UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOÃO MARCOS ALVES DE SOUZA

INTRODUÇÃO À TEORIA DOS JOGOS E APLICAÇÕES NA ECONOMIA

ARAGUAÍNA
2018

JOÃO MARCOS ALVES DE SOUZA

INTRODUÇÃO À TEORIA DOS JOGOS E APLICAÇÕES NA ECONOMIA

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior.

ARAGUAÍNA
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

A474i Alves de Souza, João Marcos.
Introdução à Teoria dos Jogos e Aplicações na Economia. / João Marcos Alves de Souza. – Araguaína, TO, 2018.
55 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2018.
Orientador: José Carlos De Oliveira Junior

1. Teoria dos Jogos. 2. Equilíbrio de Nash. 3. Aplicações na Economia. 4. Aplicação da Matemática. I. Título

CDD 510

JOÃO MARCOS ALVES DE SOUZA

INTRODUÇÃO À TEORIA DOS JOGOS E APLICAÇÕES NA ECONOMIA

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior .

Aprovada em: / / .

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior (orientador)

Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hancco

Profa. Dra. Fernanda Vital de Paula

AGRADECIMENTOS

Primordialmente, agradeço a Deus, nosso Senhor, pela saúde, disposição e coragem para este desafio. Obrigado pelo amanhecer concedido, pela proteção, pelas lutas e pelas vitórias.

Agradeço a mais generosa das pessoas, minha esposa Áurea Barbosa, que me cede tempo, paciência, companheirismo e imensurável incentivo. Você, com infinita certeza, tem participação direta em cada linha destas escritas e das escritas da minha vida. A você, todo o meu amor e gratidão.

Minha gratidão à minha primeira família. Mesmo distantes, o apoio foi fundamental para o prosseguimento de meus trabalhos universitários. As simples, mas valorosas mensagens trocadas foram as mais incentivadoras. Aos meus irmãos Wilson, Lúcia, Wanderley e Ângelo: os ensinamentos de nossa mãe não foram em vão; foram cruciais em minha formação.

Aos, que considero, minha segunda família (pais e irmãos de minha esposa), os momentos que proporcionam fazem me sentir no amparo do lar, tão valorizado por mim.

Ao meu amigo, parceiro de trabalho, Romariano Silva, serei eternamente grato pelo apoio e condução da empresa quando não estive tão presente. A certeza da boa liderança junto aos demais colaboradores me proporcionou tranquilidade durante a minha trajetória acadêmica.

Ao dinâmico Professor Doutor José Carlos, minha profunda admiração pela entrega à profissão. Agradeço a disponibilidade nos mais controversos horários, ao apoio intelectual irrestrito que extrapola os limites entre orientador e orientado. Tomarei como espelho sua índole e espírito engajador.

A todos os outros professores que a quem tive o privilégio de ser aluno, meu muito obrigado. Enfatizo que, além dos ensinamentos de lousa, plagio para a vida a educação e cordialidade do Professor Álvaro Yucra, a agilidade e consistência da Professora Fernanda Vital, a cumplicidade e empatia da professora Renata, a dedicação do professor Sinval Oliveira, a organização da professora Yukiko Massago, o companheirismo do professor André e demais que contribuíram para minha formação.

A todos os colaboradores da Universidade Federal do Tocantins, agradeço pelos trabalhos nos bastidores que, mesmo com poucos recursos, nos proporcionam o bem estar tão importante em nossos estudos.

Aos colegas de curso mais próximos: Daniel Alves, Eduardo Dias, Luan Alves, Rosalina Viana, Rafael e Tarcísio, meu sincero agradecimento. As madrugadas de estudo ficaram mais leves com a proximidade de vocês. A história de vida de cada me engrandeceu pessoalmente e espiritualmente.

Por fim, agradeço a todos que torceram, aconselharam, incentivaram e que, de alguma forma, contribuíram para a minha formação. Meu muito obrigado a todos!

''Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades; lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível''.

Charles Chaplin

RESUMO

Nesta monografia, apresentaremos uma introdução à Teoria dos Jogos e, dentre as várias aplicações, evidenciaremos as pertinentes ao meio econômico. Mostraremos como a decisão de cada jogador afeta a decisão de outro. Não se trata de apresentar uma prescrição de como jogar, mas sim de fornecer ferramentas estratégicas e mecanismos de análises racionais com a intenção de maximizar suas vantagens no ambiente corporativo. Com grande avanço provocado pela Segunda Guerra Mundial, e pelo bem sucedido uso estratégico militar, contextualizaremos historicamente a teoria, passando pelo seus idealizadores formais até o reconhecimento mundial proporcionado por John Forbes Nash Júnior, matemático e ganhador do prêmio Nobel de economia, pela generalização da teoria que levou o seu nome: Teoria do Equilíbrio de Nash. Após a demonstração matemática deste resultado, concluiremos o trabalho explanando o seu uso comprovado, como fator decisório, na recuperação judicial de uma grande empresa.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos. Equilíbrio de Nash. Aplicações na Economia.

ABSTRACT

In this monograph, we will present an introduction to the Theory of Games and, among the various applications, we will highlight those pertinent to the economic environment. We'll show how each player's decision affects another's decision. It is not a question of presenting a prescription for how to play, but rather of providing strategic tools and rational analysis mechanisms with the intention of maximizing its advantages in the corporate environment. With great advance brought about by World War II, and by the successful military strategic use, we will contextualize historically the theory, passing through its formal idealizers to the world recognition provided by John Forbes Nash Júnior, mathematician and winner of the Nobel prize of economy, by the generalization of the theory that took its name: Nash's Theory of Balance. After the mathematical demonstration of this result, we will conclude the work explaining its proven use, as a decisive factor, in the judicial recovery of a large company.

Keywords: Game Theory. Nash Equilibrium. Applications in Economics.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

Todos nós já tivemos contato com algum tipo de jogo, seja ele um jogo infantil, eletrônico, um jogo de futebol ou xadrez. A maioria das pessoas considera os jogos como sendo uma mera atividade recreativa. Contudo, este trabalho trata o jogo como uma atividade bem mais acintosa que o de costume. Nossa intenção, quanto ao conceito de jogos, fica mais clara quando citamos "o jogo de poder", por exemplo. E, nesse sentido, provocamos o sentido de indicação de negociação, competição e principalmente estratégia. Tais características, notadamente, se aplicam, também, nos exemplos de jogos já citados, mas também podem ser os fatores fundamentais e influenciadores nas tomadas de decisões em organizações corporativas. Esses fatores que levam indivíduos ou empresas a tomarem suas decisões, construídas sobre alicerces matemáticos, principalmente probabilísticos, são objetos de estudo deste trabalho.

O fato é que, por ser um jogo, e portanto a necessidade de dois ou mais jogadores, a tomada de decisão de um participante, seja ele um sujeito, uma organização, um partido político ou uma empresa, sempre influencia o outro. Essa relação é denominada por interação estratégica. Fiani (2015, p. 02) complementa que "(...) interação estratégica é aquela em que participantes (...) reconhecem a interdependência mútua de suas decisões."

Dessa forma, sempre que estas decisões tomadas influenciam o outro de forma recíproca, dizemos que os envolvidos estão em um jogo. Para nortear a tomada de decisão, a teoria dos jogos objetiva analisar os possíveis resultados e despontar para análise das alternativas disponíveis ao jogador. Fiani (2015, p. 09) complementa que "A teoria dos jogos ajuda a entender teoricamente o processo de decisão de agentes que interagem entre si, a partir da compreensão da lógica da situação em que estão envolvidos."

É importante salientar, então, que este trabalho se guiará puramente pelos jogos em que o destaque seja a estratégia, como fator imprescindível. Logo, jogos dependentes unicamente de sorte não serão analisados neste trabalho.

Assim sendo, a busca pela melhor estratégia e/ou a eliminação de estratégias que não agregam bons resultados ao jogo é o que norteia esse estudo. Pode haver cooperação entre jogadores de lados opostos? Em jogos em que não haja cooperação, é possível alcançar resultados de equilíbrio entre os jogadores? Com o objetivo de responder essas questões, apresentaremos os conceitos gradativamente e, para tanto, dividimos o trabalho da forma que segue.

No capítulo 2, apresentamos dois exemplos muito famosos da Teoria dos Jogos. Diferente do que enuncia o título desse trabalho, esses exemplos não tratam de economia. Pelo menos não de forma direta. Contudo, são exemplos que dão a dinâmica do que seja a Teoria dos Jogos e, dessa forma, o leitor, ao compreendê-los, perceberá o quão esse estudo é fascinante.

No capítulo 3, mostramos que, apesar de ser utilizada de forma mais explícita atualmente, a Teoria dos Jogos não é um estudo recente. Citaremos matemáticos, economistas, filósofos entre outros que contribuíram para a evolução dos estudos dessa teoria, até Jhon Nash, o matemático, ganhador do prêmio Nobel de Economia, que generalizou um resultado importante.

Após, no capítulo 4, iniciaremos a apresentação dos conceitos pertinentes a essa teoria e, a cada um, vincularemos um exemplo de uso na economia. Mostraremos métodos que objetivam a correta tomada de decisão por parte do jogador, as táticas que maximizam os ganhos e finalizaremos com o estudo das teorias do Equilíbrio de Nash.

No capítulo 5, concluiremos nosso trabalho de forma a mostrar os resultados e avaliação da aplicação da Teoria dos Jogos na Economia.

2

A Lógica da Teoria dos Jogos através de Exemplos

Nesta seção, apresentaremos dois exemplos que ilustram claramente a lógica da teoria dos jogos. Como dito, não estão correlacionados de forma direta com aspectos econômicos, mas são muito úteis ao bom início de nossos estudos, pois explanam a máxima da objetividade de um jogador querer aumentar a sua vantagem, mas ponderando racionalmente a decisão do outro jogador.

2.1 O Dilema do Prisioneiro

O primeiro exemplo, o mais simples e clássico, é chamado o dilema do prisioneiro e foi formulado no ano de 1950 por Merrill Flood e Melvin Dresher, dois matemáticos norte-americanos. Neste problema, como em tantos outros, os jogadores tendem a optar pela alternativa que maximiza suas vantagens sem a cooperação e/ou sem o conhecimento da estratégia do seu oponente.

Nas literaturas consultadas, o relato do dilema do prisioneiro apresentou-se em várias versões. Optamos pela narrativa de [5], pág. 18, descrita da seguinte forma: Houve um assassinato e dois suspeitos são presos. Estavam portando armas, contudo não possuíam licenças para as mesmas. Apesar disso, a polícia não possui provas contundentes para condená-los pelo crime de assassinato, para o qual a pena seria de 10 anos de prisão. Mas poderia condená-los pelo flagrante do porte ilegal de armas, cuja pena é de 3 anos de prisão. Os suspeitos presos são alocados em celas separadas, sem possibilidade de comunicação.

Aos suspeitos, que chamaremos de A e B, são oferecidas as mesmas opções e um acordo de delação premiada. Caso os suspeitos A e B aceitem a delação, confessando o crime e delatando o comparsa, serão condenados a 3 anos de prisão. Se os suspeitos A e B negam o crime e como não há provas suficientes para o crime de assassinato, serão condenados a 1 ano de prisão por porte ilegal de arma de fogo. Se um dos suspeitos nega o crime e o outro delata, o que delatou, por prêmio, será libertado imediatamente, enquanto o suspeito que negou o crime será condenado a 10 anos de prisão. A representação na tabela 2.1 oferece uma grande ajuda na visualização do cenário de forma bem completa e mostra as opções de cada jogador.

Tabela 2.1: O Dilema dos Prisioneiros

Prisioneiro A	**Prisioneiro B**	
	Nega	**Delata**
Nega	Ambos condenados a 1 ano	"A" é condenado a 10 anos e "B" está livre
Delata	"B" é condenado a 10 anos e "A" está livre	Ambos são condenados a 3 anos

Analisando as alternativas dos dois prisioneiros, percebemos que o dilema consiste basicamente na escolha de trair ou não o seu parceiro. Ao leitor, questionamos: Qual das alternativas seria melhor adotada? Analisando-as, temos que ambos os prisioneiros pensariam racionalmente. Tanto o prisioneiro A como o B podem negar ou delatar o parceiro. Se A delatar, o melhor que B tem a fazer é delatar também. Dessa forma serão condenados a 3 anos de prisão. Mas se B negar, o melhor para A continua sendo delatar, pois assim estará livre. Assim sendo, tanto para A quanto para B, a opção de menor risco será a de se delatarem um ao outro. Ao longo do trabalho analisaremos, tecnicamente, os preceitos que levam a essa decisão.

2.2 Batalha do Mar de Bismark

Outro interessante exemplo, esse verídico, é o da Batalha do Mar de Bismark. O fato ocorreu no decorrer da Segunda Guerra Mundial, no período de 1938 a 1945. Os japoneses pretendiam levar uma frota de 8 navios destroieres e 8 navios transportadores de tropas para Nova Guiné. O comboio transportava 6900 soldados. O Japão havia acabado de perder uma batalha e precisava relocar suas tropas para a retomada da guerra. Os japoneses, que reconheciam a superioridade das tropas aliadas, tinham como opção duas rotas: uma pelo Sul, onde teriam um bom tempo e boa visibilidade, e outra pelo Norte, onde teriam o tempo ruim e baixa visibilidade.

