos o determinante dessa matriz da forma $det(a_{ij})$ ou $det\ A$ ou $|A|$.

Com isso, temos que o determinante das matrizes abaixo são dados por:

- $det[a] = a$.
- $det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- $det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

Na próxima seção, estes cálculos ficarão mais claros. Podemos observar na resolução acima dos determinantes de matrizes gerais de ordem 3 e 4 que aparecem todos os produtos $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$, onde $(j_1\ j_2\ j_3)$ são as possíveis permutações para os números 1, 2 e 3. Ainda podemos nos atentar que o sinal do termo é positivo se a permutação tiver um número par de inversões; já para os termos que possuem a permutação com um número ímpar de inversões, o termo será negativo. O determinante de matrizes possuem as seguintes propriedades.

1. Se todos os elementos de uma coluna ou linha de uma matriz B são 0, então $det\ B = 0$;
2. O determinante da matriz A é igual ao determinante da matriz A^t;
3. Se multiplicarmos uma linha da matriz por uma constante k, o determinante também ficará multiplicado por essa constante k;
4. Se trocarmos a posição de duas linhas de uma matriz qualquer o determinante trocará de sinal;
5. O determinante de uma matriz qualquer que possua duas linhas ou colunas iguais será 0;
6. $det\ (A + B) \neq det\ A + det\ B$ em geral;

Exemplo 2.42. *Dada as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Somando $A + B$ *chegamos em* $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ *e agora calculando o seu determinante, temos que*

$det(A + B) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 = 15 - 12 = 3.$

Vejamos o resultado para $detA + detB$, para isso, temos que calcular o determinante das duas matrizes separadamente e depois somar os resultados. Sendo assim:
$detA = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0{\cdot}3 - 1{\cdot}2 = 0 - 2 = -2$ *e* $detB = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3{\cdot}2 - 1{\cdot}4 = 6 - 4 = 2.$
Somando o resultado do $detA + detB = -2 + 2 = 0$.

Concluímos então, que o resultado de $det\ (A + B) \neq det\ A + det\ B$.

7. O determinante de uma matriz qualquer não irá se alterar se somarmos a uma linha dessa matriz uma outra linha da mesma matriz multiplicada por uma constante k;

8. $det\ (AB) = detAdetB$.

Nesta seção, iremos apresentar todos os possíveis métodos para que possamos resolver determinantes de matrizes de ordem n.

Exemplo 2.43. *(Determinante de uma matriz de ordem 1) Dada uma matriz A qualquer de ordem 1, o seu determinante será o próprio elemento da matriz. Por exemplo, seja A uma matriz quadrada de ordem 1, isto é, $A = [a_{11}]$. Temos que $det\ A = a_{11}$. Por exemplo, tem-se*

$$A = [10] \Rightarrow detA = 10.$$

$$A = [-1] \Rightarrow |A| = -1.$$

Exemplo 2.44. *(Determinante de uma matriz de ordem 2) Dada uma matriz A ordem 2, seu determinante é dado pela diferença do produto dos elementos da diagonal principal (é formada pelos elementos a_{ij} tais que $i = j$) pelo produto dos elementos da diagonal secundária (formada pelos elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$). Considere, como exemplo, a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$*. Seu determinante é*

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 9 \cdot (-1) = 5 - (-9) = 5 + 9 = 14.$$

Outro exemplo é quando consideramos a matriz $B = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$*. Seu determinante é*

$$detB = \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -7 \cdot 6 - 2 \cdot 4 = -42 - 8 = -50.$$

Exemplo 2.45. *(Determinante de uma matriz de ordem 3) Dada uma matriz A qualquer de ordem 3, um dos métodos para calcular o determinante é dado pela regra que chamamos de* *regra de Sarrus. Observe abaixo, como se dá o passo - a - passo dessa regra para a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Para calcularmos o determinante dessa matriz temos que primeiramente colocar a mesma entre barras. Fazendo isso temos:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Após colocarmos entre barras, devemos repetir as duas primeiras colunas à direita da matriz A. Seguidamente, multiplicaremos os elementos da diagonal principal. Esse mesmo processo devemos fazer também com as diagonais que estão à direita dessa diagonal, para que seja possível somar os produtos dessas três diagonais. Então, obtemos o número

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}.$$

Este mesmo processo deve ser realizado também com a diagonal secundária e as demais diagonais à sua direita. No entanto, neste passo, é necessário subtrair os produtos encontrados. Assim, obtemos o número

$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Temos que o determinante da matriz A é, pela regra de Sarrus, dado por

$$detA = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Resolveremos agora um exemplo numérico para que possamos compreender melhor como se dá a regra de Sarrus.

Calcule o determinante da matriz A de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Para que possamos resolver esse exemplo como vimos acima, devemos repetir as duas primeiras *colunas à direita da matriz A. Então,*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 6 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Fazendo o produto dos elementos da diagonal principal e os da diagonal secundária, temos

$$detA = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

Ou seja,

$$detA = 5 \cdot 4 \cdot 9 + 1 \cdot 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 7 - 3 \cdot 4 \cdot 8 - 5 \cdot 2 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 9$$

$$detA = 180 + 16 + 126 - 96 - 70 - 54$$

$$detA = 102.$$

Exemplo 2.46. *(Determinante de uma matriz de ordem maior que 3) A regra de Sarrus dita anteriormente não se aplica a matrizes de ordem maior que 3. Nestes casos, devemos utilizar o Teorema de Laplace, que basicamente reduz o cálculo do determinante a um cálculo do determinante de uma matriz de ordem menor.*

Antes de enunciarmos o Teorema de Laplace, que nos permite calcular o determinante de uma matriz quadrada qualquer, devemos conhecer o conceito de cofator.

Definição 2.47. *Dizemos que o cofator do elemento a_{ij} de uma matriz A é o número*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij},$$

onde o valor D_{ij} é o determinante da matriz obtida através da matriz A, desconsiderando de A os elementos da linha i e da coluna j.

Faremos um exemplo para melhor compreensão dessa expressão chamada cofator.

Exemplo 2.48. *Determine o cofator do elemento a_{11} da matriz A dada por*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

O cofator do elemento a_{11} da matriz dada será determinado pela expressão

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11}.$$

Agora, iremos determinar o número D_{11}, obtido calculando o determinante da matriz resultante quando retiradas a linha 1 e coluna 1 da matriz original A. Tem-se, portanto,

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -16.$$

Após encontrarmos o número D_{11}, podemos calcular o cofator A_{11}, utilizando a definição. Então,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-16) \Longrightarrow (-1)^2 \cdot (-16) \Longrightarrow 1 \cdot (-16) \Longrightarrow -16.$$

Os procedimentos são todos iguais, para qualquer elemento da matriz mudando apenas o expoente do termo (-1) e os determinantes de cada matriz D_{ij}.

Agora que já sabemos como calcular os cofatores, veremos um exemplo geral onde podemos aplicar o Teorema de Laplace.

Teorema 2.49. *(Teorema de Laplace) O determinante de uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem $n \geqslant 2$, é a soma dos produtos, efetuados termo a termo, dos elementos de uma fila qualquer pelos seus respectivos cofatores. Mais precisamente, para cada i, $1 \leqslant i \leqslant n$ fixado temos que*

$$detA = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

e para cada j, $1 \leqslant j \leqslant n$ fixado temos que

$$detA = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Encontramos a demonstração em [20].

Exemplo 2.50. *Vamos calcular o determinante da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Para encontrarmos o determinante dessa matriz via Teorema de Laplace, temos que escolher uma fila (linha ou coluna) para somarmos os produtos dos elementos dessa fila pelos seus respectivos cofatores. Escolhendo a segunda coluna, temos que

$$detA = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{42} \cdot A_{42}.$$

Veremos agora um exemplo numérico, para que fique claro como se resolve determinantes de matrizes utilizando o Teorema de Laplace.

