UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JONIELDER DA SILVA FERREIRA

UM ESTUDO SOBRE AS FUNÇÕES CIRCULARES E SUAS APLICAÇÕES

ARAGUAÍNA
2017

JONIELDER DA SILVA FERREIRA

UM ESTUDO SOBRE AS FUNÇÕES CIRCULARES E SUAS APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior.

ARAGUAÍNA
2017

JONIELDER DA SILVA FERREIRA

UM ESTUDO SOBRE AS FUNÇÕES CIRCULARES E SUAS APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior .

Aprovada em: / / .

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior (orientador)

Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hancco

Profa. Msc. Samara Leandro Matos da Silva

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos iniciais vão para os meus familiares, que me deram todo apoio ao longo destes anos de estudos dentro da Universidade. Entre eles cito em especial meus pais, Valdelene e João Filho, e minha avó Helena. Obrigado pelo esforço e investimentos feitos para que eu pudesse estudar tranquilamente. Aos meus irmãos, João Neto e Joel, por cooperarem comigo em vários momentos que precisei da ajuda deles.

A todos os meus amigos, especialmente as amigas que fiz durante o curso, Cinthia, Edna, Karla e Tayara, pois me proporcionaram grandes momentos, além de estarem prontas para me ajudar em qualquer situação. Não posso deixar de agradecer aos professores do curso de Matemática, os quais foram muito prestativos e atenciosos, em especial ao professor Sinval, e ao meu orientador professor José Carlos. Estendo também meu agradecimento a todos os servidores da UFT, pois de forma indireta tiveram contribuições para a minha formação.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo fazer um estudo sobre funções circulares e apresentar aplicações que envolvam tais funções, como também as relações entre elas. Para iniciar, iremos trazer um pouco da história da trigonometria, seguido de algumas curiosidades relacionadas ao tema. Utilizando construções geométricas, definiremos as funções trigonométricas básicas e, na sequência, traremos teoremas e corolários que tornam o tema ainda mais interessante. No final, mostraremos aplicações da trigonometria em áreas diferentes.

Palavras-chave: Funções Circulares. Aplicações. Trigonometria.

ABSTRACT

This work aims to make a study of circular functions and expose applications involving such functions, as well the relations between them. To start, we will bring some of the history of trigonometry, followed by some curiosities related to the theme. Using geometric constructions, we will define the trigonometric functions and, in the sequence, we will bring theorems and corollaries that make the theme even more interesting. In the end, we will show applications of trigonometry in different areas.

Keywords: Circular Functions. Applications. Trigonometry.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho tem por objetivo geral fazer um estudo a respeito das funções circulares e mostrar algumas aplicações destas funções, usando também outros aparatos da Trigonometria. Como objetivos específicos, iremos abordar um breve histórico sobre a Trigonometria, trazendo relações entre ela e as civilizações antigas. Além disso, traremos curiosidades interessantes a respeito do tema em pauta. Faremos uma construção geométrica para definir as funções trigonométricas elementares. Depois, abordaremos, em forma de teoremas, as relações fundamentais da Trigonometria e alguns de seus corolários. Já se tratando das aplicações, veremos formas de calcular distâncias inacessíceis usando ferramentas bem simples. Além disso, estudaremos sobre Movimentos Harmônicos Simples e sobre a Trigonometria na Música. Para esta última aplicação, daremos uma forma de se ouvir o som de certas funções trigonométricas.

Ao longo do trabalho, usaremos o Geogebra para nos ajudar nas construções de gráficos, inclusive sua utilização será esencial para o estudo da última aplicação que apresentaremos. Ele é um software gratuito e pode ser baixado facilmente no endereço www.geogebra.org. Vale ressaltar que este software consegue ser muito útil para estudar, não só funções, como também vários outros objetos da Matemática, como por exemplo, os da Geometria Plana, os da Geometria Espacial, os da Geometria Analítica, os do Cálculo Diferencial e Integral, entre outros.

Destacamos que, para uma leitura fluente deste trabalho, é ideal que o leitor esteja familiarizado com conceitos da Geometria Plana e do Cálculo Diferencial (como derivadas).

Capítulo 2

Um pouco da História

Neste capítulo, vamos apresentar ao leitor um pouco da História e algumas curiosidades sobre a Trigonometria. Vale ressaltar que, para a elaboração de cada tópico abaixo, usaremos como base principal as fontes [1, 2, 3, 4].

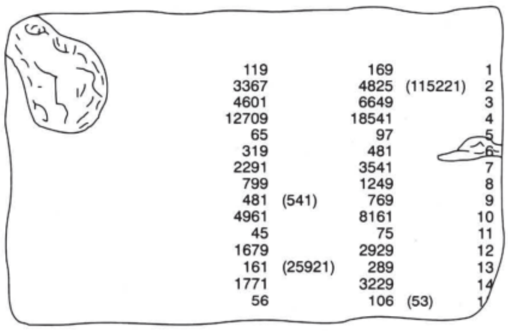
2.1 História da Trigonometria

Se quisermos saber quando a Trigonometria surgiu, temos que decidir primeiro qual significado da palavra levaremos em conta. Pois, se considerarmos ela como sendo a ciência da forma como estudamos na atualidade, o seu surgimento estará no século XVII, interligado ao desenvolvimento dos simbolismos algébricos da matemática moderna. Se considerarmos a Trigonometria como sendo a geometria relacionada à Astronomia, suas origens estarão nos trabalhos de Hiparco, aproximadamente no século II a.C. Podemos ainda considerar seu significado, como sendo literalmente "medidas do triângulo", o que levaria sua origem para em torno do segundo milênio antes de Cristo. Veja [4].

Diversas civilizações antigas contribuíram para o desenvolvimento da Trigonometria. Entre elas, citaremos algumas que consideramos importantes para este trabalho, seja por criarem determinados conceitos, ou por usarem conceitos equivalentes aos da moderninade, ou ainda por aplicá-los em outras áreas, como na Astronomia, Cartografia, Engenharia, Topografia e etc. A seguir, veremos um pouco da relação dos povos Babilônios, Egípcios, Gregos, Indianos, Árabes e Chineses para com a Trigonometria.

Os povos Babilônios escreveram a Plimpton 322 por volta de 1900 a 1600 a.C. Seu nome remete ao fato de ela pertencer a coleção G. A. Plimpton da Universidade de Columbia e catalogada sob o número 322. Ela é uma tábula contendo colunas com números associados à hipotenusa e um dos catetos de triângulos retângulos. Além disso, essa tábula contém uma tabela com o quadrado das secantes do ângulo B oposto ao lado b de cada triângulo. Na figura 2.1, podemos ver uma representação da tábula. Veja [1] (p. 63-66).

Figura 2.1: Representação da Plimpton 322



Fonte: EVES [1] p. 64

Os povos Egípcios utilizaram um conceito equivalente ao de co-tangente, em um dos problemas do papiro Rhind. Segundo [2] (p. 12), o motivo que pode ter levado eles a chegarem a esse resultado foi o fato de que, para construir as pirâmides era nescessário que elas tivessem inclinações constantes nas suas faces.

O autor [2] (p. 116) diz que os Gregos trouxeram, pela primeira vez, estudos sistemáticos sobre as relações entre ângulos nos círculos e os comprimentos das cordas que os subtendem. Além disso, nos elementos de Euclides, há leis ou fórmulas equivalentes a conceitos da Trigonometria moderna, como por exemplo, as leis de cossenos para ângulos agudos e obtusos; porém, é importante ressaltar que eles são abordados em linguagem geométrica. Há também aplicações das leis dos senos nos teoremas sobre comprimento de cordas.

Assim como os Gregos, os Hindus usavam a Trigonometria como uma ferramenta para a sua Astronomia. Entretanto, diferente dos Gregos que construíam tábulas de cordas, eles construíam de semicordas, e nelas usavam os mesmos graus, minutos e segundos que conhecemos nos dias atuais. Conceitos equivalentes aos de senos, cossenos e senos reversos (exprimidos por $\text{versen}A = 1 - \cos A$), eram utilizados pelos Hindus. Além disso, eles calculavam o ângulo metade através da relação $\text{versen}A = 2\text{sen}^2 A$. A trigonometria Hindu englobava triângulos planos e esféricos, porém é interessante observar que era uma Trigonometria mais aritmética do que geométrica. Veja mais em [1] (p. 259).

Segundo [1] (p. 265), os Árabes consideravam-se, antes de tudo, Astrônomos, e desta maneira dedicavam grande interesse pela Trigonometria. Eles utilizaram as seis funções trigonométricas elementares e fizeram aprimoramentos na dedução de fórmulas da trigonometria esférica. AlBattânî, cuja o nome latinizado é Albategnius, chegou à lei dos cossenos para um triângulo esférico obliquângulo (triângulo que possui um ângulo agudo), ou seja,

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \text{sen}\, b \cdot \text{sen}\, c \cdot \text{sen}\, A.$$

A fórmula

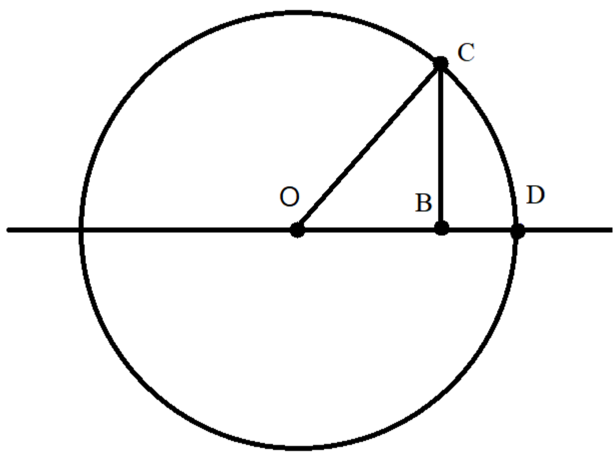
$$\cos B = \cos b \cdot \operatorname{sen} A$$

para um triângulo esférico ABC, reto em C, é às vezes chamada teorema de Geber, em alusão ao astrônomo muçulmano ocidental Jabir Ibn Aflah, frequentemente chamado Geber, que trabalhou em Sevilha.

Na China, também há registros de uso da Trigonometria, e, assim como em outras civilizações, a Astronomia Chinesa foi percursora dos estudos envolvendo o referido assunto. Um desses registros é o Chou Pei, um livro escrito por volta de 1200 antes de Cristo, que trata de cálculos astronômicos e também contém uma introdução relacionada às propriedades do Triângulo retângulo. Provavelmente o mais influente livro de Matemática da civilização Chinesa antiga, foi Chuí-Ghang Suan-Shu ou Nove Capítulos da Arte Matemática. É interessante relatar que o capítulo nove deste livro, contém problemas envolvendo Triângulos retângulos. Um dos problemas encontrados no livro é o seguinte: Há um bambu de 10 pés de altura, cuja extremidade superior, ao ser quebrada, atinge o chão a 3 pés da haste. Encontre a altura da quebra. Veja [2](p 143-144).

A Trigonometria vai sendo desenvolvida e modificada ao longo dos anos, tendo contribuições de nomes como George Joaquim Rético (1514-1576), Nicolau Copérnico (1473-1543), Francois Vieta (1540-1603), e Bartomeu Pitisco (1561-1613). Rético juntou as idéias de Copérnico e de Regiomontano (1436-1476) com suas próprias contribuições. É dele o tradado de Trigonometria mais completo publicado na sua época. O tratado fala sobre Trigonometria no triângulo retângulo e trás a seguinte ideia sobre a notação de ângulo: ele chama seno do ângulo COB, em vez de dizer que CB é o seno do arco CD (Figura 2.2), inclusive ainda hoje usamos a notação da forma como Rético trouxe em seu tratado. Veja [3] (p. 145).

Figura 2.2: Ângulo COB



Fonte: Arquivo pessoal.

Desde Galileu (1564-1642), depois com o desenvolvimento da Geometria Analítica por Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665), os estudos a respeito de curvas tiveram grandes avanços. Logo em seguida, a curva seno foi usada por Roberval (1602-1675) nos seus estudos sobre ciclóide, que foi publicado em 1670 no livro *mecânica* de Wallis (1516-1703). Esta foi a primeira vez que uma curva de uma função Trigonométrica apareceu em uma publicação. A partir daí, pouco a pouco, as funções trigonométricas passaram a ter grande presença na Matemática e, posteriormente, se mostraram essenciais para resolução de diferentes problemas da Matemática e da Física. Um exemplo disso são as séries de Fourier e suas muitas aplicações. Veja [3] (p. 147).

2.2 Curiosidades

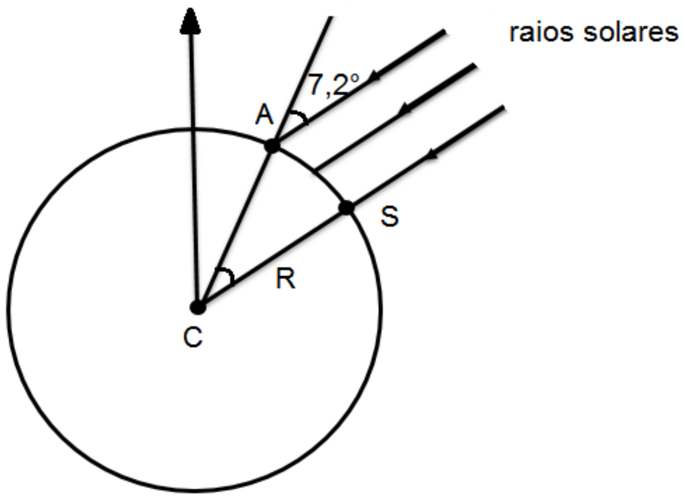
Ao longo da história, há vários relatos sobre casos interessantes envolvendo a Matemática, porém, vamos nos atentar às curiosidades que envolvem, diretamente ou indiretamente, a Trigonometria. Um dos acontecimentos mais famosos é o da medição da circunferência da terra, feita por Eratóstenes, filósofo grego que viveu aproximadamente em 240 a.C.

