

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ROSALINA NETA VIANA DA SILVA

APROXIMAÇÕES DE FUNÇÕES VIA POLINÔMIOS: MÉTODO DE LAGRANGE

ARAGUAÍNA

2018

ROSALINA NETA VIANA DA SILVA

APROXIMAÇÕES DE FUNÇÕES VIA POLINÔMIOS: MÉTODO DE LAGRANGE

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior.

ARAGUAÍNA

2018

ROSALINA NETA VIANA DA SILVA

APROXIMAÇÕES DE FUNÇÕES VIA POLINÔMIOS: MÉTODO DE LAGRANGE

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior .

Aprovada em: / / .

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior (orientador)

Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco

Prof. Msc. Roblêdo Mak's Miranda Sette

Aos meus tios Roberval Viana e Giselia Ribeiro
(*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

A construção deste trabalho foi o momento mais esperado da minha graduação, entretanto foi também um período bastante difícil em minha vida pessoal. Passei por experiências complicadas que culminaram numa série de doenças, mas, enfim, estou aqui e quero agradecer profundamente a cada pessoa que encontrei nesta fase.

Meus colegas de período João Marcos, Daniel Alves, Luan Alves, Maria Karaja, Eduardo Dias, meu irmão Alberth Felipe e as demais nobres almas que me fizeram uma pessoa melhor. Saio desta universidade, além de uma profissional, um ser humano melhor. Ao meu amigo Marcos Rodrigues, que esteve comigo em dias bem tumultuosos.

Aos meus mestres Sinval de Oliveira, Odair, Renata Alves, Samara Leandro, André, Raimundo, Roblêdo, Alvaro e todos os outros. Em especial, meu orientador José Carlos por aceitar construir este trabalho e ter sido tão compreensivo nas inúmeras ausências.

Quero deixar bem claro que tudo é mérito da mulher mais corajosa, de alma mais pura que conheço, minha mãe. O amor da minha vida, a razão pela qual eu levanto todo dia, querendo ser alguém melhor. Essa mulher é o ser humano mais lindo que esse mundo já viu, e eu agradeço todos os dias pela honra de ser filha de Maria do P. Socorro Viana.

A Deus, apesar de ter levado aqueles que amei, trouxe as almas mais corajosas, entusiasmadas, bondosas, puras e inspiradoras para junto e ajudaram-me tanto que algumas delas nem sabem da importância que tiveram.

Imensamente grata por todos os encontros de espíritos que tive. A vocês, meu muito obrigada!

Amo a matemática justamente por aquilo que ela é temida.

Rosalina Viana

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal o estudo sobre o método de Lagrange para as interpolações polinomiais. Para compreender este método, será necessária uma discussão sobre conceitos da análise acerca de funções contínuas, uniformemente contínuas e diferenciáveis e acerca do que seriam funções próximas. Traremos o Teorema de aproximação de Weierstrass como um motivador para introduzirmos o principal método deste trabalho, o da interpolação de Lagrange. O Teorema de Taylor, também sobre aproximações de funções, será apresentado neste trabalho e comparado com o método de Lagrange.

Palavras-chave: Interpolação. Teorema de aproximação Weierstrass. método de Lagrange.

ABSTRACT

This work has as main objective the study on the Lagrange method for the polynomial interpolations. To understand this method, it will be necessary to discuss concepts of analysis about continuous, uniformly continuous and differentiable functions, and about what would be near functions. We will introduce the Weierstrass approximation theorem as a motive for introducing the special method of this work, and the Lagrange interpolation. The Taylor Theorem, also on approximations of functions, will be presented in this work and compared with the Lagrange method

Keywords: Interpolation. Weierstrass's approximation theorem. Lagrange method.

Lista de Figuras

2.1	Reta secante ao gráfico de f	14
2.2	Reta tangente ao gráfico de f no ponto x	14
2.3	Gráfico do polinômio de Taylor de grau um de $f(x) = \sqrt{x}$	22
2.4	Gráfico do polinômio de Taylor de grau dois de $f(x) = e^x$	23
3.1	Gráfico de P que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$	29
3.2	Gráfico do polinômio que passa pelos $n + 1$ pontos	30
3.3	Ilustração do reservatório	43
3.4	Aproximação de grau dois da função g	46

Sumário

1	Introdução	7
2	Conceitos Fundamentais	9
2.1	Funções Contínuas e Uniformemente Contínuas	9
2.2	Funções Diferenciáveis	13
2.3	Polinômio de Bernstein	15
2.4	Polinômio de Taylor	21
3	Interpolação Polinomial: Método de Lagrange	27
3.1	Um pouco de História	28
3.2	Polinômios de Lagrange	28
3.3	Aplicações	40
4	Considerações Finais	48
	Referências	50

Capítulo 1

Introdução

Dissertar sobre interpolações é, em outras palavras, falar a respeito de aproximações de funções. Entre os séculos XV e XVI, a humanidade vivenciava a exploração de novos mundos com o período das grandes navegações. Com isto, a necessidade premente de cálculos cada vez mais precisos e rápidos surgia. A mobilização para a construção de modelos matemáticos que atendessem estas necessidades era intensa, contudo os dados conhecidos naquela época eram limitados e, desta forma, as aproximações de resultados por meio de funções ganhavam grande destaque.

Como a maioria dos problemas matemáticos que surgiam no decorrer das expedições marítimas eram desconhecidos, os estudiosos foram realizando aproximações com os resultados de funções já conhecidas. Estas aproximações eram realizadas a partir de métodos, e este trabalho tem como objetivo apresentar um deles, conhecido como método de interpolação polinomial sob a perspectiva do matemático Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

As interpolações polinomiais permeiam entre a matemática pura e aplicada, tendo destaque nesta última. Ajudaram tanto nas expansões marítimas (com uma precisão incrível quando se diz respeito à localização, por exemplo) quanto na corrida espacial do século *XX*, por exemplo, ao fornecer cálculos da área de aterrissagem das sondas americanas.

O método de interpolação nos permite contruir um novo conjunto de dados com o conjunto discreto de dados previamente conhecidos. Através das interpolações, construímos funções que se “encaixam” nesses dados, realizando um certo tipo de continuidade nos dados, antes discretos.

Além da aplicação nas engenharias, as interpolações são comumente aplicadas para aproximar funções com um grau de complexidade maior por funções mais simples. Basta escolher alguns dados pontuais da função complicada e interpolá-los com funções mais simples. Em geral, a classe escolhida é a dos polinômios em virtude do fácil manuseio matemático (integração, derivação, etc). Aplicamos também as interpolações quando possuímos os valores numéricos de uma função para um conjunto de pontos e precisamos calcular o valor da função em um ponto não tabelado, diferente dos primeiros. Neste trabalho, são apresentadas as duas formas. Com

o método de Lagrange, convertemos funções complicadas em polinômios e, posteriormente, calculamos o valor em um ponto desejado com uma boa aproximação.

O primeiro capítulo apresenta conceitos necessários para o desenvolvimento dos teoremas essenciais do trabalho. Buscamos apresentar todos os conceitos desta primeira parte sobre a perspectiva da análise. Trouxemos as definições de funções contínuas, uniformemente contínuas e diferenciáveis. Os polinômios de Bernstein também ganham destaque neste capítulo, pois é parte fundamental para a demonstração do principal teorema do capítulo, a saber, o Teorema de Weierstrass. E, por fim, o Teorema de Taylor o qual vêm com a finalidade comparativa ao Teorema de Lagrange. Apesar dos dois teoremas serem semelhantes, apresentaremos a diferença entre eles.

No segundo capítulo, expomos um pouco de quem foi Joseph-Louis Lagrange e suas principais contribuições para a matemática. Posteriormente, enunciamos e demonstramos o principal teorema deste trabalho, o Teorema de Lagrange, com duas abordagens demonstrativas: uma pela vertente da análise e a outra com um olhar da álgebra. Em seguida, o estudo do erro de truncamento é feito. Nesta parte do trabalho, ressaltamos que os cálculos precisam de muita concentração, sobretudo em arredondamentos.

O estudo do erro é onde a mágica acontece. Além de muito interessante de se estudar, o leitor também verá na seção de “Aplicações”, mais precisamente, nas aplicações em integrais, o quão boa é a interpolação pelo método de Lagrange.

Preocupamo-nos bastante em deixar o trabalho bem ilustrativo, convidativo a continuar a leitura com as plotações gráficas das interpolações realizadas. A linguagem utilizada também foi pensada a facilitar a compreensão dos expectadores.

Capítulo 2

Conceitos Fundamentais

A princípio, vamos enunciar conceitos da análise a respeito de funções contínuas, funções uniformemente contínuas, funções limitadas e diferenciáveis, bem como os Teoremas de Weierstrass e de Taylor, que tratam de aproximações de funções.

Apesar de fazermos um estudo sobre continuidade e diferenciabilidade, não daremos tanta ênfase a estes assuntos. Para o leitor que queira se aprofundar nestes temas, veja [10] e [11].

Para o desenvolvimento deste capítulo, tomamos como base as referências [15], [20], [21], [24] e [25].

2.1 Funções Contínuas e Uniformemente Contínuas

O conceito de função permeia os mais diversos ramos das ciências e surge na iniciativa de entender e traduzir os fenômenos naturais a partir de métodos que descrevem os mesmos. Na construção histórica, destacam-se os matemáticos Leibniz, com a denominação do nome **funções**, e Euler que traz a representação de função por $f(x)$.

Essa ideia primitiva vai de situações mais simples como ir ao supermercado e relacionar o total a pagar com o somatório do produto dos itens escolhidos pelos seus respectivos preços a situações mais complexas como lançamento de sondas fora da órbita da Terra. Pensar em funções é, em outras palavras, estabelecer uma relação de dependência com no mínimo duas variáveis.

Neste cenário, existe a classe das funções contínuas, tema central por exemplo, da Topologia e objeto de estudo desta seção. Continuidade, no dicionário, é “persistência das características inerentes a um determinado contexto”. Intuitivamente, dizemos que funções contínuas são aquelas que não possuem interrupções ou saltos em seus gráficos. Uma linguagem mais fina desse conceito encontramos em análise, de acordo com a seguinte definição.

Definição 2.1. *Dada uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que f é contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo número $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que*

$x \in X$ e $|x - a| < \delta$ implica $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

A grosso modo, estamos dizendo que os pontos δ -próximos ao ponto a possuem imagem ε -próxima do ponto $f(a)$. Em outras palavras, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$, vale

$$a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon.$$

Veja que esta definição é exatamente a mesma de dizermos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Dizemos também que a aplicação $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua quando f for contínua em todos os pontos de X .

Exemplo 2.2. Seja a função

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Não é uma função contínua, pois

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = 2 \neq 0 = g(1).$$

O que comprova a descontinuidade de g .

É possível mostrar que os polinômios, as funções trigonométricas, logarítmicas, exponenciais, radicais e racionais são contínuas em seus domínios.

Uma observação interessante a ser feita é que, se $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$, os pontos do intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ possuem imagem no intervalo $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, mas, se considerarmos um ponto b fora desse intervalo, não podemos dizer nada a respeito da sua imagem. Em análise, para que não haja esse problema, define-se a continuidade uniforme de uma função.

Definição 2.3. Dizemos que uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$ vale

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Em palavras, uma função é uniformemente contínua se, para cada número positivo ε , existe um correspondente $\delta > 0$ com a propriedade de que, se dois números $x, y \in X$ estão δ -próximos ($|x - y| < \delta$), então suas imagens estão ε -próximas ($|f(x) - f(y)| < \varepsilon$). No próximo exemplo, mostraremos que nem sempre é possível encontrar $\delta > 0$ que satisfaça esta definição. Mais do que isso, o exemplo mostra que nem toda função contínua é uniformemente contínua.