Exemplo 2.51. *Encontre o determinante da matriz A abaixo usando o Teorema de Laplace.*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 7 \\ 6 & 0 & 2 & 8 \\ 5 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & -1 & 10 \end{bmatrix}.$$

Escolhendo a segunda linha, temos

$$detA = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{24} \cdot A_{24}$$

$$detA = 6 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 2 \cdot A_{23} + 8 \cdot A_{24}$$

Como sabemos, o elemento a_{22} é 0. Então, não precisaremos calcular o cofator A_{22}, pois o produto $a_{22} \cdot A_{22}$ de qualquer forma será 0. Deste modo, recomendamos que, quando nos depararmos com matrizes que contém muitos zeros em alguma de suas filas, a utilização do Teorema de Laplace torna bastante simples e rápido o cálculo do determinante, pois não será necessário calcular diversos cofatores. Prosseguindo, devemos encontrar o valor dos cofatores. Tem-se

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot D_{21} \longrightarrow A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 9 \\ 4 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = -1 \cdot -37 = 37,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot D_{23} \longrightarrow A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 9 \\ 0 & 4 & 10 \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = -1 \cdot 106 = -106,$$

e

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \cdot D_{24} \longrightarrow A_{24} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A_{24} = 1 \cdot (-29) = -29.$$

Deste modo, pelo Teorema de Laplace, o determinante da matriz A é dado por

$$detA = 6 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 2 \cdot A_{23} + 8 \cdot A_{24}$$

$$detA = 6 \cdot (-37) + 0 + 2 \cdot (-106) + 8 \cdot (-29)$$

$$detA = -222 + 0 - 212 - 232$$

$$detA = -666.$$

Capítulo 3

Sistemas de Equações Lineares e seus Métodos de Resolução

Neste capítulo, abordaremos a teoria de Sistemas de Equações Lineares somente no conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), bem como seus métodos de resolução. Dessa forma, o principal objetivo deste capítulo é determinar as soluções de um sistema de equações lineares. Os métodos de resolução aqui apresentados são: Substituição, Adição, Regra de Cramer, Escalonamento e Método de Gauss. Destacamos que, caso o leitor queira se apropriar deste conteúdo, os conceitos apresentados podem ser encontrados nas referências [6], [10], [16] e [21].

3.1 Equação Linear

Definição 3.1. *Uma equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma equação que pode ser colocada na seguinte forma padrão: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, onde $a_1, a_2, ..., a_n$ e b são constantes. A constante a_k é chamada de coeficiente de x_k e b é o termo independente da equação.*

Com isso podemos dizer que uma equação linear é toda e qualquer equação onde as incógnitas presentes na mesma tem grau um.

Exemplo 3.2. $2x - 30 = 60$.

Exemplo 3.3. $10x + 4 = 6x + 12$.

Exemplo 3.4. $7x = 63$.

Exemplo 3.5. $9x + 5y – z = 40$.

As equações lineares também podem ser escritas como situações-problemas:

Exemplo 3.6. *Uma turma de* 44 *alunos do 1º período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins representam* 20% *de todos os alunos desse curso. Quantos são os alunos desse curso de Licenciatura dessa instituição?*

$$20\% = \frac{20}{100} = 1/5 \text{ dos alunos} \Longrightarrow \frac{1}{5}x = 44.$$

Exemplo 3.7. *Bárbara tinha certa quantia em dinheiro e ganhou de sua mãe o dobro que tinha. Com isso, cada uma ficou com R\$* $186,00$. *Quanto de dinheiro tinha cada uma no início?*

$$x + 2x = 186.$$

Exemplo 3.8. *Renata viaja* 500 *quilômetros para ir de carro de sua casa à cidade onde mora com seus pais. Numa dessas viagens, após alguns quilômetros, ela parou para um cafezinho. A seguir, percorreu o dobro da quantidade de quilômetros que havia percorrido antes de parar. Quantos quilômetros ela percorreu após o café?*

$$x + 2x = 500.$$

3.2 Solução de uma Equação Linear

Definição 3.9. *Dizemos que a sequência ou n-upla ordenada de números reais* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ *é uma solução da equação linear* $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b$ *se* $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b$ *for uma sentença verdadeira.*

Com isso, podemos dizer que a solução de uma equação linear são os valores que as incógnitas podem assumir que tornam a equação verdadeira, isto é, que satisfazem a equação. Esses valores são denominados raízes da equação linear.

Exemplo 3.10. *Determine o valor de* m *de modo que o par* $(m, m-1)$ *seja solução da equação* $2x + 4y = 8$.
Para que possamos encontrar o valor de m *e consequentemente os valores do par que será a solução da equação linear, devemos substituir no lugar de* x *e* y *na equação os valores que nos forneceram o enunciado como soluções para essa equação. Fazendo isso, temos:*

$$2m+4(m-1) = 8 \Longrightarrow 2m+4m-4 = 8 \Longrightarrow 6m = 8+4 \Longrightarrow 6m = 12 \Longrightarrow m = \frac{12}{6} \Longrightarrow m = 2.$$

Após descobrirmos o valor de m, *concluímos que a solução para a equação linear* $2x + 4y = 8$ *é o par ordenado* $(2, 1)$. *De fato,*

$$2(2) + 4(1) = 8 \Longrightarrow 4 + 4 = 8.$$

Exemplo 3.11. *Verifique se o par ordenado $(-1, 2)$ é solução da equação linear $5x - 4y = 2$. Caso não seja, encontre uma possível solução para esta equação.*
Para sabermos se esse par ordenado é solução dessa equação, devemos substituí-los nas incógnitas da equação e verificar se a igualdade é verdadeira. Veja que:

$$5(-1) - 4(2) = -5 - 8 = -13 \neq 2.$$

Logo, o par $(-1, 2)$ não é solução da equação. Agora, vamos encontrar uma solução para esta equação. Para $x = 0$ temos,

$$5x - 4y = 2 \Longrightarrow 5(0) - 4y = 2 \Longrightarrow -4y = 2 \times (-1) \Longrightarrow 4y = -2 \Longrightarrow y = \frac{-2}{4}.$$

Na verdade, essa equação possui infinitas soluções, a saber:

$$5x = 2 + 4y \Longrightarrow x = \frac{2 + 4y}{5}.$$

Então, o seu conjunto solução é dado por:

$$S = \left\{ \left(\frac{2 + 4y}{5}, y \right), y \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.3 Sistemas de Equações Lineares

Definição 3.12. *Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:*

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \tag{3.1}$$

com a_{ij}, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, números reais.

Uma solução do sistema acima é uma n-upla de números $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfaça simultaneamente estas m equações.

Dois sistemas de equações lineares são equivalentes se, e somente se toda solução de qualquer um dos sistemas também é solução do outro.

Apresentaremos aqui como um sistema de equações lineares se associa a uma matriz. Esse conhecimento será de grande importância para que compreendamos alguns métodos de resolução de sistemas, que serão apresentados ao longo desse capítulo.

Considerando o sistema (3.1), podemos escrevê-lo na forma matricial da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

ou $A \cdot X = B$, onde

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ é a matriz das incógnitas e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ é a matriz dos termos independentes.

Podemos associar uma outra matriz ao sistema (3.1), que chamamos de matriz ampliada ou aumentada. Sendo nada mais que uma representação sintetizada das equações correspondentes no sistema.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}.$$

3.4 Solução de um Sistema de Equações Lineares

Até agora, o que sabemos é encontrar a solução de uma equação dada. Para a solução de um sistema, vamos seguir o mesmo preceito, porém temos uma restrição de que a solução que encontrarmos tem que satisfazer todas equações dadas no sistema. Nesta seção, iremos estudar todas as possíveis situações que podem ocorrer quando estamos resolvendo uma sistema de equação linear.

Definição 3.13. *Os valores das variáveis que transformam simultaneamente as equações de um* *sistema linear em identidade, isto é, que satisfazem a todas as equações do sistema, constituem sua solução. Esses valores são denominados raízes do sistema de equações lineares.*

Exemplo 3.14. *Verifique se o par ordenado* $(4, 10)$ *é solução do sistema abaixo:*

$$A = \begin{cases} x + 3y = 34 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

Para que consigamos verificar se o par ordenado é solução do sistema, o que devemos fazer é apenas substituir esses valores dados nas equações e verificar se a igualdade de ambas as equações são verdadeiras. Com isso, temos:

$$\begin{cases} (4) + 3(10) = 34 \\ 2(4) - (10) = -2 \end{cases}$$

Vimos que o par ordenado $(4, 10)$ *satisfaz todas as equações do sistema dado, então ele é solução do sistema. Mais do que isso, podemos ainda salientar que essa é a solução única.*

Na resolução de sistemas de equações lineares, existem dois casos: sistema compatível e imcompatível. No sistema compatível ele pode ser dividido ainda em compatível determinado ou compatível indeterminado. Vejamos com mais detalhes a seguir.