Na cidade de Siena, Eratóstenes observou que, ao meio dia de um solstício de verão, o fundo de um poço refletia os raios solares. E exatamente no mesmo horário, na cidade de Alexandria os raios solares faziam uma sombra, cuja medida de seu ângulo com uma reta imaginária que passava pelo centro da terra e por Alexandria, era de $7,2^\circ$. Sabia-se que a distância entre Alexandria (vamos chamar de ponto A) e Siena (ponto S) era de aproximadamente 5000 estádios. Eratóstenes usou o fato de que a razão entre a circunferência da terra e 360° é igual a razão de $\widehat{\text{AS}}$, que representa a distância entre as duas cidades, por $7,2^\circ$ (Figura 2.3). Desta maneira, Eratóstenes conseguiu calcular a circunferência da terra com uma precisão razoável. Imaginamos que ele tenha chegado a um resultado próximo a este,

$$\frac{C}{360} = \frac{\widehat{\text{AS}}}{7,2} \Leftrightarrow C = 360 \cdot \frac{5000}{7,2} \Leftrightarrow C = \frac{1800000}{7,2} \Leftrightarrow C = 250000.$$

O resultado dado em estádios pode ser convertido para km, de forma que tenhamos em média $0,171$km a cada estádio. Assim, o resultado encontrado foi próximo de 42750km . Para efeito de comparação, a circunferência da terra medido nos tempos atuais é de aproximadamente 40075km. Veja mais em [2, 5].

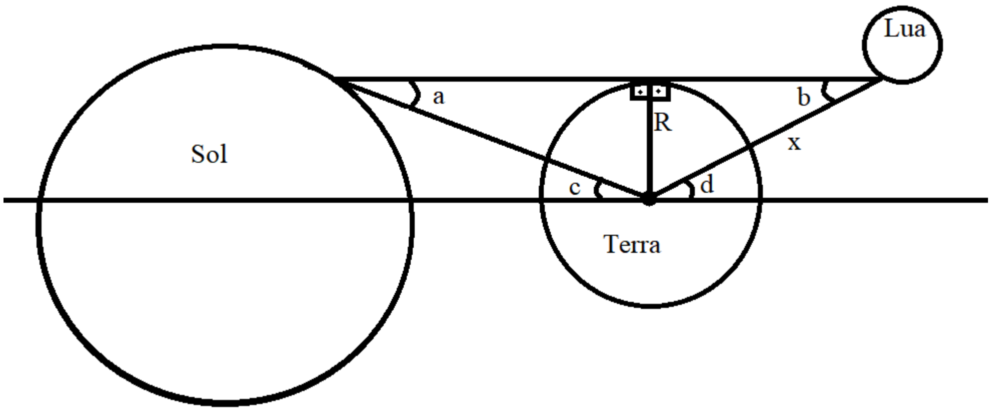
Figura 2.3: Circunferência da Terra



Fonte: Arquivo pessoal.

Outro relato interessante remete a Hiparco, que estimou a distância da Terra à Lua. Para isso, ele utilizou o conhecimento de que, durante um eclipse lunar, a Terra fica exatamente entre o Sol e a Lua. Hiparco imaginou dois Triângulos retângulos, nos quais suas hipotenusas ligavam o centro da terra às bordas do Sol e da Lua. (Figura 2.4).

Figura 2.4: Distância da Terra à Lua



Fonte: Arquivo pessoal.

Hiparco levou em conta que a duração do eclipse era 2 vezes o ângulo d e que a Lua levava 28 dias para dar uma volta completa na Terra, e ainda que o eclipse durava 100 minutos. Com uma regra de três simples, chegou em

$$\frac{100}{28 \cdot 24 \cdot 60} = \frac{2d}{360} \Rightarrow 2d = \frac{100 \cdot 360}{28 \cdot 24 \cdot 60} \Rightarrow 2d = \frac{36000}{40320} \Rightarrow d \approx 0,5^\circ.$$

Como mostra na Figura 2.4, Hiparco observou que $c + d + \alpha = 180^\circ$ e $a + b + \alpha = 180^\circ$ e, com isso, obteve que $a + b = c + d$. Ao medir, foi encontrado o ângulo c, que era próximo a $0,25^\circ$. Foi observado que o ângulo a tem medida desprezível, pois o Sol está muito distante da Terra, o que leva a seguinte relação $b \approx c + d$, ou seja, $b \approx 0,75^\circ$. Para estimar a distância da Terra à Lua, Hiparco usou a seguinte razão trigonométrica

$$\text{sen}\, b = \frac{R}{x} \Rightarrow \text{sen}\,(0,75^\circ) \cdot x = R \Rightarrow x = \frac{R}{\text{sen}(0,75^\circ)}$$

e descobriu que a distância da Terra à Lua é cerca de 62 a 74 vezes o tamanho de R, o raio da Terra. O que é uma estimativa razoável, levando em conta que hoje sabemos que o tamanho real está entre 57 e 67 vezes o tamanho de R. Veja mais em [6] (p. 102-103).

Para finalizar, mais um relato curioso é sobre a origem do uso da palavra seno na Matemática. Os Hindus usavam a palavra meio-corda para se referir ao seno, que em sânscrito é jiva. Os Árabes a usaram sem fazer modificações, porém, na linguagem árabe, é comum se escrever apenas as consoantes de algumas palavras, deixando a cargo do leitor a sua interpretação. Como a palavra sânscrita jiva se confunde com o som da palavra árabe jaib, os tradutores dos trabalhos matemáticos do árabe para o latim deduziram que os trabalhos se referiam a jaib, que é uma palavra bem usual e significa bolso ou bacia, e traduzindo para o latim é sinus. Desta, se derivou a palavra que conhecemos hoje como seno. Veja mais em [3] (p. 143).

Capítulo 3

Definições e Resultados

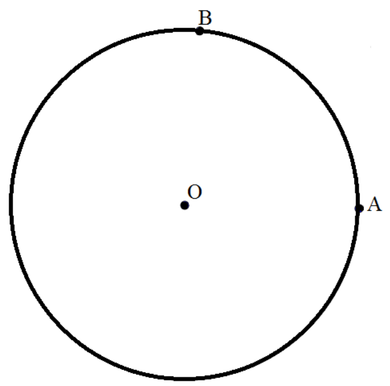
No capítulo que se segue, vamos estudar algumas definições importantes para utilizarmos posteriormente neste trabalho. Informamos ao leitor que para as próximas definições nos embasaremos nas seguintes fontes [3, 7, 8].

Por questões didáticas, decidimos apresentar primeiro um apanhado de definições, propriedades e resultados sobre as funções circulares para que, em seguida, mostrássemos os exemplos aplicando tais conceitos. A razão pela qual fizemos desta forma vem do fato de que os exemplos se tornam mais interessantes e curiosos quando envolvem conceitos mais abrangentes de uma área.

3.1 Funções Circulares

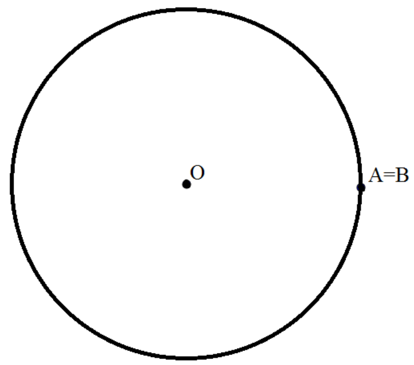
Definição 3.1. *(Arcos) Dado uma circunferência e dois pontos distintos A e B sobre ela, chamamos os segmentos $\widehat{AB}$ e $\widehat{BA}$ de arcos da circunferência (Figura 3.1). Nos casos onde os pontos A e B coincidem, temos dois casos particulares de arcos, o ponto $A = B$ é denominado arco nulo e a circunferência é denominada arco de uma volta (Figura 3.2).*

Figura 3.1: Arco de uma circunferência



Fonte: Arquivo pessoal.

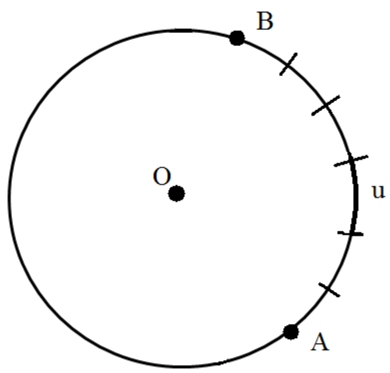
Figura 3.2: Arco nulo de uma circunferência



Fonte: Arquivo pessoal.

Para medirmos um arco $\widehat{AB}$ em relação ao arco unitário u (u não nulo e de mesmo raio que $\widehat{AB}$), precisamos verificar quantas vezes o arco u cabe no arco $\widehat{AB}$. Assim, por exemplo, na Figura 3.3, o arco u cabe 6 vezes no arco $\widehat{AB}$ e, então, a medida do arco $\widehat{AB}$ é 6, isto é, arco $\widehat{AB} = 6 \cdot \text{arco } u$.

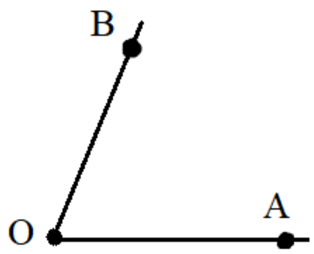
Figura 3.3: Medida de arco



Fonte: Arquivo pessoal.

Definição 3.2. *(Ângulos) O ângulo é uma figura formada por duas semi-retas de mesma origem, onde as semi-retas são os lados do ângulo e a origem comum é o vértice (Figura 3.4). Usamos a notação $A\widehat{O}B$ ou $B\widehat{O}A$ para se referir ao ângulo.*

Figura 3.4: Ângulo



Fonte: Arquivo pessoal.

Definição 3.3. *Grau, cujo símbolo é $^\circ$, é um arco unitário igual a $\dfrac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido.*

Definição 3.4. *Radiano, cujo símbolo é rad, é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido.*

Temos a seguinte correspondência entre graus e radianos:

$$180^\circ = \pi rad.$$

Exemplo 1. Se quisermos converter 150° para radianos, fazemos como segue.

Resolução:

$$\frac{x}{150} = \frac{\pi}{180} \iff 180x = 150\pi \iff x = \frac{150\pi}{180} \iff x = \frac{5\pi}{6}.$$

□

Exemplo 2. Da mesma forma, converteremos $\frac{3\pi}{4} rad$ para graus.

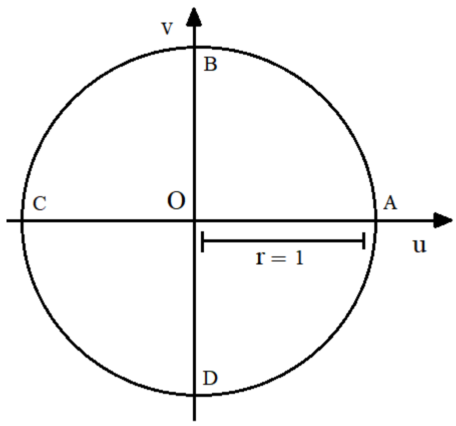
Resolução:

$$\frac{\frac{3\pi}{4}}{x} = \frac{\pi}{180} \iff 180 \cdot \frac{3\pi}{4} = x \cdot \pi \iff 135\pi = x \cdot \pi \iff x = 135°.$$

□

Definição 3.5. *(Ciclo Trigonométrico) Tomemos sobre um plano um sistema cartesiano ortogonal uOv. Consideremos a circunferência λ de centro O e $r = 1$. Notemos que o tamanho desta circunferência é 2π pois $r = 1$.*

Figura 3.5: Ciclo Trigonométrico



Fonte: Arquivo pessoal.

Definição 3.6. *(Função Periódica) Sejam A e B subconjuntos de números reais. Uma função $f : A \to B$ é periódica se existir $p > 0$ que satisfaça a seguinte condição:*

$$f(x + p) = f(x), \forall x \in A.$$

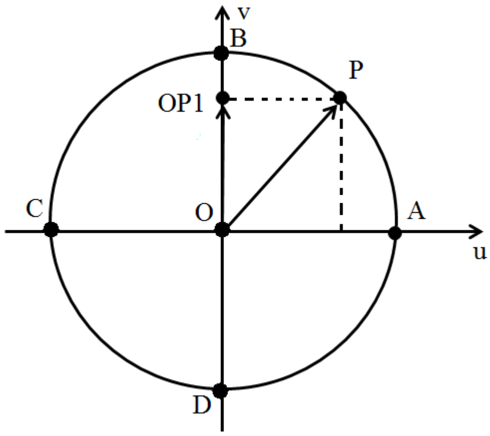
Neste caso, o menor valor de p que satisfaça a condição citada será chamado de período de f.

A seguir, começamos a apresentar as funções periódicas. Vamos iniciar com a função seno.

Definição 3.7. *(Função Seno) Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos seno de x (e indicamos por sen x) a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P do sistema uOv (Figura 3.6). Denominamos função seno a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_1} = sen\, x$, isto é:*

$$f(x) = sen\, x.$$

Figura 3.6: Seno



Fonte: Arquivo pessoal.

Propriedades da função seno:

- A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq \text{sen}\, x \leq 1$ para todo x real. Justifica-se imediatamente, pois, se P está no ciclo, sua ordenada pode variar somente de -1 a 1, assumindo cada um destes valores.

- Se x está no primeiro ou no segundo quadrante, então sen x é positivo.
  De fato, neste caso, P está acima do eixo u e sua ordenada é positiva.

- Se x está no terceiro ou quarto quadrante, então sen x é negativo.
  De fato, neste caso, P está abaixo do eixo u e sua ordenada é negativa.

- Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então sen x é crescente.
  É imediato que, se x percorre o primeiro quadrante, então P percorre o arco $\widehat{AB}$ e sua ordenada cresce. Fato análogo ocorre no quarto quadrante.

- Se x percorre o segundo ou terceiro quadrante, então sen x é decrescente.
  É imediato que, se x percorre o segundo quadrante, então P percorre o arco $\widehat{BC}$ e sua ordenada decresce. Fato análogo ocorre no terceiro quadrante.