Exemplo 2.4. Vamos mostrar que a função contínua $f(x) = \frac{1}{x}$ não é uniformemente contínua, quando $x \in (0, \infty)$. Dado $\varepsilon > 0$, para todo $\delta > 0$, tomamos um número $a \in (0, \infty)$ tal que

$$0 < a < \frac{\delta}{4} \text{ com } 0 < a < \frac{1}{2\varepsilon}.$$

Seja, então, $x = a + \frac{\delta}{4}$. Segue que

$$|x - a| = \left| a + \frac{\delta}{4} - a \right| = \frac{\delta}{4} < \delta.$$

Porém,

$$|f(x) - f(a)| = \left| \frac{1}{a + \frac{\delta}{4}} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{4}{4a + \delta} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{4a - (4a + \delta)}{a(4a + \delta)} \right| = \left| \frac{\delta}{a(4a + \delta)} \right| = \left| \frac{\delta}{(4a + \delta)} \cdot \frac{1}{a} \right|$$

Note que $\frac{\delta}{4a + \delta} > \frac{1}{2}$, pois $\delta > 4a$. Então,

$$\left| \frac{\delta}{a(4a + \delta)} \right| > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2a}.$$

Sabendo que $0 < a < \frac{1}{2\varepsilon}$, temos

$$0 < a < \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{a} > 2\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2a} > \varepsilon.$$

Logo,

$$|f(x) - f(a)| > \frac{1}{2a} > \varepsilon.$$

Concluimos, então, que a função $f(x) = \frac{1}{x}$, quando $x \in (0, \infty)$, não é uniformemente contínua. Entretanto, se considerarmos f no intervalo (a, ∞) com $a > 0$, a função será uniformemente contínua, pois dado $\varepsilon > 0$ para quaisquer $x, y \in (a, \infty)$, tem-se que

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{x - y}{x \cdot y} \right|.$$

Como $x > a$ e $y > a$, temos $\frac{1}{a} > \frac{1}{x}$ bem como $\frac{1}{a} > \frac{1}{y}$. Segue que

$$\frac{|x - y|}{|x||y|} < \frac{1}{a^2}|x - y|.$$

Assim, para cada $\varepsilon > 0$, escolhemos $\delta = a^2\varepsilon > 0$ para que $|x - y| < \delta = a^2\varepsilon$ implique

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x - y|}{|x||y|} < \frac{1}{a^2}a^2\varepsilon = \varepsilon.$$

Isso mostra que a função f com $x \in (a, \infty)$ é uniformemente contínua. ■

É simples perceber as duas situações, pois quando $x \in (0, \infty)$, quanto mais próximos de zero dois pontos estiverem, mais as distâncias de suas imagens tornam-se maiores, o que não acontece no intervalo (a, ∞) , isto é, pontos próximos sempre possuem imagens próximas.

Vale ressaltar que toda função uniformemente contínua é também contínua. Para ver isso, basta tomar arbitrariamente $a \in X$ e escolher na definição de função uniformemente contínua $y = a \in X$.

Definição 2.5. Dizemos que uma função real f é limitada superiormente se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, para todo x no domínio de f , tem-se

$$f(x) \leq M.$$

Uma função real f é limitada inferiormente se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que, para todo x no domínio de f , tem-se

$$m \leq f(x).$$

Exemplo 2.6. Considere a função $f(x) = |x|$ com $x \in \mathbb{R}$. Temos que f é limitada inferiormente, pois $0 \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Contudo, não existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq M$. Por outro lado, a função $g(x) = -e^x$ com $x \in \mathbb{R}$ é limitada superiormente, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leq 0$. Entretanto, g não é limitada inferiormente já que não ocorre $m \leq f(x)$ com $m \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definição 2.7. Dizemos que a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada quando existir as constantes $m, M \in \mathbb{R}$, com $m < M$, tais que

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in X.$$

Portanto, uma função é limitada quando for simultaneamente limitada inferiormente e superiormente.

Exemplo 2.8. Veja que $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + c^2}$, com $x, c \in \mathbb{R}$ e c constante não nula, é uma função limitada, pois $0 \leq f(x) \leq 1$, bastando tomar $m = 0$ e $M = 1$ na Definição 2.7.

Algumas funções podem ser limitadas apenas superiormente ou inferiormente, o que não as tornam funções limitadas. A função $f(x) = x^2$ com $x \in \mathbb{R}$ é um exemplo, pois é limitada inferiormente pelo valor 0, mas não existe $M \in \mathbb{R}$ que satisfaça $f(x) \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definição 2.9. Os intervalos da forma $[a, b]$, em que $a < b$, $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$ e $(-\infty, \infty)$ são chamados de intervalos fechados. Já os intervalos da forma (a, b) , com $a < b$, $(-\infty, b)$, (a, ∞) e $(-\infty, \infty)$ são chamados de intervalos abertos. O único intervalo que é fechado e aberto ao mesmo tempo é $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$. Os intervalos que não possuem o símbolo de infinito (∞) na sua definição são chamados de intervalos limitados.

O Exemplo 2.4 mostra que nem toda função contínua é uniformemente contínua. Podemos acrescentar uma hipótese extra sobre a função para garantir isso. O resultado seguinte, cuja demonstração deixamos a cargo do leitor, mostra que hipótese é essa.

Lema 2.10. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, f é uniformemente contínua.*

Demonstração: Veja [20], Teorema 17, página 243. ■

É intuitivo que uma função f contínua num intervalo fechado e limitado $[a, b]$ seja limitada. Isso se deve ao fato de que o gráfico de f não possui interrupções, uma vez que f é contínua. Essa intuição está correta. Entretanto, em termos matemáticos, quem nos traz uma colocação formal dessa ideia é o famoso Teorema de Weierstrass. Como sua demonstração foge ao escopo deste trabalho, decidimos não colocá-la aqui. Para o leitor que tenha interesse nela, veja [20], Corolário 2, página 235, e Teorema 14, página 238.

Teorema 2.11 (Teorema de Weierstrass). *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Dada uma função f contínua de $[a, b]$ em \mathbb{R} , existem $x_m, x_M \in [a, b]$ tais que*

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a, b].$$

Este teorema garante que f é limitada e, além disso, possui máximo e mínimo, ou seja, a função f é limitada por valores que ela assume.

O Teorema de Weierstrass será essencial para a demonstração de um dos teoremas principais deste trabalho.

2.2 Funções Diferenciáveis

O conceito de derivadas surge como uma ferramenta poderosa na área do cálculo, trazendo consigo uma análise mais aguçada das funções. As primeiras ideias surgem com Fermat, quando ele percebe as limitações do conceito clássico de reta tangente a uma curva.

Buscou-se, então, reformular esta ideia, conhecida como problema da reta tangente, mas apenas no século XVII, com Leibniz, este conceito tornou-se forte em notações e resultados. Com isto, surge o nome do ramo matemático conhecido hoje como Cálculo Diferencial, um passo importantíssimo para o desenvolvimento da análise.

Definição 2.12. *Sejam I um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é derivável ou diferenciável num ponto $a \in I$ se existir o limite*

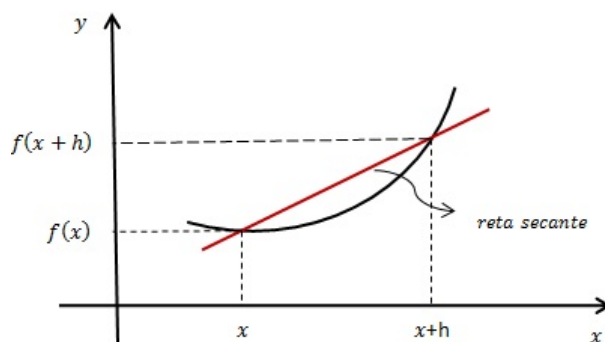
$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Uma representação equivalente é dada por

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

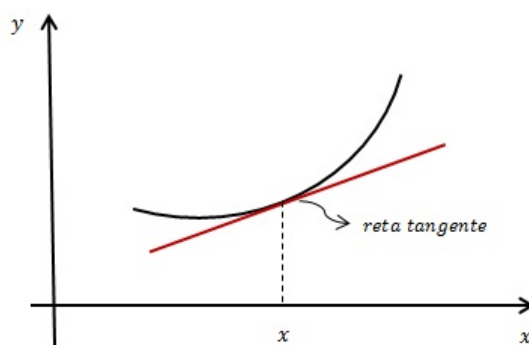
Geometricamente, fixamos o ponto x_0 e tomamos x com $x_0 < x$. Assim, o valor $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ será o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$. Quando fazemos x tender a x_0 , vemos que $f'(x_0)$ é o limite dos coeficientes das retas secantes ao gráfico de f que passam por $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$. Quando esse limite existe, chamamos o número $f'(x_0)$ de derivada de f no ponto x_0 . Neste caso, define-se também reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0 como a reta que possui inclinação $f'(x_0)$ e passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$.

Figura 2.1: Reta secante ao gráfico de f



Fonte: Arquivo pessoal

Figura 2.2: Reta tangente ao gráfico de f no ponto x



Fonte: Arquivo pessoal

As funções deriváveis são importantes para o entendimento do Teorema de Taylor, pois, a partir delas, construiremos os polinômios de Taylor, que se aproximarão da função estudada. Para dar exemplos nesta seção, decidimos colocar aqui um típico caso em que uma função é contínua, mas não é derivável. Em seguida, provaremos que toda função derivável é também contínua.

Exemplo 2.13. A função $f(x) = |x|$ é contínua em todos os pontos, no entanto, não é derivável no ponto $x = 0$, uma vez que o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ não existe.

Lema 2.14. Se f uma função derivável em a , então f é contínua em a .

Demonstração: Pela definição de derivada, sabemos que $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe. Segue que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \rightarrow a} \left((f(x) - f(a)) \frac{(x - a)}{(x - a)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a) + f(a)) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) + \lim_{x \rightarrow a} f(a) \\ &= f(a). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.3 Polinômio de Bernstein

O objetivo principal desta seção é a demonstração do Teorema de aproximação de Weierstrass. Para isto, falaremos sobre os polinômios de Bernstein, comumente utilizado na demonstração deste teorema pelo fato de serem polinômios que possuem propriedades interessantes quando restritos ao intervalo $[0, 1]$.

Sergey Natanovich Bernstein (1880-1968), ou simplesmente Bernstein, foi um matemático de família judaica, graduado em matemática e doutor em matemática. Em sua tese de doutorado intitulada “*la natureza analytique des soluções Sur des équations aux dérivées partielles du segunda ordre*”, Bernstein resolveu o décimo nono problema de Hilbert.

Era um estudioso da matemática aplicada, e suas maiores contribuições estão na Teoria das Probabilidades e Aproximações de funções por polinômios. Nas primeiras páginas de sua tese, estava a seguinte frase: “Hoje, todos os matemáticos e físicos concordam que o campo de aplicações para matemática não conhece limites, exceto os do próprio conhecimento”, o que comprova a devoção que ele possuía para matemática aplicada.

Para definir o polinômio de Bernstein, usaremos o Teorema Binomial de Newton, demonstrado em [9], página 7, Teorema 4.1, que garante que, dados quaisquer números $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

Se considerarmos $y = 1 - x$, obteremos

$$1 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.$$

A partir daqui, para cada i e n números naturais, considere o polinômio

$$B_n^i(x) := \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.$$

Deste modo, já fica claro uma propriedade dos $B_n^i(x)$, a saber,

$$1 = \sum_{i=0}^n B_n^i(x).$$

Polinômios de Bernstein são polinômios que possuem a forma de B_n^i . Suponha, agora, que uma função f esteja definida no intervalo $[0, 1]$. Se dividirmos $[0, 1]$ em n subintervalos de mesmo comprimento $\frac{1}{n}$, digamos $[x_i, x_{i+1}]$ com $x_i = \frac{i}{n}$ para $i = 0, \dots, n-1$, definimos o polinômio de Bernstein de grau n associado à função f da seguinte maneira:

$$B_n(f)(x) = \sum_{i=0}^n B_n^i(x) f(x_i) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}. \quad (2.1)$$

A título de curiosidade, os polinômios de Bernstein formam uma base para o espaço vetorial real dos polinômios, isto é, se p é um polinômio de grau n , então existem constantes reais $\beta_0, \beta_1 \dots \beta_n$ tais que

$$P(x) = \sum_{i=0}^n \beta_i B_n^i(x) = \sum_{i=0}^n \beta_i \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.$$

Para maiores detalhes sobre este fato, veja [22]. A seguir, um dos resultados mais relevantes sobre aproximação de funções contínuas por meio de polinômios.