Por outro lado, as tropas aliadas, formadas principalmente por Estados Unidos, União Soviética, China, França e Grã Bretanha, sabiam das opções de deslocamento dos japoneses, porém, desconheciam a rota a ser escolhida pelos inimigos. Os aliados dispunham de aviões de reconhecimento e podiam pesquisar somente uma rota por vez, sabendo que uma busca leva o dia inteiro em qualquer direção. Assim, se os aliados escolhem a rota certa poderiam começar o bombardeio de imediato. Já escolhendo a rota errada, perderiam um dia de bombardeio. É de conhecimento também dos aliados que se os japoneses escolhessem a rota Sul e fossem localizados, o bom tempo permitiria um bombardeio de três dias. Mas se os japoneses escolhessem a rota Norte, com mau tempo, os ataques durariam apenas dois dias.

Assim sendo, a melhor hipótese para os aliados seria enviar os aviões para o Sul com a coincidência da opção das tropas japonesas sendo essa mesma rota. Nesse caso, americanos e japoneses na rota com bom tempo e boa visibilidade, teriam três dias de ataques e bombardeios. Por outro lado, a pior escolha para os aliados seria o envio dos aviões para o Sul, tendo os japoneses enviado seu comboio para o Norte. Os aliados perderiam um dia na rota errada e mais um dia na rota Norte devido ao mau tempo. Logo, somente um dia de bombardeio. Uma outra combinação seria: japoneses enviam seu comboio para o Norte e os Aliados enviam seus aviões de reconhecimento também para o Norte. Nesse caso, os aliados perdem um dia devido ao mau tempo e teriam ainda dois dias para bombardeios. A última possibilidade seria os japoneses enviarem o comboio para a rota Sul, e os Aliados enviarem seus aviões para o Norte. Também, nesse caso, os aliados perdem um dia, desta vez, devido ao engano de rota, e teriam ainda dois para bombardear os inimigos.

Sendo o leitor o comandante das tropas aliadas, qual seria a opção escolhida de forma a maximizar o tempo disponível para os ataques aos navios japoneses?

Para que o leitor compare sua resposta com o real acontecimento: no dia 1º de março de 1943, a patrulha aliada localizou o comboio japonês na rota Norte. Contudo, os aliados não conseguiram atacar os japoneses, pois não conseguiram enviar os bombardeiros americanos devido ao mau tempo.

No dia 2 de março, os aviões e navios norte americanos afundaram navios de suprimentos e de transporte de tropas pertencentes à frota japonesa. Em um destes navios, havia 1.500 soldados japoneses. Destes, 700 morreram. Os ataques continuaram no entardecer e anoitecer de forma esporádica.

No dia seguinte, os aliados atacaram com força máxima, de forma incessante. Todos os navios transportadores foram afundados juntos com 4 navios destroieres. Ignorando a Convenção de Genebra, os aliados atacaram navios de resgate japoneses, sobreviventes em botes salva vidas e que nadavam em auto mar. Apenas 800 soldados japoneses conseguiram chegar ao seu destino.

Os aliados tiveram sorte ao interceptar os navios japoneses logo no primeiro dia? Para o Almirante Chester W. Nimitz, comandante americano da Frota do Pacífico, não houve sorte. Houve estratégia. Enfatizou que:

> A guerra com o Japão foi simulada nas salas de Jogos "Naval War College" por tanta gente e de tantas maneiras diferentes, que nada do que realmente ocorreu constituiu surpresa, exceto as táticas kamikases, pouco antes do fim da guerra, que não foram por nós visualizadas. (NIMITZ *apud* SILVA, 2014, p. 22)

Tendo em vista a complexidade e a grande quantidade de detalhes que envolvem uma guerra, o processo de análise dos dados poderia não permitir o alcance dos objetivos das tropas aliadas. Para essas situações, que envolvem interações estratégicas, as informações devem ser organizadas em um modelo. Assim, podemos melhorar a organização e compreensão dos dados para posterior tomada de decisão. Um modelo é uma representação simplificada, em que propositalmente alguns elementos são destacados, enquanto outros são omitidos. (FIANI, 2015, pag. 04).

Representaremos, esse modelo do presente exemplo, na Tabela 2.2:

Tabela 2.2: A Batalha do Mar de Bismark

	Comboio Japonês	
Forças Aliadas	**Rota Sul**	**Rota Norte**
Busca Rota Sul no 1º dia	3 dias de bombardeio	1 dia de bombardeio
Busca Rota Norte no 1º dia	2 dias de bombardeio	2 dias de bombardeio

Com o modelo, fica evidente que a melhor alternativa às tropas aliadas realmente foi buscar a rota Norte no primeiro dia, pois qualquer que fosse a escolha dos japoneses, daria aos aliados, dois dias de bombardeio.

Diante de exemplos, diga-se de passagem muito distintos, podemos já notar a versatilidade proporcionada pela Teoria dos Jogos. Além dos exemplos apresentados, há vários outros trabalhos onde a Teoria dos Jogos se mostrou eficiente: Economia, contabilidade, filosofia, biologia, direito, ciências sociais e internacionais, política, enfim, em muitos processos onde a interação entre sujeitos reconhecem a influência de suas decisões sobre outros.

3 Contexto Histórico

Muito antes da teoria formal, já haviam estudos ligados a ganhos ou perdas em jogos. Interessados nesses resultados, a teoria começa a tomar forma e despertar o interesse dos matemáticos após o surgimento da teoria de probabilidade, de onde se emancipou a Teoria dos Jogos. Toma as primeiras formas, ainda implícita, com os estudos do filósofo, matemático e físico francês Blaise Pascal e do matemático, e também francês, Pierre de Fermat. Em 1838, o matemático e economista francês Antoine Augustin Cournot publicou um trabalho analisando as estratégias de jogos, correlacionando-as com conceitos da economia e administração, principalmente acerca do equilíbrio na produção de bens. Seus conceitos geraram um modelo que leva o seu nome, modelo de Cournout, que é utilizado até os dias de hoje.

Tendo como base as teorias dos estudiosos supracitados, os estudos acerca da Teoria do Jogos começam a se formalizar com os principais nomes que listamos a seguir.

3.1 Principais Precursores da Teoria dos Jogos

Vejamos, nesta seção, os principais nomes que contribuíram para a criação e/ou evolução da Teoria dos Jogos.

1. **Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956):** Émile Borel foi um matemático e político Francês que, para alguns, é o fundador da Teoria dos Jogos. Outros matemáticos contestam essa alegação devido ao fato de o francês não conseguir demonstrar o teorema minimax. Teve seu primeiro trabalho publicado, sobre a teoria dos jogos (matemática dos jogos até então) em 1921. Neste trabalho, já é possível notar uma estrutura para a teoria, onde insere o conceito de estratégia. Conclui que um jogador pode adotar uma estratégia de variar suas jogadas, e denomina esse método de estratégia mista (que estudaremos ao longo desse trabalho).

2. **John von Neumann (1903-1957):** Oficialmente conhecido como o fundador da Teoria dos Jogos, o húngaro Von Neumann conseguiu provar o teorema Minimax em 1926. No primeiro artigo sobre a Teoria dos Jogos, faz uma breve referência ao trabalho de Borel, contudo enfatiza que alcançou a prova do teorema Minimax de forma independente. Nos trabalhos de Von Neumann, os conceitos de jogos são axiomatizados e são apresentadas estratégias para jogos de roleta, xadrez e economia. Após estudar o livro "Value, Capital, and Rent" de Wicksell, Neumann realiza duras críticas à introdução do livro, contudo, seu interesse por economia foi estimulado e em 1930 se afirmou. Suas palestras começaram a despertar interesses de estudiosos não matemáticos, dentre eles o economista Oskar Morgenstern

3. **Oskar Morgenstern (1902-1977):** Nascido na Áustria, o economista Oskar Morgenstern se mudou ainda criança para Viena, onde em 1925, obteve o seu doutorado com a tese intitulada Wirtschaftsprongnose (Previsão Econômica). Mesmo sem conhecer a teoria dos jogos, já se podia notar elementos fortemente ligados a esse estudo, porém, de relações bem pequenas com a matemática. Sabendo que os conhecimentos matemáticos eram imprescindíveis à sua teoria econômica, Morgenstern se familiarizou com os estudos de Russell e outros matemáticos de sua época. Chegou a ter aulas particulares de matemática para superar sua deficiência e se aproximar do rigor matemático exigido em economia. Devido ao regime Nazista, Morgenster não podia mais voltar a Áustria e aceitou um convite para trabalhar em Princeton, onde conheceu Neumann. Dessa união, de um matemático e um economista, nasceu, em 1944, o livro "Theory of Games and Economic Behavior' (Teoria dos jogos e o Comportamento Econômico). Esse livro deu à Teoria dos Jogos um caráter definitivamente científico. Além de desenvolver a Teoria de Jogos para vários participantes, declara que o desenvolvimento econômico depende principalmente da interação entre os jogadores, visto que estes são responsáveis pela formação das estratégias e das tomadas de decisão.

4. **John Forbes Nash Junior (1928-2015):** Visto que dedicaremos uma seção aos estudos das teorias de Nash, propositalmente, nos reservamos aqui nesta seção, a tão somente retratar sua biografia.

   O matemático norte-americano Jonh Nash nasceu em 13 de junho de 1928 em Bluefield, Virgínia Ocidental. Foi casado com a física Alicia López-Lardé de Harrison, com quem teve um filho. Além de seus trabalhos com a Teoria dos Jogos, há também importantes estudos em Geometria Diferencial e Equações Parciais. Nash concluiu seu doutorado em 1950 com uma tese sobre jogos não-cooperativos. Essa tese foi a base para o que ficou mundialmente conhecido como o Equilíbrio de Nash. Pouco tempo depois, em 1958, começou a mostrar sinais de esquizofrenia. No começo com sintomas leves, seu quadro foi se agravando gradativamente até ter alucinações com extraterrestres e teorias conspiratórias cheias de códigos onde somente ele conseguiria decifrar. Sua esposa, Alicia, o internou em um hospital em 1959, onde se comprovou a doença esquizofrenia paranóide. Entre idas e vindas em hospitais psiquiátricos, Nash ficou em tratamento até 1970. Por vontade própria, optou por não

> tomar mais a medicação e iniciou uma auto-recuperação gradativa. Em 1994, Nash recebeu o Prêmio Nobel de Ciências Econômicas. Faleceu no dia 23 de maio de 2015, aos 86 anos, vítima de um acidente de trânsito, no qual também faleceu sua esposa Alícia. Nash ficou mundialmente conhecido após o lançamento, em 2001 do filme “Uma mente brilhante”, baseado no livro de mesmo nome de Sylvia Nasar. O drama biográfico apresentou o ator Russell Crowe interpretando John Nash e foi dirigido por Ron Howard. O filme, apesar de não retratar fielmente a biografia de Nash, recebeu críticas positivas. Quanto às críticas negativas, estas se deram justamente em razão da quase ausência de discussões relativas à Teoria dos Jogos.

Embora a teoria tenha outros participantes de grande renome, vamos nos ater aos citados, que possuem seus principais trabalhos ligados à teoria dos jogos e guiarão este trabalho.

3.2 A Teoria dos Jogos após a Segunda Guerra Mundial

A Segunda Guerra Mundial comprovou a eficiência dos métodos científicos durante os conflitos. Ainda que no seu estado mais informal (como no exemplificado anteriormente na batalha do mar de Bismark - Seção 2.2) ou ainda intrínseca à teoria de probabilidade, a Teoria dos Jogos começou a despertar o interesse de outros matemáticos e consequente aporte financeiro para a pequisa. Durante a guerra, a Teoria dos Jogos se consolidou com um grupo de matemáticos dedicados em pesquisa em jogos, que foi denominado como projeto RAND - Reserch and Development (Pequisa e Desenvolvimento), voltado exclusivamente a aplicações militares.

Após o final da Segunda Guerra Mundial, os estudiosos sairiam dos centros militares de pesquisa para retornarem às universidades. Preocupados em não perderem a linha de pesquisa, o governo norte americano fez novamente grande investimento no projeto RAND, permitindo a flexibilidade nas linhas de pesquisa. Assim, os estudiosos não eram obrigados a desenvolver conhecimento exclusivamente militares. O projeto RAND conseguiu manter grande número de físicos e matemáticos entre outros estudiosos. Von Neumann, mesmo à distância, se tornou consultor do RAND e promoveu grandes avanços. Contudo, não existia ainda a generalização para os jogos ditos não cooperativos, feito conseguido, posteriormente, por John Nash.

4

Conhecimentos Preliminares e Aplicações da Teoria dos Jogos

Nosso intuito na confecção deste trabalho é que ele seja útil a todos os leitores que tenham curiosidade em conhecer o fascinante ramo da Teoria dos Jogos. Embora alguns conhecimentos matemáticos prévios sejam necessários, não os julgamos serem pré-requisitos ao bom entendimento. Dessa forma, para tentar diminuir a busca por literaturas extras, trazemos, nessa seção, alguns conceitos para que o leitor se familiarize com alguns termos essenciais da Teoria dos Jogos e correlacionados principalmente à Matemática e/ou à Economia.

Como dito anteriormente e explicitado, sobretudo, no exemplo da Batalha do Mar de Bismark, um jogo pode apresentar uma infinidade de dados que dificultam muito a sua compreensão. Para melhorar a análise desses processos, é necessário que façamos uso de um **modelo**. Além de facilitar a análise, o modelo procura determinar os possíveis resultados do jogo. A esses resultados se daá a denominação de ***payoff***, que pode ser o montante que foi ganho ou perdido. Pode-se ainda, determinar o *payoff* como $+1$ para o ganhador, 0 se empatar e -1 para o perdedor, por exemplo.

É importante que, ao modelar um jogo, deve-se manter o foco nos elementos mais importantes e, assim, compreender a situação de interação estratégica entre os jogadores. Reforçamos aqui que, quando citamos **“jogador"**, nos referimos a qualquer indivíduo ou organização envolvido no processo de interação estratégica que tenha autonomia para tomar decisões. (FIANI, 2015, p.43), sendo que este, logicamente, tem como objetivo obter o melhor resultado possível para si.