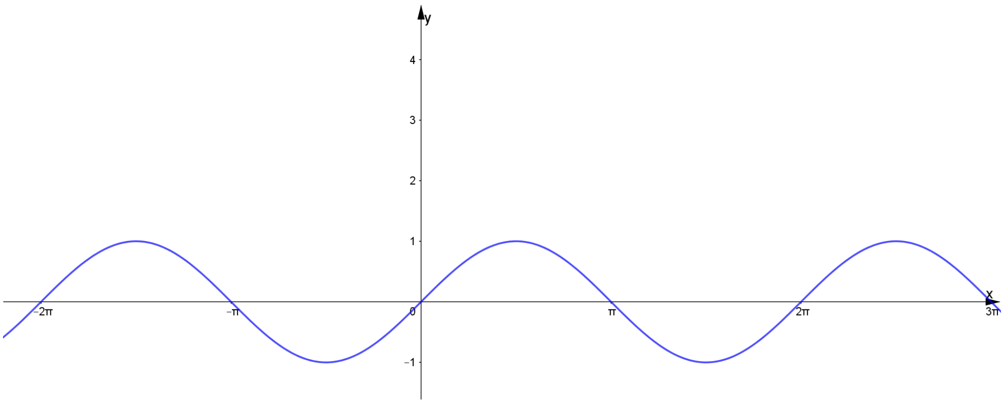
- A função seno é periódica e seu período é 2π.
  É imediato que, se sen $x = \overline{OP_1}$ e $k \in \mathbb{Z}$, então sen $(x + k \cdot 2\pi) = \overline{OP_1}$, pois x e $x + k \cdot 2\pi$ tem a mesma imagem P no ciclo. Temos, então, para todo x real

$$\text{sen}\, x = \text{sen}\,(x + k \cdot 2\pi)$$

  e, portanto, a função seno é periódica. E seu período é o menor valor positivo de $k \cdot 2\pi$, isto é, 2π.

  Veremos agora o gráfico da função seno (Figura 3.7).

Figura 3.7: Seno

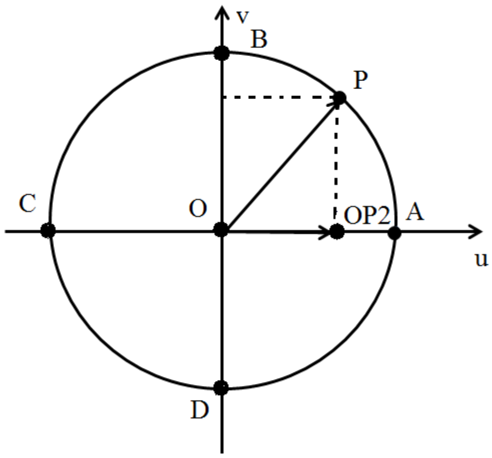


Fonte: Arquivo pessoal.

Definição 3.8. *(Função Cosseno) Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de x (e indicamos por $\cos x$) a ordenada $\overline{OP_2}$ do ponto P do sistema uOv (Figura 3.8). Denominamos função cosseno a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_2} = \cos x$, isto é,*

$$f(x) = \cos x.$$

Figura 3.8: Cosseno



Fonte: Arquivo pessoal.

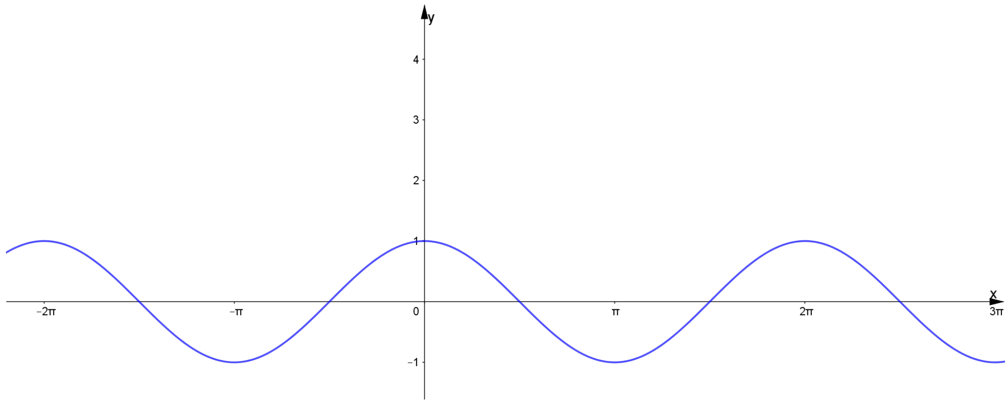
As propriedades da função cosseno a seguir não serão demonstradas, pois seguem os mesmos raciocínios daquelas da função seno. Deixamos essa tarefa a cargo do leitor.

Propriedades da função cosseno:

- A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo x real.
- Se x está no primeiro ou no quarto quadrante, então $\cos x$ é positivo.
- Se x está no segundo ou no terceiro quadrante, então $\cos x$ é negativo.
- Se x percorre o terceiro ou quarto quadrante, então $\cos x$ é crescente.
- Se x percorre o primeiro ou segundo quadrante, então $\cos x$ é decrescente.
- A função cosseno é periódica, e seu período é 2π.

  Veremos a seguir o gráfico da função cosseno (Figura 3.9).

Figura 3.9: Cosseno

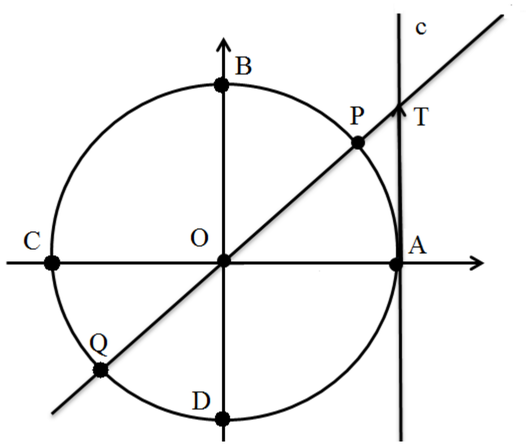


Fonte: Arquivo pessoal.

Definição 3.9. *(Função Tangente) Dado um número real x, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua intersecção com o eixo das tangentes (eixo este que é dado pela reta tangente ao círculo passando por A). Denominamos tangente de x (e indicamos por tg x) a medida algébrica do segmento $\overleftrightarrow{AT}$ (Figura 3.10). Denominamos função tangente a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, o real $\overrightarrow{AT} =$ tg x, isto é,*

$$f(x) = \text{tg}\, x.$$

Figura 3.10: Tangente



Fonte: Arquivo pessoal.

Propriedades da função tangente:

- O domínio da função $\operatorname{tg} x$ é $D = \{x \in \mathbb{R} |\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}\}$.

- A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$, isto é, para todo y real, existe um x real tal que $\operatorname{tg} x = y$.
  De fato, dado $y \in \mathbb{R}$, consideramos sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que $\overrightarrow{AT} = y$. Construindo a reta $\overleftrightarrow{OT}$, observamos que ela intersepta o ciclo em dois pontos P e Q, imagens no círculo dos reais x cuja tangente é y.

- Se x está no primeiro ou terceiro quadrante, então $\operatorname{tg} x$ é positiva.
  De fato, neste caso, o ponto T está acima de A e a medida de $\overrightarrow{AT}$ é positiva.

- Se x está no segundou ou quarto quadrante, então $\operatorname{tg} x$ é negativa.
  De fato, neste caso, o ponto T está abaixo de A e a medida de $\overrightarrow{AT}$ é negativa.

- Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então $\operatorname{tg} x$ é crescente.
  Provemos, por exemplo, quando x percorre o primeiro quadrante. Dados x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$, temos que suas imagens no círculo satisfazem $\alpha_1 < \alpha_2$ em comprimento e, pelas propriedades da Geometria Plana, vem que $\overline{AT_1} < \overline{AT_2}$, isto é, $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$.

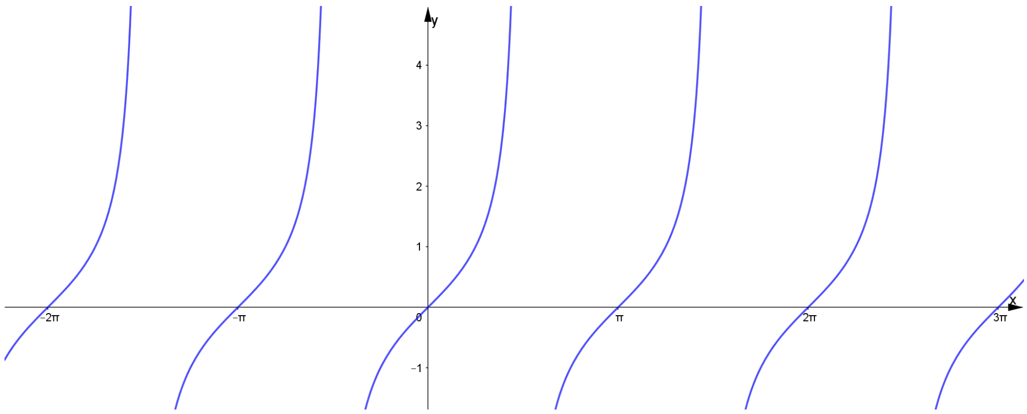
- A função tangente é periódica, e seu período é π.
  De fato, se $\operatorname{tg} x = \overline{AT}$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \overline{AT}$, pois x e $x + k\pi$ tem imagens P e Q coincidentes ou diamentralmente opostas no ciclo, e assim, $\overleftrightarrow{OP} = \overleftrightarrow{OQ}$. Portanto, a interseção de $\overleftrightarrow{OP}$ com o círculo é o mesmo ponto que a interseção de $\overleftrightarrow{OQ}$ com o círculo. Temos, então, para todo x no domínio da tangente,

  $$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi),$$

  e a função tangente é periódica, com o seu período sendo o menor valor positivo de $k\pi$, isto é, π.

  Veremos a seguir o gráfico da função tangente (Figura 3.11).

Figura 3.11: Tangente

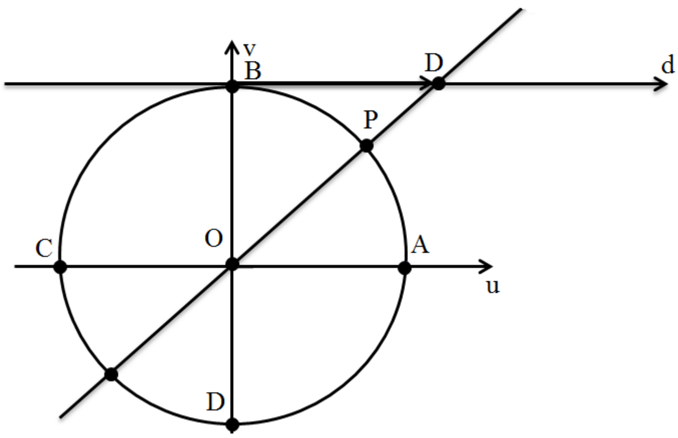


Fonte: Arquivo pessoal.

Definição 3.10. *(Função Cotangente) Dado um número real x, $x \neq k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja D sua intersecção com o eixo das cotangentes. Denominamos cotangente de x (e indicamos por cotg x) a medida algébrica do segmento $\overrightarrow{BD}$ (Figura 3.12). Denominamos por função cotangente a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq k\pi$, o real $\overrightarrow{BD} = cotg\, x$, isto é,*

$$f(x) = cotg\, x.$$

Figura 3.12: Cotangente



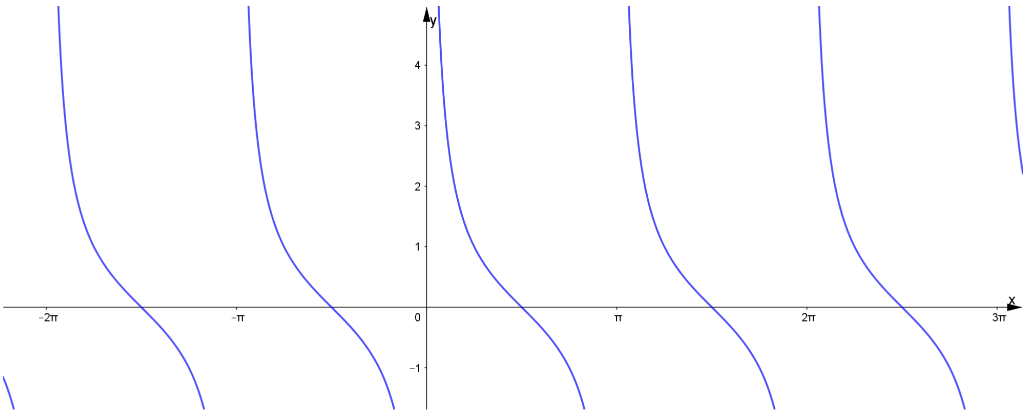
Fonte: Arquivo pessoal.

Propriedades da função cotangente:

- O domínio da função cotangente é $D = \{x \in \mathbb{R} | \ x \neq k\pi, \ \ \text{para todo} \ \ k \in \mathbb{Z}\}$.
- A imagem da função cotangente é $\mathbb{R}$, isto é, para todo y real existe um x tal que $\operatorname{cotg} x = y$.
- Se x está no primeiro ou no terceiro quadrante, então $\operatorname{cotg} x$ é positivo.
- Se x está no segundo ou no quarto quadrante, então $\operatorname{cotg} x$ é negativo.
- Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então $\operatorname{cotg} x$ é decrescente.
- A função cotangente é periódica, e seu período é π.

Fica a cargo do leitor a demonstração das propriedades acima.
veremos a seguir o gráfico da função cotangente (Figura 3.13).

Figura 3.13: Cotangente

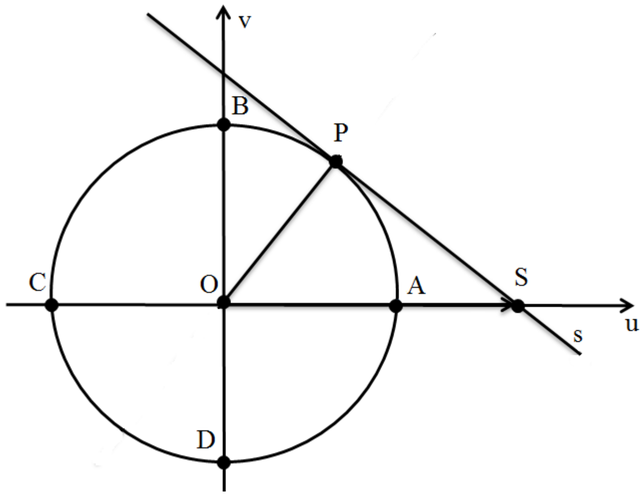


Fonte: Arquivo pessoal.

Definição 3.11. *(Função Secante) Dado um número real x, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja S sua intersecção com o eixo dos cossenos. Denominamos secante de x (e indicamos por $sec\, x$) a abcissa $\overrightarrow{OS}$ do ponto S (Figura 3.14). Denominamos função secante a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ que assoscia a cada real x, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, o real $\overrightarrow{OS} = sec\, x$, isto é,*

$$f(x) = sec\, x.$$

Figura 3.14: Secante



Fonte: Arquivo pessoal.