Teorema 2.15 (Teorema de aproximação de Weierstrass). *Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Para cada $\varepsilon > 0$, existe um polinômio $P(x)$ tal que, para todo $x \in [a, b]$,*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Demonstração: Vamos considerar, sem perder a generalidade, o caso em que $[a, b] = [0, 1]$. O caso geral recai neste caso particular. Inicialmente, vamos utilizar convenientemente o binômio de Newton. Derivando de ambos os lados em relação a x , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x+y)^n &= \frac{d}{dx} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \Rightarrow \\ n(x+y)^{n-1} &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i x^{i-1} y^{n-i}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Deixamos o último somatório começando em $i = 0$, pois este termo é exatamente zero, o que não muda o valor da soma. Multiplicando por x ambos os lados, tem-se

$$xn(x+y)^{n-1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} ix^i y^{n-i}. \quad (2.3)$$

Derivando novamente a equação (2.2), segue que

$$n(n-1)(x+y)^{n-2} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i(i-1)x^{i-2}y^{n-i}.$$

Multiplicando por x^2 em ambos os lados desta igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} x^2n(n-1)(x+y)^{n-2} &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^2i(i-1)x^{i-2}y^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i(i-1)x^i y^{n-i}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Definiremos um valor adequado para y . Seja $y = 1 - x$. Substituindo esse valor em (2.2), obtemos o que já tínhamos feito no início da seção, a saber,

$$1 = (x + (1-x))^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}. \quad (2.5)$$

Substituindo também em (2.3), segue que

$$xn(x + (1-x))^{n-1} = xn = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} ix^i (1-x)^{n-i}. \quad (2.6)$$

Substituindo em (2.4) e usando (2.6), vem que

$$\begin{aligned} x^2n(n-1)(x + (1-x))^{n-2} = x^2n(n-1) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i(i-1)x^i (1-x)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (i^2 - i)x^i (1-x)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i^2 x^i (1-x)^{n-i} - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} ix^i (1-x)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i^2 x^i (1-x)^{n-i} - xn. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Note que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (i - nx)^2 \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i^2 x^i (1-x)^{n-i} - 2nx \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} ix^i (1-x)^{n-i} \\ &\quad + n^2 x^2 \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}. \end{aligned}$$

Portanto, de (2.5), (2.6) e (2.7), segue que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n (i - nx)^2 \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} &= [nx + n(n-1)x^2] - 2nx \cdot nx + n^2 x^2 \\
 &= nx + n^2 x^2 - nx^2 - 2n^2 x^2 + n^2 x^2 \\
 &= nx + x^2(n^2 - n - 2n^2 + n^2) \\
 &= nx + x^2(2n^2 - n - 2n^2) \\
 &= nx(1-x).
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{i=0}^n (i - nx)^2 \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = nx(1-x). \quad (2.8)$$

Por f ser contínua e definida em $[0, 1]$, segue do Teorema 2.11 que f é limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [0, 1]$ e, mais, pelo Lema 2.10, f é uniformemente contínua, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que

$$|f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } x, x_i \in [0, 1] \text{ e } |x - x_i| < \delta, \quad (2.9)$$

onde $x_i = \frac{i}{n}$ para $i = 0, \dots, n-1$ e para algum $n \in \mathbb{N}$ ainda a ser determinado. Usando os polinômios de Bernstein associados a f , segue de (2.5) que

$$\begin{aligned}
 f(x) - B_n(f)(x) &= f(x) - \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\
 &= \sum_{i=0}^n \left[f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right] \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.
 \end{aligned}$$

Vamos escrever o somatório acima em duas somas: uma, quando $|i - nx| < \delta n$ e, outra, quando $|i - nx| \geq \delta n$. Então,

$$\begin{aligned}
 f(x) - B_n(f)(x) &= \sum_{|i-nx| < \delta n} \left[f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right] \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\
 &\quad + \sum_{|i-nx| \geq \delta n} \left[f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right] \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.
 \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade triangular, ficamos com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 |f(x) - B_n(f)(x)| &\leq \left| \sum_{|i-nx| < \delta n} \left[f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right] \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \right| \\
 &\quad + \left| \sum_{|i-nx| \geq \delta n} \left[f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right] \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \right|.
 \end{aligned}$$

Note que, para $|i - nx| < \delta n$, temos $|x - \frac{i}{n}| < \delta$ e, de (2.9), segue que $|f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Logo, novamente de (2.5),

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|i-nx| < \delta n} \left[f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right] \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \right| &\leq \sum_{|i-nx| < \delta n} \left| f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \sum_{|i-nx| < \delta n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \left[\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \right] = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, quando $|i - nx| \geq \delta n$, segue da limitação da função f que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|i-nx| \geq \delta n} \left[f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right] \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \right| &\leq \sum_{|i-nx| \geq \delta n} \left| f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &\leq \sum_{|i-nx| \geq \delta n} \left(|f(x)| + \left| f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \right) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &\leq 2M \sum_{|i-nx| \geq \delta n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Utilizaremos (2.8). Para isso, organizando convenientemente, temos que

$$\begin{aligned} nx(1-x) &= \sum_{i=0}^n (i - nx)^2 \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &\geq \delta^2 n^2 \left(\sum_{|i-nx| \geq \delta n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \right). \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{nx(1-x)}{\delta^2 n^2} \geq \sum_{|i-nx| \geq \delta n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.$$

Substituindo na equação (2.10), ficamos com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|i-nx| \geq \delta n} \left[f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right] \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \right| &\leq 2M \sum_{|i-nx| \geq \delta n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &\leq 2M \frac{nx(1-x)}{\delta^2 n^2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Note que $x(1-x) \leq 2$, para $x \in [0, 1]$. Tomemos $n \geq \frac{8M}{\delta^2 \varepsilon}$ de tal maneira que

$$2M \frac{nx(1-x)}{\delta^2 n^2} = \frac{2Mx(1-x)}{\delta^2 n} \leq \frac{4M}{\delta^2 n} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Com isto, segue de (2.11) que

$$\left| \sum_{|i-nx| \geq \delta n} \left[f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right] \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Concluimos que, para todo $x \in [0, 1]$, tem-se

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &= \sum_{|i-nx| < \delta n} \left[f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right] \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &+ \sum_{|i-nx| \geq \delta n} \left[f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right] \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. Para completar a prova do teorema, precisamos apenas generalizar para o caso onde o intervalo em que a função f está definida é $[a, b]$. Para tanto, consideremos uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com $a < b$. Seja $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = f(a + (b-a)x)$. Veja que g está bem definida e é contínua por ser composição de funções contínuas. Segue do que mostramos que existe um polinômio Q tal que

$$|g(y) - Q(y)| < \varepsilon, \quad \forall y \in [0, 1].$$

Para cada $x \in [a, b]$, defina $y = \frac{x-a}{b-a}$. Então, $y \in [0, 1]$ e

$$\begin{aligned} g(y) &= g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = f\left(a + (b-a)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right) \\ &= f(a + x - a) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Assim, $g(y) = f(x)$ e, portanto,

$$\left| f(x) - Q\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

Para concluir a demonstração, basta tomar o polinômio P definido em $[a, b]$ por

$$P(x) = Q\left(\frac{x-a}{b-a}\right). \quad \blacksquare$$

O Teorema de aproximação de Weierstrass tem inúmeras aplicações. Caso o leitor esteja interessado em saber um pouco mais a respeito disso, pode consultar [21], Capítulo 3.

2.4 Polinômio de Taylor

O polinômio de Taylor permite aproximar funções, que possuam n derivadas, numa vizinhança de um determinado ponto, conseguindo uma aproximação relativamente precisa. O polinômio de Taylor de grau n de uma função f que possui n derivadas ao redor do ponto x_0 no domínio de f é dado por

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \end{aligned}$$

onde $f^{(k)}$ significa a k -ésima derivada de f (para $k = 0$, tomamos $f^{(0)} = f$).

Perceba que, se considerarmos $n = 1$, ou seja, o polinômio de grau 1 de uma função f , teremos que P será a reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0 , ou seja,

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

que, sabemos do Cálculo, aproxima-se de f ao redor de x_0 . Eis aqui a ideia principal do Teorema de Taylor: aproximar funções por seus polinômios de Taylor.

Brook Taylor foi um matemático britânico, nascido em Londres, de família nobre com fortes contribuições para a matemática. Em 1712, iniciou suas contribuições fornecendo uma solução para um problema em relação à segunda lei do movimento planetário de Kepler.

Em seu livro “*Methodus incrementorum directa et inversa e Perspectiva Linea*”, ele apresenta o que agora é conhecido como a série de Taylor. Adicionou à matemática um novo ramo agora chamado de “cálculo das diferenças finitas” inventou a integração por partes e descobriu as séries conhecidas hoje como expansão de Taylor. Foi um matemático influente para o desenvolvimento do cálculo e dos estudos das aproximações.

Exemplo 2.16. Seja $f(x) = \sqrt{x}$ com $x > 0$ e $x_0 = 4$. Calcule o polinômio de Taylor de f de grau 1 ao redor de x_0 .

$$\text{Temos que } f(4) = \sqrt{4} = 2 \text{ e } f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Segue que

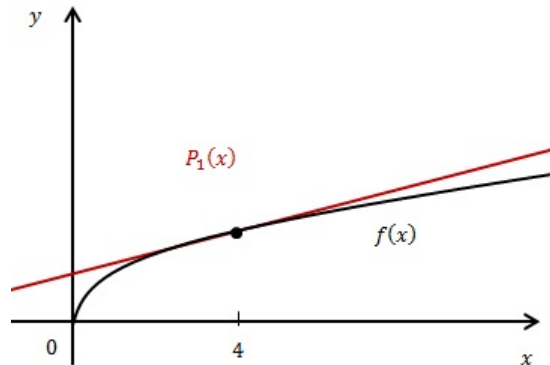
$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow P_1(x) = 2 + \frac{x - 4}{4}$$

Consideremos o ponto $x = 4,3$, numa vizinhança de x_0 . Com 10 casas decimais, o valor de $f(4,3)$ é

$$f(4,3) = \sqrt{4,3} = 2,0736441353.$$

Agora, veja que

$$P_1(4,3) = 2 + \frac{(4,3) - 4}{4} = 2,075,$$

Figura 2.3: Gráfico do polinômio de Taylor de grau um de $f(x) = \sqrt{x}$ 

Fonte: Arquivo pessoal

que é uma boa aproximação do valor real da função.

Vamos ver o que ocorre com essa aproximação quando o polinômio de Taylor tiver grau 2. Temos que

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2.$$

Como

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$

temos

$$f''(x) = \frac{-1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}} \Rightarrow f''(4) = \frac{-1}{4 \cdot 8} = \frac{-1}{32}.$$

Assim, o polinômio de grau dois procurado é

$$P_2(x) = 2 + \frac{x - 4}{4} - \frac{(x - 4)^2}{64}.$$

Portanto, para $x = 3$, a aproximação é

$$P_2(4, 3) = 2 = \frac{0,3}{4} - \frac{(0,3)^2}{64} = 2,0735975,$$

que é uma aproximação ainda melhor do que a anterior. Perceba que, ao aumentarmos o grau do polinômio de Taylor, mais precisão conseguimos na aproximação. Na primeira (polinômio de grau 1), tivemos uma precisão de duas casas decimais, enquanto que, na segunda, tivemos três casas decimais de precisão. Analise o gráfico a seguir e perceba nitidamente que o gráfico de P_2 está mais “próximo” do gráfico de f .

Exemplo 2.17. Seja a função $f(x) = e^x$, e vamos calcular o polinômio de Taylor de f de grau dois na vizinhança de $x_0 = 0$.

Como $f'(x) = f''(x) = e^x$, os polinômios associados são

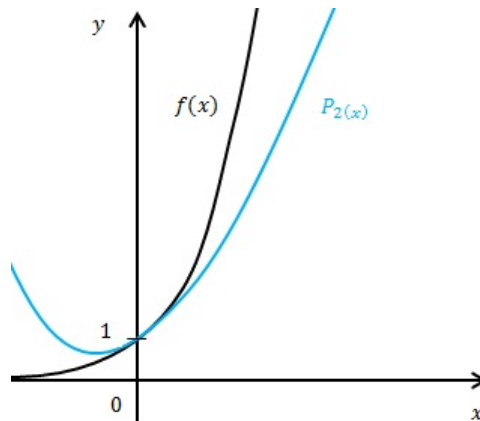
$$P_1(x) = 1 + x \quad \text{e} \quad P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Para $x = 0,3$, temos

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0,3) = e^{0,3} = 1,34985880.$$

$$P_1(0,3) = 1,3 \quad \text{e} \quad P_2(0,3) = 1,345.$$

Figura 2.4: Gráfico do polinômio de Taylor de grau dois de $f(x) = e^x$



Fonte: Arquivo pessoal

Seja f uma função tal que seja possível calcular seu polinômio de Taylor de grau n ao redor do ponto x_0 . Se conseguirmos dois valores $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ que satisfazem

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Ao valor ε , damos o nome de estimativa do erro ou erro de truncamento. Ele diz o quão próximo o polinômio P_n está de f . Em termos de precisão, é evidente que, quanto menor for o valor de ε encontrado, melhor será a aproximação.