Sistema Compatível

Definição 3.15. *Diz-se que um sistema de equações lineares é compatível quando admite solução.*

Sistema Compatível Determinado

Um sistema compatível determinado é quando um sistema admite uma única solução.

Exemplo 3.16.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 16 \quad (i) \\ 4x - 2y = 2 \quad (ii) \end{cases}$$

Adicionando (ii) *em* (i) *temos que* $x = 3$*, logo substituindo em qualquer uma das duas equações temos que* $y = 5$*. Portanto a solução para este sistema é o par ordenado* $(3, 5)$*. Para que consigamos compreender melhor e visualisar esse caso geometricamente vejamos o gráfico que representa essas duas equações dadas no sistema. Perceba abaixo que este sistema de duas equações possui duas retas concorrentes no plano e o ponto de interseção dessas retas é a solução desse sistema.*

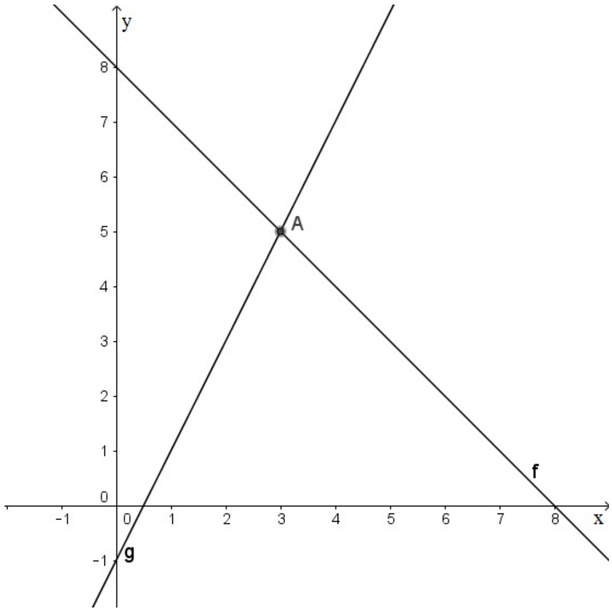

Figura 3.1: Representação geométrica do Exemplo 3.16

Vejamos que o único ponto em comum entre as duas retas que representam as equações é o ponto $A = (3, 5)$. *Com isso, temos que o sistema possui uma única solução. Portanto, é um sistema compatível determinado.*

Sistema Compatível Indeterminado

Um sistema compatível indeterminado é quando um sistema admite infinitas soluções.

Exemplo 3.17.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 16 \quad (i) \\ 4x + 4y = 32 \quad (ii) \end{cases}$$

Subtraindo (ii) *de* (i) *temos* $2x+2y = 16$ *que simplificando temos que* $x+y = 8$. *Substituindo o valor de* x *na equação* (i) *temos que:*

$$2(8 - y) + 2y = 16 \Longrightarrow 16 - 2y + 2y = 16 \Longrightarrow 16 - 0y = 16 \Longrightarrow 0y = 0.$$

Quando obtemos $0y = 0$*, podemos atribuir qualquer valor para incógnita* y *que mesmo assim a igualdade continua verdadeira. Encontramos o conjunto solução para este sistema atribuindo valores para* y *e encontrando o valor de* x. *Logo, temos infinitas soluções. Observaremos agora a sua representação gráfica:*

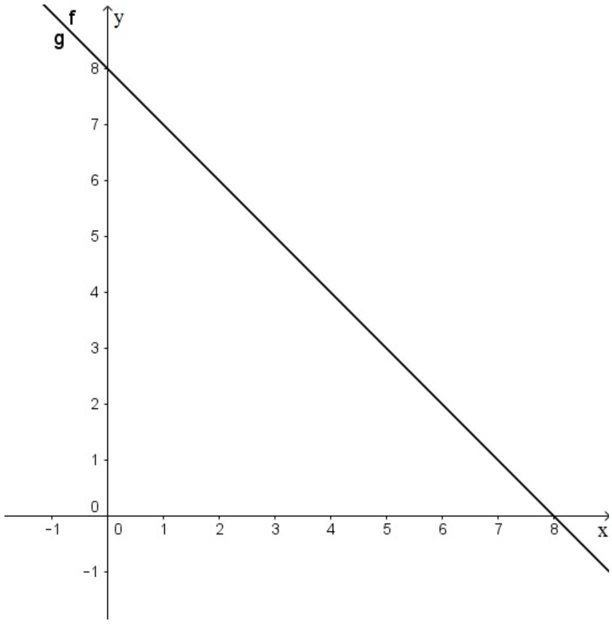

Figura 3.2: Representação geométrica do Exemplo 3.17

Após observar o gráfico, concluímos que as retas que correspondem as equações do sistema dado são coincidentes. Portanto, todas os pontos de qualquer uma das retas é comum a outra.

Sistema Incompatível

Definição 3.18. *Diz-se que um sistema é incompatível quando não admite solução.*

Exemplo 3.19.

$$\begin{cases} x + y = 30 \quad (i) \\ -x - y = 20 \quad (ii) \end{cases}$$

Subtraindo (i) de (ii), temos que $2x + 2y = 10$ simplificando temos que $x + y = 5$, isolando o x encontramos o seu valor $x = 5 - y$. Substituindo o valor de x na equação (i) temos que:

$$5 - y + y = 30 \Longrightarrow 5 - 0y = 30 \Longrightarrow 5 = 30.$$

o que é impossível. Logo, o sistema não admite solução. Com isso, vemos que não existem valores que atribuímos a x e y que satisfaçam as equações. Vejamos graficamente o que acontece com essas equações.

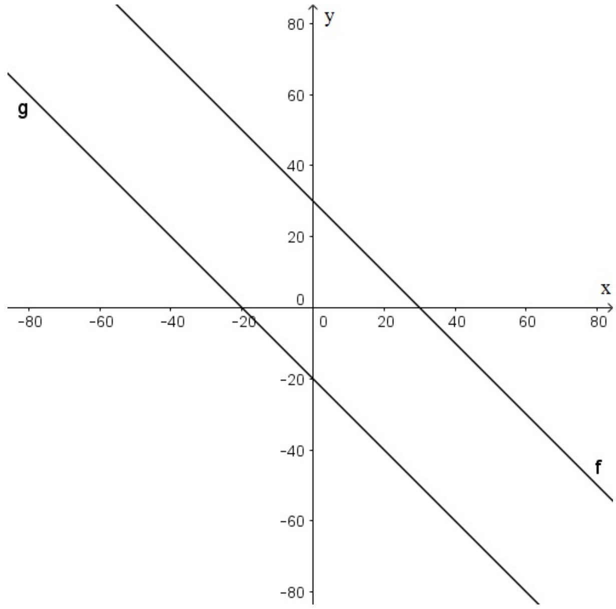

Figura 3.3: Representação geométrica do Exemplo 3.18

As retas representadas por essas equações são paralelas, ou seja, não existe nem um ponto em comum entre elas, o que confirma que o sistema é incompatível.

Sintetizando, temos que um sistema de equações lineares pode ser:

- Compatível Determinado (solução única);
- Compatível Indeterminado (infinitas soluções);

Teorema 3.20. *Se o sistema de equações lineares $AX = B$ admitir duas soluções distintas, então admite infinitas soluções.*

Demonstração:

Sejam X_1, X_2 duas soluções distintas do sistema $AX = B$, então $AX_1 = B$ e $AX_2 = B$. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $X_\lambda = X_1 + \lambda(X_1 - X_2)$.

Temos que

$AX_\lambda = A(X_1 + \lambda(X_1 - X_2)) \Longrightarrow AX_1 + \lambda AX_1 - \lambda AX_2 \Longrightarrow B + \lambda B - \lambda B = B$. Portanto, X_λ é solução do sistema $AX = B$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observação: $X_1 - X_2 \neq 0$, pois $X_1 \neq X_2$.

- Incompatível (não tem solução).

3.5 Métodos de Resolução de Sistemas de Equações Lineares

Nesta seção, iremos apresentar e exemplificar os diferentes métodos utilizados para a resolução de sistemas de equações lineares. Os métodos que serão abordados aqui são: o método da substituição e da adição, regra de Cramer, o método de escalonamento e o método de Gauss.