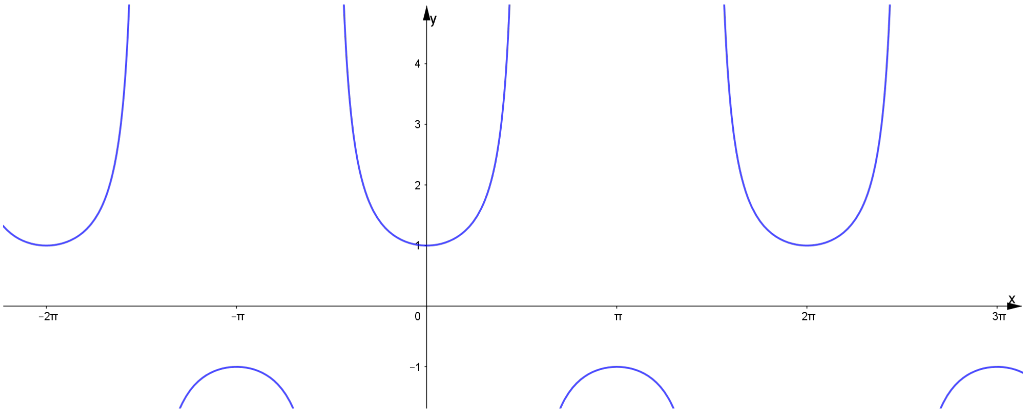
Propriedades da função secante:

- O domínio da função secante é $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\}$
- A imagem da função secante é $\mathbb{R} -]-1, 1[$, isto é, para todo y real, com $y \leq -1$ ou $y \geq 1$ existe um x tal que $\sec x = y$.
- Se x está no primeiro ou no quarto quadrante, então $\sec x$ é positiva.
- Se x está no segundo ou no terceiro quadrante, então $\sec x$ é negativa.
- Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então $\sec x$ é crescente.
- Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então $\sec x$ é decrescente.
- A função secante é periódica, e seu período é 2π.

  Fica a cargo do leitor a demonstração das propriedades acima.

Veremos a seguir o gráfico da função secante (Figura 3.15).

Figura 3.15: Secante

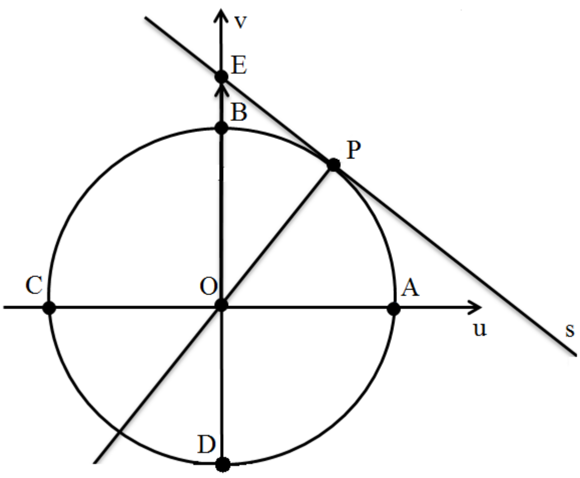


Fonte: Arquivo pessoal.

Definição 3.12. *(Função Cossecante) Dado um número real x, $x \neq k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja E sua intersecção com o eixo dos senos. Denominamos cossecante de x (e indicamos por cossec x) a ordenada $\overrightarrow{OE}$ do ponto E (Figura 3.16). Denominamos função cossecante a função $f : D \to \mathbb{R}$ que assoscia a cada real x, $x \neq k\pi$, o real $\overrightarrow{OE} =$ cossec x, isto é,*

$$f(x) = \text{cossec}\, x.$$

Figura 3.16: Cossecante



Fonte: Arquivo pessoal.

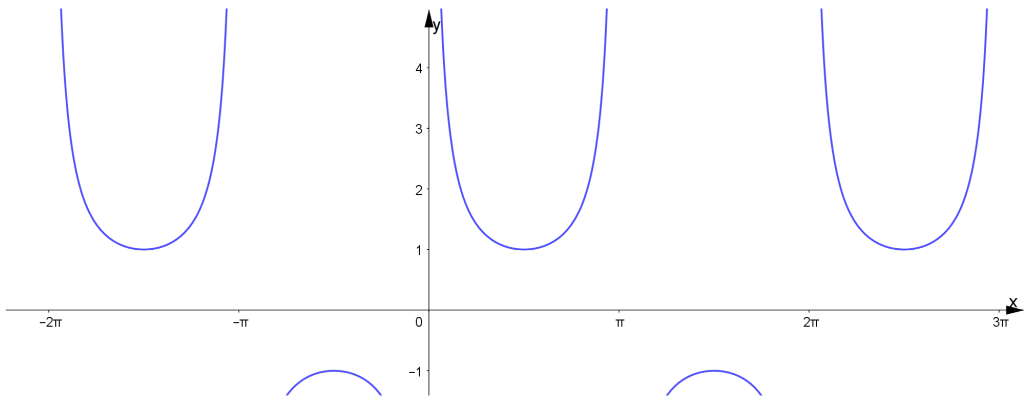
Propriedades da função cossecante:

- O domínio da função cossecante é $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}\}$.
- A imagem da função cossecante é $\mathbb{R} -]-1, 1[$, isto é, para todo y real, com $y \leq -1$ ou $y \geq 1$ existe um x tal que $\operatorname{cossec} x = y$.
- Se x está no primeiro ou no segundo quadrante, então $\operatorname{cossec} x$ é positiva.
- Se x está no terceiro ou no quarto quadrante, então $\operatorname{cossec} x$ é negativa.
- Se x percorre o segundo ou terceiro quadrante, então $\operatorname{cossec} x$ é crescente.
- Se x percorre o primeiro ou quarto quadrante, então $\operatorname{cossec} x$ é decrescente.
- A função cossecante é periódica, e seu período é 2π.

  Fica a cargo do leitor a demonstração das propriedades acima.

Veremos a seguir o gráfico da função cossecante (Figura 3.17).

Figura 3.17: Cossecante



Fonte: Arquivo pessoal.

3.2 Resultados

Agora que definimos as seis funções trigonométricas elementares, queremos mostrar ao leitor algumas relações que elas têm entre si. São o que chamamos de relações fundamentais, e veremos a seguir.

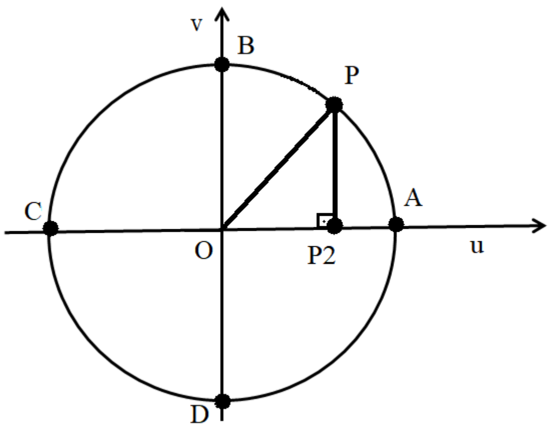
Teorema 3.13. *Para todo x, vale a relação $sen^2 x + cos^2 x = 1$, chamada de relação fundamental trigonométrica.*

Demonstração: Vamos dividir em dois casos possíveis.

(a) Se $x \neq \frac{k \cdot \pi}{2}$, a imagem de x é distinta de A, B, C e D e, então, existe o triângulo OP_2P retângulo (veja a Figura 3.18). Portanto, pelo teorema de pitágoras, temos

$$| \overline{OP_2} |^2 + | \overline{P_2P} |^2 = | \overline{OP} |^2 = 1 \Longrightarrow \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1.$$

Figura 3.18: Relação fundamental



Fonte: Arquivo pessoal.

(b) Se $x = \frac{k \cdot \pi}{2}$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, podemos verificar diretamente a tese (veja a figura 3.19).

Figura 3.19: Tabela de sinais

x	sen x	cos x	sen^{2}x + cos^{2}x
0	0	1	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0	1
π	0	-1	1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	1

Fonte: IEZZI, G. [7].

□

Teorema 3.14. *Para todo x real, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, vale a relação tg $x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$.*

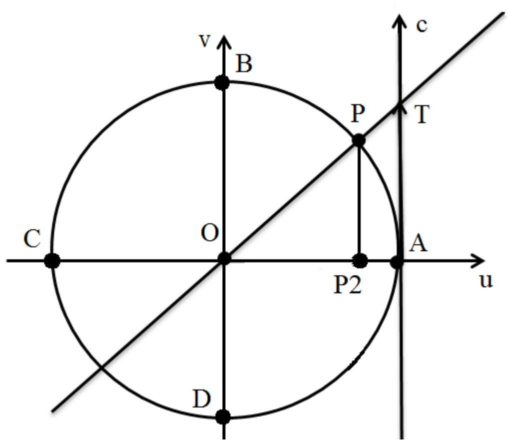
Demonstração: Vamos dividir em dois casos possíveis.

(a) Se $x \neq k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, C e D (veja a figura 3.20). Então, temos

$$\triangle OAT \sim \triangle OP_2P \Longrightarrow \frac{\mid \overline{AT} \mid}{\mid \overline{OA} \mid} = \frac{\mid \overline{P_2P} \mid}{\mid \overline{OP_2} \mid} \Longrightarrow \mid \text{tg}\, x \mid = \frac{\mid \text{sen}\, x \mid}{\mid \cos x \mid}.$$

Observando a tabela 3.21, podemos perceber que o sinal da tg x é igual ao do quociente $\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$. Desta forma, verifica-se a tese.

Figura 3.20: Relação fundamental 2



Fonte: Arquivo pessoal.

(b) Se $x = k\pi$, temos que

$$\operatorname{tg} x = 0 = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Figura 3.21: Tabela de sinais

Q	sinal de tg x	sinal de $\frac{\text{sen x}}{\text{cos x}}$
1º	+	+
2º	-	-
3º	+	+
4º	-	-

Fonte: IEZZI, G. [7].

□

Teorema 3.15. *Para todo x real, $x \neq k\pi$, vale a relação cotg $x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$.*

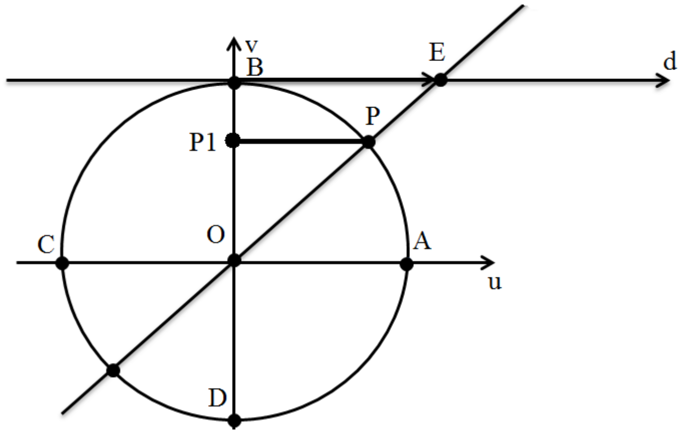
Demonstração: Vamos dividir em dois casos possíveis.

(a) Se $x \neq \frac{\pi}{2} k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, C e D (veja a figura 3.22) . Então, temos

$$\triangle OBE \sim \triangle OP_1P \Longrightarrow \frac{|\ \overline{BE}\ |}{|\ \overline{OB}\ |} = \frac{|\ \overline{P_1P}\ |}{|\ \overline{OP_1}\ |} \Longrightarrow |\ \operatorname{cotg} x\ | = \frac{|\ \cos x\ |}{|\ \operatorname{sen} x\ |}.$$

Observando a tabela 3.23, podemos perceber que o sinal da cotg x é igual ao do quociente $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$. Desta forma, verifica-se a tese.

Figura 3.22: Relação fundamental 3



Fonte: Arquivo pessoal.

(b) Se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, temos que

$$\text{cotg}\, x = 0 = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}.$$

Figura 3.23: Tabela de sinais

Q	sinal de cotg x	sinal de $\frac{\cos x}{\text{sen } x}$
1º	+	+
2º	-	-
3º	+	+
4º	-	-

Fonte: IEZZI, G. [7].

□

Teorema 3.16. *Para todo x real, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, vale a relação sec $x = \frac{1}{cos\, x}$.*

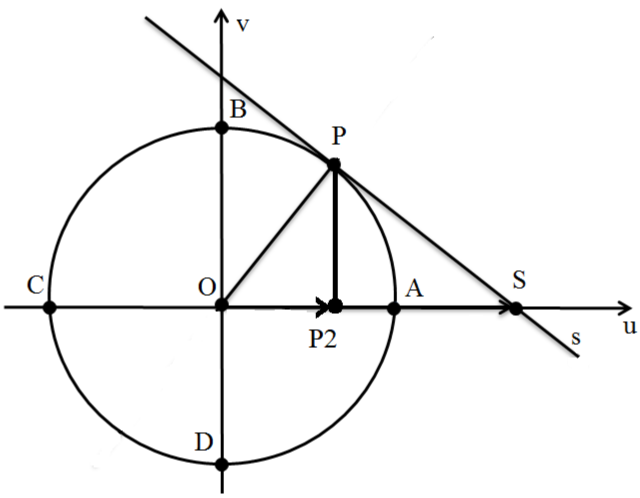
Demonstração: Vamos dividir em dois casos possíveis.

(a) Se $x \neq k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, C e D (veja a figura 3.24). Então, temos

$$\triangle OPS \sim \triangle OP_2P \Longrightarrow \frac{|\,\overline{OS}\,|}{|\,\overline{OP}\,|} = \frac{|\,\overline{OP}\,|}{|\,\overline{OP_2}\,|} \Longrightarrow |\sec x| = \frac{1}{|\cos x|}.$$

Observando a tabela 3.25, podemos perceber que o sinal da $\sec x$ é igual ao de $\cos x$. Desta forma, verifica-se a tese.

Figura 3.24: Relação fundamental 4



Fonte: Arquivo pessoal.

(b) Se $x = k\pi$, temos quando k for par,

$$\sec x = 1 = \cos x,$$

e quando k for ímpar,

$$\sec x = -1 = \cos x,$$

Figura 3.25: Tabela de sinais

Q	sinal de sec x	sinal de cos x
1º	+	+
2º	-	-
3º	-	-
4º	+	+

Fonte: IEZZI, G. [7].