Teorema 2.18. (Teorema de Taylor) *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com n derivadas contínuas e que exista $f^{(n+1)}$ em $[a, b]$ e $x_0 \in [a, b]$. Para todo $x \in [a, b]$, existe um número $M(x)$ entre x_0 e x tal que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(M(x))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Definiremos $R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(M(x))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ e o denominaremos como resto de Lagrange. Desde que $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$, tem-se

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Exemplo 2.19. Consideremos a função $f(x) = \ln(x)$ e vamos calcular o polinômio de Taylor de grau um associado a f na vizinhança do ponto $x_0 = 1$ para, em seguida, estimarmos o valor de $f(1,003)$, calculando o erro de truncamento.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) \Rightarrow f(1) = \ln(1) = 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{1} = 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Assim, o polinômio de Taylor procurado é

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(1) + f'(1)(x - 1) \\ P_1(x) &= x - 1. \end{aligned}$$

O resto de Lagrange é dado por

$$R_1(x) = \frac{f''(M(x))}{2!}(x - 1)^2 = \frac{-1}{2(M^2(x))}(x - 1)^2.$$

Nas proximidades do ponto $x_0 = 1$, temos que

$$\begin{aligned} f(1,003) = \ln(1,003) &\approx P_1(1,003) = 1,003 - 1 \\ &= 0,003. \end{aligned}$$

Enquanto o resto de Lagrange é dado por, para algum M tal que $1 < M < 1,003$,

$$R_1(1,003) = \frac{-(1,003 - 1)^2}{2M}$$

Para determinarmos o erro de truncamento, veja que $M > 1 \Rightarrow \frac{1}{M^2} \leq 1$. Então,

$$\begin{aligned} |R_1(1,003)| &= \left| \frac{(-1)}{2M^2}(0,003)^2 \right| = \frac{1}{2M^2}(0,003)^2 \\ &= \frac{(0,003)^2}{2} \cdot \frac{1}{M^2} \leq \frac{(0,003)^2}{2} \cdot 1 = 0,0000045 \\ &= 0,45 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

O valor do erro é consideravelmente bom, mas nas aproximações é sempre indicado aumentar o grau dos polinômios de Taylor, já que, desta forma, diminuímos a margem de erro e, por conseguinte, consegue-se uma aproximação ainda melhor. Calcularemos os polinômios de grau dois e três, entretanto, a partir daqui, pressupõe-se que o leitor já esteja familiarizado com os cálculos, que serão feitos de uma maneira mais direta. Para o polinômio de grau dois com $x_0 = 1$ e $x = 1,003$, como $f''(1) = -1$, tem-se

$$P_2(x) = f(x) + f'(x)(x-1) + \frac{f''(x)}{2!}(x-1)^2 \Rightarrow P_2(x) = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2!}.$$

Para algum $1 < M < 1,003$, já que $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, o resto de Lagrange é dado por

$$\begin{aligned} R_2(x) &= \frac{f'''(M)}{3!}(x-1)^3 \\ &= \frac{(x-1)^3}{3M^3}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(1,003) \ln(1,003) &\approx P_2(1,003) = 1,003 - 1 - \frac{(1,003 - 1)^2}{2} = 0,0029955 \\ &\Rightarrow \ln(1,003) \approx 0,0029955. \end{aligned}$$

A análise do erro de truncamento é análoga àquela feita anteriormente, mas aqui o expoente de M será 3, pois estamos calculando o polinômio de grau dois. Desta forma,

$$\begin{aligned} |R_2(1,003)| &= \left| \frac{(0,003)^3}{3M^3} \right| \\ &= \frac{(0,003)^3}{3} \cdot \frac{1}{M^3} \leq \frac{(0,003)^3}{3} \cdot 1 = 0,000000009 \\ &= 0,9 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

O erro de truncamento quando consideramos P_2 é menor do que quando consideramos P_1 . Vamos determinar o erro para o caso P_3 . Para isso, temos que $f^4(x) = \frac{-6}{x^4}$ e, assim, o polinômio de Taylor associado é dado por

$$P_3(x) = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$$

e o resto de Lagrange, para algum $1 < M < 1,003$, é dado por

$$R_3(x) = \frac{-(x-1)^4}{4M^4}.$$

Logo,

$$\ln(1,003) \approx P_3(1,003) = 0,002995509.$$

Para o erro, tem-se

$$\begin{aligned} |R_3(1,003)| &= \left| \frac{-(0,003)^4}{4M^4} \right| \\ &\Rightarrow \frac{(0,003)^4}{4} \cdot \frac{1}{M^4} \leq \frac{(0,003)^4}{4} \cdot 1 = 0,0000000002025 \\ &\Rightarrow |R_3(1,003)| \leq 0,2520 \cdot 10^{-10}. \end{aligned}$$

Na primeira aproximação, obtivemos apenas duas casas decimais corretas. Já nas aproximações de segundo e terceiro graus, chegamos, respectivamente, em 6 e 7 casas decimais corretas, o que implica em uma aproximação ainda melhor e relativamente satisfatória.

Uma observação a ser feita sobre os polinômios de Taylor é que eles consistem numa aproximação (quando possível) local. Portanto, não é incomum que tais polinômios forneçam valores muito diferentes à medida em que nos afastamos do ponto x_0 fixado. Desta forma, ao utilizar este recurso, ficamos limitados, em geral, a aproximações numa vizinhança de x_0 . Desafiamos o leitor a determinar os polinômios de Taylor de graus 1, 2, 3, 4 e 5, ao redor do ponto $x_0 = 1$, da função $f(x) = \frac{1}{x}$, para estimar o valor de $f(3) = \frac{1}{3}$. Faça uma tabela desses valores e logo verá o quão diferentes eles são de $f(3) = \frac{1}{3}$.

Visto isto, estudaremos no próximo capítulo o método de Lagrange para aproximações de funções quando fixados n pontos de um intervalo.

Capítulo 3

Interpolação Polinomial: Método de Lagrange

Matematicamente, interpolar consiste em determinar, em um conjunto de dados discretos, uma função que possa servir para obtenção de qualquer valor do domínio definido. Em outras palavras, a interpolação é um processo numérico que mapeia uma função discreta para uma função contínua e possui vastas aplicações. Neste processo, as funções polinomias são comumente utilizadas, e este capítulo tratará do principal método de aproximação deste trabalho, a saber, o de Lagrange.

O método de Lagrange afirma que, dada uma função definida em $n+1$ pontos num intervalo, existe um único polinômio de grau no máximo n que coincide com a função nos $n+1$ pontos. Lagrange abrange o intervalo em diversos pontos, dependendo do grau do polinômio. Quando possuímos a função, somos capazes de determinar o quão bom é o método, a partir do cálculo do erro ou, se preferir, do erro de truncamento.

É necessário que tenhamos a função para determinar o erro, pois precisamos das derivadas de ordem $n+1$ da f , entretanto conseguimos interpolar apenas com os pontos e a partir de comparações e variações do x_0 em meio aos pontos dados realizamos estimativas do erro que em sua maioria não coincidem muito bem.

Também neste capítulo, será apresentado o método conhecido como “*Método de Neville*”, que utiliza o Teorema de Lagrange, mostrando o erro de truncamento quando não temos a função f definida expressamente. Serão apresentadas também algumas aplicações destes métodos, e mostraremos a versatilidade dos conceitos de aproximações e cálculo numérico.

Este capítulo baseia-se nas referências [6], [26] e [27].

3.1 Um pouco de História

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), mais conhecido como Lagrange, foi um matemático de nacionalidade italiana, natural de Turim, onde passou boa parte de sua vida. Lagrange não se dedicou inicialmente à matemática. Na realidade, não tinha muita afinidade com a disciplina. Tomou gosto pela área quando leu uma cópia do trabalho de Halley em 1693 sobre o uso da álgebra na óptica. A partir daí, ele não parou mais. Ele afirmava que, se sua condição financeira fosse diferente, provavelmente, não teria se dedicado à matemática.

Seu primeiro trabalho, em 1754, foi um artigo enviado a Giulio Fagnano, onde faz uma analogia entre o teorema binomial e as derivadas sucessivas do produto das funções. Um trabalho bom, mas, pelo fato de Lagrange não possuir instruções matemáticas necessárias, o mesmo continha muitas falhas. Em 1755, ele apresenta seus trabalhos a Euler, que mais tarde vem a ser seu grande amigo e orientador.

Após este encontro de mentes, Lagrange torna-se bastante produtivo e, aos vinte e três anos, aplicou o cálculo diferencial à teoria da probabilidade. Dentre os problemas que dedicou-se, destaca-se o problema da libração da Lua, que é o movimento da Lua que faz com que o rosto que apresenta à Terra oscile, causando pequenas mudanças na posição das características lunares. Este lhe garantiu o Grande Prêmio da Academia Francesa de Ciências.

Os papéis de Lagrange se distribuem em diversas áreas da matemática como Cálculo, Álgebra, Probabilidade e muitas outras. É muito lembrado pelo famoso Teorema do Ponto Médio e contribuições na teoria das Probabilidades e aproximações de funções, buscando sempre aplicações.

3.2 Polinômios de Lagrange

Estudamos no capítulo anterior os polinômios de Taylor cuja aproximação restringe-se à uma vizinhança de um dado ponto fixo. Agora, estudaremos um método em que podemos considerar vários pontos, e a dependência das derivadas é mínima, diferente dos polinômios de Taylor.

Teorema 3.1 (Polinômio Interpolador de Lagrange). *Se x_0, x_1, \dots, x_n são $n + 1$ números distintos e f é uma função cujos valores são dados nesses números, então existe um único polinômio $P(x)$ de grau no máximo n com*

$$f(x_k) = P(x_k), \text{ para cada } k = 0, 1, \dots, n.$$

Esse Polinômio é dado por

$$P(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_{n,k}(x),$$

onde, para cada, $k = 0, 1, \dots, n$,

$$L_{n,k}(x) := \prod_{\substack{i=0, \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}.$$

$L_{n,k}(x)$ é denominado o n -ésimo polinômio interpolador de Lagrange.

Abaixo vamos demonstrar o teorema e explicar melhor o índice k , pois, diferente da referência base do trabalho [6], julgamos necessário manter os índices n e k na notação $L_{n,k}$ e esclarecê-los, bem como a demonstração da unicidade de $P(x)$ que não é demonstrada no livro [6].

Demonstração: Vamos iniciar determinando $P(x)$ de grau um. Considere as funções:

$$L_{1,0}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad e \quad L_{1,1}(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

É fácil perceber que $L_{1,0}(x_0) = 1$, $L_{1,0}(x_1) = 0$, $L_{1,1}(x_0) = 0$, e $L_{1,1}(x_1) = 1$. Definiremos então o polinômio P como

$$P(x) = L_{1,0}(x)f(x_0) + L_{1,1}(x)f(x_1).$$

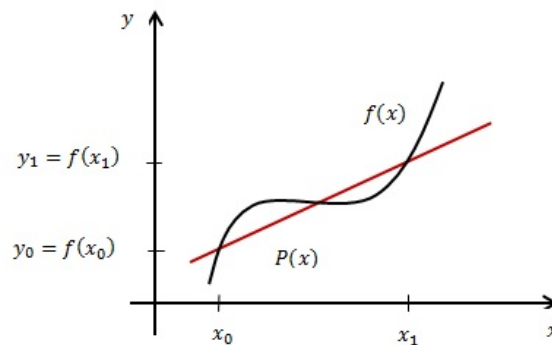
Aplicando em x_0 e em x_1 , temos

$$P(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0)$$

e

$$P(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1).$$

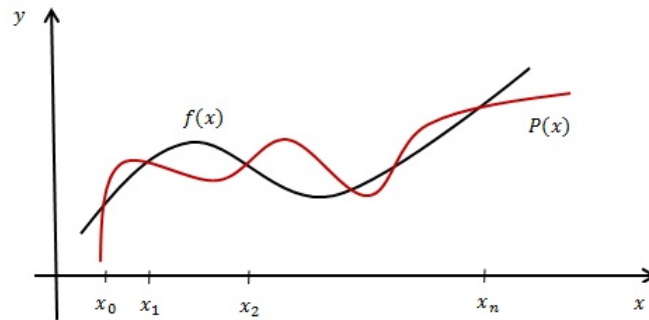
Figura 3.1: Gráfico de P que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$