Para o jogo progredir, cada jogador tem direito a um **conjunto de ações**, composto por **jogadas**. Podem ser alternadas entre si ou ocorrer simultaneamente. A jogada, em nosso âmbito, consiste em uma tomada de decisão que pode apresentar um contexto estratégico ou um resultado de evento probabilístico.

Para prosseguimento das definições básicas, tomemos, a partir de agora, dois exemplos fictícios. Deles, extrairemos as formas mais convenientes para modelar as interações estratégicas.

Exemplo 4.1 *Suponhamos que a empresa Z, passando por dificuldades financeiras, tomou um empréstimo em dois bancos: Banco A e Banco B. Tomou em cada um, o valor de 5 milhões, totalizando então um empréstimo de 10 milhões. Hoje, os ativos (todo o patrimônio dessa empresa) valeriam apenas 6 milhões, o que, perceptivelmente, são insuficientes para quitar a dívida junto aos dois Bancos. Prevendo que a empresa não resiste a mais um ano como ativa, seus diretores resolveram solicitar a renovação dos empréstimos junto aos dois bancos. Os Bancos A e B devem ou não renovar os empréstimos?*

Exemplo 4.2 *Suponha que a empresa Valk ainda não possui um modelo de furgão disponível no mercado brasileiro, enquanto sua principal concorrente, a Fait, já fabrica e tem boas vendas do modelo de furgão. A Valk deve decidir se lança ou não o seu modelo cujo protótipo já foi testado com sucesso. Sabendo que a empresa Valk pode lançar o novo veículo no mercado, a empresa Fait está em dúvida se mantém ou reduz o preço para competir com o novo veículo, caso a Valk resolva realmente lançá-lo.*

Observação 4.1 *Note que, no Exemplo 4.1, o Banco A não conhece a decisão do Banco B e vice-versa. Ao contrário do Exemplo 4.2, em que a empresa Fait irá decidir sua estratégia já conhecendo a decisão da Valk.*

Definindo o conjunto de ações, no Exemplo 4.1, temos que os Bancos A e B precisam decidir se realizam ou não o empréstimo à empresa Z. Assim, sejam A_A, o conjunto de todas as ações possíveis pertencentes ao Banco A e A_B o conjunto de todas as ações possíveis pertencentes ao Banco B. Cada jogador é identificado pelo índice i, e a representação é dada por:

$$A_i = \{a_i\}$$

e a_i representa todas as ações disponíveis para o jogador i. Dessa forma, como as opções para o Banco A são {renova o empréstimo} ou {não renova o empréstimo}, seu conjunto de ações são:

$$A_A = \{Renova\, o\, empréstimo, Não\, renova\, o\, empréstimo\}$$

De forma análoga, o conjunto de ações para o Banco B é

$$A_B = \{Renova\, o\, empréstimo, Não\, renova\, o\, empréstimo\}$$

Dentre as formas de se apresentar um jogo, a forma estratégica ou normal é a mais simples. A utilizaremos aqui para o Exemplo 4.1.

Como já citado, cada Banco possui duas opções: renovar ou não renovar os empréstimos. Nestes casos:

1. Caso o Banco decida renovar, continuará recebendo os juros pagos pela empresa Z. Caso contrário, isto é, caso o banco não renove o empréstimo, a empresa é obrigada a pagar o valor principal do empréstimo, ou seja, $5\,milhões$ (de cada banco). Frisamos que os ativos da empresa somam um total de $6\,milhões$, valor insuficiente para quitar suas dívidas junto aos bancos.

2. Se os bancos optarem em renovar o empréstimo, a perspectiva de funcionamento da empresa é de 1 ano e, nesse caso, continua pagando os juros aos bancos. Esses juros totalizam, no final de um ano, o valor de $1\,milhão$ para cada banco. Depois, muito provavelmente, a empresa decreta falência. Se falir, cada banco recebe $4\,milhões$: $3\,milhões$ provindos de metade dos ativos da empresa e mais $1\,milhão$ dos juros pagos até o final de 1 ano.

3. Se apenas um dos bancos decide não renovar seu crédito, este recebe integralmente seu empréstimo de 5 *milhões*, mas decreta a falência imediata da empresa Z. Quanto ao outro banco, que renovou os créditos, deverá receber $1\,milhão$, referente ao restante dos $6\,milhões$, provenientes dos ativos da empresa.

4. Se os dois bancos, ao mesmo tempo, não renovam seus empréstimos, a empresa decreta falência imediata. Consequentemente os bancos dividem os valores referentes aos ativos da empresa Z. Ou seja, $3\,milhões$ para cada instituição financeira.

Para esquematizar os dados e facilitar o entendimento, necessitamos de uma forma de apresentação sintética. Veja, na próxima seção, como se classificam os jogos quanto à sua forma de apresentação.

Ainda de posse dos exemplos anteriores, vejamos como ficam distribuídos os dados apresentados na Tabela 4.1:

Tabela 4.1: Conjunto de Ações para os Bancos A e B, representado na forma estratégica

Banco A	Banco B	
	Renova	Não Renova
Renova	4 , 4	1 , 5
Não Renova	5 , 1	3 , 3

Como verificado, a forma estratégica apresenta o *payoff* que o jogador recebe ou pode receber. Cabe a ele optar pela recompensa que mais lhe é preferível no momento.

Perceba que, entre os valores em cada célula, o valor da esquerda corresponde ao Banco A. E valor da direita corresponde ao Banco B.

Logicamente, o que é preferível a um jogador pode não ser a outro. Assim, é importante que cada jogador especifique um valor numérico segundo a sua preferência, ou o peso que a utilidade que tal resultado tem em suas estratégias. Esse nível de preferência que o *payoff* tem para cada jogador é chamada de **função de utilidade** ou **função de recompensa**. Esse valor numérico é essencial para avaliar a importância que o jogador dá a um resultado.

Para formalização da função utilidade, tomemos como exemplo, os resultados:

(i) Os dois bancos renovam o empréstimo: temos como resultado $4\,milhões$ para cada banco, no prazo de 1 ano.

(ii) Os dois bancos não renovam o empréstimo: o resultado será $3\,milhões$ para cada banco, de imediato.

Assim, chamaremos de x, o resultado da interação estratégica "$4\,milhões$ no prazo de um ano", e de y o outro resultado da interação estratégica "$3\,milhões$ de imediato". A função utilidade específica para o jogador em questão será uma função f tal que:

$$f(x) \geq f(y)\, sempre\, que\, x \succeq y.$$

É importante que o leitor perceba que o sinal $\geq$ é diferente do sinal $\succeq$. Enquanto o primeiro indica "*maior ou igual a*" o outro indica "*pelo menos tão preferível quanto*". Dessa forma, a função utilidade traduz a importância a determinado jogador entre dois *payoff's* possíveis. Logo, o sinal "$\succeq$" indica uma relação de preferência e não se refere à quantidade.

Importante enfatizar também que a função utilidade não mede as preferências entre jogadores. Para melhor exemplificar, suponhamos que, para um determinado jogador, tenhamos $f(x) = 15$, enquanto para outro tenhamos $g(x) = 30$. Isso não permite dizer que o segundo jogador prefere tal resultado duas vezes mais que o primeiro. Conclui-se, então, que a função utilidade pode ser usada para determinar a preferência de um único jogador, ou seja, comparar as preferências desse jogador e nunca para comparar as preferências entre aquele e outro jogador. Logicamente, quando o *payoff* se refere a valores monetários, estamos considerando a lógica de que os jogadores preferem mais dinheiro do que menos dinheiro.

Voltando ao exemplo, temos que cada banco não sabe o que o outro banco está decidindo quanto ao empréstimo. A esse tipo de jogo, caracterizado na Tabela 4.1, damos o nome de **Jogos Simultâneos** e são caracterizados por "(...)cada jogador ignorar as decisões dos demais no momento em que toma a sua própria decisão, e os jogadores não se preocupam com as consequências futuras de suas escolhas."(FIANI, 2015, p. 50).

Os jogos simultâneos possuem uma desvantagem muito grande por não apresentarem a sucessão das decisões dos jogadores e não darem o devido valor às estratégias dos demais jogadores.

Ora, as decisões de cada jogador podem provocar retaliações em outro. Dessa forma, é necessário um modelo que melhor possa representar as decisões sucessivas. Para tanto, a melhor forma de representar esse desdobramento é o **Jogo Sequencial**.

Como visto anteriormente, o jogo simultâneo foi apresentado na forma estratégica. Diferententemente, nos jogos sequenciais, será apresentado na forma estendida, conforme mostra a Figura 4.1.

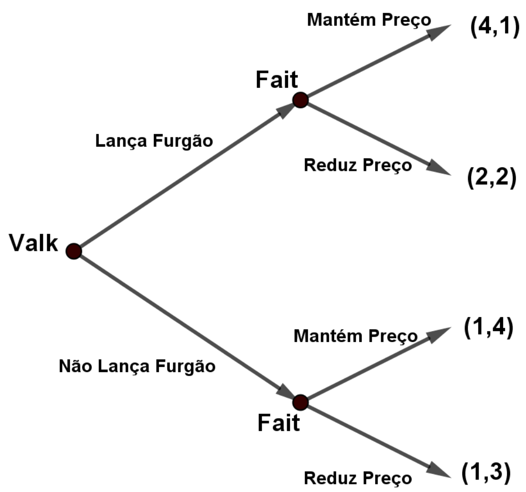
Para esse tipo de jogo, utilizaremos o Exemplo 4.2, que trata da decisão da empresa Valk de lançar ou não seu modelo de furgão. Após essa decisão, a fabricante Fait deve dar sequência ao jogo optando em baixar ou manter o preço do seu veículo que já se encontra no mercado. Assim, se tratando de um jogo sequencial, quando a Fait se decidir, já terá conhecimento da opção da fabricante Valk.

Para exemplificação da forma estendida, suponhamos, por um lado, que a Valk decida lançar o furgão e a Fait reduza o preço de seu veículo. Nesse caso cada uma delas obtém um lucro de $2\,milhões$. Mas, se a Fait resolve não reduzir o preço, suas vendas caem e consequentemente seu lucro, para o valor de $1\,milhão$. A outra, a Valk, aproveita-se do lançamento e tem seus lucros aumentados para $4\,milhões$, considerando que os consumidores geralmente têm um maior interesse por novidades.

Por outro lado, suponhamos que a Valk resolva não fazer o lançamento. Nesse caso, a decisão da Fait afetará somente a si própria. Caso diminua o preço do furgão, terá lucro de $3\,milhões$, caso contrário, lucro de $4\,milhões$. Veja que o lucro da empresa Valk não será afetado, pois não possui um concorrente para o veículo da Fait e, nesse caso, qualquer que seja a decisão da Fait, seu lucro será de $1\,milhão$.

Note que, diferente do exemplo dos Bancos, aqui a decisão da empresa Fait ocorre sempre depois da decisão da Valk. Veja:

Figura 4.1: Jogo Sequencial: Forma Estendida



Essa forma de apresentação é chamada árvore e é composta por nós, que representam a etapa de tomada de decisão por parte dos jogadores, e por ramos, que representam a escolha possível para o jogador. Nos nós finais, são apresentados os *payoffs* e são expressos na ordem em que os jogadores entram no jogo.

A decisão entre as opções que se deve seguir, posterior a um planejamento prévio, dá-se o nome de **conjunto de estratégias** e denotamos por:

$$S_i = \{s_i^j\}$$

onde s_i^j é a j-ésima estratégia do jogador i.

Quando dizemos estratégia, consideramos, então, que todos os jogadores são racionais, ou seja, consideram um plano de ações específicas. Logo, faz parte da astúcia de cada jogador, adotar uma combinação de estratégias. Representaremos essa combinação pela letra S de forma que:

$$S = (s_1, s_2..., s_n),$$

onde s_1 é a estratégia do jogador 1, s_2 é a estratégia do jogador 2, até o *n-ésimo* jogador.

Formalizando também a função recompensa de cada jogador i, temos:

$$U_i = (s_1, s_2, ..., s_n),$$

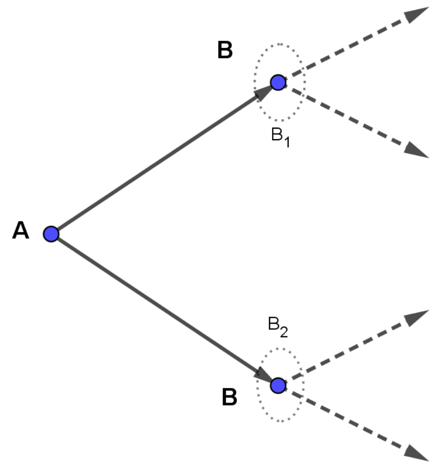
que pode ser traduzido como a recompensa, ou *payoff* que o jogador i recebe quando o jogador 1 adota a estratégia s_1, o jogador 2 adota a estratégia s_2 e assim por diante.