□

Teorema 3.17. *Para todo x real, $x \neq k\pi$, vale a relação cossec $x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x}$.*

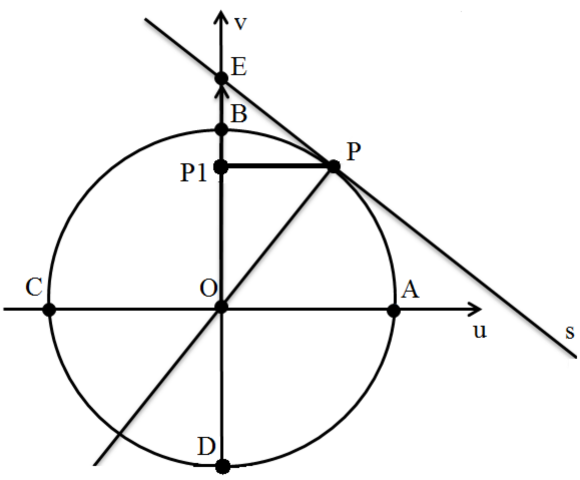
Demonstração: Vamos dividir em dois casos possíveis.

(a) Se $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, C e D (veja a figura 3.26). Então, temos

$$\triangle OPE \sim \triangle OP_1P \Longrightarrow \frac{|\,\overline{OE}\,|}{|\,\overline{OP}\,|} = \frac{|\,\overline{OP}\,|}{|\,\overline{OP_1}\,|} \Longrightarrow |\sec x| = \frac{1}{|\,\text{sen}\, x\,|}.$$

Observando a tabela 3.27, podemos perceber que o sinal da $\sec x$ é igual ao de sen x. Desta forma, verifica-se a tese.

Figura 3.26: Relação fundamental 5



Fonte: Arquivo pessoal.

(b) Se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ temos quando k for par,

$$\text{cossec}\, x = 1 = \text{sen}\, x$$

e quando k for ímpar,

$$\text{cossec}\, x = -1 = \text{sen}\, x.$$

Figura 3.27: Tabela de sinais

Q	sinal de cossec x	sinal de sen x
1º	+	+
2º	+	+
3º	-	-
4º	-	-

Fonte: IEZZI, G. [7].

□

Corolário 3.18. *Para todo x real, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, vale a relação cotg $x = \frac{1}{\text{tg}\, x}$.*

Demonstração: Segue diretamente dos resultados anteriores que

$$\text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \frac{1}{\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}} = \frac{1}{\text{tg}\, x}.$$

□

Corolário 3.19. *Para todo x real, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, vale a relação tg$^2 x + 1 =$ sec$^2 x$.*

Demonstração: Da Relação Fundamental Trigonométrica, segue que

$$\text{tg}^2 x + 1 = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

□

Corolário 3.20. *Para todo x real, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, vale a relação $1 +$ cotg$^2 x =$ cossec$^2 x$.*

Demonstração:

$$1 + \text{cotg}^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{1}{\text{sen}^2 x} = \text{cossec}\,^2 x.$$

□

Corolário 3.21. *Para todo x real, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, vale a relação $cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x}$.*

Demonstração:

$$\cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x}.$$

□

Corolário 3.22. *Para todo x real, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, vale a relação $sen^2 x = \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}$.*

Demonstração:

$$\text{sen}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \text{sen}^2 x = \cos^2 x \cdot \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} x = \cos^2 x \cdot \text{tg}^2 x = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x} \cdot \text{tg}^2 x = \frac{\text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x}.$$

□

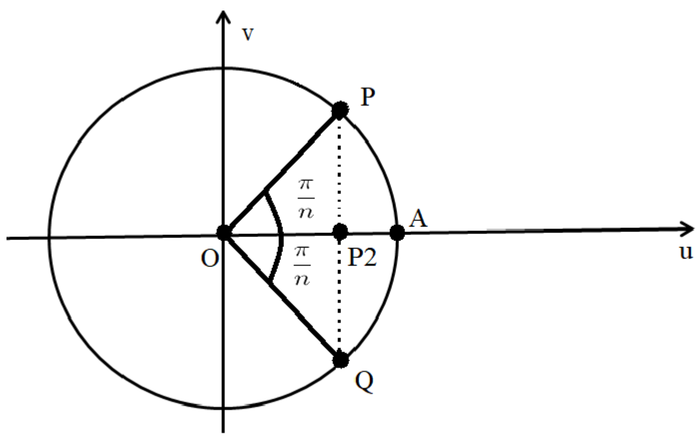
O próximo resultado fornece uma maneira de se calcular o valor do seno de certos ângulos. Dele que provém a famosa tabela dos ângulos notáveis. No que segue, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere l_n o lado do polígono regular de n lados inscrito no círculo unitário.

Teorema 3.23. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, vale a relação sen $\frac{\pi}{n} = \frac{l_n}{2}$.*

Demonstração: Considere aqui a Figura 3.28, onde $A\widehat{O}P = A\widehat{O}Q = \frac{\pi}{n}$. Como $Q\widehat{O}P = \frac{2\pi}{n}$, decorre que $\overline{QP} = l_n$. No triângulo isóceles $Q\widehat{O}P$, o eixo dos cossenos é bissetriz e também altura e mediana, isto é, $QP \perp u$ e P_2 é ponto médio de QP. Então, por definição de seno, tem-se

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{n} = \overline{P_2P} = \frac{l_n}{2}.$$

Figura 3.28: Teorema 3.23



Fonte: Arquivo pessoal.

□

Agora, vamos trazer ao leitor alguns exemplos para que possamos exercitar os resultados que trouxemos até aqui.

Exemplo 3. Sabendo que $\operatorname{cossec} x = -\dfrac{5}{4}$ e $\pi \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}$, calcularemos as demais funções circulares de x.

Resolução: Utilizaremos o Corolário 3.20 para encontrarmos a cotangente de x. Seque que

$$1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x \Rightarrow \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x - 1 \Rightarrow \operatorname{cotg} x = \sqrt{\left(-\frac{5}{4}\right)^2 - 1} \Rightarrow$$

$$\operatorname{cotg} x = \sqrt{\frac{9}{16}} \Rightarrow \operatorname{cotg} x = \frac{\pm 3}{4} \Rightarrow \operatorname{cotg} x = \frac{3}{4},$$

uma vez que x está no terceiro quadrante. Agora, usaremos o Corolário 3.18 para encontrarmos a tangente de x.

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\frac{3}{4}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{4}{3}.$$

Pelo Teorema 3.17, encontraremos o seno de x. Temos

$$\operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{\operatorname{cossec} x} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{-\frac{5}{4}} \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{4}{5}.$$

Pelo Teorema 3.14, encontraremos o cosseno de x. Obtemos

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{coscos} x} \Rightarrow \cos x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow \cos x = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{4}{3}} \Rightarrow \cos x = -\frac{3}{5}.$$

Para finalizar, usaremos o Teorema 3.16 para encontrar a secante de x.

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \sec x = \frac{1}{-\frac{3}{5}} \Rightarrow \sec x = -\frac{5}{3}.$$

□

Exemplo 4. Seja $\sec x = 2$. Vamos calcular a expressão $y = \dfrac{2 \cdot \operatorname{sen}^2 x + 3 \cdot \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x}{\operatorname{cotg}^2 x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)}$.

Resolução: Primeiramente, vamos utilizar alguns corolários e teoremas para encontrar os valores das funções circulares que são necessárias para calcularmos a expressão y. Usando o Corolário 3.19, encontraremos

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = (2)^2 - 1 = 3.$$

Pelo Corolário 3.21, segue que

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+3} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4}.$$

Pelo Teorema 3.13, temos

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{4}.$$

Pelo Teorema 3.15, obtemos que

$$\operatorname{cotg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow \operatorname{cotg}^2 x = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} \Rightarrow \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{3}.$$

Assim,

$$y = \frac{2 \cdot \operatorname{sen}^2 x + 3 \cdot \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x}{\operatorname{cotg}^2 x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \frac{2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + 3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{3} \cdot 4} = \frac{\frac{6}{4} + \frac{9}{4}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{4}{3}} = \frac{45}{16}.$$

□

Como já vimos, o Teorema 3.23 nos garante calcular qualquer ângulo desde que esteja de acordo com as condições proposta por ele. Preocupado com o leitor, a seguir faremos um exemplo que o ajude a entender melhor uma aplicação do teorema mencionado. Entretanto, vale ressaltar que outras aplicações podem ser encontradas nas páginas 64 e 65 de [7], inclusive lá também estão os resultados de quando $n = 3$, $n = 4$ e $n = 6$, que geram os valores dos ângulos notáveis (veja a Figura 3.29).

Figura 3.29: Tabela dos ângulos notáveis

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: IEZZI. G [7], p. 65

Exemplo 5. Vamos calcular o valor de sen $(22,5°)$, cos $(22,5°)$ e tg$(22,5°)$.

Resolução:

Primeiramentem converteremos $22,5°$ para radianos. Temos que

$$\frac{22,5°}{180°} = \frac{x}{\pi} \Rightarrow x = \frac{22,5° \cdot \pi}{180°} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}.$$

Aplicando o Teorema 3.23, encontraremos

$$\text{sen}(22,5°) = \text{sen}\,\frac{\pi}{8} = \frac{l_8}{2}.$$

Podemos usar o Teorema de Pitágoras e calcular o valor do lado de um polígono regular de 4 lados inscrito na circunferência e obteremos $l_4 = R\sqrt{2}$ (Figura 3.30). Usando tal resultado, temos que

$$2 \cdot \overline{PQ} = 2R - l_4 \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{2R - R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{R \cdot (2 - \sqrt{2})}{2}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras, teremos

$$(l_8)^2 = \overline{PQ}^2 + (\frac{l_4}{2})^2 \Rightarrow (l_8)^2 = \left(\frac{R \cdot (2-\sqrt{2})}{2}\right)^2 + \left(\frac{R \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow l_8 = R \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Considerando que $R = 1$, então

$$l_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Logo, podemos calcular

$$\text{sen}(22,5°) = \text{sen}\,\frac{\pi}{8} = \frac{l_8}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Pelo Teorema 3.13, é imediato que

$$\text{sen}^2(22,5°) + \cos^2(22,5°) = 1 \Rightarrow \cos(22,5°) = \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})^2} \Rightarrow$$

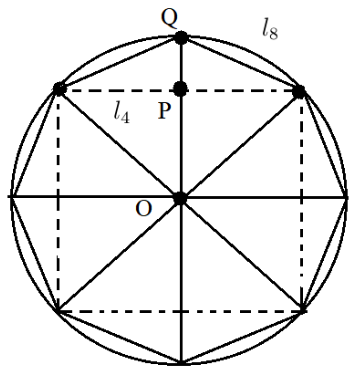
$$\cos(22,5°) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

E, por último, usando o Teorema 3.14, teremos

$$\text{tg}(22,5°) = \frac{\text{sen}(22,5°)}{\cos(22,5°)} \Rightarrow \text{tg}(22,5°) = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} \Rightarrow \text{tg}(22,5°) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

□

Figura 3.30: Polígono de 8 lados inscrito na circunferência



Fonte: Arquivo pessoal

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo, abordaremos algumas aplicações envolvendo os assuntos estudados até o momento. Destacamos ao leitor que o objetivo aqui é apresentar cada tópico de forma breve. Para um aprofundamento com relação a cada seção deste capítulo, indicamos as seguintes fontes [7, 9, 10, 11, 12, 13].

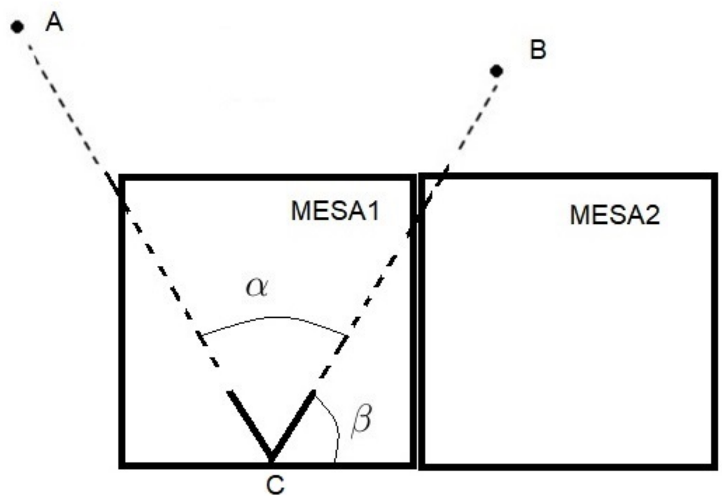
4.1 Distâncias Inacessíveis

Como já foi visto no Capítulo 2 deste trabalho, a Trigonometria foi usada para resolver problemas de medidas desde civilizações antigas até a atualidade. Evidentemente, ela tem se desenvolvido e também contribuído para o desenvolvimento de tecnologias que possam medir distâncias astronômicas. Mas, para esta seção, estamos interessados em falar sobre medições de distâncias inacessíveis ainda na Terra, as quais não conseguimos realizar o cálculo simplesmente por meio de instrumentos usuais como, por exemplo, a trena, a fita métrica, entre outros. Veremos a seguir duas aplicações envolvendo distâncias inacessíceis. Vale destacar ao leitor que, para a primeira aplicação, é nescessário conhecimento sobre a lei dos senos e a leis dos cossenos, que podem ser encontradas em [7], nas páginas 155, 158 e 159.

Aplicação 1. Você está à beira-mar e avista dois navios parados e totalmente inacessíveis. Seu desejo é calcular a distância entre eles usando apenas o material que está ao seu alcance, que são: duas mesas quadradas, uma régua, dois palitos de churrasco, um tranferidor e uma calculadora científica. Como você faria isso?

Resolução: Uma boa estratégia para resolver este problema é a seguinte: Consideraremos A um ponto que representa um dos navios e B, o outro. Colocaremos duas mesas quadradas, uma do lado da outra, encostando-as. Com a régua, encontraremos o centro da aresta inferior de cada mesa e chamaremos de $\overline{CD}$ a distância entre eles. Em seguida, pegaremos um palito de churrasco e colocaremos sobre este centro da primeira mesa. Agachado, apontaremos o palito para o primeiro navio, digamos o navio A. Ainda agachado, vamos colocar outro palito com o mesmo início do primeiro, porém apontando agora para o navio B. Ilustraremos o que fizemos até agora com a Figura 4.1.