Fonte: Arquivo pessoal

Mas é necessário que encontremos um polinômio de grau no máximo n , que passa por $n + 1$ pontos, a saber,

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n)).$$

Figura 3.2: Gráfico do polinômio que passa pelos $n + 1$ pontos

Fonte: Arquivo pessoal

Considere o polinômio $P(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_{n,k}(x)$. Perceba que, pela definição de $L_{n,k}(x)$, temos

$$P(x_k) = f(x_k)$$

para todo $k = 0, 1, \dots, n$. Resta-nos mostrar a unicidade. Vamos supor, então, que existam dois polinômios, digamos P_1 e P_2 , tais que

$$P_1(x_k) = f(x_k), \forall k = 0, 1, \dots, n$$

e

$$P_2(x_k) = f(x_k), \forall k = 0, 1, \dots, n$$

Dito isto, vale então

$$P_1(x_k) = f(x_k) = P_2(x_k), \forall k = 0, 1, \dots, n.$$

Uma vez que P_1 e P_2 têm grau no máximo n e coincidem em $n + 1$ pontos, necessariamente $P_1 = P_2$. Mais detalhadamente, considere o polinômio $Q(x) = P_1(x) - P_2(x)$ e note que Q tem grau no máximo n e possui $n + 1$ raízes. Então, Q precisa ser o polinômio nulo, isto é, $P_1 = P_2$. Isto mostra a unicidade do polinômio P e conclui a demonstração do teorema. ■

Com conceitos da álgebra, também é possível demonstrar este resultado. Como ele é o principal deste trabalho, decidimos fazer esta demonstração. Com efeito, escreva

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i.$$

Sabemos que $P(x)$ tem no máximo grau n . Para determiná-lo, basta conhecer os valores

dos coeficientes. Perceba que $P_n(x_i) = f(x_i)$ por hipótese. Assim,

$$S = \begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 \dots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 \dots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

Veja que temos n incógnitas (a_0, a_1, \dots, a_n) e n equações. A matriz dos coeficientes é dada por

$$A = \begin{vmatrix} x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

que é uma matriz de Vandermonde, onde o valor do determinante é dado por

$$\det(A) = \prod_{i>k} (x_i - x_k).$$

Note que, por hipótese, $x_i \neq x_k$ para todo $i \neq k$ e, assim, garantimos que o determinante é diferente de zero. Isto implica que $P(x)$ existe e é a única função polinomial de grau no máximo n que satisfaz o teorema. ■

Assim como Taylor, Lagrange desenvolveu uma maneira para se ter ideia do quão bom é o seu método, de outra forma, uma maneira de sabermos o quanto estamos perto do conjunto de dados em questão.

O teorema a seguir possui outras formas de ser expresso, entretanto a apresentada neste trabalho é considerada mais vantajosa e também a mais próxima do Teorema de Taylor. Como a todo tempo estamos realizando um paralelo entre as ideias de Lagrange e as de Taylor, é bastante plausível definir o erro da forma encontrada no teorema a seguir.

Teorema 3.2 (Teorema do erro absoluto de Lagrange). *Suponha que x_0, x_1, \dots, x_n sejam números distintos no intervalo $[a, b]$ e que $f \in C^{n+1}[a, b]$ (isto é, possua $n + 1$ derivadas contínuas). Então, para cada $x \in [a, b]$, existe um número $\delta(x)$ entre x_0, x_1, \dots, x_n tal que*

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\delta(x))}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n), \quad (3.1)$$

onde P é o polinômio interpolador de Lagrange.

Demonstração: O caso em que $x = x_k$ para algum k é trivial. Analizaremos, então, o caso $x \neq x_k$, para todo $k = 0, 1, \dots, n$. Para cada $x \in [a, b]$, considere a função g definida em $[a, b]$

por

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \frac{(t - x_0)(t - x_1) \cdots (t - x_n)}{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)} \\ &= f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)}. \end{aligned}$$

Logo, para $t = x_k$, vale

$$g(x_k) = f(x_k) - P(x_k) - [f(x) - P(x)] \frac{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_n)}{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)} = 0.$$

E para $t = x$, tem-se

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)] \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)}{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)} \\ &= f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)] = 0. \end{aligned}$$

Pelas hipóteses sobre f e sobre P , temos que $g \in C^{n+1}([a, b])$. Com isto, chegamos que g é zero nos $n + 2$ números distintos x, x_0, x_1, \dots, x_n . Pelo Teorema de Rolle generalizado (que é demonstrado usando [31], Seção 4.2, Teorema de Rolle juntamente com princípio da indução finita), existe $\delta(x)$ entre os pontos x_0, x_1, \dots, x_n para o qual $g^{n+1}(\delta(x)) = 0$. Assim, temos

$$0 = g^{n+1}(\delta(x)) = f^{(n+1)}(\delta(x)) - P^{(n+1)}(\delta(x)) - [f(x) - P(x)] \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left[\prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{x - x_i} \right]_{t=\delta(x)} \quad (3.2)$$

Como P tem no máximo grau n , sua $(n + 1)$ -ésima derivada é nula. Já $\prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)}$ tem grau $(n + 1)$. Escrevendo

$$\prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} = \left[\frac{1}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} \right] t^{n+1} + (\text{termos de grau menor ou igual a } n),$$

segue que

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left[\prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} \right] = \frac{(n + 1)!}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}.$$

Substituindo na equação (3.2), ficamos com

$$\begin{aligned} 0 &= f^{(n+1)}(\delta(x)) - 0 - [f(x) - P(x)] \frac{(n + 1)!}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} \Rightarrow \\ f(x) &= P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\delta(x))}{(n + 1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

No caso do Teorema 3.2, definimos o erro de truncamento por

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\delta(x))}{(n + 1)!}.$$

Observe que este erro é bastante similar ao erro dado pelos polinômios de Taylor. Porém, nestes últimos, o erro se concentra em um único ponto x_0 . Já o erro dado por Lagrange está concentrado nos $n + 1$ pontos x_0, x_1, \dots, x_n .

Para se determinar o erro de truncamento, na prática, é algo limitado, dado que os casos em que conhecemos $f^{(n+1)}(x)$, bem como o ponto $\delta(x)$, são raros.

Em geral, a importância da fórmula exata de $E_n(x)$ é teórica. Na maioria das vezes, aplicamos o que chamamos de estimativa do erro ou limitante para o erro. O resultado seguinte fala sobre isso. Se tivermos algumas hipóteses sobre $f^{(n+1)}$, podemos estimar o erro de truncamento.

Corolário 3.3. *Se $f^{(n+1)}$ for contínua em $I = [a, b]$, então a seguinte relação é válida:*

$$|E_n(x)| = |f(x) - P(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1) \cdot (x - x_n)| \frac{M_{(n+1)}}{(n + 1)!},$$

onde $M_{n+1} := \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|$.

De fato, como $f^{(n+1)}$ é contínua em $[a, b]$, pelo Teorema 2.11, pode-se dizer que

$$|E_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_n)| \frac{M_{(n+1)}}{(n + 1)!},$$

para algum $M_{n+1} > 0$. Chamamos este cálculo de “estimativa do erro”. Note que o majorante depende de x .

Corolário 3.4. *Sob às hipóteses do corolário anterior, se os pontos forem igualmente espaçados, ou seja, se*

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_n - x_{n-1} = h,$$

então

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{h^{n+1} M_{(n+1)}}{4(n + 1)}$$

Desta forma, o majorante não depende do ponto x considerado tal que $x \in [x_0, x_n]$.

Demonstração: Veja [27], Corolário, página 234. ■

Exemplo 3.5. Seja a função $f(x) = e^x + x - 1$. Munidos com os dados da tabela a abaixo, vamos realizar a interpolação linear (polinômio de grau 1) para estimar $f(0,7)$ e realizar, em seguida, uma análise do erro cometido.

Tabela 3.1: Pontos e valores de f

x	$f(x)$
$x_0 = 0,5$	1,1487
$x_1 = 1$	2,7183

Temos que

$$P(x) = f(x_0)L_{1,0}(x) + f(x_1)L_{1,1}(x) = -1,1487 \cdot \frac{(x-1)}{0,5} + 2,7183 \cdot \frac{(x-0,5)}{0,5}.$$

Então,

$$P(0,7) = 1,7765.$$

Para o cálculo do erro absoluto (supondo que conhecemos o valor de $f(0,7) = 1,7137$), ficamos com a expressão

$$|E_1(0,7)| = |f(0,7) - P(0,7)| = |1,7137 - 1,7765| = |-0,0628| = 0,0628. \quad (3.3)$$

Vamos calcular agora uma estimativa para o erro (como se não conhecêssemos o valor de $f(0,7)$). Segue que

$$|E_1(0,7)| \leq (0,7 - 0,5)(0,7 - 1) \frac{M_2}{2},$$

onde

$$M_2 = \max_{x \in [0,5;1]} |f''(x)| = e^1 = 2,7183.$$

Assim,

$$|E_1(0,7)| \leq 0,0815.$$

Note que de fato a estimativa é verdadeira, já que $|E_1(0,7)| = 0,0628 < 0,0815$. Pelos pontos serem igualmente espaçados, pois $x \in [0,5;1]$ tem-se

$$|E_1(0,7)| < \frac{h^2}{8} \cdot M_2 = \frac{(0,5)^2}{8} \cdot (2,7183) = 0,0850.$$

Este resultado, bem como o anterior, está de acordo com o valor da equação (3.3).

Exemplo 3.6. Sejam a função $f(x) = \cos(x)$ e os pontos $x_0 = 0$, $x_1 = 0,4$, $x_2 = 0,6$ e $x_3 = 0,9$. Vamos contruir o polinômio interpolador de grau três e determinar a aproximação de $f(0,45)$ pelo método de Lagrange, considerando cinco casas decimais. Em seguida, calcular o erro absoluto e a estimativa.

Pelo Teorema 3.1, o polinômio de grau três é dado por

$$P(x) = f(x_0)L_{3,0}(x) + f(x_1)L_{3,1}(x) + f(x_2)L_{3,2}(x) + f(x_3)L_{3,3}(x).$$

Temos, por definição, que

$$L_{3,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}.$$

Seguindo, temos

$$\begin{aligned} L_{3,0}(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \\ &= \frac{(x-0,4)(x-0,6)(x-0,9)}{(-0,4)(-0,6)(-0,9)} \\ &= \frac{(x-0,4)(x-0,6)(x-0,9)}{-0,216}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{3,1}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ &= \frac{x(x-0,6)(x-0,9)}{(0,4)(-0,2)(-0,5)} \\ &= \frac{x(x-0,6)(x-0,9)}{-0,216} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{3,2}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\ &= \frac{x(x-0,4)(x-0,9)}{(0,6)(0,2)(-0,3)} \\ &= \frac{x(x-0,6)(x-0,9)}{-0,036} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{3,3}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\ &= \frac{x(x-0,4)(x-0,6)}{(0,9)(0,5)(0,3)} \\ &= \frac{x(x-0,6)(x-0,9)}{0,135}. \end{aligned}$$

Como

$$f(x_0) = \cos(0) = 1, f(x_1) = \cos(0,4) = 0,92106, f(x_2) = \cos(0,6) = 0,82533$$

$$f(x_3) = \cos(0,9) = 0,62160.$$

Temos que $f(0,45) = \cos(0,45) \approx P(0,45)$. Assim,

$$\begin{aligned} P(0,45) &= f(x_0)L_{3,0}(0,45) + f(x_1)L_{3,1}(0,45) + f(x_2)L_{3,2}(0,45) + f(x_3)L_{3,3}(0,45) \\ &= \frac{(0,45-0,4)(0,45-0,6)(0,45-0,9)}{-0,216} + 0,92106 \cdot \frac{0,45(0,45-0,6)(0,45-0,9)}{-0,216} \\ &\quad + 0,82533 \cdot \frac{0,45(0,45-0,6)(0,45-0,9)}{(-0,036)} + 0,62160 \cdot \frac{0,45(0,45-0,6)(0,45-0,9)}{0,135} \\ &= -0,015625 + 0,69942 + 0,2312 - 0,01554 \\ &= 0,89923. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(0,45) \approx 0,89923.$$

Calculemos o erro e sua estimativa agora. Para o erro absoluto, como $\cos(0,45) = 0,90044$ (com 5 casas decimais), temos

$$|E_3(x)| = |f(x) - P(x)| = |0,90044 - 0,89923| = 0,00120 = 1,21 \times 10^{-3}.$$

Para a estimativa do erro, segue do Corolário 3.3 que

$$\begin{aligned} |E_3(0,45)| &\leq |0,45(0,45-0,4)(0,45-0,6)(0,45-0,9)| \frac{M_4}{4!} \\ &\leq |0,45(0,005)(-0,15)(-0,45)| \frac{M_4}{4!} \\ &\leq |0,00151875| \frac{M_4}{4!}. \end{aligned}$$

Como

$$M_4 = \max_{x \in [0;0,9]} |f^4(x)| = \max_{x \in [0;0,9]} |\cos(x)| \leq 1$$

Então,

$$|E_3(0,45)| \leq 6,33 \times 10^{-5}.$$

Veja que, comparando com o erro absoluto,

$$|E_3(x)| = 1,21 \times 10^{-3} > 6,33 \times 10^{-5}.$$

Nossa estimativa excede o limitante do erro absoluto em aproximadamente 0,001137. Esta contradição ocorre devido ao cálculo com número finito de algarismos para as casas decimais. A fórmula do erro de Lagrange pressupõe uma aritmética com um número infinito de algarismos. Tal fato leva a esta contradição. Nada que considerar mais casas decimais não resolva!