Retomando agora aos exemplos do início deste capítulo, temos que, no caso do Exemplo 4.1, a tomada de decisão ocorreu sem saber o que o outro havia decidido, ou seja, nenhum jogador sabe em que situações está tomando suas decisões. De forma diferente, no Exemplo 4.2, a fabricante Fait sabe o que a concorrente Valk decidiu: lançar ou não um modelo de furgão. Note que a empresa Fait pode discernir em que ambiente está tomando sua decisão. Assim, analisando a Figura 4.1, a Fait sabe exatamente em qual dos dois ramos se encontra. Tal conhecimento constitui um *conjunto de informação.*

Definição 4.1 *Um conjunto de informação é um conjunto constituído pelos nós que o jogador acredita poder ter alcançado em uma dada etapa do jogo quando é sua vez de jogar.*

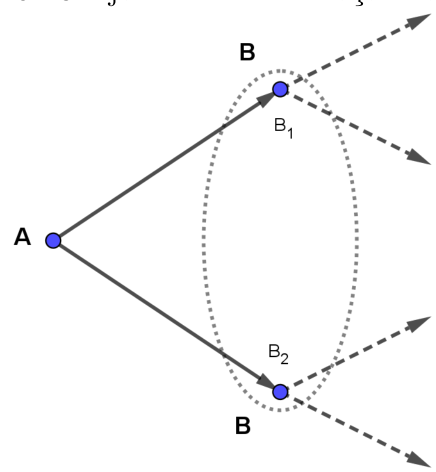
Para uma importante classificação quanto às informações obtidas pelos jogadores, consideremos, primeiramente, a figura 4.2. Nela, representamos o jogo de **conjuntos de informação unitário**. Nele o jogador B sabe que está em sua vez jogar e conhece exatamente a decisão já tomada pelo seu oponente, no caso, o jogador A. Logo, reconhece exatamente em que ramo está localizado. Neste caso dizemos que eles estão em um **jogo de informação perfeita**.

Figura 4.2: Conjuntos de Informação Unitários



No caso da Figura 4.3, representamos o jogo de **conjunto de informação não-unitária** e, nele, o jogador B sabe que o jogador A já fez a sua jogada, acredita estar em algum dos nós: B_1 ou B_2 mas não conhece a história do jogo, desconhece a decisão tomada por A. Nesse caso, nessa etapa do jogo, o jogador B possui um conjunto de informação com dois elementos, ou seja, $A_B = \{B_1, B_2\}$. Já neste caso, dizemos que A e B estão em um **jogo de informação imperfeita**.

Figura 4.3: Conjuntos de Informação não Unitários



Dessa forma:

Definição 4.2 *Um jogo é dito de informação perfeita quando todos os jogadores conhecem toda a história do jogo antes de fazerem suas escolhas. Se algum jogador, em algum momento do jogo, tem de fazer suas escolhas sem conhecer exatamente a história do jogo até ali, o jogo é dito de informação imperfeita.*

Observação 4.2 *As setas tracejadas indicam que o jogo tem, ou pelo menos pode ter, uma nova sequência de jogadas.*

Note que exemplificamos os jogos simultâneos de forma estratégica e os jogos sequenciais de forma estendida. Contudo, não é uma regra obrigatória. Tanto os jogos simultâneos quanto os jogos sequenciais podem ser apresentados nas duas formas. A escolha entre a forma estendida ou a forma estratégica depende da forma que melhor representa a clareza em cada tipo de jogo.

Ainda com relação às informações detidas pelos jogadores, temos ainda a estrutura do jogo, isto é, o conhecimento das estratégias que os demais jogadores adotam e o objetivo de recompensa de cada um. Para esse fundamento, dá-se o nome de **informação de conhecimento comum.**

Definição 4.3 *Uma informação do jogo é dita de conhecimento comum quando todos os jogadores conhecem a informação, todos os jogadores sabem que todos os jogadores conhecem a informação, todos os jogadores sabem que todos os jogadores sabem que todos os jogadores conhecem a informação e assim por diante, até o infinito.*

Um jogador depende das escolhas de seu(s) oponente(s), então, naturalmente, antes de tomar suas decisões referentes ao jogo, um imagina o que o outro jogador imagina sobre suas estratégias.

Esse tipo de informação, normalmente, explicita aos demais jogadores, qual a recompensa que se deseja alcançar. Logicamente, novamente consideramos que todos os jogadores são racionais e buscam estratégias que tornam maior o seu *payoff*, ou que pelo menos minimize o seu prejuízo. Quando se tem conhecimento dos objetivos referentes aos ganhos dos demais jogadores, dizemos que estão em um **jogo de informação completa.**

Definição 4.4 *Jogo de informação completa é quando as recompensas (dos jogadores) são de conhecimento comum.*

4.1 Buscas da Solução do Jogo

Na maioria dos casos, os jogadores possuem mais que uma estratégia. Racionalmente falando, ele segue uma que aumente o seu lucro. Quando se tem várias estratégias, o ideal é que consigamos eliminar as que nos permitem resultados "menos lucrativos". Vamos esclarecer com o Exemplo 4.3 a seguir.

Exemplo 4.3 *Consideremos as empresas Ama e Simba, ambas fabricantes de bolachas. A empresa Ama precisa decidir se lança ou não no mercado seus produtos* *em embalagens biodegradáveis, para, assim, se tornar ambientalmente responsável, como fez anteriormente sua concorrente, a empresa Simba. É de conhecimento que a empresa Simba teve um aumento significativo de suas vendas na época em que fez o lançamento da embalagem. Contudo, deixará de ser um diferencial caso a empresa Ama resolva lançar a embalagem. Dessa forma, precisa decidir se aumenta ou não os gastos com marketing de seus produtos, na tentativa de melhor fixar sua imagem junto a seus clientes.*

Apresentaremos o jogo na forma estratégica como mostra a Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Jogo Ama x Simba

Empresa Ama	**Empresa Simba**	
	Aumentar os gastos com Marketing	**Não Aumentar os gastos com Marketing**
Lançar a embalagem biodegradável	5 , 5	7 , 3
Não lançar a embalagem biodegradável	2 , 4	2 , 7

Analisando o jogo simultâneo, apresentado na forma estratégica, temos:

- caso a empresa Simba decida aumentar seus gastos em marketing, a empresa Ama lucra 5 *milhões* se lançar a embalagem biodegradável ou 2 *milhões* se não lançar.
- por outro lado, se a empresa Simba decide não aumentar seus gastos em marketing, o lucro da empresa Ama será de 7 *milhões* se lançar a embalagem biodegradável ou de 2 *milhões* caso resolva não lançar.

Perceba que, nesse caso, não importa o que a empresa Simba decida. Para a empresa Ama é bem mais lucrativo lançar a embalagem biodegradável. Neste caso, dizemos que a empresa Ama possui uma **estratégia dominante**. E ainda, verifica-se que a estratégia {Lançar a embalagem biodegradável} possui como resultado uma maior lucratividade, em qualquer situação, se comparada com a estratégia {Não lançar a embalagem biodegradável}. Ou seja, a primeira estratégia é **estritamente dominante** em relação a segunda.

Algebricamente, temos:

Seja um jogador i, com estratégias s_i. As estratégias dos oponentes representadas por s_{-i} contemplam as estratégias de todos os jogadores exceto a do próprio i.

Seja ainda π_i a função recompensa do jogador i. Considerando que uma estratégia estritamente dominante do jogador i, representado por s_i^* em relação a outra qualquer, que denominamos por s_i^{**}, temos que:

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}) > \pi_i(s_i^{**}, s_{-i}), \quad \forall\ s_{-i}$$

Ou seja, a recompensa garantida pela estratégia s_i^* ao jogador i é estritamente maior que a recompensa s_i^{**}, para qualquer estratégia adotada pelos seus oponentes.

Para outro caso, onde a estratégia não é estritamente dominante, vamos alterar o Exemplo 4.3, como segue:

Tabela 4.3: Jogo Ama x Simba

Empresa Ama	**Empresa Simba**	
	Aumentar os gastos com Marketing	**Não Aumentar os gastos com Marketing**
Lançar a embalagem biodegradável	2 , 5	7 , 3
Não lançar a embalagem biodegradável	2 , 4	2 , 7

Nesse exemplo, reformulado em relação ao Exemplo 4.2, temos as seguintes situações:

- A empresa Simba decide aumentar seus gastos com marketing. Se a empresa Ama lançar a embalagem biodegradável, terá lucros tão bons quanto não lançar a embalagem biodegradável, ou seja, 2 *milhões* de recompensa nas duas estratégias.
- A empresa Simba decide não aumentear seus gastos com marketing. Se a empresa Ama lançar a embalagem terá lucro muito maior (7 *milhões*) quando se compara a não lançar (2 *milhões*).

Veja que a estratégia {Lançar a embalagem biodegradável} gera lucros maiores em uma situação e lucro tão bom como a outra estratégia {Não Lançar a embalagem biodegradável} nas outras vezes. Temos, então, uma estratégia **fracamente dominante**, quando nos referimos a {Lançar a embalagem biodegradável}. Por outro lado, quando nos referimos à estratégia {Não Lançar a embalagem biodegradável }, dizemos que ela é uma **estratégia fracamente dominada**.

Para a representação algébrica da estratégia fracamente dominante:

Seja a estratégia do jogador i fracamente dominante representada por $s_i^{''}$ em relação a uma outra estratégia $s_i^{'}$, para o mesmo jogador, temos:

$$\pi_i(s_i'', s_{-i}) \geq \pi_i(s_i', s_{-i}), \quad para\ todo\ s_{-i} \qquad (1)$$

Aqui, temos que a recompensa gerada pela estratégia $s_i^{''}$ do jogador i é melhor ou mais vantajosa do que qualquer uma outra se comparado com os ganhos proporcionados pela estratégia $s_i^{'}$ do mesmo jogador.

Temos também que:

$$\pi_i(s_i", s_{-i}) > \pi_i(s_i', s_{-i}), \quad para\ algum\ s_{-i} \qquad (2)$$

Já aqui que a recompensa gerada pela estratégia s_i'' pelo jogador i é mais vantajosa para pelo menos uma das estratégias que esse mesmo jogador vier a adotar.

Assim, de (1) e (2), temos que uma estratégica fracamente dominante (s_i'') proporciona recompensas melhores do que outras estratégias s_i'.

A identificação da importância que determinada estratégia tem para um determinado jogador é o princípio para se ter o resultado de um jogo. Contudo, um jogo pode apresentar uma quantidade imensa de estratégias. Dessa forma, o jogador deve saber escolher as que mais lhe dão melhores recompensas e eliminar as que lhe proporcionam os piores resultados. Um dos métodos para esse processo é denominado **eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas**, que esclareceremos com o Exemplo4.4:

Exemplo 4.4 *Hipoteticamente, temos as empresas multinacionais Newcar e a Allcar competindo no mercado automobilístico. A primeira, Newcar, já tem boas vendas de sua pick-up, lançada há aproximadamente 2 anos, enquanto a Allcar quer lançar o seu modelo para conquistar essa parte do mercado automobilístico. A Allcar tem as seguintes opções: produzir a pick-up no Brasil, importar de sua matriz no exterior ou não competir nesse mercado. Sabendo das intenções de sua concorrente, a Newcar tem as seguintes opções: baixar o preço do seu modelo, manter o preço ou lançar uma nova versão de seu veículo.*

Essas empresas já concorreram em ocasiões passadas e conseguem fazer uma estimativa de ganhos segundo suas escolhas. As empresas estão em momento de finalizar o seu planejamento anual. Elas estão em um jogo simultâneo e, portanto, uma não conhece a decisão da outra.

Adotando a forma estratégica de apresentação, Temos a tabela 4.4 representando as estimativas de lucros em cada combinação de ações entre as empresas.

Tabela 4.4: Eliminação Iterativa de estratégias estritamente dominadas

Allcar	**Newcar**		
	Lançar nova versão	**Manter o preço**	**Reduzir o preço**
Lançar o próprio modelo	1 , 4	4 , 1	1 , 3
Importar da Matriz	2 , 2	2 , 1	2 , 3
Não entrar no mercado	0 , 1	0 , 6	0 , 0

Note que, analisando as opções da Newcar, a estratégia {Lançar nova versão} é a melhor opção caso a Allcar resolva lançar seu próprio modelo. {Reduzir o preço} é a melhor opção caso a Allcar resolva importar da matriz e, por fim, {Mater o preço} é a melhor opção caso a concorrente escolha não entrar no mercado de pick-ups. É fácil perceber, então, que a Newcar não possui estratégia dominante.

Da mesma forma, a sua concorrente Allcar também não possui uma estratégia dominante. Mas veja que a estratégia {Não entrar no mercado} sempre resulta em um pior resultado, independente da escolha da Newcar. Assim, essa é uma estratégia estritamente dominada. Esta, portanto, deve ser eliminada do conjunto de estratégias da empresa Allcar.

Assim, teremos agora a seguinte representação estratégica descrita na tabela 4.1:

Tabela 4.5: Eliminação Iterativa de estratégias estritamente dominadas: 2ª rodada

Allcar	**Newcar**		
	Lançar nova versão	**Manter o preço**	**Reduzir o preço**
Lançar o próprio modelo	1 , 4	4 , 1	1 , 3
Importar da Matriz	2 , 2	2 , 1	2 , 3

É importante perceber agora que, após a eliminação da estratégia {Não entrar no mercado}, pertencente à empresa Allcar, a estratégia {Manter preço} da Newcar passou a ser estritamente dominada pelas estratégias {Lançar nova versão} e {Reduzir o preço}. Podendo, assim, também ser eliminada.

Dando prosseguimento ao jogo e às eliminações iterativas de estratégias estritamente dominadas, chegaremos à combinação de estratégias em que será melhor para a Allcar adotar {Importar da matriz} e para a Newcar {Reduzir o preço} será a melhor opção. Esse resultado é chamado de **equilíbrio em estratégias estritamente dominantes**. Ou seja, a eliminação de estratégias estritamente dominadas deixou somente uma estratégia para cada jogador. Neste caso, dizemos que o jogo é **solucionável por dominância**. Ou ainda, podemos dizer que essas estratégias são as **melhores respostas** de cada jogador.