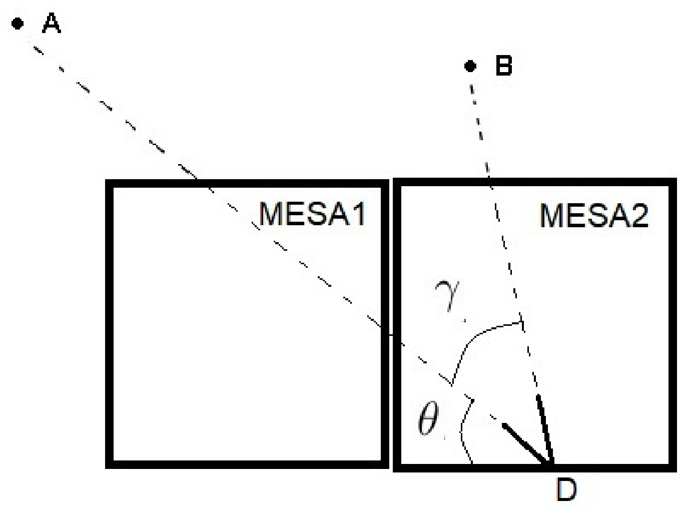
Figura 4.1: Palitos sobre a mesa 1, apontando para os navios



Fonte: Arquivo pessoal.

Usando o transferidor, iremos medir os ângulos α e β como mostra a Figura 4.1. Em seguida, faremos os mesmos passos, mas agora com a segunda mesa, e mediremos novamente os ângulos θ e γ, como mostrados na Figura 4.2.

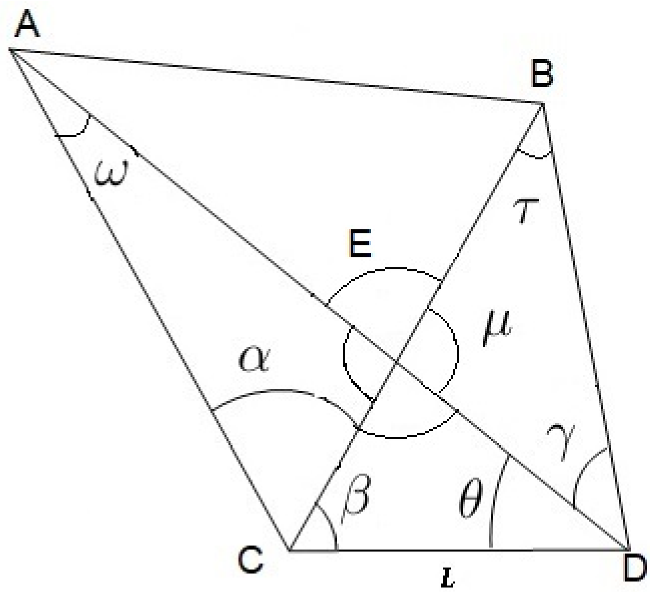
Figura 4.2: Palitos sobre a mesa 2, apontando para os navios



Fonte: Arquivo pessoal.

A Figura 4.3 a seguir mostra como ficaria o desenho final do nosso método.

Figura 4.3: Desenho final



Fonte: Arquivo pessoal.

Nosso objetivo é calcular o valor de $\overline{AB}$. Para isto, primeiro, vamos observar que o ângulo $C\widehat{E}D = 180° - (\beta + \theta)$. Então, usando a lei dos senos, encontraremos

$$\frac{\overline{ED}}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{L}{\operatorname{sen}(180° - (\beta+\theta))} \Rightarrow \overline{ED} = \frac{L \cdot \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(180° - (\beta+\theta))}.$$

e também

$$\frac{\overline{CE}}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{L}{\operatorname{sen}(180° - (\beta+\theta))} \Rightarrow \overline{CE} = \frac{L \cdot \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(180° - (\beta+\theta))}.$$

Isso mostra que conhecemos os valores de $\overline{ED}$ e $\overline{CE}$. Agora, note que

$$2 \cdot (180° - (\alpha + \theta)) + 2 \cdot \mu = 360° \Rightarrow \mu = \alpha + \theta.$$

Também podemos observar que $\omega = 180° - 2\alpha - \theta$ e que $\tau = 180° - (\alpha + \theta + \gamma)$. Ou seja, conhecemos os valores de ω e τ. Assim, determinamos pela lei dos senos o comprimento de $\overline{AE}$ fazendo

$$\frac{\overline{AE}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\overline{CE}}{\operatorname{sen}\omega}.$$

Para determinar o comprimento de $\overline{BD}$, fazemos de maneira análoga, tal como

$$\frac{\overline{BD}}{\operatorname{sen}\mu} = \frac{\overline{ED}}{\operatorname{sen}\tau}.$$

Conhecemos também $\overline{AD}$ pela fórmula

$$\overline{AD} = \overline{AE} + \overline{ED}.$$

Por último, usando a lei dos cossenos como segue

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AD} \cdot \overline{BC} \cdot \operatorname{sen} \gamma,$$

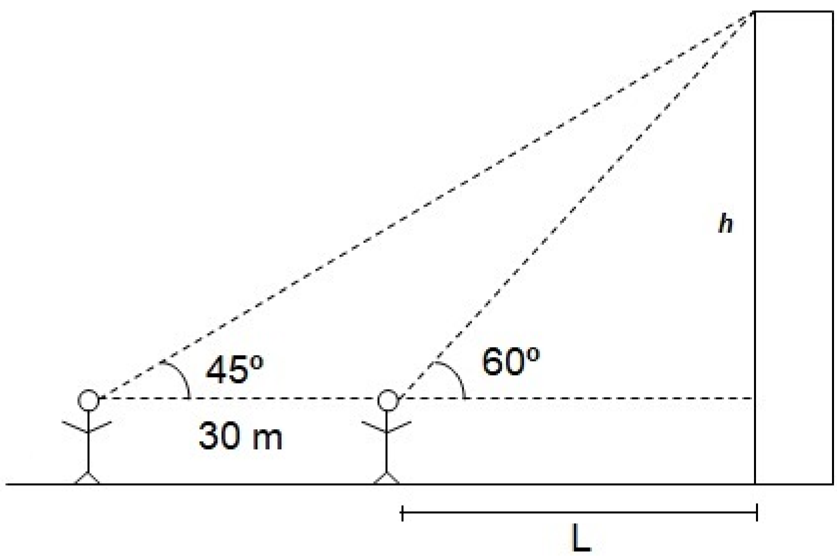
obtemos o valor que desejávamos. Veja que, ao medirmos os ângulos $\alpha, \beta, \theta,$ e γ e calcularmos a expressão acima, encontraremos a distância entre os dois navios. □

O resultado a ser encontrado na aplicação anterior é só uma aproximação do valor verdadeiro. Na próxima aplicação, faremos algo parecido com o que fizemos anteriormente. Vamos adiante!

Aplicação 2. Estamos em frente a um prédio enorme e desejamos calcular sua altura. Como procedemos?

Resolução: Considere que a altura dos olhos até o chão seja de 1,7 metro. Ficaremos à frente do edifício, a uma distância considerada, e com o transferidor na direção dos olhos, mediremos o ângulo formado entre a linha imaginária frontal dos nossos olhos e o topo do edifício. Vamos supor que este ângulo seja $45°$. Agora, andaremos 30 metros em linha reta na direção do prédio e mediremos o novo ângulo. Vamos supor que este seja $60°$. A figura que obtivemos é a Figura 4.4 a seguir.

Figura 4.4: Prédio



Fonte: Arquivo pessoal.

Para calcularmos a altura h, fazemos primeiramente

$$\operatorname{tg}(45°) = \frac{h}{30 + L} \Rightarrow 1 = \frac{h}{30 + L} \Rightarrow h = 30 + L.$$

Observando o outro triângulo retângulo na figura acima, temos

$$\text{tg}(60°) = \frac{h}{L} \Rightarrow L = \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

Agora, é só substituirmos L na expressão antenrior e teremos

$$h = 30 + L \Rightarrow h = 30 + \frac{h}{\sqrt{3}} \Rightarrow h - \frac{h}{\sqrt{3}} = 30 \Rightarrow h = \frac{30 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \Rightarrow h = 45 + 15\sqrt{3}$$

Considerando a altura de 1,7 metro, temos que o prédio teria uma altura aproximada de

$$h = 45 + 15\sqrt{3} + 1,7 \Rightarrow h \approx 72,7.$$

□

4.2 Movimento Harmônico Simples

O Movimento Harmônico Simples, conhecido como MHS, é um tipo básico de oscilação, que geralmente é estudado pela Física e Engenharia. Vamos abordar o referido assunto, com objetivo de mostrar aplicações de funções circulares contidas no mesmo. Entretanto, antes de chegarmos nas aplicações, precisamos definir alguns termos e entender alguns conceitos essenciais para esta seção. Para entender melhor o assunto que se segue, recomendamos que o leitor tenha conhecimentos prévios sobre derivadas.

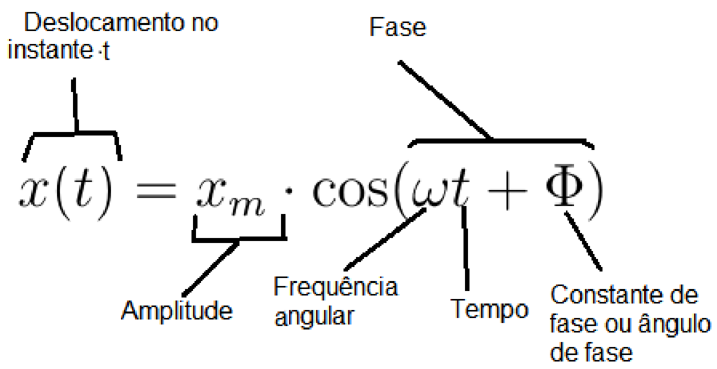
Definição 4.1. *Todo movimento que se repete a intervalos regulares é chamado de movimento periódico ou movimento harmônico.*

Definição 4.2. *No movimento oscilatório, a frequência é o número de oscilações por segundo. Usamos o símbolo f para nos referirmos a ela, e sua unidade de medida no SI é o Hertz (Hz), que é definido da seguinte forma:* $1\ Hertz = 1\ Hz = 1$ *oscilação por segundo* $= 1\ s^{-1}$. *O período T é o tempo que o movimento leva para completar uma oscilação e está relacionado com a frequência da seguinte maneira*

$$T = \frac{1}{f}.$$

Mas para esta seção, estamos interessados em um movimento particular, no qual chamamos de movimento hamônico simples (ou MHS). No MHS, o deslocamento x da partícula em relação à origem é dado por uma função do tempo como mostra a Figura 4.5.

Figura 4.5: Função que descreve o MHS



Fonte: Arquivo pessoal

Definição 4.3. *A grandeza x_m, denominada amplitude do movimento, é uma constante cujo valor depende do modo como o movimento foi produzido. O índice m indica o valor máximo, já que a amplitude representa o deslocamento máximo da partícula em um dos sentidos.*

Definição 4.4. *A grandeza $(\omega \cdot t + \phi)$ é chamada de fase do movimento, onde ϕ é a constante de fase, ou ângulo de fase. t é o tempo e ω é a frequência angular, que também é uma constante e tem a seguinte relação com o período T e com a frequência f:*

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Definição 4.5. *A velocidade do MHS é encontrada derivando $x(t)$. Temos que*

$$\begin{aligned} v_t = \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}[x_m cos\,(\omega t + \phi)] \\ &= -x_m \cdot \omega \cdot sen(\omega \cdot t + \phi). \end{aligned}$$

Definição 4.6. *Depois de conhecida a velocidade, a aceleração do MHS é encontrada derivando $v(t)$. Assim,*

$$\begin{aligned} a_t = \frac{dv_t}{dt} &= \frac{d}{dt}[-x_m \cdot \omega \cdot sen(\omega \cdot t + \phi)] \\ &= -x_m \cdot \omega^2 \cdot cos\,(\omega \cdot t + \phi). \end{aligned}$$

Agora que entendemos um pouco mais sobre MHS, vamos fazer algumas aplicações. Lembrando que o objetivo aqui é focar na utilização de funções circulares durante a resolução dos problemas.

Aplicação 3. Uma pessoa está sentada numa prancha de surfe, que sobe e desce ao flutuar sobre as ondas do mar. O deslocamento vertical da prancha y é dado por

$$y = (1,4m) \cdot \cos\,(\frac{1}{2,0s} \cdot t + \frac{\pi}{4}).$$

Queremos determinar a amplitude, a frequência angular, o ângulo de fase, a frequência e o período do movimento. Em seguida, queremos saber onde estará a prancha em $t = 1,0s$. E, por último, queremos determinar a velocidade e aceleração da prancha como funções do tempo t.

Resolução: A amplitude é, por definição,

$$x_m = 1,4m.$$

A frequência angular é

$$\omega = 0,5rad/s.$$

O ângulo de fase é

$$\phi = \frac{\pi}{4}.$$

A frequência é tal que

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f \approx 0,079Hz.$$

O período é

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = \frac{1}{0,079} \Rightarrow T \approx 12,6s.$$

Quando $t = 1,0s$, a prancha estará em

$$y = (1,4m).\cos\left(\frac{1}{2s}rad/s + \frac{\pi}{4}\right)rad \Rightarrow y = (1,4m).\cos\left(\frac{2+\pi}{4}\right) \Rightarrow y \approx 0,39m.$$

Vamos calcular a velocidade da prancha. Para isto, vamos encontrar a derivada de y. Temos que

$$\begin{aligned} v_t = \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}[x_m \cdot \cos(\omega t + \phi)] \\ &= -x_m \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi) \\ &= -(0,7m/s) \cdot \text{sen}[(0,5rad/s) \cdot t + \frac{\pi}{4}]. \end{aligned}$$

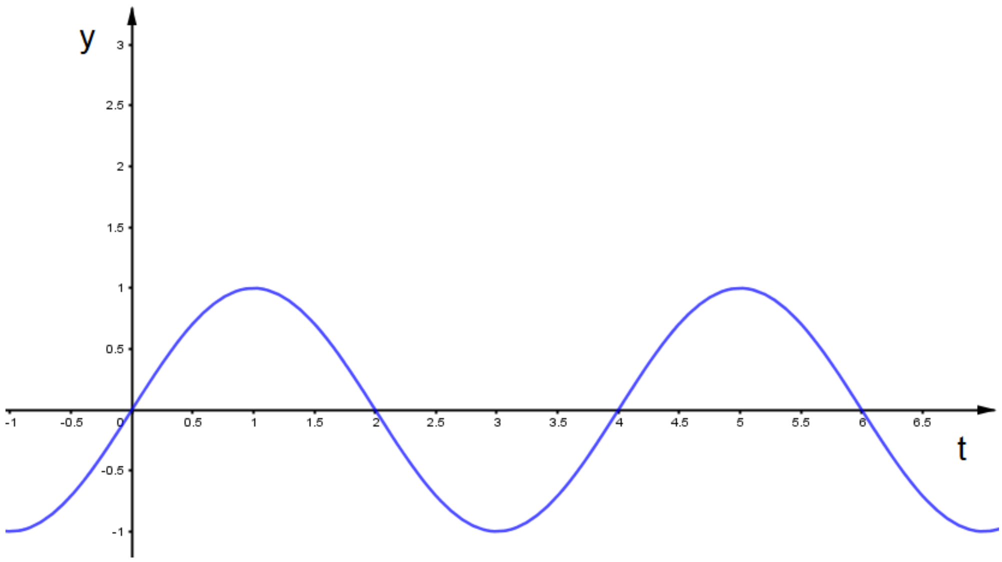
Para encontrar a aceleração, vamos calcular a derivada de v_t. Então,

$$\begin{aligned} a_t = \frac{dv_t}{dt} &= \frac{d}{dt}[-x_m \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi)] \\ &= -x_m \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) \\ &= -(0,35m/s^2) \cdot \cos[0,5rad/s + \frac{\pi}{4}]. \end{aligned}$$

□

Aplicação 4. Suponha que o gráfico 4.6 abaixo descreva o movimento de uma partícula no MHS. Queremos encontrar a função $x(t)$ do movimento realizado pela partícula.