Uma observação a ser feita é que, para se determinar os polinômios de Lagrange, é necessário o conhecimento prévio da função em questão. Aliás, o conhecimento de suas derivadas também. E se tivéssemos apenas um conjunto discreto de pontos e o conhecimento, não da expressão da função completamente, mas dela apenas aplicada nestes pontos? O método de Lagrange não é recomendado para estes casos.

Em 1932, surge então um método para aprimorar o de Lagrange, chamado método de Neville, que visa reduzir os cálculos relacionados aos polinômios já conhecidos de forma interativa, para gerar os demais.

Definição 3.7. *Seja f uma função definida em $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ e suponha que m_1, m_2, \dots, m_k , sejam k números inteiros distintos, com $0 \leq m_i \leq n$ para cada i . O polinômio de Lagrange que coincide com f nos k pontos $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_n}$ é denotado por $P_{m_1, m_2, \dots, m_k}(x)$.*

Exemplo 3.8. Sejam $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$ e $x_4 = 6$. Considerando $f(x) = e^x$, por definição, o polinômio de Lagrange que coincide com $f(x)$ em $x_2 = 3, x_3 = 4$ e $x_4 = 6$ é dado por:

$$\begin{aligned} P_{1,2,4} &= \frac{(x-x_2)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_4)}f(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_4)}f(x_2) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)}f(x_4) \\ &= \frac{(x-3)(x-6)}{(2-3)(2-6)}e^2 + \frac{(x-2)(x-6)}{(3-2)(3-6)}e^3 + \frac{(x-2)(x-3)}{(6-2)(6-3)}e^6. \end{aligned}$$

O teorema a seguir apresenta uma forma para gerar recursivamente as aproximações pelos polinômios de Lagrange.

Teorema 3.9 (Método de Neville). *Seja f uma função definida em x_0, x_1, \dots, x_k , e sejam x_j, x_i dois números distintos nesse conjunto. Então,*

$$P(x) = \frac{(x-x_j)P_{0,1,\dots,j-1,j+1,\dots,k}(x) - (x-x_i)P_{0,1,\dots,i-1,i+1,\dots,k}(x)}{(x_i-x_j)}$$

é o k -ésimo polinômio de Lagrange que interpola f nos $k+1$ pontos x_0, x_1, \dots, x_k .

Demonstração: Para não ficarmos com expressões grandes, tome $Q = P_{0,1,\dots,j-1,j+1,\dots,k}$ e $\widehat{Q} = P_{0,1,\dots,i-1,i+1,\dots,k}$. Veja que $Q(x)$ e $\widehat{Q}(x)$ possuem grau no máximo $k-1$ e, então, $P(x)$ é de grau no máximo k . Como, por definição, $Q(x_i) = f(x_i)$, segue que

$$P(x_i) = \frac{(x_i-x_j)Q(x_i) - (x_i-x_i)\widehat{Q}(x_i)}{(x_i-x_j)} = \frac{(x_i-x_j)f(x_i)}{(x_i-x_j)} = f(x_i).$$

Temos também que $\widehat{Q}(x_j) = f(x_j)$. Logo,

$$P(x_j) = \frac{(x_j-x_j)Q(x_j) - (x_j-x_i)\widehat{Q}(x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{(x_i-x_j)f(x_j)}{(x_i-x_j)} = f(x_j).$$

Contudo, por definição, $P_{0,1,\dots,k}(x)$ é o único polinômio de grau k que coincide com f em x_0, x_1, \dots, x_k . Ou seja, $P \equiv P_{0,1,\dots,k}$. ■

Para simplificar a notação e não termos múltiplos índices, para $0 \leq j \leq i$, vamos escrever

$$Q_{i,j} = P_{i-j,i-j+1,\dots,i-1,i},$$

o polinômio interpolador de grau j nos $(j+1)$ números $x_{i-j}, x_{i-j+1}, \dots, x_{i-1}, x_i$.

Exemplo 3.10. A Tabela 3.2 abaixo fornece valores de uma função em vários pontos. Utilizando o Método de Neville, vamos interpolar estes pontos para encontrar um valor aproximado desta função (desconhecida) em $x = 1,5$ tal que a tolerância seja menor do que 1×10^{-2} .

Tabela 3.2: Pontos e suas imagens por uma função f

x_i	$f(x_i)$
1,0	0.7651977
1,3	0.6200860
1,6	0.4554022
1,9	0.2818186
2,2	0.1103623
2,5	-0.0438383

Vamos mostrar que $|P_i(x) - P_j(x)| < 1 \times 10^{-4}$. Como $1 \times 10^{-4} < 1 \times 10^{-2}$, chegamos na tolerância desejada. Pela Tabela 3.2 e por definição, temos

Tabela 3.3: Base recursiva de polinômios

$x_0 = 1,0$	$f(x_0) = Q_{0,0}$
$x_1 = 1,3$	$f(x_1) = Q_{1,0}$
$x_2 = 1,6$	$f(x_2) = Q_{2,0}$
$x_3 = 1,9$	$f(x_3) = Q_{3,0}$
$x_4 = 2,2$	$f(x_4) = Q_{4,0}$
$x_5 = 2,5$	$f(x_5) = Q_{5,0}$

Calculando os próximos a partir destes, temos

$$\begin{aligned}
 P_{0,1} = Q_{1,1}(1,5) &= \frac{(x - x_0)Q_{1,0} - (x - x_1)Q_{0,0}}{x_1 - x_0} \\
 &= \frac{(1,5 - 1,0)(0,6200860) - (1,5 - 1,3)(0,7651977)}{1,3 - 1,0} \\
 &= 0,5233449
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{1,2} = Q_{2,1}(1,5) &= \frac{(x - x_1)Q_{2,0} - (x - x_2)Q_{1,0}}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{(1,5 - 1,3)(0,4554022) - (1,5 - 1,6)(0,6200860)}{1,6 - 1,3} \\
 &= 0,51022968
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{2,3} = Q_{3,1}(1,5) &= \frac{(x - x_2)Q_{3,0} - (x - x_3)Q_{2,0}}{x_3 - x_2} \\
 &= \frac{(1,5 - 1,6)(0,2818186) - (1,5 - 1,9)(0,4554022)}{1,9 - 1,6} \\
 &= 0,5132634
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{3,4} = Q_{4,1}(1,5) &= \frac{(x - x_3)Q_{4,0} - (x - x_4)Q_{3,0}}{x_4 - x_3} \\
&= \frac{(1,5 - 1,9)(0,1103623) - (1,5 - 2,2)(0,0,2818186)}{2,2 - 1,9} \\
&= 0,5104270 \\
P_{5,4} = Q_{5,1}(1,5) &= \frac{(x - x_4)Q_{5,0} - (x - x_5)Q_{4,0}}{x_5 - x_4} \\
&= \frac{(1,5 - 2,2)(-0,04383838) - (1,5 - 2,5)(0,1103623)}{2,5 - 2,2} \\
&= 0,4807699.
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
P_{0,1,2} = Q_{2,2}(1,5) &= \frac{(x - x_0)Q_{2,1} - (x - x_2)Q_{1,1}}{x_2 - x_0} \\
&= \frac{(1,5 - 1,0)(0,5102968) - (1,5 - 1,6)(0,5233449)}{1,6 - 1,0} \\
&= 0,5124715 \\
P_{1,2,3} = Q_{3,2}(1,5) &= \frac{(x - x_1)Q_{3,1} - (x - x_3)Q_{2,1}}{x_4 - x_2} \\
&= \frac{(1,5 - 1,3)(0,5132634) - (1,5 - 1,9)(0,5102968)}{2,2 - 1,6} \\
&= 0,5112857 \\
P_{2,3,4} = Q_{4,2}(1,5) &= \frac{(x - x_2)Q_{4,1} - (x - x_4)Q_{3,1}}{x_4 - x_2} \\
&= \frac{(1,5 - 1,6)(0,5104270) - (1,5 - 2,2)(0,5132634)}{1,9 - 1,6} \\
&= 0,5137361 \\
P_{3,4,5} = Q_{5,2}(1,5) &= \frac{(x - x_5)Q_{5,1} - (x - x_4)Q_{4,1}}{x_5 - x_3} \\
&= \frac{(1,5 - 2,5)(0,4807699) - (1,5 - 2,2)(0,5104270)}{2,5 - 1,9} \\
&= 0,5301984.
\end{aligned}$$

O processo para os demais cálculos é análogo. Mostraremos o resultado final pressupondo que o leitor já tenha se familiarizado. Segue que $P_{0,1,2,3} = Q_{3,3} = 0,5118127$, $P_{1,2,3,4} = Q_{4,3} = 0,5118302$, $P_{2,3,4,5} = Q_{5,3} = 0,519070$ e $P_{0,1,2,3,4} = Q_{4,4} = 0,5118200$, $P_{1,2,3,4,5} = Q_{5,4} = 0,5118430$.

Com todos estes dados, montamos a seguinte tabela:

Tabela 3.4: Sequência recursivas dos valores da f

1, 0	0, 761977					
1, 3	0, 6200860	0, 5233449				
1, 6	0, 4554022	0, 5102968	0, 5124715			
1, 9	0, 2818186	0, 5132634	0, 5112857	0, 5118127		
2, 2	0, 1103623	0, 5104270	0, 5137361	0, 5118302	0, 5118200	
2, 5	-0, 0483838	0, 4807699	0, 5301984	0, 5119070	0, 5118430	0, 5118277

onde seguimos a ordem da tabela abaixo.

Tabela 3.5: Ordem recursiva dos polinômios

x_0	P_0					
x_1	P_1	$P_{0,1}$				
x_2	P_2	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2}$			
x_3	P_3	$P_{2,3}$	$P_{1,2,3}$	$P_{0,1,2,3}$		
x_4	P_4	$P_{3,4}$	$P_{2,3,4}$	$P_{1,2,3,4}$	$P_{0,1,2,3,4}$	
x_5	P_5	$P_{4,5}$	$P_{3,4,5}$	$P_{2,3,4,5}$	$P_{1,2,3,4,5}$	$P_{0,1,2,3,4,5}$

Como não podemos calcular o erro pela fórmula de Lagrange, determina-se uma margem na qual se queira ficar abaixo com a aproximação. Neste caso, determinamos a margem de 1×10^{-2} . Lembrando que escolhemos convenientemente 1×10^{-4} , este número prévio ajuda a mostrar quando paramos de aplicar o método de Neville. Veja que

$$|P_{1,2,3,4,5} - P_{0,1,2,3,4}| = 0,000023 = 2,3 \times 10^{-5} < 1 \times 10^{-4} < 1 \times 10^{-2}.$$

Então, concluímos que a aproximação 0,5118277 está boa, com exatidão até a sétima casa decimal, já que o valor real desta função é de 0,5118277. Ela é conhecida como “*função de Bessel de primeira espécie e ordem zero*”.

3.3 Aplicações

Para finalizar este capítulo, separamos esta seção com algumas situações problemas nas quais podemos realizar aproximações utilizando os polinômios de Lagrange.

Esta seção foi baseada nas referências [6] e [3], onde selecionamos exercícios e apresentamos as soluções a seguir.