Método da Substituição e da Adição

O método da substituição equivale em isolar uma das incógnitas de uma das equações dada no sistema e substituir em outra equação, até obter o valor das demais incógnitas. Após encontrar o valor de uma das incógnitas, é só substituir em qualquer uma das equações para encontrar o valor das demais, e assim, conseguir resolver o sistema. Porém, para sistemas de ordens maiores, este método já se torna mais trabalhoso, não sendo muito recomendado.

Exemplo 3.21.

$$A = \begin{cases} x + y = 11 & (i) \\ x - y = 3 & (ii) \end{cases}$$

O primeiro passo como foi dito acima é isolar umas das incógnitas de uma das equações. Então, escolhendo a equação (i) e isolando a incógnita x temos que $x = 11 - y$.
O segundo passo é substituir o resultado da incógnita que encontramos na outra equação, no caso a equação (ii):

$$11 - y - y = 3 \Longrightarrow 11 - 2y = 3 \Longrightarrow -2y = -8 \cdot (-1) \Longrightarrow 2y = 8 \Longrightarrow y = 4.$$

O terceiro passo é substituir o valor da incógnita encontrada y em qualquer uma das equações. Substituindo em (i) temos:

$$x + 4 = 11 \Longrightarrow x = 11 - 4 \Longrightarrow x = 7.$$

Concluímos que a solução dessa equação é $x = 7$ e $y = 4$.

Método da Adição

O método da adição consiste em somarmos duas equações no intuito de anularmos uma das incógnitas e, assim, encontrarmos os valores das incógnitas resultantes.

Resolveremos agora o exemplo dado acima só que agora utilizando o método da adição.

Exemplo 3.22.

$$A = \begin{cases} x + y = 11 & (i) \\ x - y = 3 & (ii) \end{cases}$$

Somando essas duas equações, chegaremos na equação $2x = 14$ *e concluímos que* $x = 7$*. Agora que encontramos o valor de uma das incógnitas, é só substituirmos em uma das equações. Substituindo em* (i)*, temos:*

$$7 + y = 11 \Longrightarrow y = 11 - 7 \Longrightarrow y = 4.$$

Confirmando a solução do mesmo exemplo resolvido acima só que pelo método da substituição. A solução da equação é o par ordenado $(7, 4)$*.*

Exemplo 3.23. *Numa classe há* 66 *alunos e a diferença entre o dobro do número de meninas e o número de meninos é* 24*. Quantas são as meninas e os meninos?*
Para facilitar a resolução desse problema, chamaremos a quantidade de meninas de x *e a quantidade de meninos de* y*. Com isso, temos:*

$$\begin{cases} x + y = 66 \quad (i) \\ 2x - y = 24 \quad (ii) \end{cases}$$

Somando a equação (i) *e* (ii) *chegaremos a equação* $3x = 90$*, resolvendo-a temos que* $x = 30$*, ou seja o número de meninas desta classe. Agora, para encontrarmos a quantidade de meninos dessa classe, é só substituirmos o valor da incógnita encontrada em qualquer uma das equações. Sustituindo em* (i) *temos que:*

$$30 + y = 66 \Longrightarrow y = 66 - 30 \Longrightarrow y = 36.$$

Ou seja, estudam nessa classe 36 meninos. E o par ordenado que representa a solução desse sistema de equação linear é o $(30, 36)$*.*

Regra de Cramer

Uma outra maneira de resolvermos um sistema de equações lineares é através da regra de Cramer. No entanto, essa regra possui uma restrição. Ela só poderá ser utilizada na resolução de sistemas em que o número de equações é igual ao número de incógnitas, ou seja, um sistema de ordem $(n \times n)$. Isso se dá, pois sua resolução está diretamente ligada com o cálculo de determinantes e, como vimos no capítulo passado, só podemos calcular o determinante de matrizes quadradas. Vale evidenciar que esse método é indicado para sistemas de equações lineares de no máximo três incógnitas pois, mais do que isso, esse método se torna mais trabalhoso e extenso.

Anteriormente, vimos que dado um sistema linear, podemos escrevê-lo em sua forma matricial cuja representação é da forma $AX = B$, onde A é a matriz dos coeficientes, X a matriz das incógnitas e B a matriz dos termos independentes. Nomearemos o Determinante de D. A Regra de Cramer só poderá ser utilizada quando o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero. Dessa forma, o sistema possui solução única. De fato, se $detA \neq 0$, então A

é inversível. Assim, dado o sistema $AX = B$, aplicando a inversa de A em ambos os lados da igualdade, temos

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Longrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Longrightarrow IX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B.$$

Teorema 3.24. *Seja S um sistema linear com número de equações igual ao número de incógnitas. Se $D \neq 0$, então o sistema será possível e terá solução única $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, tal que*

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D}$$

para $\forall_i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, em que D_i é o determinante da matriz obtida de A, substituindo-se a i-ésima coluna de A pela coluna dos termos independentes das equações do sistema.

Encontramos a demonstração do teorema na referência [10].

Daremos agora dois exemplos, para que compreendamos melhor como utilizar a regra de Cramer. O primeiro contendo um sistema de ordem 2 e o segundo de ordem 3:

Exemplo 3.25.

$$\begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ 6x - 2y = 32 \end{cases}$$

Após dividirmos a primeira e a segunda equação por 2 escrevemos esse sistema na forma matricial $(AX = B)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Iremos calcular agora o determinante da matriz dos coeficientes e verificar se o resultado é diferente de 0 para que prossigamos com os cálculos.

$$det(A_1) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0.$$

Como $det A_1 \neq 0$, podemos utilizar a regra de Cramer. Sabemos ainda que a solução do sistema é única. Iremos calcular agora o determinante, substituindo na primeira coluna da matriz dos coeficientes a coluna dos termos independentes, da seguinte forma

$$det(A_x) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 18 & -1 \end{vmatrix} = -55 = D_1.$$

Agora, substituindo a coluna dos termos independentes na segunda coluna da matriz dos coe-

ficientes e calculando o determinante, temos

$$det(A_y) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = 33 = D_2.$$

Pelo Teorema 3.24 a solução do sistema é dado por:

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-55}{-11} = 5.$$
$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{33}{-11} = -3.$$

Faremos agora um exemplo com um sistema de ordem 3.

Exemplo 3.26.

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -3 \\ 5x + 6y - z = 13 \\ 4x - y + 3z = 8 \end{cases}$$

Escrevendo esse sistema na forma matricial $(A_2X = B)$, *temos*

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 13 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante da matriz A_2, *obtemos*

$$det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 16 \neq 0.$$

Como $detA_2 \neq 0$, *o sistema admite única solução. Iremos calcular agora o determinante, substituindo na primeira coluna da matriz dos coeficientes a coluna dos termos independentes, da seguinte forma:*

$$det(A_x) = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 13 & 6 & -1 \\ 8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -32 = D_1.$$

Agora, substituindo a coluna dos termos independentes na segunda coluna da matriz dos coeficientes, temos

$$det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 13 & -1 \\ 4 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 80 = D_2.$$

Calculando o último determinante substituindo a coluna dos termos independentes na terceira coluna da matriz dos coeficientes, temos

$$det(A_z) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 5 & 6 & 13 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 112 = D_3.$$

Pelo Teorema 3.24, a solução do sistema é

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-32}{16} = -2.$$
$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{80}{16} = 5.$$
$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{112}{16} = 7.$$

Método do Escalonamento

O método do escalonamento tem por objetivo transformar o sistema dado em um sistema equivalente de formato mais simples, ou seja, na sua forma escalonada que possui a mesma solução do sistema inicial.

Sabendo que existem outros métodos de resolução de sistemas como visto a pouco, vale ressaltar que o método do escalonamento é um dos poucos métodos que consegue determinar de imediato se o sistema de equações lineares é compatível determinado ou indeterminado ou até mesmo um sistema incompatível.

Para que consigamos escalonar um sistema e encontrar suas soluções, devemos primeiramente transformar esse sistema em uma matriz ampliada e em seguida realizar operações elementares entre as linhas até que a matriz se reduza em uma matriz na sua forma escada reduzida.

As operações elementares que devem ser feitas entre as linhas da matriz ampliada para que a matriz seja escalonada são:

- Permutar de posição;
- Multiplicar por uma constante diferente de zero;
- Somar de uma linha com outra linha multiplicada por uma constante não nula, membro a membro.

Como garante os seguintes teoremas abaixo.