Formalizando esses conceitos, algebricamente, temos que a estratégia s_i^* de um jogador i é considerada a melhor resposta quando:

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}) \geq \pi_i(s_i', s_{-i}) \ para \ algum \ s_{-i} \ e \ \forall \ s_i' \neq s_i^*,$$

ou seja, quando os demais jogadores optam pela estratégia s_{-i}, a estratégia s_i^* fornece a melhor recompensa ao jogador i quando se compara com qualquer outra estratégia s_i' deste mesmo jogador i.

De maneira semelhante, poderá ocorrer também que uma determinada estratégia nunca proporcionará a melhor recompensa ao jogador, independente da estratégia adotada pelos demais jogadores. Assim, uma estratégia estritamente dominada (s_i^{**}) jamais será a melhor escolha. Veja:

$$\pi_i(s_i^{**}, s_{-i}) < \pi_i(s_i^*, s_{-i}) \ para \ algum \ s_i^* \neq s_i^{**} \ e \ \forall \ s_{-i}.$$

Segue, então, que sempre haverá uma estratégia que trará ao jogador i uma recompensa melhor, desde que esta seja diferente de s_i^{**}.

Logo, essa estratégia, estritamente dominada, deve ser descartada do jogo.

Logicamente, nem todo jogo apresentará estratégias estritamente dominadas ou dominantes. Nesse tipo de jogo, precisamos de um método mais abrangente, que não dependa somente da eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas. Esse método, muito mais abrangente, será estudado mais profundamente ao decorrer deste capítulo.

4.1.1 Jogos estritamente competitivos ou de soma zero

Até aqui, estudamos casos onde jogadores se preocupam com suas próprias recompensas independente dos lucros obtidos dos demais jogadores.

Ora, se tratando de empresas que têm produtos similares, uma pode tentar conseguir um novo mercado, em uma determinada cidade ou região, onde o aumento de suas vendas se dará somente se considerar a redução dos ganhos de sua concorrente. Esse tipo de jogo é chamado de **jogos estritamente competitivos**.

Considere dois jogadores, A e B, com as respectivas funções recompensas U_A e U_B. O jogador A adota o par de estratégias definidas por (s_i^A, s_j^A) e o jogador B o par de estratégias (s_i^B, s_j^B).

Um jogo estritamente competitivo atende:

$$U_A(s_i^A, s_j^B) \geq U_A(s_j^A, s_i^B) \;\Leftrightarrow\; U_B(s_j^A, s_i^B) \geq U_B(s_i^A, s_j^B).$$

Para deduzirmos o objetivo dos conceitos desse tipo de jogo, relacionaremos duas propriedades matemáticas com o intuito de melhor esclarecimento.

Propiedade 1:

$$x = y \Leftrightarrow x \geq \; y \; e \; y \geq x$$

Se temos para o jogador B:

$$U_B(s_j^A, s_i^B) = U_B(s_i^A, s_j^B).$$

Utilizando-se da *propriedade* 1, temos:

$$U_B(s_i^A, s_j^B) \geq U_B(s_j^A, s_i^B) \; e \; U_B(s_j^A, s_i^B) \geq U_B(s_i^A, s_j^B).$$

E, de forma análoga, temos para o jogador A:

Se

$$U_A(s_j^A, s_i^B) = U_A(s_i^A, s_j^B),$$

então:

$$U_A(s_i^A, s_j^B) \geq U_A(s_j^A, s_i^B) \; e \; U_A(s_j^A, s_i^B) \geq U_A(s_i^A, s_j^B).$$

Propiedade 2:

$$Se \; x \geq y, \; mas \; não \; y \geq x \Leftrightarrow x > y$$

Temos:

$$U_A(s_i^A, s_j^B) \geq U_A(s_j^A, s_i^B) \;\Leftrightarrow\; U_B(s_j^A, s_i^B) \geq U_B(s_i^A, s_j^B).$$

Então, pela *propriedade* 2, para b, é verdade que, se

$$U_B(s_j^A, s_i^B) \geq U_B(s_i^A, s_j^B)$$

não vale o inverso:

$$U_B(s_j^A, s_i^B) \leq U_B(s_i^A, s_j^B)$$

Analogamente, para o jogador A:

Se:

$$U_A(s_i^A, s_j^B) > U_A(s_j^A, s_i^B),$$

Vale que:

$$U_A(s_j^A, s_i^B) \geq U_A(s_i^A, s_j^B),$$

Mas não que:

$$U_A(s_j^A, s_i^B) \leq U_A(s_i^A, s_j^B).$$

Percebe-se que o resultado mais vantajoso para um jogador é o resultado menos vantajoso para o outro jogador e, dessa forma, podemos concluir que:

$$U_A(s_i^A, s_j^B) = -U_B(s_i^A, s_j^B)$$

Ou ainda que:

$$U_A(s_i^A, s_j^B) + U_B(s_i^A, s_j^B) = 0$$

Exatamente por esse motivo, os jogos estritamente competitivos são chamados também de **jogos de soma zero** e tem como principal característica o fato que, se o jogador A possui uma combinação estratégica preferível sobre qualquer outra, essa mesma estratégia nunca é preferível para o o jogador B.

Um bom e simples exemplo para esse jogo é o já citado no início desse trabalho, a batalha do mar de Bismarck, que reproduziremos na Tabela 4.6, na forma estratégica de apresentação:

Tabela 4.6: A batalha do mar de Bismark - jogo de soma zero

Forças Aliadas	**Comboio Japonês**	
	Rota Sul	**Rota Norte**
Busca Rota Sul no 1º dia	3 , -3	1 , -1
Busca Rota Norte no 1º dia	2 , -2	2 , -2

Nota-se de forma trivial que a condição dos jogos de soma zero é satisfeita, ou seja, a estratégia preferida das Forças Aliadas, nunca foi a estratégia preferida pelo Comboio Japonês.

4.1.2 Estratégias mistas

Sabemos que a solução de um jogo é determinada diretamente pelas estratégias adotadas pelo jogador. Tomando ainda o exemplo da Tabela 4.6, temos que caso o Comboio Japonês optasse pela rota Sul, com certeza, o melhor que os Aliados fariam é seguir pela rota Sul. Do outro lado, se o comboio Japonês soubesse com certeza que os Aliados seguiam para a rota Sul, o melhor que o Comboio Japonês faria era a escolher a rota contrária. A essas estratégias, adotadas pelos jogadores como certeza, chamamos de estratégias puras.

Mas sabemos que, usualmente, isso não acontece. O fator surpresa é de suma importância nos jogos, tanto esportivos, empresariais ou de guerra. Quando o jogador tenta surpreender o seu adversário e evitar ser surpreendido, baseando-se em probabilidades, variando a escolha de suas estratégias, dizemos que este jogador está utilizando estratégias mistas.

Definição 4.5 *Quando em vez de escolher entre suas estratégias uma dada estratégia para jogá-la com certeza, um jogador decide alterná-las aleatoriamente, atribuindo uma probabilidade a cada estratégia a ser escolhida, diz-se que o jogador utiliza* ***estratégias mistas****. Caso contrário, diz que emprega* ***estratégias puras****.*

Em estratégias mistas, para a formalização matemática dos conceitos, adotaremos as denotações algébricas de [12].

Seja p_i a estratégia mista do jogador i no conjunto S_i de estratégias puras para o mesmo jogador i, ou seja, p_i é um elemento do conjunto:

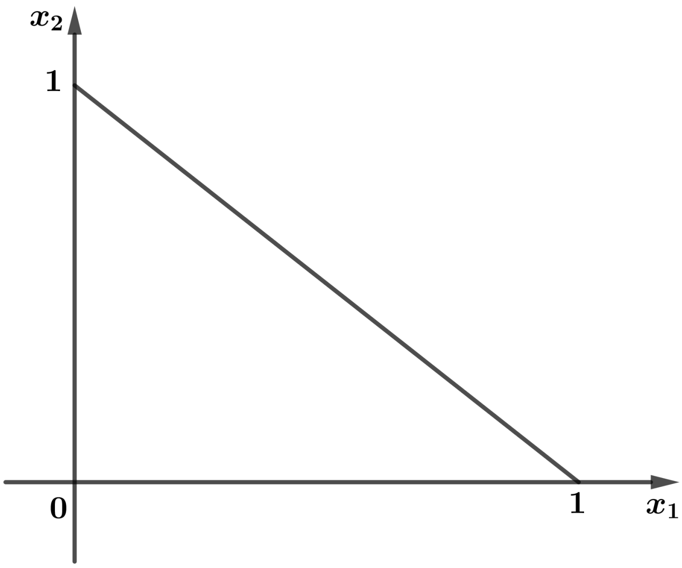
$$\Delta_{m_i} = \left\{ (x_1, x_2, ...x_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ...x_{m_i} \geq 0 \ e \ \sum_{k=1}^{m_i} x_k = 1 \right\}.$$

Considerando p_{i1} como a estratégia mista de número 1 para o *jogador i*, p_{i2}, a estratégia mista de número 2 para o mesmo *jogador i* e assim por diante até p_{im_i}, teremos:

$$p_{i1} \geq 0, \ p_{i2} \geq 0, \ \cdots , \ p_{im_i} \geq 0 \ e \ \sum p_{ik} = 1.$$

Note no gráfico da Figura 4.4, que os extremos de Δ_{m_i} nos dão probabilidade 1 às estratégias puras $s_{i1}, s_{i2}, ..., \ s_{im_i}$.

Figura 4.4: $\Delta_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \ e \ x_1 + x_2 = 1\}$.



Perceba que, como maneira de simplificar os conceitos, quando se trata de apenas dois jogadores, temos

$$\Delta_2 = \{(p, 1-p) \ \in \ \mathbb{R}^2 | \ 0 \leq p \leq 1\},$$

o espaço de todos os perfis de estratégia mista é o produto cartesiano:

$$\Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \cdots \times \Delta_{m_n},$$

onde Δ é o espaço de estratégias mistas e $p \in \Delta$ é um perfil de estratégias mistas. Se nas estratégias puras denotamos por s_{-i} como as estratégias de todos os jogadores exceto o próprio jogador i, utilizaremos a notação p_{-i} para representar o conjunto de estratégias mistas de todos os outros jogadores com exceção do próprio jogador i.

Dessa forma, cada perfil de estratégia mista $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n) \in \Delta$ determina um *payoff* esperado, uma média dos *payoffs* ponderada pelas distribuições de probabilidades $p_1, p_2, \cdots, p_n$.

Logo, se

$$p = (p_1, p_2, \cdots, p_n) = (\underbrace{p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1m_1}}_{p_1}; \underbrace{p_{21}, p_{22}, \cdots, p_{2m_2}}_{p_2}; \cdots; \underbrace{p_{n1}, p_{n2}, \cdots, p_{nm_n}}_{p_n};)$$

então

$$u_i(p) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{m_n} \left(\prod_{k=1}^{n} p_{k_{jk}} u_i(s_{1_{j1}}, s_{2_{j2}}, \cdots, s_{nj_n}) \right)$$

Perceba que, como maneira de simplificar os conceitos, quando se trata de apenas dois jogadores, temos

$$\Delta_2 = \{(p, 1-p) \ \in \ \mathbb{R}^2 | \ 0 \leq p \leq 1\}.$$

Para melhor esclarecimento acerca desses conceitos, e no intuito de nos desprendermos da formalidade matemática (já que como citado na introdução deste trabalho, esta pesquisa se destina também aos profissionais não matemáticos, como administradores, economistas e áreas afins), tomaremos um exemplo similar ao apresentado por [7], capítulo 5, a saber:

Exemplo 4.5 *Duas empresas, Empresa Vermelha e Empresa Azul, estão em um jogo de escolha de cidades para a abertura de uma nova filial. As promissoras cidades são aqui denominadas por cidade Sul e cidade Norte.*

Utilizaremos uma propriedade básica da probabilidade: A soma das probabilidades de dois eventos complementares é igual a 1.

Assim, se adotarmos que haverá uma probabilidade p da empresa Azul escolher a cidade Sul, haverá a probabilidade $1-p$ da empresa Azul escolher a cidade Norte.

Estabeleceremos nesse jogo que a probabilidade da empresa Azul escolher a cidade Sul é p. E, por consequência, $1-p$ é a possibilidade da mesma empresa escolher a cidade Norte.

Dessa forma, quando $p = 1$, a recompensa da Azul será igual 1 quando escolher a cidade Sul. Nesse caso, a recompensa da Vermelho é -1. De fato, pois Vermelho escolheu a cidade que já está "dominada" pela Azul.

Logicamente, quando p está entre 0 e 1 ($0 < p < 1$), quanto maior o p, maior a probabilidade de Azul escolher a cidade Sul.

Suponhamos que há 90% de chance da Azul escolher a cidade Sul, ou seja, $p = 0,90$. Consequentemente, há 10% de escolher a cidade Norte. Nesse caso, a empresa Vermelho tem uma expectativa maior que a empresa Azul escolha a cidade Sul. A essa expectativa, de um jogador pela recompensa que pode vir a obter, em média, dadas as probabilidades de escolha de estratégias feitas pelos outros jogadores, dá-se o nome de **recompensa esperada**.