Figura 4.6: gráfico de $x(t)$



Fonte: Arquivo pessoal

Resolução: Já vimos que a função $x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$ descreve o deslocamento do MHS. A amplitude x_m pode ser encontrada observando no gráfico o tamanho máximo de deslocamento da função Neste caso, temos

$$x_m = 1u.m.$$

O período T pode ser encontrado observando no gráfico o tempo que leva para a função começar a se repetir. Temos que

$$T = 4s.$$

A frequência angular ω pode ser encontrada através da sua relação com o período T que é a seguinte:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{4} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2}.$$

Para encontrarmos o ângulo de fase, precisamos observar o gráfico no instante $t = 0$. Feito isto, percebemos que, para o cosseno do ângulo de fase ser igual a zero, é necessário que ϕ seja $\frac{3\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$. Como, a partir do instante zero, o gráfico da função cresce, obtemos

$$\phi = \frac{3\pi}{2}.$$

Logo, a função procurada é

$$x(t) = (1,0u.m) \cdot \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}rad\right) \cdot t + \frac{3\pi}{2}\right].$$

□

4.3 Música

Nesta seção, vamos estudar as aplicações que as funções circulares têm na música. Para isto, usaremos o Geogebra para nos auxiliar. Descobriremos mais uma excelente utilidade deste software. Vamos adiante!

Primeiramente, precisamos entender alguns conceitos da física sobre o que compreendemos como sons.

Definição 4.7. *(Som) O som é uma onda mecânica, longitudinal, e sua forma de propagação é por meios materiais. Só é possível perceber o som se existir um meio material entre o corpo que vibra e os nossos ouvidos. Assim, o som é gerado pela vibração de um corpo que exerce pressão em algum meio e propaga-se por esse meio em forma de ondas. A energia de uma onda sonora é a medida da quantidade de som nela presente.*

Definição 4.8. *(Intensidade) É a propriedade que o som tem de ser mais forte ou mais fraco (a Intensidade consiste no grau de força com que se apresenta o som e depende da amplitude das ondas geradas pelas vibrações).*

Definição 4.9. *(Altura) Consiste na maior ou menor elevação do som e depende do maior ou menor número de vibrações executadas num tempo dado; é a propriedade que o som tem de ser mais grave ou mais agudo.*

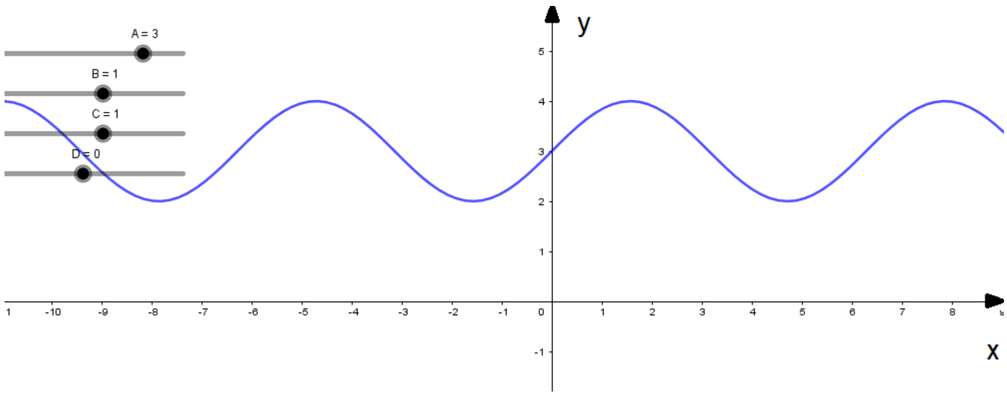
Definição 4.10. *(Timbre) É a qualidade, a personalidade e a "cor" do som, pois permite reconhecer sua origem. Quando ouvimos um mesmo som produzido por vozes ou instrumentos diferentes, é por meio do timbre que reconhecemos esta ou aquela voz ou ainda qual o instrumento que o produziu.*

Na aplicação a seguir, iremos buscar entender um pouco mais sobre o comportamento da função seno.

Aplicação 5. Seja a função circular $f(x) = A + B\text{sen}(Cx + D)$, em que $A, B, C,$ e D são constantes. Utilizaremos o Geogebra para estudarmos o comportamento do gráfico de f de acordo com a variação dos valores das constantes citadas.

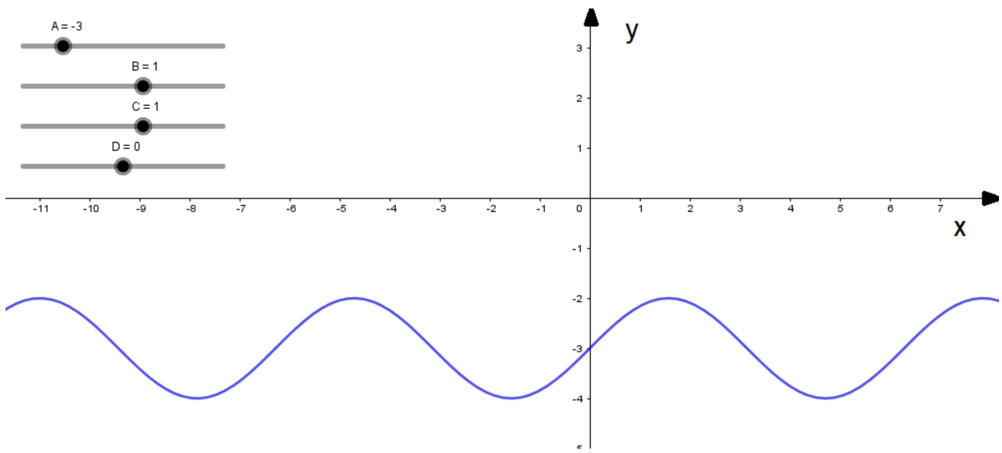
Resolução: Primeiramente, podemos observar que, caso as constantes sejam $A = D = 0$ e $B = C = 1$, teremos exatamente a senóide vista na Figura 3.7. Se, porém, $A > 0$, $D = 0$ e $B = C = 1$, o gráfico da função se desloca para cima do eixo x, como na Figura 4.7. Agora, se $A < 0$, o deslocamento acontece para baixo do eixo x, como na Figura 4.8.

Figura 4.7: $A > 0$, $D = 0$ e $B = C = 1$



Fonte: Arquivo pessoal.

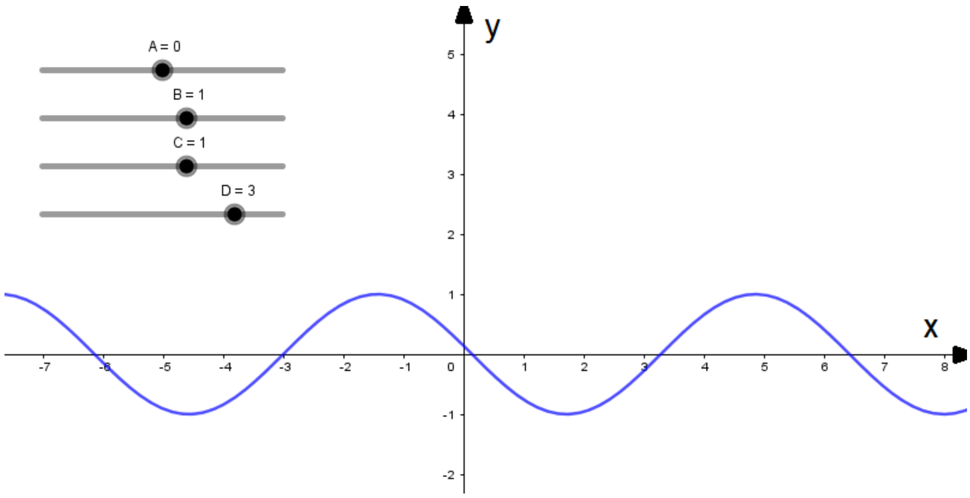
Figura 4.8: $A < 0$, $D = 0$ e $B = C = 1$



Fonte: Arquivo pessoal.

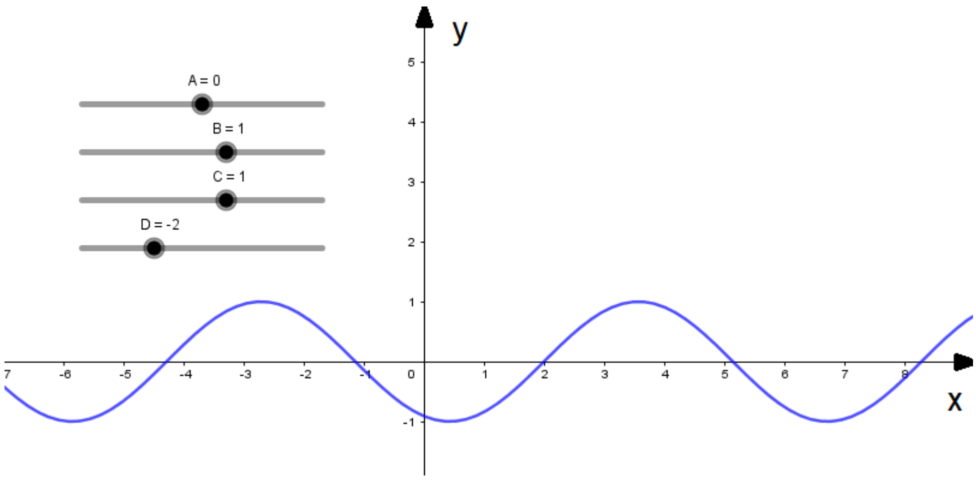
Se, todavia, $A = 0$, $D > 0$ e $B = C = 1$, o gráfico da função se desloca para a esquerda do eixo x (Figura 4.9). Mas, se $D < 0$, o deslocamento acontece para a direita do eixo x (Figura 4.10).

Figura 4.9: $A = 0$, $D > 0$ e $B = C = 1$



Fonte: Arquivo pessoal.

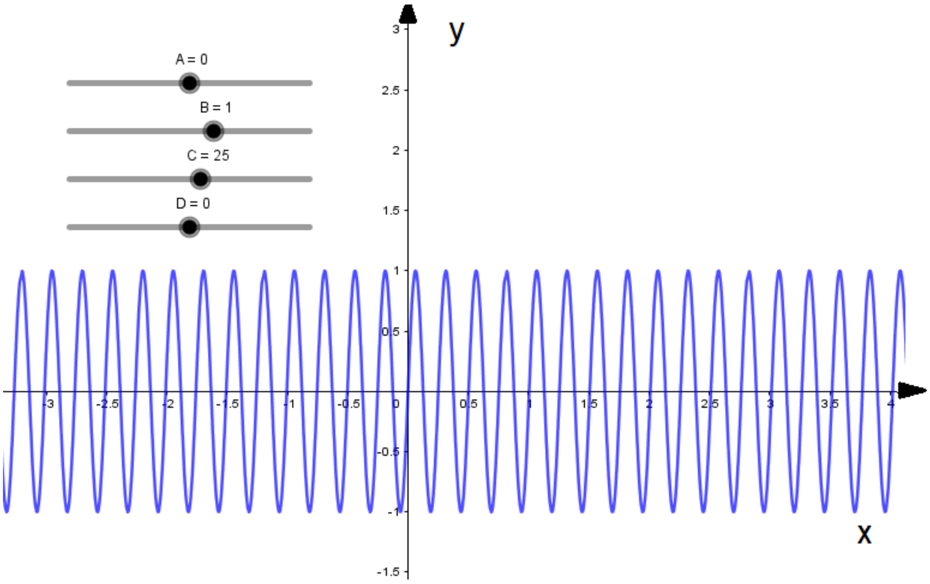
Figura 4.10: $A = 0$, $D < 0$ e $B = C = 1$



Fonte: Arquivo pessoal.

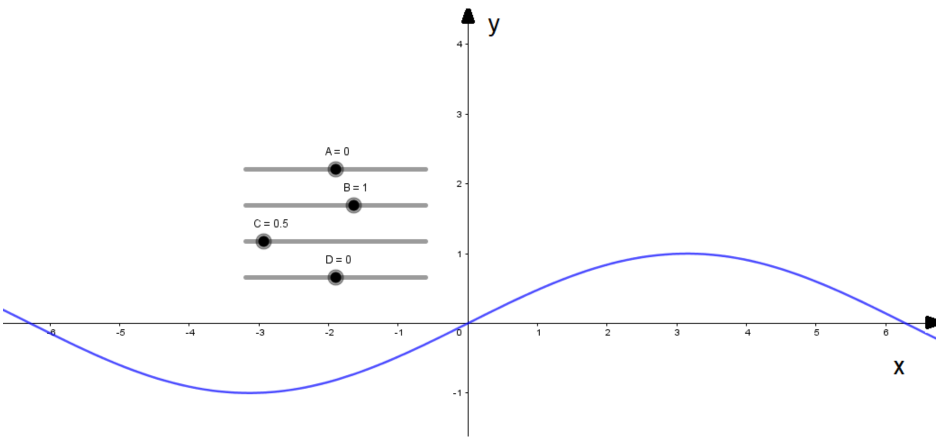
Se $A = D = 0$, $C < -1$ ou $C > 1$ e $B = 1$, o gráfico da função tem seu período comprimido (Figura 4.11). Porém, se $-1 < C < 1$ e $C \neq 0$, o seu gráfico tem o período dilatado (Figura 4.12).