Teorema 3.27. *Um sistema linear A, podemos permutar a i-ésima pela j-ésima linha $(L_i \longleftrightarrow L_j)$. O novo sistema obtido $A^{'}$ será equivalente a A.*

Teorema 3.28. *Multiplicando-se os membros de uma equação qualquer de um sistema linear A por um número $K \neq 0$, o novo sistema $A^{'}$ obtido será equivalente a A.*

Encontramos a demonstração na referência [10].

Teorema 3.29. *Se uma equação de um sistema linear A for substituída pela soma, membro a membro, dela com outra, o novo sistema obtido $A^{'}$ será equivalente a A.*

Encontramos a demonstração na referência [10].

Forma Escada ou Triangular

Definição 3.30. *Uma matriz $m \times n$ é linha reduzida à forma escada se:*

- *O primeiro elemento não nulo de uma linha não nulo é 1 e esse elemento é chamado de pivô;*
- *Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;*
- *Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem elementos pelo menos um elemento não nulo);*
- *Se as linhas $1, \ldots, r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.*

Esta última condição estabelece para nós como se dá a forma escada de uma matriz.
Ou seja, uma matriz na forma escada reduzida é da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

onde, $\alpha_1 \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n.$

Teorema 3.31. *Toda matriz $A_{m\times n}$ é linha equivalente a uma matriz-linha reduzida à forma escada.*

Encontramos a demonstração na referência [6].

Para que consigamos compreender melhor como se dá a resolução de sistemas por escalonamento, segue um exemplo:

Exemplo 3.32. *Dado o sistema* $\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$ *encontre a sua solução pelo método do escalonamento.*

Vamos considerar a matriz ampliada associada ao sistema, dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

A seguir, através das operações elementares entre as linhas da matriz A, reduziremos essa matriz à sua matriz escalonada reduzida, equivalente a A. Consequentemente, obteremos um sistema mais simples que é equivalente ao sistema inicial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow -2 \cdot L_1 + L_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow -1 \cdot L_1 + L_3 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Continuando a resolução do nosso sistema, devemos lembrar que para estar na forma escada reduzida, o primeiro elemento não nulo da segunda linha deve ser igual a 1(pivô). Após fazermos isso, iremos repetir os mesmos passos feito anteriormente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow -\frac{1}{3} \cdot L_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix} L_1 \longrightarrow L_1 - 4 \cdot L_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 + 7 \cdot L_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Agora, seguindo com a resolução para estar na sua forma escada, o primeiro elemento não nulo da terceira linha deve ser igual a 1. Feito isso, iremos usar as operações elementares para que os demais elementos da coluna ou acima do pivô sejam iguais a 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow -3 \cdot L_3 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow L_2 - \frac{2}{3} \cdot L_3 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} L_1 \longrightarrow L_1 - \frac{1}{3} \cdot L_3 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz a qual acabamos de encontrar está na sua forma escada reduzida ou na forma triangular. Analisando esta matriz escalonada, podemos concluir que esse sistema é possível e determinado, pois possui todas as colunas com pivô, ou seja, possui única solução. O conjunto solução para o sistema dado é $\{x = 3, y = -2, z = 2\}$.

Método de Gauss

Este método de resolução é similar ao que vimos anteriormente (escalonamento). O que difere um do outro é que esse método envolve um número menor de operações elementares. Iremos aqui continuar trabalhando com a matriz ampliada do sistema, aplicando as devidas operações elementares de modo a chegar em um sistema equivalente (sistemas lineares que possuem o mesmo conjunto solução). O que irá diferir da forma escada é:

- Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem os seus outros elementos abaixo dele iguais a zero;

As operações elementares que iremos realizar aqui nesse método seguem as mesmas do método anterior.

Para que possamos compreender melhor esse método de Gauss resolveremos novamente o Exemplo 3.32

Exemplo 3.33.

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

Primeiro, vamos considerar a matriz ampliada associada ao sistema,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Após escrevermos a matriz ampliada do sistema iremos zerar os elementos abaixo dos pivôs:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow -2 \cdot L_1 + L_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow -1 \cdot L_1 + L_3 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow -\frac{1}{3} \cdot L_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 + 7 \cdot L_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow -3 \cdot L_3 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Depois que zerarmos os elementos abaixo dos pivôs, o que devemos fazer agora é reescrever essa matriz que encontramos em forma de um sistema, sendo esse novo sistema equivalente ao primeiro.

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \quad (i) \\ y + \frac{2}{3}z = -\frac{2}{3} \quad (ii) \\ z = 2 \quad (iii) \end{cases}$$

Utilizando o método da substituição como vimos na seção 3.5.
Temos que $z = 2$, substituindo o valor de z na equação (ii) temos:

$$y+\frac{2}{3}z = -\frac{2}{3} \Longrightarrow y+\frac{2}{3}\cdot 2 = -\frac{2}{3} \Longrightarrow y+\frac{4}{3} = -\frac{2}{3} \Longrightarrow y = -\frac{2}{3}-\frac{4}{3} \Longrightarrow y = -\frac{6}{3} \Longrightarrow y = -2.$$

Com isso, encontramos $y = -2$ e, por fim, substituindo os valores de x e y na equação (i) tem-se:

$$x+4y+3z = 1 \Longrightarrow x+4\cdot(-2)+3\cdot 2 = 1 \Longrightarrow x+(-8)+6 = 1 \Longrightarrow x-8+6 = 1 \Longrightarrow x-2 = 1$$

$$\Longrightarrow x = 1 + 2 \Longrightarrow x = 3.$$

Concluímos, então, que o conjunto solução do sistema é $\{x = 3, y = -2, z = 2\}$.

Após conhecermos estes dois últimos métodos de resoluções percebemos que há uma semelhança na resolução dos dois. O que difere um do outro é que no método de Gauss o uso das operações é mais reduzido, porém ao final tem que se usar ou o método da substituição ou o método da adição para conseguirmos determinar o conjunto solução do sistema. Já no Escalonamento aplicamos um número maior de operações, mas obtemos a solução imediata do sistema.

Capítulo 4

Propostas Didáticas para o Ensino de Sistemas de Equações Lineares para o Ensino Médio

Neste capítulo, iremos apresentar duas propostas para o ensino de sistemas lineares de uma forma diferente do tradicional para os alunos do ensino médio. Sendo uma delas trabalhar com a resolução de problemas que foi baseada na referência [12], porém em contextos diferentes. Já a segunda proposta é de autoria própria, e seu objetivo é fazer com que os alunos percebam que a matemática não é uma disciplina sem aplicações e finalidades, mas sim, um campo amplo que está diretamente relacionada com as outras ciências.

4.1 Motivação para as Propostas Didáticas

Sabemos que a educação é um processo que ocorre de forma natural pelo indivíduo, todavia é necessário uma socialização desses paralelamente com o desenvolvimento da sociedade. Temos a compreensão de que para a sobrevivência do homem sabendo que todos possuem suas necessidades particulares, ele deverá intervir na natureza, transformá-la, procurando alguma forma de adaptá-la para que supra todos os seus anseios e necessidades. Para que isso aconteça, o homem trabalha empregando devidos conhecimentos gerados através das relações com a natureza e também com a convivência com outros indivíduos, utilizando para isso os conhecimentos que também foram concebidos na escola.

Nessa perspectiva, os educadores devem sempre estar em busca de novos conhecimentos através de estudos e pesquisas, alternativas para que os alunos saiam da escola, sendo capazes de ser formadores de opiniões, se tornando cidadãos críticos para que sempre lutem em busca dos seus direitos e sempre respeitando seus deveres perante a sociedade, sendo o agente transformador dessa realidade em que vivemos.

Dessa forma, acreditamos que o ponto de partida para melhorar as práticas pedagógicas dos professores é a vontade de querer mudar a situação, não pensando que sozinho conseguirá, mas sim convidando aos demais professores para que juntos possam fazer sua parte para uma sociedade melhor. Nesse caso, partindo numa ação coletiva, pode-se buscar estudos sobre como: motivar os alunos, entender a particularidade de cada um, planejamentos interdisciplinares, observações de casos específicos, estratégias de ações, experimentações, observações, avaliações, constantes intervenções. Com isso, poderemos construir de fato uma escola de qualidade, tendo como referencial uma educação para a humanização e o cumprimento da sua função social.