A recompensa esperada da empresa Vermelho em escolher a cidade Norte (REV_{CN}), dadas as suposições citadas, será dada por:

$$REV_{CN} = (0,9 \cdot 1) + [0,1 \cdot (-1)] = 0,9 - 0,1 = 0,8.$$

De forma bem análoga, se a Vermelho tivesse optado pela cidade Sul, a recompensa esperada (REV_{CS}) seria o inverso, ou seja:

$$REV_{CS} = [0,9 \cdot (-1)] + (0,1 \cdot 1) = -0,9 + 0,1 = -0,8.$$

O jogo representado na forma estratégica, na Tabela 4.7, sintetiza:

Tabela 4.7: As Estratégias mistas da empresa Azul

Empresa Azul	**Empresa Vermelho**	
	Cidade Sul	**Cidade Norte**
Cidade Sul (p)	1 , -1	-1 , 1
Cidade Norte (1-p)	-1 , 1	1 , -1
REV	-p+(1-p) =1-2p	p-(1-p)=2p-1

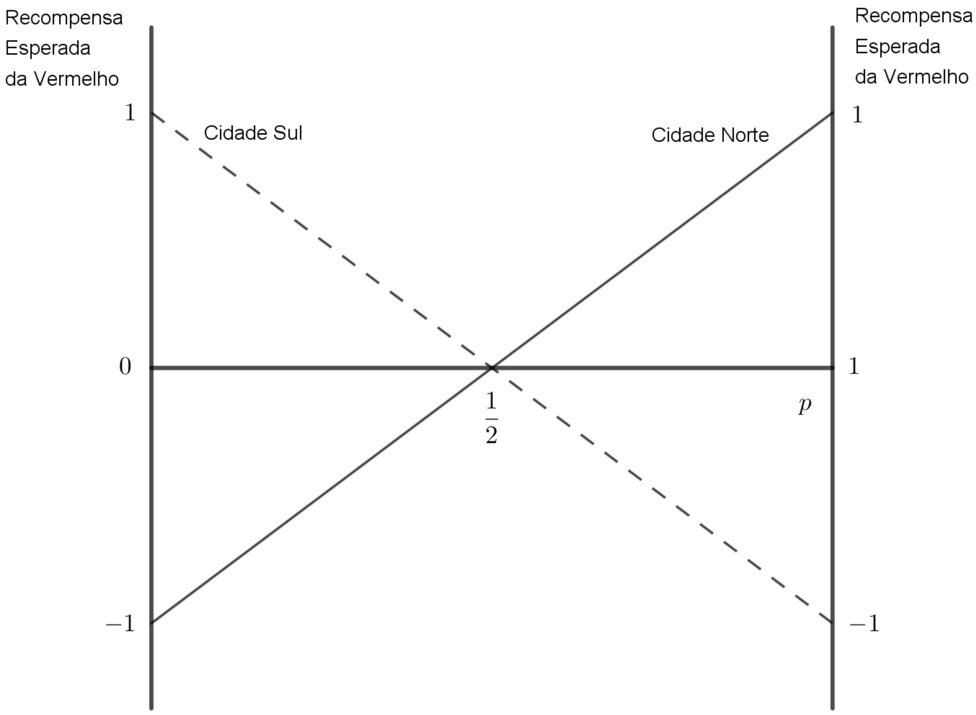
Note, ainda pela Tabela 4.7, que a recompensa esperada pela empresa Vermelho por escolher a cidade Sul será de:

$$REV_{CS} = 1 - 2p.$$

É trivial perceber que a recompensa será a maior possível quando $p = 0$. Ou seja, quando a empresa Azul escolher investir na cidade Norte e a Vermelho escolher a cidade Sul, a recompensa de Vermelho será a maior possível. De maneira inversa, quando $p = 1$.

A Figura 4.5 resume bem o que foi relatado:

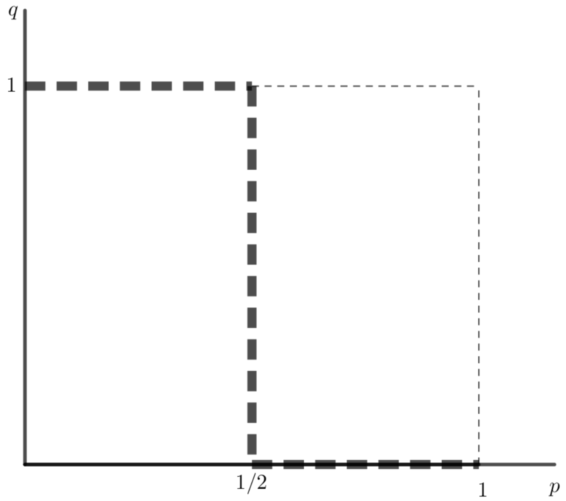
Figura 4.5: Recompensa Esperada da Vermelho



Nos eixos verticais, variando de 1 a -1, tem-se a REV. No eixo horizontal, com valores variando de 0 a 1, temos o valor de p determinando a probabilidade da empresa Azul escolher a cidade Sul. Veja que, se $p < 1/2$, a opção de escolher a cidade Sul sempre fornece uma melhor recompensa para a empresa Vermelho. Inversamente, se $p > 1/2$, escolher a cidade Norte resultará em melhor recompensa para a empresa Vermelho.

Façamos por analogia! Vamos chamar de q a probabilidade de que a empresa Vermelho escolha a cidade Sul. Logo, $1 - q$ será a probabilidade da mesma empresa escolher a cidade Norte. Assim, se temos $p < 1/2$, é mais vantajoso a empresa Vermelho adotar $q = 1$. Do contrário, se $p > 1/2$, o melhor para a Vermelho é optar por $q = 0$. Veja a figura 4.6:

Figura 4.6: Melhores respostas da Empresa Vermelho



É importante notar que, quando $p = 1/2$, o valor de q é sempre uma boa resposta. Tal fato merece ser melhor analisado. Realizando a soma das recompensas da empresa Vermelho para cada combinação de estratégias, das probabilidades do uso destas pelos jogadores, teremos:

$$REV = pq(-1) + p(1-q)(1) + (1-p)(q)(1) + (1-p)(1-q)(-1).$$

E, assim, simplificando:

$$REV = 2q - 4pq + 2p - 1$$

A variável q nos informa se a Vermelho vai, adotando estratégias puras, investir na cidade Sul com certeza $(q = 1)$, na cidade Norte com certeza $(q = 0)$ ou, utilizando estratégias mistas, adotando probabilidades de se investir em uma das duas cidades $(0 < q < 1)$. Logo, colocando esta variável em evidência teremos:

$$REV = q(2 - 4p) + 2p - 1$$

Note, agora, comparando a figura 4.6 com a expressão anterior, que quando Azul opta por $p = 1/2$, a Recompensa da Empresa Vermelho não é afetada e sempre será 0. O que significa dizer que **não há nada que a Empresa Vermelho possa fazer para surpreender a Empresa Azul** e afirmar ainda que a Empresa Vermelho não melhora seus ganhos se alterar suas estratégias. A Empresa Azul neutralizou qualquer vantagem que Vermelho pudesse ter.

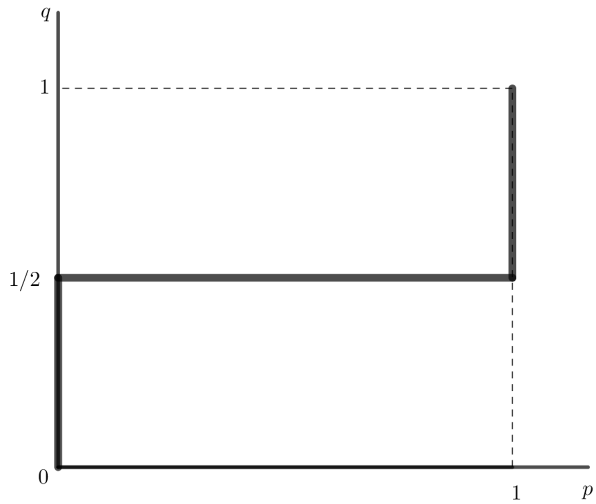
E, assim, Azul adotando a estratégia mista $p = 1/2$, teremos a seguinte notação:

$$(p, 1-p) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

onde o primeiro e segundo par ordenado representam as estratégias mistas com a probabilidade da estratégia da primeira linha e a segunda linha ser jogada respectivamente, e assim por diante caso a empresa Azul tenha mais de duas estratégias.

Atente que, assim como exemplificamos para as recompensas esperadas de Vermelho, valem as mesmas condições e parâmetros para as recompensas esperadas de Azul (REA). Assim, também teremos:

Figura 4.7: Melhores respostas da Empresa Azul



Aqui, também vale que, quando $q = 1/2$, é indiferente para Azul escolher uma ou outra cidade. Ou seja, a Empresa Vermelho neutraliza qualquer vantagem que Azul possa ter, variando a cidade em que irá investir.

Então, quando Vermelho adotar a estratégia mista, $q = 1/2$, teremos:

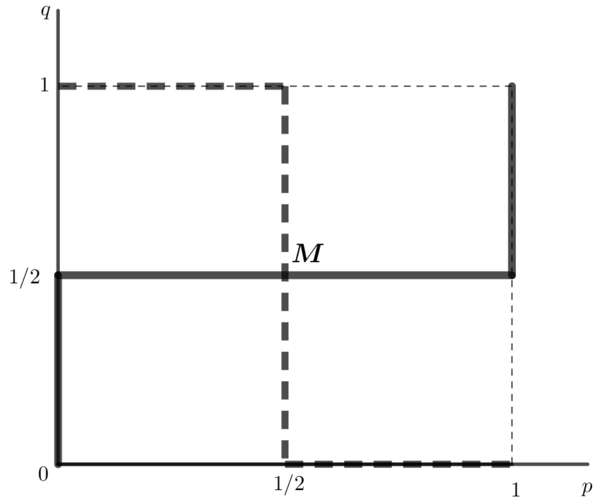
$$(q, 1-q) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Desse modo, quando ambos os jogadores adotarem estratégias mistas, $p = 1/2$ e $q = 1/2$, e, comprovadamente, não conseguirem aumentar seus ganhos alterando as probabilidades de escolha dentre o seu conjunto de estratégias, temos um **Equlíbrio em estratégias mistas** e apresenta a seguinte denotação:

$$((p, 1-p), (q, 1-q)) = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right).$$

A representação gráfica é dada pela figura 4.8:

Figura 4.8: Equlíbrio em Estratégias Mistas



O ponto M, onde $p = q = 1/2$, é o único equilíbrio do jogo.

Como visto, este exemplo, apresentou um jogo estritamente competitivo (jogo de soma zero) com um único equilíbrio. Contudo, valem as mesmas regras e aplicações a jogos não estritamente competitivos, e/ou com vários Equilíbrios. Em alguns desses casos, as estratégias mistas não visam aumentar a recompensa, mas sim minimizar as perdas.

Até esse ponto do trabalho, apresentamos vários conceitos e aplicações pertinentes à Teoria dos Jogos. Tal desenvolvimento fez-se necessário para alicerçar o próximo tema a ser apresentado: o Equilíbrio de Nash.

4.2 O Equilíbrio de Nash

Começamos esta seção com a seguinte definição.

Definição 4.6 *Diz-se que uma combinação de estratégias constitui um Equilíbrio de Nash quando cada estratégia é a melhor resposta possível às estratégias dos demais jogadores, e isso é verdade para todos os jogadores.*

Em termos formais, algébricos, teremos um Equilíbrio de Nash se, e somente se,

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq \pi_i(s_i, s_{-i}^*) \ \forall \ s_i \ e \ \forall \ i \in \mathbb{N}.$$

Essa definição exige que "todas as estratégias adotadas por todos os jogadores sejam as melhores respostas às estratégias dos demais" (FIANI, 2015, p. 94) e que nenhum jogador tem a motivação de trocar sua estratégia mista se os oponentes (demais jogadores) não o fizerem.

O Teorema do Equilíbrio de Nash, um dos principais resultados apresentados neste trabalho, diz que:

Teorema 4.1 *Em todo jogo em que há um número finito de jogadores, cada um com um número finito de estratégias, sempre há pelo menos um equilíbrio de Nash, na maioria das vezes, em estratégias mistas.*

Para a demonstração da Teoria do Equilíbrio de Nash, faz-se necessário o uso de alguns conceitos e Teoremas fundamentais para o entendimento do Equilíbrio. Consideramos a demonstração do Equilíbrio de Nash de extrema relevância devido ser o objetivo final deste trabalho.

Citaremos e conceituaremos o Teorema de Weierstrass, Teorema do Valor Médio e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Contudo, não avançaremos à demonstração desses teoremas, visto se tratar de uma introdução da Teoria dos Jogos, desviando do foco do trabalho e, ainda mais, por se tratar de um trabalho voltado, também, aos profissionais das áreas administrativas, a quem, talvez, as demonstrações não sejam tão imanentes quanto são ao Matemático. Aos que tenham interesse, podem consultar em [5], páginas 10 a 14.

1. **Teorema do valor médio**: Formulado pela primeira vez por Lagrange, o teorema estabelece uma relação entre a função e sua derivada, garantindo que, se a função f é derivável em um intervalo e, dados dois pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ do gráfico de f, existe pelo menos um ponto c tal que $a < c < b$, de modo que a reta tangente ao gráfico de f traçada pelo ponto $(c, f(c))$ é paralela à reta secante que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Em outras palavras,

   Teorema 4.2 *Dada uma função contínua f definida em um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em (a, b), existe um ponto c em (a, b) tal que*

   $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

2. **Teorema do Ponto Fixo de Brouwer**: O ponto fixo de uma função é um ponto do domínio desta função que não se altera pela sua aplicação, isto é, $x \in A$ é dito ponto fixo de uma função $f : A \to A$ se $f(x) = x$. O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer diz que:

   Teorema 4.3 *Sejam B um conjunto compacto e convexo e $f : B \to B$ uma aplicação contínua. Nestas condições, existe pelo menos um ponto $x \in B$ tal que $f(x) = x$.*

3. **Teorema de Weierstrass**: Conhecido também como Teorema dos Extremos, ele afirma que qualquer função contínua de um intervalo $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ é limitada e que, além disso, tem um máximo e um mínimo nesse intervalo.