Exemplo 3.11. (Exercício 4.6.6.2 da referência [3]) A velocidade v (em m/s) de um foguete lançado do solo foi medida quatro vezes, t segundos após o lançamento, e os dados foram registrados na Tabela 3.6. Calcular usando um polinômio de grau quatro, a velocidade aproximada do foguete após 25 segundos do lançamento.

Tabela 3.6: Relação entre tempo e velocidade

tempo (s)	velocidade (m/s)
0	0,000
8	52,032
20	160,450
30	275,951
45	370,276

Solução: Sejam os pontos x_i os valores do tempo e as velocidades a imagem de cada x_i pela função, digamos, f . Queremos a aproximação de grau quatro de $f(25)$. Temos que

$$P_4(x) = f(x_0)L_{4,0} + f(x_1)L_{4,1} + f(x_2)L_{4,2} + f(x_3)L_{4,3} + f(x_4)L_{4,4}. \quad (3.4)$$

Realizando os cálculos análogo aos do capítulo anterior, segue que

$$L_{4,0} = 0,204629$$

$$L_{4,1} = -0,159961$$

$$L_{4,2} = 0,708333$$

$$L_{4,3} = 0,429292$$

$$L_{4,4} = -0,017017.$$

Substituindo esses valores na equação (3.4), ficamos com

$$\begin{aligned} P_4(25) &= 0,204629 \cdot 0,0 - 0,159961 \cdot 52,032 + 0,708333 \cdot 160,450 \\ &+ 0,429292 \cdot 275,951 - 0,017017 \cdot 370,276 \\ &= -8,32309 + 113,65203 + 118,46785 - 6,30098 \\ &\approx 217,5 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Então,

$$f(25) \approx 217,5 \text{ m/s}.$$

Neste exercício, não podemos realizar a estimativa do erro, uma vez que não conhecemos a função.

Exemplo 3.12. (Exercício 4.9.15 da referência [3]) Utilize a Tabela 3.7 para determinar a que temperatura a água entra em ebulição no Pico da Bandeira (altitude = 2.890m).

Tabela 3.7: Variação da ebulição em relação à altitude

Altitude (m)	Ponto de Ebulição da água (C)
2.600	91,34
2.700	91,34
2.800	90,67
2.900	90,34
3.000	90,00

Solução: Veja que não está claro o grau do polinômio a ser considerado, mas aplicaremos a aproximação de grau quatro para obter a melhor possível com os dados que temos. Temos que

$$P_4(x) = f(x_0)L_{4,0} + f(x_1)L_{4,1} + f(x_2)L_{4,2} + f(x_3)L_{4,3} + f(x_4)L_{4,4}. \quad (3.5)$$

Calculando, obtemos

$$L_{4,0} = 0,0078375$$

$$L_{4,1} = -0,04785$$

$$L_{4,2} = 0,151525$$

$$L_{4,3} = 0,90915$$

$$L_{4,4} = -0,0206625.$$

Basta, então, substituir estes valores e os valores de $f(x_i)$ contidos na Tabela 3.7 na equação 3.5, a fim de obter

$$\begin{aligned} P_4(2.890) &= 0,0078375 \cdot (2.600) - 0,04785 \cdot (2.700) + 0,151525 \cdot (2.800) \\ &+ 0,90915 \cdot (2.900) - 0,0206625 \cdot (3.000) \\ &= 0,717 - 4,369 + 13,74 + 82,109852 - 1,863 \\ &\approx 90,35. \end{aligned}$$

Exemplo 3.13. (Exemplo 4.8.1 da referência [3]) Um fazendeiro, verificando a necessidade de construir um novo estábulo, escolheu um local próximo a uma nascente, de forma que, perto do estábulo, pudesse ter também um reservatório de água. Junto à nascente, ele construiu uma barragem e instalou um carneiro, para que à água pudesse chegar ao reservatório e notou os seguintes pontos:

(I) A vazão da fonte de alimentação era aproximadamente de 30 litros por minuto (quantidade de água que aflui ao carneiro);

(II) A altura de queda era de 6 metros (altura entre o carneiro e o nível de água da fonte de alimentação);

(III) O reservatório se encontrava a uma altura de recalque de 46 metros (altura entre o carneiro e o nível da água no reservatório).

Munido desses dados, o fazendeiro gostaria de saber quantas vacas leiteiras poderiam ocupar o estábulo, sabendo que o consumo diário de cada uma, incluindo o asseio do estábulo, é de 120 litros.

Solução: Para resolver este problema usaremos o cálculo da vazão de recalque (aquela que flui do carneiro para o reservatório), que é dada pela fórmula:

$$q = Q \frac{h}{H} R, \quad (3.6)$$

onde

q = vazão de recalque

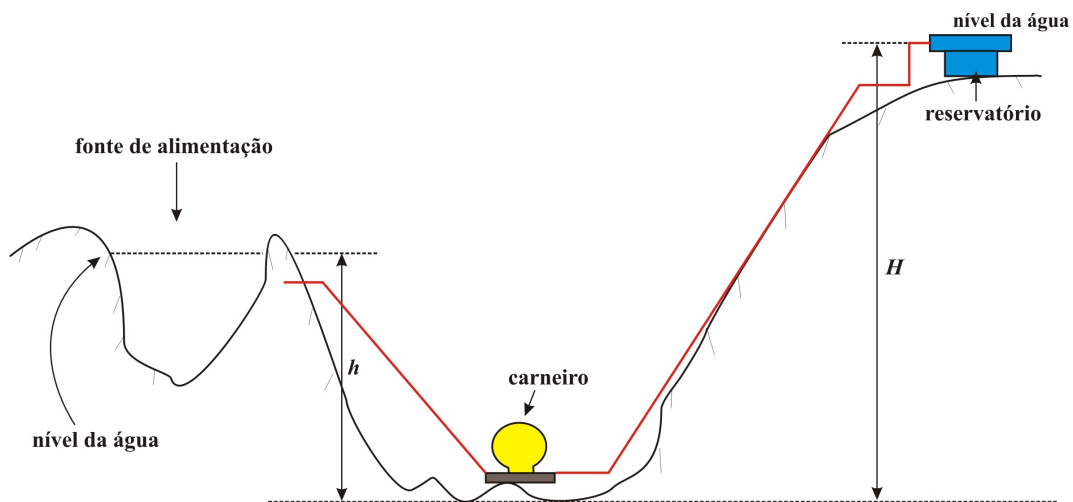
Q = vazão da fonte de alimentação

h = altura de queda

H = altura do recalque

R = rendimento do carneiro.

Figura 3.3: Ilustração do reservatório



Fonte: Arquivo pessoal

Veja que precisamos saber o rendimento do carneiro para solucionar. Para tal, segue a tabela.

Tabela 3.8: Relação entre altura e rendimento do carneiro

H/h	Rend.
6,0	0,6728
6,5	0,6476
7,0	0,6214
7,5	0,5940
8,0	0,5653
8,5	0,5350
9,0	0,5029

Solução: O exercício nos diz que $H = 46$ metros e $h = 6$ metros. Temos, então,

$$\frac{H}{h} = \frac{46}{6} = 7,67.$$

Portanto, devemos realizar a aproximação de $f(7,67)$. Para isso, utilizando todos os pontos da Tabela 3.8, temos um polinômio de grau seis dado por

$$P_6(x) = f(x_0)L_{6,0} + f(x_1)L_{6,1} + f(x_2)L_{6,2} + f(x_3)L_{6,3} + f(x_4)L_{6,4} + f(x_5)L_{6,5} + f(x_6)L_{6,6}.$$

Calculando, temos que

$$L_{6,0} = -0,0043152$$

$$L_{6,1} = 0,036956$$

$$L_{6,2} = -0,16134$$

$$L_{6,3} = 0,84781$$

$$L_{6,4} = 0,3275628$$

$$L_{6,5} = -0,05209432$$

$$L_{6,6} = 0,00542.$$

Assim,

$$\begin{aligned} P_6(7,67) &= -0,0043152 \cdot 0,6728 + 0,036956 \cdot 0,6476 - 0,16134 \cdot 0,6214 + 0,84781 \cdot 0,5940 \\ &+ 0,84781 \cdot 0,5940 + 0,3275628 \cdot 0,5653 - 0,0520943 \cdot 0,5350 + 0,00542 \cdot 0,5029 \\ &= -0,0029033 + 0,023933 - 0,1002567 + 0,50359914 \\ &+ 0,185171251 - 0,00278705 + 0,00272572 \\ &\approx 0,5844. \end{aligned}$$

Portanto,

$$R = f(7,67) \approx P_6(7,67) = 0,5844.$$

Substituindo na equação (3.6), obtemos

$$q = 30 \cdot \frac{6}{46} \cdot 0,5844 = 2,29 \text{ l/m}.$$

Logo, em um dia, entram no reservatório a quantidade de

$$2,29 \times 60 \times 24 = 3.297,60 \text{ l.}$$

Ora, como uma vaca leiteira consome 120 litros de água por dia, incluindo o asseio do estábulo, concluímos que o estábulo comporta $\frac{3.297,60}{120} = 27,48 \approx 27$ vacas.

Para o leitor que buscar o exercício na referência [3], verá que o autor calcula por um método mais rápido que utiliza menos operações com a probabilidade de erro menor, chamado método de *Gregory-Newton*, e chega no mesmo resultado.

Exemplo 3.14. (Exercício 4.9.6 da referência [3]) Este é o problema de interpolação inversa e, para resolvê-lo, basta fazer uma troca de variáveis. O que era variável independente passará a ser dependente e vice-versa.

Com base nesta explicação, determine o valor aproximado de x sabendo que $f(x) = 0,9500$, usando os valores da função $f(x) = \text{sen}(x)$, x em radianos, registrados na tabela a seguir.

Tabela 3.9: Base dos valores da função em alguns pontos

x_i	$f(x_i)$
1,75	0,9840
1,80	0,9738
1,85	0,9613
1,9	0,9463

Solução: Como $f(x) = 0,9500 \in [0,9463; 0,9613]$, usaremos a aproximação linear, ou seja, de primeiro grau. Tem-se

$$P_1(x) = f(x_0)L_{1,0} + f(x_1)L_{1,1}.$$

Calculando as funções L e substituindo na equação acima, temos

$$\begin{aligned} P_1(x) &= (x - 1,9) \frac{0,9613}{-0,05} + (x - 1,85) \frac{0,9463}{0,05} \\ &= -0,3x + 1,5163. \end{aligned}$$

Mas

$$P_1(x) = 0,9500 \Leftrightarrow -0,3x + 1,5163 = 0,9500 \Rightarrow x = 1,8876.$$

Veja que apesar de se tratar do polinômio de grau 1, temos uma aproximação relativamente boa, pois

$$\text{sen}(1,8876) = 0,950225$$

Neste exemplo, podemos calcular o erro absoluto, dado por

$$E_1(x) = |f(1,8876) - P_1(1,8876)| = 0,00022 = 2,2 \times 10^{-4}.$$

Com os dados da Tabela 3.9, desafiamos o leitor a realizar a aproximação de grau três. Os cálculos o levarão para equações cúbicas e, utilizando artifícios de resolução para estas equações, o leitor notará quão boas são as aproximações com polinômios de grau mais alto.

Exemplo 3.15. Uma aplicação comum do método de interpolação polinomial de Lagrange encontra-se em integrais. Podemos aplicar em diversas integrais, mas o interessante são naquelas cujas soluções são encontradas, por exemplo, com o recursos computacionais e não com técnicas do Cálculo Integral, como no caso de $\int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx$.

Realizaremos aproximações de grau dois da função $g(x) = \sqrt{1+x^4}$ nos seguintes pontos $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$ e $x_2 = 1$. Temos

$$P_2(x) = \frac{(x-0,5)(x-1)}{0,5} - 1,03 \frac{x(x-1)}{0,25} + 1,41 \frac{x(x-0,5)}{0,5}.$$

Integrar polinômio é muito mais simples que integrar a função g . Calculando, obtemos

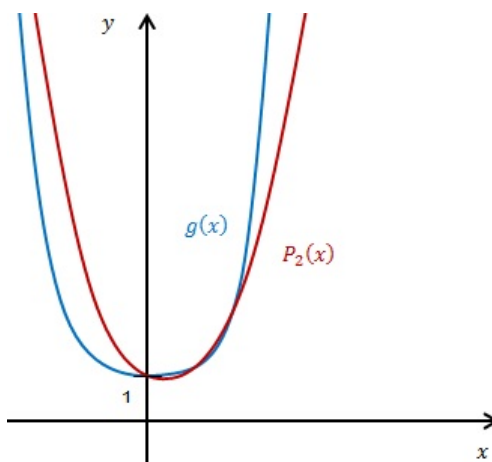
$$\int_0^1 P_2(x) dx = 1,08833.$$

Com o auxílio do site *WolframAlpha*, encontrado na referência [32], o valor melhor aproximado (pois, lá, utiliza-se o computador para aproximar) é

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx \approx 1,08943.$$

Veja na figura a seguir o quão boa foi a aproximação que obtivemos. Uma exatidão de duas casas decimais utilizando uma aproximação de grau dois. Convertemos a função para um polinômio e integramos, facilitando todo o processo.