Nessa concepção, a Matemática dentro de sala de aula deve estar sempre que possível ligada com a realidade da sociedade para idealizar seus conceitos e seus significados cumprindo com o seu papel na formação do cidadão. Como trás os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's),

> Desse modo, um currículo de Matemática deve procurar contribuir, de um lado, para a valorização da pluralidade sociocultural, impedindo o processo de submissão no confronto com outras culturas; de outro, criar condições para que o aluno transcenda um modo de vida restrito a um determinado espaço social e se torne ativo na transformação de seu ambiente. (BRASIL, 1997, p. 25)

Entretanto, encontramos um ensino, muitas vezes, com instruções e procedimentos centrados apenas nos livros didáticos que às vezes não deixam espaço para essa conexão da Matemática com a realidade e também temos pouco tempo para investir em atividades mais elaboradas, em pesquisas, investigações e experimentações de novas alternativas. Para tentar superar essa realidade, são necessários compromisso, esforço e principalmente atitudes de nós educadores para que possamos conseguir mudanças significativas, uma vez que, sabemos que o conhecimento Matemático vem sendo construído e evoluindo para atender as necessidades da sociedade em que vivemos.

Para o Ensino de Sistemas de Equações Lineares, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) + do Ensino Médio sugerem que:

> Com relação à álgebra, há ainda o estudo de equações polinomiais e de sistemas lineares. Esses dois conteúdos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3 por 3, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento. Uma abordagem mais qualitativa e profunda deve ser feita dentro da parte flexível do currículo, como opção específica de cada escola. (BRASIL, 2002, p. 122)

Isso vem de encontro ao que propomos neste trabalho.

4.2 Proposta 1 - Problemas Envolvendo Sistemas Lineares

Nessa seção, apresentaremos três problemas envolvendo o conteúdo de sistemas de equações lineares que são de fácil compreensão para que possam ser aplicados em sala de aula para o Ensino Médio.

Defendemos aqui a ideia de levar essas aplicações para sala de aula, uma vez que possibilita aos alunos enxergarem essas aplicações no seu cotidiano dos conceitos estudados e assim, dando uma motivação maior para que eles estudem determinados conteúdos.

> Resolver problemas significa encontrar um caminho para sair de uma dificuldade, um caminho para evitar um obstáculo, para alcançar um objetivo que não seja imediatamente alcançável. Resolver problemas é uma tarefa específica da inteligência e a inteligência é um dom específico do gênero humano: pode-se considerar a resolução de problemas como a atividade mais característica do gênero humano. (D'AMORE, 2007, p. 290 apud POYLA, 1945)

Além disso, o professor conseguirá ministrar uma aula de exercícios muito mais atrativa e dinâmica, sem que precise passar o tempo todo naqueles exercícios que são dados no livro didático, que na maioria das vezes só é necessário aplicar os conceitos de forma mecânica. E é justamente isso que a resolução de problemas proporciona, relacionar os conceitos matemáticos com a realidade dos fatos. Como enfatizam os Parâmetros Curriculares Nacionais,

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.(BRASIL, 1998, p. 40)

D'amore (2007) vem completando o que os PCN's nos recomendam:

> (...) Portanto, um professor de Matemática tem uma grande possibilidade. Obviamente, se ele emprega as horas de aula para fazer seus estudantes executarem cálculos, terminará por sufocar o seu interesse, bloquear o seu desenvolvimento mental e desperdiçar a oportunidade que se lhe apresenta. Por outro lado, se desperta a curiosidade dos alunos propondo problemas de dificuldade proporcional aos conhecimentos deles e os aluda a resolver as questões propostas com perguntas oportunas, ele saberá inspirar neles o gosto por um raciocínio original. (D'AMORE, 2007, p. 290 apud POYLA, 1945)

Problema 1

Um comerciante mandou seu funcionário pesar três sacos de feijão. O rapaz voltou exausto, e disse: O primeiro e o segundo saco, juntos, pesam 110 quilogramas. O primeiro e o terceiro, juntos, pesam 120 quilogramas. E o segundo e o terceiro, juntos, pesam 112 quilogramas.

No entanto, o comerciante queria saber quantos quilogramas tinha cada saco de feijão. Para o funcionário não se cansar ainda mais, descubra isso para ele.

Solução:

Sabendo que as incógnitas do problema são:

- x: peso do saco 1
- y: peso do saco 2
- z: peso do saco 3

As informações que o problema nos deu foram:

- O saco 1 e o saco 2 pesam juntos 110 kg;
- O saco 1 e o saco 3 pesam juntos 120 kg;
- O saco 2 e o saco 3 pesam juntos 112 kg.

Com essas informações, conseguimos escrever esse problema em forma de um sistema:

$$\begin{cases} x + y = 110 \\ x + z = 120 \\ y + z = 112 \end{cases}$$

Utilizando o escalonamento como método de resolução, escreveremos agora a matriz ampliada deste sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 110 \\ 1 & 0 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 1 & 112 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares nas linhas da matriz, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 110 \\ 1 & 0 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 1 & 112 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow L_1 - L_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 110 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 112 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 110 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 112 \end{bmatrix} L_1 \longrightarrow L_1 - L_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 112 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 112 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 - L_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & -122 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & -122 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow -\frac{1}{2} \cdot L_3 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 61 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 61 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow L_2 + L_3 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 51 \\ 0 & 0 & 1 & 61 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 51 \\ 0 & 0 & 1 & 61 \end{bmatrix} L_1 \longrightarrow L_1 - L_3 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 59 \\ 0 & 1 & 0 & 51 \\ 0 & 0 & 1 & 61 \end{bmatrix}$$

A matriz que encontramos está na forma escalonada. Analisando-a temos as seguintes conclusões sobre o problema:

- O saco 1 pesa 59 kg;
- O saco 2 pesa 51 kg;
- O saco 3 pesa 61 kg.

Problema 2

Bárbara é uma adolescente que adora sair para comer. Habitante de Uberlândia, no Triângulo Mineiro, seu único programa de fim de semana é dar voltas à praça da matriz e comer muitas guloseimas. Essa praça é circular e possui uma açaiteria, uma padaria e uma hamburgueria. De tanto fazer o mesmo caminho, Bárbara sabe que da açaiteria à hamburgueria, passando pela padaria, são 462 passos. Da padaria à açaiteria, passando pela hamburgueria, ela dá 484 passos e da hamburgueria à padaria, passando pela açaiteria, o caminho é o mais longo, forçando-a a dar 562 passos. Qual é o perímetro da praça em passos da Bárbara?

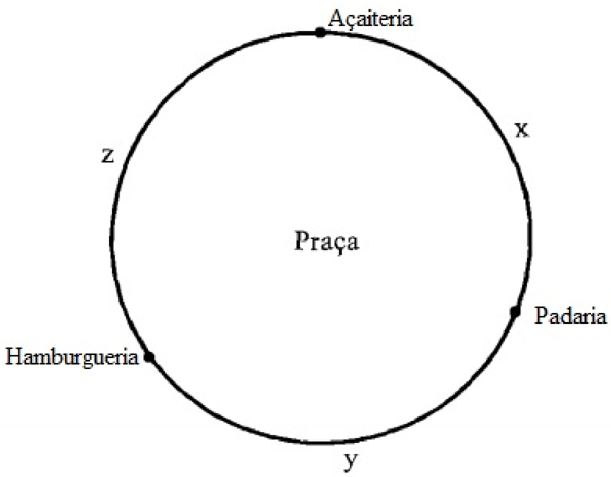

Figura 4.1

Solução:

Observamos a imagem acima vemos que:

- x é distância entre a açaiteria e a padaria;
- y é distância entre a padaria e a hamburgueria;

- z é distância entre a hamburgueria e a açaiteria.