Teorema 4.4 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \geq b$ e seja f uma função contínua de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$. Então, existem números $x_m, x_M \in [a, b]$ tais que*

$$\forall x \in [a, b], f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M).$$

Definidos os teoremas necessários ao bom entendimento do Equilíbrio de Nash e apresentamos a sua demonstração matemática.

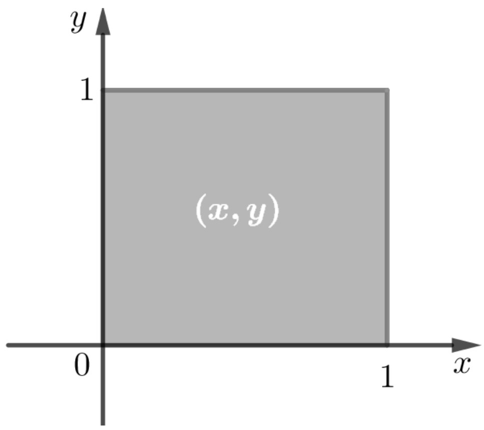
Demonstração do Teorema do Equilíbrio de Nash: Para basearmos a demonstração do Equilíbrio de Nash, tomaremos dois participantes, A e B, onde ambos escolhem estratégias mistas no intervalo $[0, 1]$.

Dessa forma, representaremos $I_A = [0, 1]$ *e* $I_B = [0, 1]$. O Domínio de $I_A \times I_B$ é o quadrado compacto de lado 1, ou seja,

$$R = [0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y); x, y \in [0, 1]\}$$

Graficamente, temos

Figura 4.9: Domínio de $I_1 \times I_2$



A função utilidade de cada jogador é dada por

$$U_A : I_A \times I_B \to \mathbb{R} \text{ e } U_B : I_A \times I_B \to \mathbb{R}.$$

Umas das principais características de um jogo é que as decisões de um jogador interferem diretamente tanto nas estratégias quanto nos ganhos do outro. A partir da função utilidade (ganhos), definimos

$$\varphi_A : I_B \to I_A \text{ e } \varphi_B : I_A \to I_B,$$

pondo que φ_A leva x_2^* em um único x_1' que maximize os ganhos do jogador A, ou seja, o ponto $(\varphi_A(x_2^*), x_2^*)$ é dado por

$$U_A(x_1', x_2^*) \geq U_A(x_1, x_2^*) \ \forall \ x_1 \in \ I_A$$

e o ponto $(\varphi_B(x_1^*), x_1^*)$ é dado por

$$U_B(x_1^*, x_2') \geq U_B(x_1^*, x_2) \ \forall \ x_2 \in \ I_B.$$

Note que x_i^* é a melhor das estratégias que o jogador i possui à disposição, quando o outro jogador escolheu x_j^*.

Se tomarmos o produto das funções $\varphi = \varphi_A \times \varphi_B$ como sendo

$$\varphi : I_A \times I_B \to I_A \times I_B$$

dada por $\varphi(x_1^*, x_2^*) := (\varphi_A(x_2^*), \varphi_B(x_1^*))$, vemos que a prova do teorema se baseia em demonstrar que φ possui ponto fixo.

Como esses pontos fixos elevam U_A e U_B ao máximo, estes serão Equilíbrios de Nash. Vamos, então, encontrar pontos fixos da aplicação $\varphi_A \times \varphi_B$.

Faremos algumas afirmações aqui. A primeira é que φ_A e φ_B são contínuas, o que de fato ocorre. A demonstração desta afirmação pode ser encontrada em [?], página 8. Assim, o Teorema de Weierstrass, Teorema 4.4, citado anteriormente, garante que existem pontos que maximizam essas funções, já que os intervalos I_A e I_B são compactos. Contudo, isso não é suficiente, pois podem existir infinitos pontos que maximizem essas funções nos intervalos citados. A suficiência é dada pela concavidade da função. Por questões de completude do trabalho, a segunda afirmação que faremos é que as funções φ_A e φ_B são estritamente côncavas. Sem essa hipótese, tudo ficaria um pouco mais complexo. Portanto, com essa hipótese extra, há um único ponto de máximo para tais funções. Ora, se existissem dois máximos em um dado intervalo, a função não poderia ser côncava nesse mesmo intervalo. Explicamos isso mais detalhadamente a seguir, em uma linguagem geral.

Suponha que existam x e y pertencentes a um intervalo I tais que $x \neq y$, ambos pontos de máximo de uma função côncava $f : I \to \mathbb{R}$ em I. Daí, temos

$$f(x) = f(y) \geq f(z) \ \forall \ z \ \in \ I.$$

Seja, agora, t tal que $0 < t < 1$. Da definição de concavidade estrita, podemos afirmar que

$$f(t \cdot x + (1-t) \cdot y) > t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y).$$

Mas, pela hipótese, temos que $f(x) = f(y)$ e x e y são máximos. Logo, chegamos a um absurdo, uma vez que o número $z = tx + (1-t)y$, entre x e y, satisfaz $f(z) > f(x)$. O fato mostra que f só pode ter um máximo em I se for côncava.

Bastará que a segunda derivada de U_i seja negativa no intervalo $[0, 1]$ para garantir a concavidade. Valendo-se do Teorema do Valor Médio, o Teorema 4.2, diz que $f''(x) < 0$ implica em concavidade para baixo no gráfico da função f.

Já contextualizado que, no nosso jogo, $I_A \times I_B$ é compacto e convexo e a aplicação $\varphi : I_A \times I_B \to I_A \times I_B$ é contínua, visto que é produto de duas funções contínuas, φ_A e φ_B, podemos, embasados pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, Teorema

4.3, afirmar que existe um ponto $x' \in I_A \times I_B$ tal que $\varphi(x') = x'$ e que, portanto, existe um Equilíbrio de Nash. $\square$

Tendo já demonstrado o Teorema do Equilíbrio de Nash, avançaremos nosso estudo para uma aplicação real e relativamente recente do teorema na economia, mais especificamente, em um plano de recuperação judicial de uma grande empresa brasileira de telefonia: A Oi S/A. O que faremos aqui está baseado na referência [6].

A lei 11.101/2005 é a base para o processo de recuperação de empresas que estão em situação complicada, financeiramente falando. Conforme se encontra essa situação financeira, a empresa deve se enquadrar em um processo de recuperação extrajudicial, recuperação judicial ou falência, sempre com base na lei supracitada. No plano de recuperação judicial, aplicaremos, de fato, todo conceito acerca da teoria dos jogos apresentados aqui e Equilíbrio de Nash.

A empresa Oi S/A entrou em processo de recuperação judicial em 2016 com um dívida superior a 64,5 bilhões de reais e com uma lista de 55.092 credores. Já considerando a correspondência com o nosso trabalho, teremos, de um lado, os 55.092 jogadores (credores) e, de outro, o empresário, responsável pela Empresa Oi S/A. Todos os jogadores são possuidores de estratégias que dão continuidade à negociação no intuito de aprovar ou não o plano oferecido pela empresa.

Note que podemos considerar esse jogo como sendo cooperativo. Afinal, é fato que a sociedade sofre os reflexos e impactos econômicos de uma possível falência de uma empresa tão grande e com tantos colaboradores.

Assim, as funções utilidades serão:

- Do lado dos credores: majorar o valor a receber no limite entre cobrir os custos dos serviços ou bens que destinaram a Oi S/A e o valor da dívida total ainda acrescidos de juros e multas.
- Do lado da Oi S/A: pagamento de todas as suas dívidas com um menor valor possível para assim ter a possibilidade de continuar no mercado.

A Oi S/A dividiu os seus credores em quatro grupos distintos e definiu estratégias para cada uma delas. Os grupos são as dívidas trabalhistas, créditos com garantia real, créditos classe III e créditos Micro empresa e empresa de pequeno porte. Denotaremos, para simplificação, como credores A, B, C e D respectivamente.

A descrição dos grupos, bem como os jogos entre a Oi S/A e cada um desses grupos em particular são analisados a seguir:

1. **Grupo A**

   Por envolver contratos trabalhistas, essas dívidas têm preferência de quitação. Logo, são prioridade para a Oi S/A. Para esse grupo, a recuperanda apresentou a seguinte estratégia de pagamento: o valor será pago, em sua totalidade, em

180 dias, distribuídos em parcelas mensais; a primeira a ser paga 20 dias após a homologação do acordo.

Assim, o jogo será detalhado da seguinte forma:

$$G = \{g_1, g_2\}$$

onde, G é o grupo de jogadores, g_1 é a Oi S/A e g_2 os credores trabalhistas. Os conjuntos de estratégias serão:

$$S_1 = \{pagar\} \text{ e } S_2 = \{aceitar, não\ aceitar\}$$

e, portanto, a interação estratégica será:

$$S = S_1 \times S_2 = \{(pagar, aceitar), (pagar, não\ aceitar)\}$$

Para exemplificarmos, será considerado o menor valor que a Oi S/A possui entre as dívidas trabalhistas. O jogo é representado na forma estratégica pela tabela 4.8.

Tabela 4.8: Jogo Oi S/A x Credores Trabalhistas

g_1	g_2	
	Aceitar	**Não Aceitar**
Pagar	-327,64 , 327,64	0 , 0

Note que temos um jogo estritamente competitivo (soma zero), pois o valor que é pago pela Oi S/A é o mesmo recebido pelo credor. Lembrando que essa estratégia é válida para todos os jogadores (credores) que aceitarem o plano de recuperação judicial.

2. **Grupo B**

   Créditos com garantia real são empréstimos realizados quando o devedor oferece algum bem como garantia de pagamento da dívida. Para esse grupo existe apenas um credor: o BNDS. Embora o valor devido seja o maior entre os credores (Cerca de R$ 3.326.000.000,00 em setembro de 2016), o jogo será muito semelhante, estruturalmente, ao que foi apresentado no item 1. Logo, uma situação de jogo de soma zero novamente. No acordo oficial, contudo, o início do pagamento do montante será em 10 anos após a homologação do acordo e não perdendo, assim, o bem que foi dado como garantia de pagamento.

3. **Grupo C**

   Este grupo, composto por Micro Empresas (ME) e Empresas de Pequeno Porte (EPP) são chamados credores quirográficos, ou seja, que não têm preferência no pagamento. É o maior dos grupos: 49.090 credores e, por isso, apresenta a negociação mais complexa e com maior número de variáveis. Para maior objetividade, nos atentaremos aos fatos mais pertinentes ao nosso estudo.

A estratégia da recuperanda é ofertar aos credores que possuírem valores a receber menores ou iguais a R$ 1.000,00, o pagamento em única parcela em 20 dias após a homologação do acordo. Ao credores que possuírem valores a receber maiores que R$ 1.000,00, também poderão receber em 20 dias, contudo dão plena quitação da dívida. Caso não aceite, há outras formas de recebimento com maior prazo. O prazo pode ser de 14 a 19 anos dependendo do credor. Para estes, o valor será em parcelas semestrais, com primeira parcela vencendo 7 anos após a homologação do acordo, válido para todos os valores até o montante total de R$ 9.336.470.321,65. Se esse valor for ultrapassado, o valor de cada dívida será convertido em dólares americanos até o máximo de USD 1.872.540.394,72 e pagos de maneira igual a descrita anteriormente. Ainda assim, se o credor não aceitar essa forma de pagamento, restará a regra geral de pagamento: quitação da dívida num prazo de 19 anos, divididos em 9 parcelas anuais iguais, sendo a primeira 10 anos após a homologação do plano.

Tomando como base o valor médio devido a este grupo de credores, R$1.430,27, o jogo fica assim detalhado:

$$G = \{g_1, g_2\},$$

onde G é o grupo de jogadores, g_1 é a Oi S/A e g_2 os credores ME e EPP.

Os conjuntos de estratégias serão:

$$S_1 = \{s_{11}, s_{12},\} \; e \; S_2 = \{s_{21}, s_{22}\}.$$

A interação será dada por:

$$S = S_1 \times S_2 = \{(s_{11}, s_{21}), (s_{11}, s_{22}), (s_{12}, s_{21}), (s_{12}, s_{22})\}$$

Detalhando a função utilidade em relação a cada conjunto de estratégia:

$$u_1(s_{11}, s_{21}) = -1.000$$
$$u_1(s_{11}, s_{22}) = 0$$
$$u_1(s_{12}, s_{21}) = -1.430,27$$
$$u_1(s_{12}, s_{22}) = 0$$
$$u_2(s_{11}, s_{21}) = 1.000$$
$$u_2(s_{11}, s_{22}) = 0$$
$$u_2(s_{12}, s_{21}) = 1.430,27$$
$$u_2(s_{12}, s_{22}) = 0$$

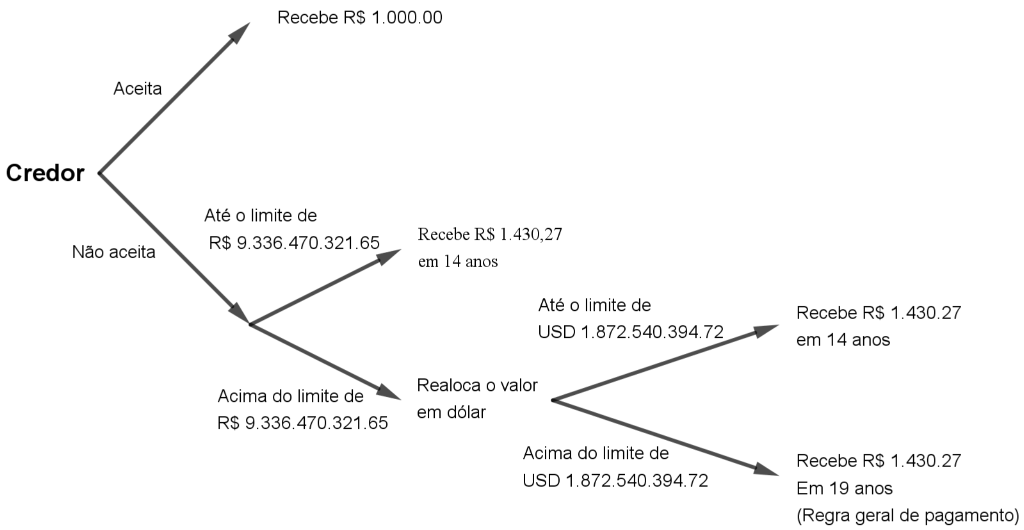
E, finalmente, sintetizando na forma estratégica na tabela 4.9.