Figura 4.11: $A = D = 0$, $C < -1$ ou $C > 1$ e $B = 1$



Fonte: Arquivo pessoal.

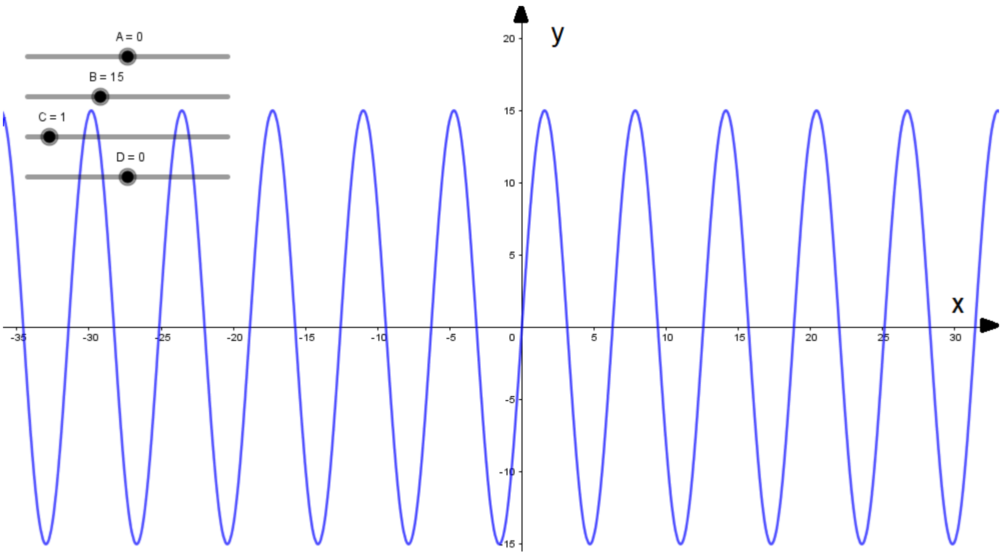
Figura 4.12: $A = D = 0$, $-1 < C < 1$, $C \neq 0$ e $B = 1$



Fonte: Arquivo pessoal.

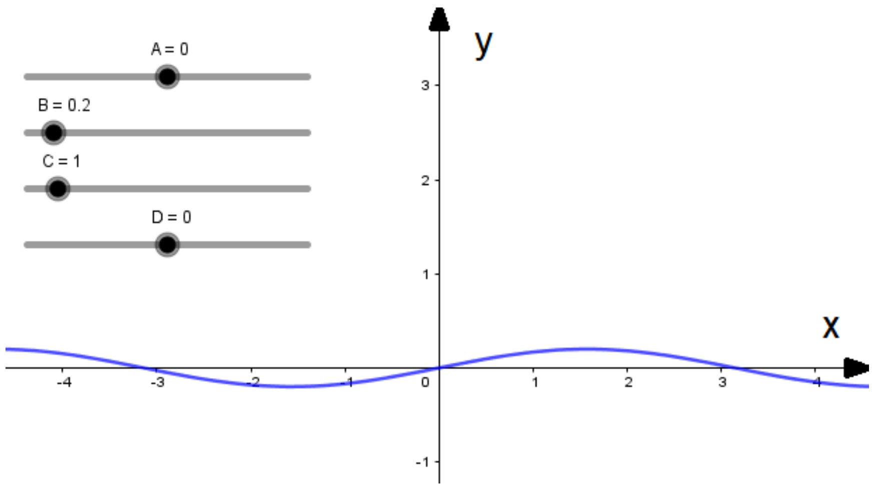
Se, por fim, $A = D = 0$, $B > 1$ ou $B < -1$ e $C = 1$, o gráfico da função tem sua amplitude aumentada (Figura 4.13). Agora, se $-1 < B < 1$ e $B \neq 0$, o seu gráfico tem a amplitude diminuída (Figura 4.14).

Figura 4.13: $A = D = 0$, $B > 1$ ou $B < -1$ e $C = 1$



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 4.14: $A = D = 0$, $-1 < B < 1$ e $B \neq 0$ e $C = 1$



Fonte: Arquivo pessoal.

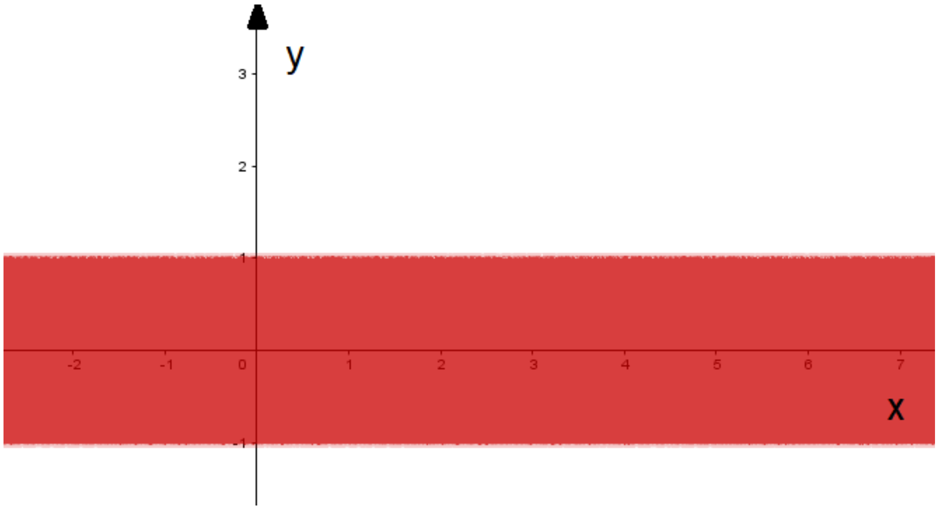
□

Agora que sabemos um pouco mais sobre os sons e sobre o comportamento da curva seno, vamos usar o Geogebra em aplicações envolvendo sons musicais. Os sons harmoniosos podem ser descritos como uma função circular, ou seja, podemos gerar sons através de funções circulares. Nas aplicações que se seguem, vamos trabalhar isto. Mas, antes de continuarmos, gostaríamos de informar ao leitor que, para um aprofundamento maior, vale a pena ler [12] a partir da página 43.

Aplicação 6. Seja a função $f(x) = \text{sen}(440 \cdot 2\pi x)$. Queremos plotar seu gráfico e, em seguida, mostrar o passo a passo de como emitir o som gerado por f.

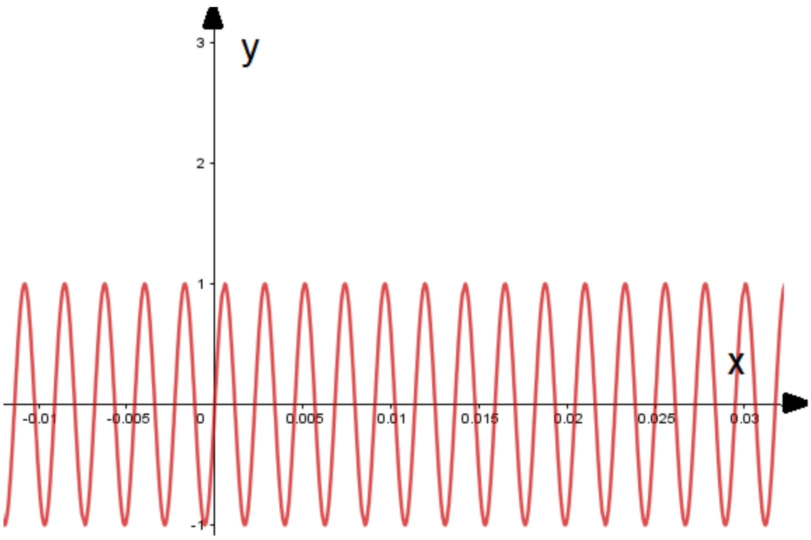
Resolução: É interessante observar que o gráfico da função acima tem períodos comprimidos que, ao ser plotado, só conseguimos enxergá-lo da forma como mostra a Figura 4.15. Entretanto, mudando a escala do eixo x, conseguimos notar o comportamento do gráfico perfeitamente, como mostra a Figura 4.16.

Figura 4.15: Gráfico de $f(x) = \text{sen}(440 \cdot 2\pi x)$



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 4.16: Gráfico de $f(x) = \text{sen}(440 \cdot 2\pi x)$ em escala menor



Fonte: Arquivo pessoal.

Para ouvir o som gerado pela função, executaremos o comando TocarSom($f(x)$, tempo inicial, tempo final), ou seja, ficará TocarSom($\textsf{sen}\,(440 * 2 * pi * x), 0, 3)$. Observe que 2π representa uma volta completa no ciclo trigonométrico, exprimida em radianos. Então, o valor 440 é a frequência medida em Hz que nos dá a altura do som e, neste caso, a intensidade é a amplitude, que é 1. □

Aplicação 7. Queremos mostrar os passos de como emitir o som dos principais tons musicais, a saber, Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si.

Resolução: Da mesma forma como fizemos anteriormente, usaremos o comando TocarSom($f(x)$, tempo inicial, tempo final), no Geogebra. Assím, para emitir cada tom, executaremos os seguintes comandos:
Dó, TocarSom($\textsf{sen}\,(261.6 * 2 * pi * x), 0, 1)$
Ré, TocarSom($\textsf{sen}\,(293.5 * 2 * pi * x), 0, 1.122)$
Mi, TocarSom($\textsf{sen}\,(329.6 * 2 * pi * x), 0, 1.260)$
Fá, TocarSom($\textsf{sen}\,(349.2 * 2 * pi * x), 0, 1.335)$
Sol, TocarSom($\textsf{sen}\,(392 * 2 * pi * x), 0, 1.498)$
Lá, TocarSom($\textsf{sen}\,(440 * 2 * pi * x), 0, 1.682)$
Si, TocarSom($\textsf{sen}\,(493.8 * 2 * pi * x), 0, 1.888)$
□

Para se aprofundar mais em relação a proposta da próxima aplicação, recomendamos ao leitor que veja [13], a partir da página 113.

Aplicação 8. Queremos mostrar os passos de como emitir o som do acorde Dó.

Resolução: O acorde Dó pode ser emitido fazendo uma soma dos tons Dó, Mi e Sol. Para isto, executa-se no Geogebra o comando TocarSom($\textsf{sen}\,(261.6 * 2 * pi * x) + \textsf{sen}\,(329.6 * 2 * pi * x) + \textsf{sen}\,(392 * 2 * pi * x), 0, 5)$ que constitui a soma das funções que representam estes tons separadamente. □

Capítulo 5

Considerações Finais

O desenvolvimento deste trabalho nos permitiu ter uma visão diferenciada a respeito das funções circulares, bem como da Trigonometria em geral. Vimos excelentes contextos para serem usados pelo professor na hora de ensinar o referido conteúdo em sala de aula. Então, podemos pensar que esta disciplina é uma das mais interessantes para se ensinar, justamente pela grande possibilidade que ela nos dá de tornar a Matemática mais próxima da realidade do aluno. Vimos também que em diversas civilizações antigas, já se utilizavam conceitos da Trigonometria para resolver problemas, o que torna ainda mais relevante estudarmos esta matéria tendo as suas aplicações como ponto central.

Este trabalho também nos proporcionou estudar mais a fundo os conceitos de Funções Circulares, os teoremas das relações fundamentais e seus corolários, e o Teorema 3.28 que nos garante que $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n} = l_n$, em que l_n é o número de lados de um polígono regular inscrito em um círculo trigonométrico e n pertence ao conjunto dos números naturais.

Referências

[1] EVES, Howard **Introdução à História da Matemática** 5. ed. Traduçãço de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicam. 2011.

[2] BOYER. Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. ed. São Paulo, SP: Edgardo Bulcher. 1974.

[3] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Trigonometria Números Complexos** ; Editora DRQ, 2005.

[4] COSTA, Nielce M.L. **A História da Trigonometria**. PUC-SP.

[5] **PROBLEMA HISTÓRICO**. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/problema_ hist.html>. Acesso em: 02 set. 2017.

[6] SOUZA, Juliana Malta de. **Funções Trigonométricas e suas aplicações no cálculo de distâncias inacessíveis**. 2017. 121f. Dissertação(Programa de Mestrado Profissional em Matemática)-Instituo de Ciencias Matemáticas e de Computação-ICMC-USP. São Carlos. 2017.

[7] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Trigonometria. Vol. 3. 2. ed. São Paulo: Atual Ed. 1977-78.

[8] ABRANTES, Wagner Gomes Barroso. **A função periódica para o ensino médio**. 2015. 79f. Dissertação(Mestrado em Matemática)-Universidade Federal do Amazonas. Manaus. 2015.

[9] HALLIDAY, D; RESNICK, R; WALKER, J. **Fudamento de Física:** gravitação, ondas e termodinâmica. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC. 2009.

[10] TIPLIER, P. A; MOSCA, G. **Física Para Ciêntistas e Engenheiros:** mecânica, oscilações e ondas, termodinâmica. 6. ed. tradução de Paulo Machado Mors. Rio Grande do Sul: LTC. 2009.

[11] DEPIZOLI, Marcos Antonio. **Matemática e música e o ensino de funções trigonométricas**. 2015. 87f. Dissertação(Mestrado em Matemática)-PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba. 2015.

[12] ALMEIDA, Mário Sérgio de. **A Matematica de Alguns Experimentos Sonoros**. 2015. 87f. Dissertação(Mestrado Profissional em Matematica em Rede Nacional)-PROFMAT da Universidade Federal da Bahia. Salvador. 2014.

[13] PRADO, Flávio Brito. **Ensino de Gráficos de Funções Trigonométricas e Uma Aplicação Em Música**. 2013. 120f. Dissertação(Mestrado Profissional-IMPA e SBM)-PROFMAT. Rio de Janeiro. 2013.

[14] UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS. **Manual para Elaboração e Normalização de Trabalhos de Conclusão de Curso do Câmpus de Araguaína**. Araguaína: UFT, 2014.