Tendo todas essas informações, conseguimos escrever esse problema em forma de um sistema:

$$\begin{cases} x + y = 462 \\ y + z = 484 \\ x + z = 562 \end{cases}$$

Utilizando o Escalonamento como o método de resolução, escrevemos agora a matriz ampliada deste sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 462 \\ 0 & 1 & 1 & 484 \\ 1 & 0 & 1 & 562 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares nas linhas da matriz, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 462 \\ 0 & 1 & 1 & 484 \\ 1 & 0 & 1 & 562 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 - L_1 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 462 \\ 0 & 1 & 1 & 484 \\ 0 & -1 & 1 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 462 \\ 0 & 1 & 1 & 484 \\ 0 & -1 & 1 & 100 \end{bmatrix} L_1 \longrightarrow L_1 - L_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -22 \\ 0 & 1 & 1 & 484 \\ 0 & -1 & 1 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -22 \\ 0 & 1 & 1 & 484 \\ 0 & -1 & 1 & 100 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_2 + L_3 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -22 \\ 0 & 1 & 1 & 484 \\ 0 & 0 & 2 & 584 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -22 \\ 0 & 1 & 1 & 484 \\ 0 & 0 & 2 & 584 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot L_3 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -22 \\ 0 & 1 & 1 & 484 \\ 0 & 0 & 1 & 292 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -22 \\ 0 & 1 & 1 & 484 \\ 0 & 0 & 1 & 292 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow L_2 - L_3 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & 192 \\ 0 & 0 & 1 & 292 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & 192 \\ 0 & 0 & 1 & 292 \end{bmatrix} L_1 \longrightarrow L_1 + L_3 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 270 \\ 0 & 1 & 0 & 192 \\ 0 & 0 & 1 & 292 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz que encontramos está na forma escalonada. Analisando-a, temos as seguintes conclusões sobre o problema:

- Entre a açaiteria e a padaria são 270 passos;
- Entre a padaria e a hamburgueria são 192 passos;
- Entre a hamburgueria e a açaiteria são 292 passos.

Logo, o perímetro da praça, em passos da Bárbara, é $270 + 192 + 292 = 754$ passos.

Problema 3

Na primeira gincana organizada por um colégio da cidade de Araguaína, foram montadas três barracas, que foram chamadas de A_1, A_2 e A_3.As três barracas vendiam os mesmos tipos de alimentação: mini-pizza, caldo de frango e churros; cada uma dessas opções tinha o mesmo preço em todas as barracas.

No fim da gincana, o balanço feito sobre o consumo nas três barracas mostrou que:

- Em A_1 foram consumidos 56 mini-pizzas, 84 caldos de frango e 96 churros;
- em A_2 foram consumidos 46 mini-pizzas, 100 caldos de frango e 90 churros;
- em A_3 foram consumidos 60 mini-pizzas, 90 caldos de frango e 120 churros.

As barracas A_1, A_2 e A_3 lucraram R\$ $204,00$, R\$ $190,00$ e R\$ $234,00$ respectivamente.
Qual o preço de cada mini-pizza, caldo de frango e churros?
Solução:
Sabendo que as incógnitas do problema são:

- x o preço de uma mini-pizza;
- y o preço de um caldo de frango;
- z o preço de um churros.

Com os dados extraídos do problema, conseguimos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 56x + 84y + 96z = 204 \\ 46x + 100y + 90z = 190 \\ 60x + 90y + 120z = 234 \end{cases}$$

Utilizaremos a Regra de Cramer para a resolução deste problema. Para isso, iremos escrever esse sistema na sua forma matricial $(AX = B)$. Assim, temos:

$$\begin{bmatrix} 56 & 84 & 96 \\ 46 & 100 & 90 \\ 60 & 90 & 120 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 204 \\ 190 \\ 234 \end{bmatrix}.$$

Iremos calcular agora o determinante da matriz dos coeficientes e verificar se o resultado é diferente de 0, para que prossigamos com os cálculos.

$$detA = \begin{vmatrix} 56 & 84 & 96 \\ 46 & 100 & 90 \\ 60 & 90 & 120 \end{vmatrix} = 29760 \neq 0.$$

Como o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de 0 o sistema possui uma única solução. Pela regra de Cramer, vista na seção 3.5, a solução do sistema é dada por $x = \dfrac{D_1}{D}$, $y = \dfrac{D_2}{D}$ e $z = \dfrac{D_3}{D}$ onde D_1 é

$$det = \begin{vmatrix} 204 & 84 & 96 \\ 190 & 100 & 90 \\ 234 & 90 & 120 \end{vmatrix} = 44640 = D_1.$$

Agora substituindo a coluna dos termos independentes na segunda coluna da matriz dos coeficientes e calculando o determinante temos que D_2 será:

$$det = \begin{vmatrix} 56 & 204 & 96 \\ 46 & 190 & 90 \\ 60 & 234 & 120 \end{vmatrix} = 11904 = D_2.$$

Finalizando o cálculo dos determinantes, substituímos agora a coluna dos termos independentes na terceira coluna da matriz dos coeficientes e calculando o derminante, temos:

$$det = \begin{vmatrix} 56 & 84 & 204 \\ 46 & 100 & 190 \\ 60 & 90 & 234 \end{vmatrix} = 26784 = D_3.$$

Portanto,

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{44640}{29760} = 1,5$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{11904}{29760} = 0,4$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{26784}{29760} = 0,9.$$

Podemos concluir, então, que o preço dos alimentos das barracas da gincana do colégio são:

- Mini-pizza R\$ $1,50$,
- Caldo de frango R\$ $0,40$
- Churros é R\$ $0,90$.

4.3 Proposta 2 - Alimentação Saudável

A proposta didática exposta a seguir tem como finalidade demonstrar que a matemática não se restringe a um universo sem aplicação ou finalidade, sendo um campo amplo que está diretamente relacionada com outras ciências. Para a aplicação dessa proposta didática, é sugerida uma situação problema contextualizada buscando florescer o caráter investigativo nos alunos e conduzir o professor a refletir sobre sua prática docente, bem como as estratégias que buscam uma conexão entre as práticas didáticas e a condução do conhecimento pessoal.

Para a realização das atividades de cunho investigativo, apresentaremos situações problema que orientarão e acompanharão toda a metodologia do processo de investigação. Nesse âmbito o professor exerce a função de mentor e orientador das atividades, propondo e discutindo questões que acabam contribuindo para o planejamento da investigação dos alunos, além de orientar os mesmos no levantamento de dados, possibilitando a discussão e a argumentação entre os discentes, para em seguida formalizar os conhecimentos envolvidos. Com isso, o professor possibilita a vivência de experiências pelos estudantes, permitindo a construção de novos conhecimentos relacionados à investigação.

Um assunto recente que vem intervindo o âmbito escolar é o aluno como construtor de seu próprio conhecimento. Dessa forma, o principal propósito dessa proposta didática é o estudo de Sistemas de Equações Lineares, através de circunstâncias contextualizadas.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais,

> O tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo. Se bem trabalhado permite que, ao longo da transposição didática, o conteúdo do ensino provoque aprendizagens significativas que mobilizem o aluno e estabeleçam entre ele e o objeto do conhecimento uma relação de reciprocidade. (BRASIL, 2000, p. 78)

Nessa perspectiva, propõe-se aos alunos do 2º ou 3º ano do Ensino Médio que a partir de uma pesquisa em seu bairro investiguem sobre os tipos de alimentos saudáveis consumidos pelos moradores.

Espera-se que o discente possa compreender a importância de uma alimentação saudável, uma vez que a alimentação tem um papel fundamental na nossa qualidade de vida, sendo muito importante adotar uma dieta saudável e adequada ao nosso estilo de vida.

> O consumo excessivo de alimentos ricos em gorduras saturadas, sódio e açúcares podem acarretar problemas de saúde. Além disso, não é necessário deixar de comer determinados alimentos para ter uma alimentação saudável, apenas fazer a combinação certa de determinados alimentos, na quantidade adequada, e aderir algumas regras no seu cotidiano. (CENTRUM, 2017, p.1)

Centrum (2017) sugere que, para uma alimentação mais saudável e equilibrada, deve-se consumir alguns alimentos todos os dias, incluindo

- 5 porções de fruta ou vegetais;
- $2-3$ porções de leite, queijo ou iogurte;
- 2 porções de alimentos ricos em proteínas como peixe, carne, leguminosas ou ovos;
- $5-6$ porções de hidratos de carbono: pão, massa, cereais, arroz, trigo.

Segundo Portal Brasil (2009) os brasileiros possuem em suas alimentações elementos associados ao desenvolvimento de doenças, como o câncer, problemas cardíacos, obesidade e outras enfermidades crônicas, como o diabetes. Por essa razão, alimentos ricos em gorduras, como carnes vermelhas, frituras, molhos com maionese, bacon, presuntos, linguiças, mortadelas, entre outros, devem ser consumidos com moderação.

Dessa forma, a população pesquisada deve saber a importância de promover e manter a saúde, que necessita de uma alimentação saudável possibilitando uma prevenção do surgimento de doenças crônicas e melhorando a qualidade de vida.