Tabela 4.9: Oi S/A x EPP e ME - Apresentação na forma estratégica

g_1	g_2	
	s_{21}	s_{22}
s_{11}	-1000 , 1000	0 , 0
s_{12}	-1.430,27 , 1.430,27	0 , 0

Note que, por possuir várias hipóteses relativas ao aceite ou não por parte dos credores, esta forma de apresentação é insuficiente para análise de todas as condições. Dessa forma, faz-se necessário o complemento da forma estendida de apresentação do jogo. Veja a figura 4.10:

Figura 4.10: Jogo: Oi S/A x EPP e ME - Apresentação na forma estendida



Como explicitado na Figura 4.10, caso o credor não aceite o pagamento único no valor de R$1.000,00, poderá receber todo o valor corrigido, porém, em um prazo que pode chegar até a 19 anos. Ora, é muito mais válido receber o valor oferecido pela recuperanda considerando que o valor devido é próximo aos R$1.000,00. Assim, o equilíbrio de Nash será a combinação estratégica (s_{11}, s_{21}), pois as estratégias s_{22} está estritamente dominada pela estratégia s_{21} e as estratégias estão fracamente dominadas pela estratégia s_{11}.

É importante considerar ainda que, como o grupo C é o mais numeroso, as estratégias devem se basear no que é melhor para a maioria simples deste grupo.

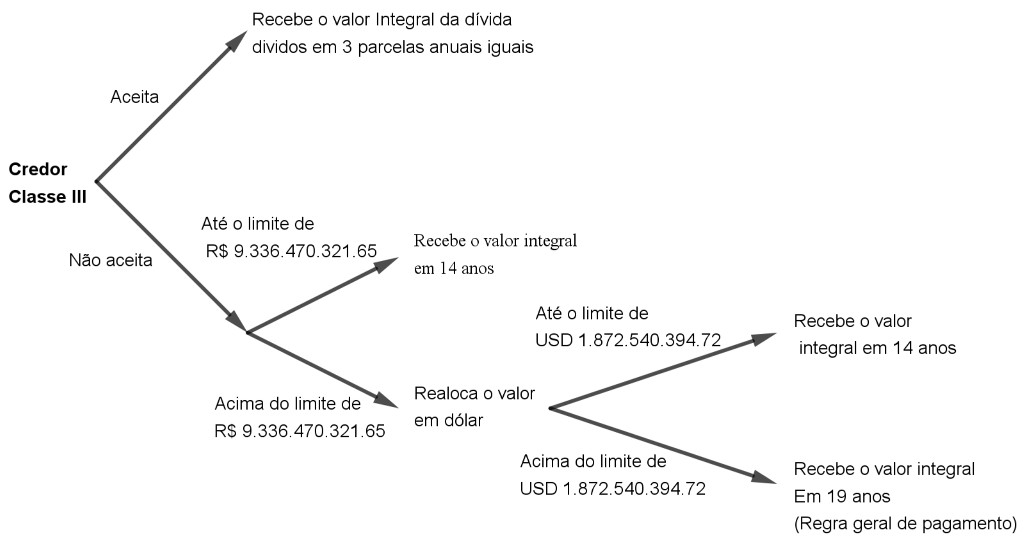
4. **Grupo D**

   Os credores classe III são os credores que são parceiros comerciais e de grande importância para a continuidade dos serviços prestados pela Oi S/A. Logo, é de interesse da recuperanda privilegiar estes quanto ao pagamento das dívidas, o que, inclusive consta no plano de recuperação judicial. De fato, a continuidade da parceria é crucial para a sustentação da Oi S/A no mercado economico.

Como exemplo, a empresa que possui um dos maiores valores a receber deste grupo, de R$ 576.473,92, possui preferência de pagamento caso opte a continuar a prestar serviços. Para esse caso, o plano apresenta a estratégia de pagamento em 3 parcelas: a primeira, no valor de R$ 150.000,00, 20 dias após a homologação do acordo, e mais dduas parcelas anuais iguais. Contudo, caso não aceite dar continuidade a parceria, o credor seria enquadrado ao plano oferecido ao grupo C.

A forma geral de pagamento deste grupo é apresentada na figura 4.11:

Figura 4.11: Jogo: Oi S/A x Credores Classe III - Apresentação na forma estendida



Detalhando os credores desse grupo, temos os seguintes dados:

- Valor total de débitos do grupo D: R$ 50.704.412,75;
- Quantidade total de credores do grupo D: 1927.

Se fizermos uma média aritmética entre o valor total de débitos e o número total de credores desse grupo teremos o valor de R$26.312,61 por credor e ainda divididos em 3 parcelas anuais.

De posse desses dados vamos sintetizar o jogo do grupo de uma forma geral, na apresentação estratégica:

Tabela 4.10: Jogo: Oi S/A x Classe III - média aritmética

g_1	g_2	
	Aceita	**Não Aceita**
Paga	-26.312,61 , 26.312,61	- 1.000,00 , 1.000,00

Veja que neste caso, uma rápida e simples análise na tabela 4.10 mostra claramente o Equilíbrio de Nash no conjunto de estratégias $\{Pagar, Aceitar$: sob a perspectiva de g_1, ou seja, da Oi S/A, é muito vantajoso - ou mais que isso:

imprescindível - pagar o valor de R$26.312,61 e ainda permanecendo com a parceria e dando continuidade às suas atividades. Sob a perspectiva de cada credor individualmente, também é mais vantajoso receber sua dívida integral em 3 parcelas anuais do que se comparado ao prazo de até 19 anos para quitação.

De um modo geral, a análise a ser realizada pelos jogadores deve avaliar, além do valor a receber, o prazo dado para a quitação da dívida. Apesar da forma fria e calculista apresentada pela recuperanda, a aceitação do acordo foi a melhor estratégias tendo em vista as condições da empresa.

Merece destaque, o tratamento dado aos credores do grupo C, para os quais foram apresentadas as piores estratégias.

O fato é que a não aceitação ao plano de recuperação judicial e eventual falência da empresa, traria um prejuízo muito maior não só aos credores mas a sociedade em geral. É notório que a Oi S/A soube usar esse fator a seu favor.

5 Considerações Finais

Essa pesquisa tratou da aplicação da Teoria dos Jogos em ambientes econômicos, e expomos como essa teoria pode dinamizar a análise de estratégias disponíveis entre jogadores em um processo de interação.

Como apresentada, a Teoria dos Jogos é um ramo da Matemática Aplicada. Trabalhamos, entretanto, para que a pesquisa não exigisse o fato como um pré-requisito, tornando a leitura agradável, também a profissionais não matemáticos, como economistas, administradores, contabilistas ou ainda àqueles que tenham a simples curiosidade em conhecer a interação entre organizações, que agem estrategicamente de acordo com seus interesses. Para tanto, nos valemos de termos matemáticos relativamente simples e acessíveis.

Apesar de simples, objetiva, a Matemática, deslumbrantemente, foi a responsável pela demonstração dessa teoria. Conhecida, equivocadamente ou não, no meio científico como a ferramenta para todas as outras ciências, aqui assume o papel de pilar dos estudos. Se apodera dos preceitos teóricos (aqui no sentido mais popular, sem prática) para tornar ligação entre ensinamento e empresa.

A Teoria dos Jogos se garante como importante ferramenta (aqui sim, com certeza: ferramenta!) em disputas empresariais, trabalhando com a análise de estratégias disponíveis a cada jogador, tratando de destacar as mais vantajosas, as dominantes, e eliminando as que não agregam nenhum ou diminuto valor, as dominadas, ao objetivo mais atraente ao perfil de cada jogador.

Nesse âmbito também, a Teoria do Equilíbrio de Nash respondeu ao que norteou este trabalho. Mostrou que tanto em jogos colaborativos ou não, a busca do resultado que não seja melhor individualmente, mas privilegia o coletivo, envolvendo n jogadores, é a mais vantajosa opção, o que os leva a não terem incentivos no sentido de mudar suas estratégias.

Embasados nesse contexto, mostramos como o Equilíbrio de Nash pôde auxiliar em uma delicada situação de recuperação judicial. A teoria apresentou a máxima de sua definição: a importância, nesse caso, do jogo entre devedor e credores, de sempre buscar o equilíbrio negocial.

Durante a pesquisa, constatamos que a Teoria dos Jogos é amplamente divulgada e eficientemente utilizada em múltiplas áreas de pesquisa e desenvolvimento econômico nos Estados Unidos e Europa. No Brasil, o seu uso começa a despontar do superficial para aplicabilidade real no cotidiano, principalmente de grandes corporações. Diante dessa baixa aplicação em nosso país, o trabalho se esbarrou na falta de fontes sustentáveis de pesquisa, principalmente no que diz respeito a especificidade da aplicação na economia. Mas tal fato, ao contrário da lógica, foi positivamente desafiador, pois como gestor de pequena empresa, emparelhar cada tópico teórico com o dia-a-dia administrativo foi verdadeiramente viciante e prazeroso.

Assim sendo, apesar da presente Teoria estar ausente das ementas do curso de Licenciatura em Matemática, pelo menos na Universidade Federal do Tocantins, e transitar quase desapercebida na maioria dos livros de autores brasileiros, esperamos que o nosso trabalho instigue outros estudantes a se aprofundarem no tema, haja vista o vasto leque de assuntos pertinentes, atendendo a praticamente todos os perfis de pesquisadores. E, desde já, nos colocamos à disposição para aplicarmos nossas estratégias, na prática, esperando cooperar no jogo do conhecimento.

Referências

[1] ALMEIDA, Alecsandra Neri de. **Teoria dos Jogos: As origens e os fundamentos da Teoria dos Jogos.** São Paulo: 2006. 8 f. Curso de Matemática, UNIMESP.

[2] ALMEIDA, Fábio Portela Lopes de. **A teoria dos jogos**: uma fundamentação teórica dos métodos de resolução de disputa. Disponível em: <http://www.arcos.org.br/livros/estudos-de-arbitragem-mediacao-e-negociacao-vol2/terceira-parte-artigo-dos-pesquisadores/a-teoria-dos-jogos-uma-fundamentacao-teorica-dos-metodos-de-resolucao-de-disputa>. Acesso em: 29 set. 2018.

[3] BONANNO, Giacomo; HOEK, Wiebe van Der; WOOLDRIDGE, Michael. **Logic and the Foundations of Game and Decision Theory**. Amsterdam: Amsterdam University Press, 2008. 241 p. 3 v.

[4] CAMPOS, Celso Ribeiro; CARDOSO, Marcelo José Ranieri. **A teoria dos jogos e a mente brilhante de john nash**. 2015. 16 f. Curso de Matemática, Pucsp e Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 2015.

[5] CORDEIRO, Yuri Vieira. **Teoria dos jogos e o equilíbrio de Nash**. 2017. 29 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2017.

[6] COUTINHO, Felipe de Oliveira. **Teoria dos Jogos e a Recuperação Judicial de Empresas**. 2017. 63 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Pontífica Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

[7] FIANI, Ronaldo. **Teoria dos Jogos: Com aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais.** 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015. 394 p.

[8] FIGUEIREDO, Reginaldo Santana. **Teoria dos jogos: Conceitos, formalização matemática e aplicação à distribuição de custo conjunto**. 2012.

20 f. Curso de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2012.

[9] NASAR, Sylvia. **Uma mente brilhante**. 7. ed. Rio de Janeiro: Bestbolso, 2015. 655 p. Tradução de: Sergio Moraes Rego.

[10] PINDYCK, Robert S.; RUBINFELD, Daniel L.. **Microeconomia**. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. 670 p. Tradução de Eleutério Prado, Thelma Guimarães.

[11] SARAIVA, Alessandra. Justiça do Rio confirma que dívida total da Oi atinge R$ 63 bilhões. 23/05/2017. Disponível em: <https://www.valor.com.br/empresas/4977962/justica-do-rio-confirma-que-divida-total-da-oi-atinge-r-63-bilhoes>. Acesso em: 02 out. 2018.

[12] SARTINI, Brígida Alexandre et al. **Matemática Aplicada**. In: II BIENAL DA SBM, 2004, Bahia. Uma Introdução a Teoria dos Jogos. Bahia: Sbm, 2004. p. 1 - 61.

[13] SILVA, Adriana Patrícia Lúcio da. **Uma revisão dos conceitos da teoria dos jogos**. 2014. 37 f. TCC (Graduação) - Curso de Bacharelado em Estatística, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

[14] UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS. **Manual para Elaboração e Normalização de Trabalhos de Conclusão de Curso do Campus de Araguaína**. Araguaína: UFT, 2011.

[15] XAVIER, Otávio Munaro. **A origem da teoria dos jogos e a existência de equilíbrio em Nash**. 2013. 58 f. TCC (Graduação) - Curso de Ciências Econômicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.