Figura 3.4: Aproximação de grau dois da função g



Fonte: Arquivo pessoal

O método de Lagrange, como vários outros métodos de interpolação, é bastante utilizado para integrais no Cálculo Numérico e destaca-se por utilizar polinômios pela facilidade na integração.

Exemplo 3.16. Vejamos agora a integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx$. Não há técnicas do Cálculo para resolvê-la. Consideremos, então, os pontos $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,7$ e $x_3 = 1$. O polinômio de grau três associado à função $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ é

$$\begin{aligned} P_3(x) &= -\frac{(x-0,5)(x-0,7)(x-1)}{0,35} + 0,97014 \frac{x(x-0,7)(x-1)}{0,05} \\ &\quad - 0,898 \frac{x(x-0,5)(x-1)}{0,042} + 0,70711 \frac{x(x-0,5)(x-0,7)}{0,15}. \end{aligned}$$

Enquanto

$$\int_0^1 h(x) dx \approx 0,927037,$$

temos que

$$\int_0^1 P_3(x) dx = 0,931279.$$

Desafiamos o leitor mais curioso a realizar o cálculo com os pontos sendo igualmente espaçados. A escolha do grau é livre, mas lembre que, quanto maior o grau, melhor a aproximação.

Deixaremos também a cargo do leitor realizar a interpolação de grau dois para aproximar o valor da integral $\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1+\sin^4(x)}} dx$, usando os pontos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$ e $x_2 = \pi$. Para visualizar o gráfico das funções encontradas, recomendamos o programa matemático *Geogebra* e, para compararem os resultados, acesse o site da referência [32].

Capítulo 4

Considerações Finais

A construção histórica da matemática nos mostra que todo desenvolvimento humano, como resultado das explorações matemáticas, ascendeu com o uso dos conhecimentos de gerações anteriores de estudiosos na área, como, por exemplo, o período das explorações marítimas. Neste período, o estudo de aproximações de funções se tornou essencial para o sucesso das expedições e, conseqüentemente, surgiu a necessidade de existirem métodos que proporcionassem cálculos mais simples. Neste cenário, surgiram as interpolações polinomiais.

Visto a importância e contribuições deste estudo, tanto para a matemática pura quanto para a aplicada, construímos este trabalho com o objetivo de apresentar uma das formas de se aproximar funções por meio de interpolações polinomiais, o método de Joseph-Louis Lagrange. Muitos matemáticos, como Newton e Hermite, construíram suas maneiras de interpolar, mas Lagrange foi um dos pioneiros na área. Apesar de ser um dos métodos considerado mais trabalhoso devido à quantidade de cálculos, é tão preciso quanto os demais.

Com uma abordagem relativamente simples, apresentamos e definimos conceitos da matemática pura como funções contínuas e uniformemente contínuas e derivadas, essenciais para uma boa compreensão do trabalho. Em particular, o conceito de derivadas são fundamentais para a existência dos polinômios de Taylor, usados algumas vezes para aproximar funções. O Teorema de Weierstrass, que nos garante que, dada uma função contínua f em $[a, b]$, existe um polinômio P que satisfaz $|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b]$ foi apresentado inicialmente como motivador para os demais resultados de aproximação. A distância entre P e f pode ser tão pequena quanto se queira ou até, em alguns casos, zero, quando $f(x) = P(x)$ (o trabalho apresenta casos de funções diferentes de P).

Vimos dois exemplos práticos do uso da interpolações e formas distintas de se calcular o erro. Uma das situações apresentadas é a aplicação em integrais. Consideramos integrais cujos resultados obtemos por meio de recursos computacionais e, nestes exemplos, mostramos o quão bom pode ser o método de Lagrange. A segunda situação é apresentada quando não possuímos a função expressamente, mas apenas nos pontos tabelados. Nos dois casos, podemos determinar

o erro ou um limitante para o erro. Na primeira situação, aplicamos o Teorema do Polinômio Interpolador de Lagrange com o grau pré-determinado e, em seguida, aplicamos o valor de x na função e calculamos o erro absoluto. Aqui, não é comum determinar um limitante. Já no segundo caso, a análise é um pouco mais trabalhosa, pois não possuímos a função. Então, apresentamos o método de Neville, que gera uma série recursiva de polinômios utilizando os valores dos polinômios de Lagrange, o que diminui os cálculos. Em exemplos assim, é comum que seja determinado um limitante de erro para saber quando encerrar o processo recursivo.

Este trabalho me proporcionou uma visão mais real de como a matemática se comporta e auxilia o ser humano em seu desenvolvimento. Foi uma excelente experiência. Vi o quanto temos que ser cautelosos nos cálculos e na escolha da modelagem mais apropriada. Percebi que, apesar de a matemática ser exata, as aproximações são suficientes. Podemos ficar sobre uma margem de erro muito pequena em aproximar as funções f e g , de modo que, na prática, é imperceptível a diferença, embora no rigor matemático conseguimos ver a distância entre elas.

Os teoremas apresentados possuem inúmeras aplicações e, particularmente, gostaria muito que este trabalho despertasse nos meus colegas o interesse pelo estudo sobre matemática aplicada, pois, com certeza, amariam ainda mais esta ciência. Deixo duas sugestões de tema para trabalhos futuros, a saber, Aplicações do Teorema de Aproximação de Weierstrass, e Métodos de Newton e de Hermite para Interpolações, todos encontrados nas referências deste trabalho.

Referências

- [1] ANDRADE, Doherty. **Teorema de Taylor**. Paraná: Dma-uem, [2016]. 6 p. Departamento de Matemática. Disponível em: Teorema de Taylor-DMA-UEM <www.dma.uem.br/kit/arquivos/arquivos_pdf/taylor.pdf>. Acesso em: 03 jul. 2017.
- [2] **Aproximação Polinomial de Funções**. Lisboa: Socius, [2016]. 11 p. Disponível em: <<http://pascal.iseg.utl.pt/~jldias/am1/AMI-pdf/AMAT1-TAY.pdf>>. Acesso em: 04 jul. 2017.
- [3] BARROSO, Leônides Conceição et al. **Cálculo Numérico (com aplicações)**. 2. ed. São Paulo: Harbra Ltda, [1987]. Professores assistentes do Departamento de Ciências da Computação da UFMG.
- [4] BOLDRINI, José Luís et al. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.
- [5] BOYER, Carl B.. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. Revisado por Uta C. Merzbach.
- [6] BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Análise Numérica**. São Paulo: Cengage Learning, 2008. Tradução da 8ª norte-americana.
- [7] **C([0, 1]) e o Teorema da Aproximação de Weierstrass**. São Paulo: Ime-usp, 2009. 8 p. Instituto de Matemática e Estatística. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/foque/MAT0317/weier.pdf>>. Acesso em: 03 jul. 2017.
- [8] **Cálculo 1**. Rio de Janeiro: Webma, 2017. Disponível em: <http://www.uff.br/webmat/Calc1_LivroOnLine/Cap26_Calc1.html>. Acesso em: 06 nov. 2017.
- [9] CÂNDIDO, Ana Cláudia Piau et al. **Teorema do Binômio de Newton (Triângulo de Pascal)**. São Paulo: Imecc-unicamp, 2014. 20 p. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-Unicamp. Disponível em: <www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/BN_M1_FM.2014.pdf>. Acesso em: 27 ago. 2017.

- [10] **Continuidade e Continuidade Uniforme.** Sergipe: Cesadufs, 2016. 50 p. Notas de Aula. Disponível em: <http://www.cesadufs.com.br/ORBI/public/uploadCatalogo/15440701082013Analise_na_Reta_Aula_6.pdf>. Acesso em: 01 out. 2017.
- [11] **Continuidade Uniforme.** Rio de Janeiro: Impa, [2016]. 182 p. Notas de Aula. Disponível em: <w3.impa.br/~hermano/analise/analise2.pdf>. Acesso em: 01 out. 2017.
- [12] EVARISTO; ARGIMIRO. **Interpolação Polinomial.** Rio de Janeiro: Peq-coppe, [2016]. 26 p. Disponível em: <http://www2.peq.coppe.ufrj.br/Pessoal/Professores/Arge/EQE358/Capitulo3-Interpolacao_Polinomial.pdf>. Acesso em: 31 nov. 2017.
- [13] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Campinas: Editora Unicamp, 2004. 884 p. Tradução de: Hygino H. Domingues.
- [14] **Existência da Derivada.** Goiânia: Mat-ufg, [2016]. 27 p. Disponível em: <https://jhacruz.mat.ufg.br/up/39/o/Capítulo_4.pdf>. Acesso em: 25 out. 2017.
- [15] GOLDBERG, Richard R.. **Methods of real analysis.** 2. ed. Hoboken: John Wiley&Sons, [1976].
- [16] HOLANDA, Aurélio Buarque de. **Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa.** 5. ed. Curitiba: Editora Positivo, 2010. 2272 p.
- [17] **Interpolação Polinomial de Lagrange e de Hermite.** Rio de Janeiro: Peq-coppe, [2017]. 27 p. Disponível em: <[http://www2.peq.coppe.ufrj.br/Pessoal/Professores/Arge/COQ862 InterpolacoesPolinomiais.pdf](http://www2.peq.coppe.ufrj.br/Pessoal/Professores/Arge/COQ862%20InterpolacoesPolinomiais.pdf)>. Acesso em: 04 jul. 2017.
- [18] LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do Ensino Médio (Volume 1).** 9. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2000. 125 p. COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA.
- [19] LIMA, Elon Lages. **Análise Real volume 1: Funções de Uma Variável.** 12. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2016. 198 p. Coleção matemática universitária.
- [20] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise vol. 1.** 12. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2006. 431 p.
- [21] LOPES, Wanda Aparecida. **O Teorema de Stone-Weierstrass e Aplicações.** 2009. 69 f. Monografia (Especialização) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2009.

- [22] MEDEIROS, Heloísa Bauzer; MENEZES, Maria Lucia. **Aproximação de funções: Polinômios de Bernstein**. Rio de Janeiro: Ime-uff, 2011. 5 p. Instituto de Matemática e Estatística-UFF. Disponível em: <<http://klein.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/17/2016/02/Aproximação-de-Funções.pdf>>. Acesso em: 27 ago. 2017.
- [23] **Polinômio de Taylor e Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange**. Rio de Janeiro: Uff, [2016]. Disponível em: <http://www.uff.br/webmat/Calc1_LivroOnLine/Cap26_Calc1.html>. Acesso em: 04 jul. 2017.
- [24] ROBERTSON, E.; O'CONNOR, J. **The MacTutor History of Mathematics archive**. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernstein_Sergi.html>. Acesso em: 20 de nov. de 2017.
- [25] ROBERTSON, E.; O'CONNOR, J. **The MacTutor History of Mathematics archive**. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Taylor.html>>. Acesso em 22 de nov de 2017.
- [26] ROBERTSON, E.; O'CONNOR, J. **The MacTutor History of Mathematics archive**. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lagrange.html>>. Acesso em 23 de nov de 2017.
- [27] RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson Markron Books, 1996. Departamento de Matemática Aplicada IMECC - UNICAMP.
- [28] SANTOS, Wiliam Geraldo Moreira dos. **Aproximação Por Funções Polinomiais (Polinômios de Taylor)**. 2006. 49 f. Monografia (Especialização) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.
- [29] SILVA, Jaime Carvalho. **Princípios de Análise Matemática Aplicada - Suplemento**. Universidade de Coimbra, 2002. 41f.
- [30] UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS. **Manual para Elaboração e Normalização de Trabalhos de Conclusão de Curso do Câmpus de Araguaína**. Araguaína: UFT, 2011.
- [31] STEWART, James. **Cálculo Volume I**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. 661 p.
- [32] WOLFRAM, Stephen. **WolframAlpha**: [1986]. Disponível em: <<https://www.wolframalpha.com>>. Acesso em: 20 dez. 2017.