Descrições e Metodologia

Primeiramente, propõe-se que os alunos se organizem em grupos para que cada um entreviste pessoas quaisquer do seu bairro. Além disso, a entrevista deve ser realizada com adultos sobre a prática de uma alimentação saudável, bem como a respeito do que eles sabem sobre os benefícios dessa prática. Nessa proposta, os alunos deverão selecionar três tipos de alimentação saudável, por exemplo, consumo de frutas e hortícolas, consumo de alimentos ricos em fibras e consumo de peixes e carnes brancas.

Após a coleta de dados, deve-se realizar uma média da quantidade de alimentos consumidos semanalmente com cada tipo de alimento saudável que foram propostos aos adultos participantes da pesquisa, esses dados devem ser organizados em quadros para facilitar a sua análise, como no exemplo abaixo:

Consumo de Alimentos Saudáveis	
Dias da semana	Quantidade de alimentos saudáveis ingerido diariamente
Segunda-feira	
Quarta-feira	
Sexta-feira	

Figura 4.2: Quantidade de alimentos saudáveis ingeridos diariamente por adulto

Depois de coletar os dados, deseja-se descobrir quantas calorias com cada tipo de alimento deveria ser consumidos por uma pessoa que pretende manter seu peso com uma alimentação saudável.

Tomando questionamentos como: quantas calorias são consumidas com cada alimento? Os alunos devem ser estimulados a utilizar uma linguagem matemática para representar as situações descritas na problemática, expressar as condições descritas na situação problema. Além disso, os discentes devem mencionar elementos importantes para a interpretação dos resultados em estudo. Sendo assim, pode-se chamar de x a quantidade de calorias dos alimentos que são consumidos com frutas e hortícolas, y consumindo peixe e carnes brancas e z alimentos ricos em fibras.

Com os dados, os alunos poderão formar um sistema de equações lineares. Com isso, é necessário que apresentem algumas estratégias para obtenção da solução do sistema proposto, em seguida, socializem as estratégias que pensaram. Dessa forma, possibilitamos o resgate do conhecimento prévio do aluno, auxiliando-os na compreensão do conteúdo em estudo. Além disso, pode-se contribuir para que os alunos percebam estratégias adequadas para resolver esta situação problema com o Método de Eliminação de Gauss, Escalonamento e a Regra de Cramer para resolver o sistema linear como vimos no capítulo anterior.

Exemplo 4.1. *Bárbara é uma adulta que pesa 55 kg. Ela deseja manter seu peso de maneira saudável, ou seja, comendo alimentos saudáveis. Com isso, ela deseja saber quantas calorias ela deve ingerir diariamente com cada tipo de alimento saudável escolhido. Após coletado seus dados e feito a média dos mesmo chegamos nesta tabela.*

Dias da semana	Quantidade de porções de frutas e hortícolas ingeridos	Quantidade de porções de alimentos ricos em fibra ingeridos	Quantidade de porções de peixes e carnes brancas ingeridos
Segunda-feira	1	2	1
Quarta-feira	1	1	1
Sexta-feira	0,5	1,5	1

Figura 4.3: Quantidade de alimentos saudáveis ingeridos diariamente por Bárbara

Considerando-se que para manter seu peso seja necessário ingerir 2500 *calorias por dia, quantas calorias Bárbara terá que ingerir de cada tipo de alimento?*

Com isso chamemos de x *a quantidade de frutas e hortícolas ingeridas,* y *a quantidade de alimentos ricos em fibra e* z *a quantidade de peixe e carnes brancas ingeridas. Obtemos o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2500 \\ x + y + z = 2500 \\ 0,5x + 1,5y + 1z = 2500 \end{cases}$$

Para resolver esse sistema basta utilizar algum dos métodos de resolução vistos no decorrer do trabalho.

Capítulo 5

Considerações Finais

Com o desenvolvimento da proposta que apresentamos neste trabalho, vemos uma possibilidade de trabalhar um conteúdo matemático aproveitando o melhor para a formação deste aluno, a interdisciplinaridade, as pessoas ao seu redor (família, vizinhos, etc.), com isso fazendo com que os alunos consigam enxergar o quanto a matemática está presente em praticamente tudo ao nosso redor e com que ele se interesse mais por essa disciplina que, na maioria das vezes, é taxada como uma das "piores disciplinas".

Além disso, trazemos os conceitos básicos de matrizes e determinantes, lembrando que estes conteúdos são primordiais para que consigam entender como se dá a resolução dos sistemas de equações lineares.

Trouxemos também a teoria de sistemas de equações lineares, como o foco principal deste trabalho, que em devidas partes foram utilizados o *software Geogebra* para que conseguíssemos vizualizar geometricamente os possíveis casos de solução de sistemas lineares.

A partir da análise qualitativa, tivemos informações dos três possíveis tipos de soluções que um sistema de equação linear pode ter, podendo assim, verificar essa solução de acordo com os métodos de resoluções abordados no trabalho. Para isso, alguns critérios e teoremas clássicos desta literatura foram usados.

Apresentamos também problemas simples do cotidiano, que em sua resolução envolve sistemas lineares, uma vez que acreditamos que uma aula de exercícios que envolve esse tipo de problema pode ser bem mais proveitosa, pois interessa aos alunos e os instigam a pensar sobre o que está sendo tratado. Podendo servir de consultas para professores ou apenas como modelo para que cada um possa desenvolver a sua proposta didática da maneira em que deseja.

Esperamos que esse trabalho possa contribuir tanto para os acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática para que se apropriem do tema, quanto de consulta para professores do Ensino Básico.

Referências

[1] ANTON, H.; BUSBY, R. C. **Álgebra linear contemporânea**. Tradução Claus Ivo Doering. Porto Alegre: Bookman, 2006.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: **Orientações Curriculares Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, 2002.

[3] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[4] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[5] BRASIL. Secretaria de Educação Médio. **Parâmetros curriculares nacionais**: Parte I / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEM, 2000.

[6] BOLDRINI, J. L., et al. **Álgebra Linear**.3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

[7] CENTRUM: Regras para uma Alimentação Saudável. Disponível em: ¡http://centrumvitaminas.com.pt/nutricao/regras-alimentacao-saudavel/¿. Acesso em: 25 Abr. 2007.

[8] D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. Tradução Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

[9] DANTE, L. R. **Matemática**: Contexto e Aplicações, Manual do Professor. 2. ed. Volume 2. São Paulo: Ática 2013.

[10] IEZZI, G. HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar 4**. 7. ed. São Paulo, Atual 2004.

[11] KOLMAN, B., **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. 6. ed. Tradução Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1998.

[12] LAMIN, M. R. N. **RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MODELADOS COM SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES**. Florianópolis. 2000. Disponível em: $< http : //www.mtm.ufsc.br/\ daniel/7105/Maria_{R}egina_{N}unes_{L}amin.PDF >$. Acesso em 15 Abr. 2017.

[13] LAWSON, T. **Álgebra Linear**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, 1997.

[14] LAY, David C. **Álgebra Linear e suas Aplicações**. 2. ed. Tradução Ricardo Camelier e Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: LTC, 1997.

[15] LEON, Steven J., **Álgebra linear com aplicações**. 4. ed. Tradução Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[16] LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. L. **Teoria e Problemas de Álgebra Linear**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

[17] MURDOCH, D. C. **Álgebra Linear**. Tradução Paulo Ivo de Queiroz. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1972.

[18] PORTAL BRASIL: Alimentação saudável. Disponível em: ¡http://www.brasil.gov.br/saude/2009/11/alimentacao¿. Acesso em: 01 Mai. 2017.

[19] RUFATO, S. A. C. **SISTEMAS LINEARES, APLICAÇÃO EM UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA**. 2014. 55f. Dissertação(Mestre-Programa de Mestrado Profissional em Matemática) Instituto de Ciências Matemática e deComputação - ICMC-USP, São Carlos, 2014. Disponível em: ¡http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-19032014-102209/pt-br.php¿. Acesso em: 17 Abr. 2017.

[20] SÁ, F. L. **ESTUDO DOS DETERMINANTES**. Disponível em:$< http : //www.dalicenca.uff.br/images/stories/caderno/volume5/Estudo_{d}os_{D}etermi-nantes.pdf >$. Acesso em: 17 Mai. 2017.

[21] STEINBRUCH, A.;WINTERLE, P., **Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

[22] UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS. **Manual para Elaboração e Normatização de Trabalhos de Conclusão de Curso do Campus de Araguaína**. Araguaína: UFT, 2011.