UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS DE PALMAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO EM CIÊNCIAS E SAÚDE
MESTRADO ACADÊMICO

ANTÔNIA LÍLIA SOARES PEREIRA

TRIANGULUX
UMA PROPOSTA DE JOGO DIGITAL PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Palmas/TO
2021

ANTÔNIA LÍLIA SOARES PEREIRA

TRIANGULUX
UMA PROPOSTA DE JOGO DIGITAL PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino em Ciências e Saúde. Foi avaliada para obtenção do título de Mestre em Ensino em Ciências e Saúde e aprovada, em sua forma final, pelo orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: Dr. José Lauro Martins

Palmas/TO
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S676t Soares Pereira, Antônia Lília.

TRIANGULUX : UMA PROPOSTA DE JOGO DIGITAL PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA . / Antônia Lília Soares Pereira. – Palmas, TO, 2021.

132 f.

Dissertação (Mestrado Acadêmico) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) em Ensino em Ciências e Saúde, 2021.

Orientador: José Lauro Martins

1. Jogos digitais. 2. Educação Matemática. 3. Metodologia do Ensino de Matemática. 4. Roteiro de jogos. I. Título

CDD 372.35

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

FOLHA DE APROVAÇÃO

ANTÔNIA LÍLIA SOARES PEREIRA

TRIANGULUX: UMA PROPOSTA DE JOGO DIGITAL PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino em Ciências e Saúde. Foi avaliada para obtenção do título de Mestre em Ensino em Ciências e Saúde e aprovada em sua forma final pelo orientador e pela Banca Examinadora.

Data de aprovação: 21 / 12 / 2021

Banca Examinadora

____

Prof. Dr. José Lauro Martins – Orientador (UFT)

Janeisi de Lima Meira

____

Prof. Dr. Janeisi de Lima Meira – Examinador (UFT)

Delabary

____

Profª. Drª. Arlenes Buzatto Delabary Spada – Examinadora (UNITINS)

Palmas/TO
2021

A Deus, o meu Senhor todo Poderoso.

À Laura, o amor de toda a minha vida.

MUDANÇAS
De postura, de foco, de reação
Nem sempre estamos preparados
Às vezes não são bem recebidas
Eu não aceito fácil: rotina truncada de mim.

Mas elas vêm. Queiramos ou não.
E é preciso ter coragem
Para modificar o que parecia imutável em nós
O jeito de educar, de jogar com palavras
De amar e de realizar a vida.

Num mundo povoado de ideias,
Eu renasço,
Cresço e me desfaço.
Mudar é reaprender
Na placidez silente dos pensamentos,
Nas ações descompostas de propósito
Ou na explosão colorida da mente sitiada.

*(**Carla Soares Pereira**, 2021)*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, o meu Pai, o meu amigo de todas as horas, o meu refúgio, quem me sustenta em todos os momentos da minha vida.

Ao meu esposo, Sebastião Souza do Nascimento, meu companheiro amado, que sempre me ajudou, me acompanhou, me consolou nos momentos de tristeza e de angústia e também esteve presente nos momentos mais contagiantes e felizes da construção desta dissertação.

Aos meus pais, Mário Damião Pereira e Antonia Soares, que me inspiraram a escrever esta pesquisa, sempre torceram pelo meu sucesso, sonharam com este momento, nunca me abandonaram e me confortaram nas situações mais difíceis da minha vida.

Aos meus irmãos Carla, Fábio e Elívia, que sempre foram suporte na minha vida, me incentivaram a continuar e realizar os meus sonhos. Principalmente à Carla, que contribuiu consideravelmente com o desenvolvimento deste trabalho.

À Walena Magalhães, amiga de todas as horas, que sempre me motivou e me impulsionou a concluir esta pesquisa.

Ao meu querido Prof. Dr. José Lauro Martins, que é mais que um orientador, é um amigo que me faz pensar “fora da caixinha”, que compreende os meus problemas e me ajuda em todos os momentos em que preciso.

Ao PPGECS/UFT, aos meus colegas da turma 2020/2, aos meus professores e à coordenadora do Programa de Mestrado em Ensino em Ciências e Saúde da UFT, Prof.ª Érika Maciel.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, por me proporcionar uma bolsa de auxílio à pesquisa e por ser a instituição formativa mais linda em sua essência e acolhedora em que eu já trabalhei, que me apoia e me faz crescer como profissional.

A todos que contribuíram diretamente ou indiretamente para o desenvolvimento deste trabalho agradeço de coração.

RESUMO

Nesta dissertação apresentamos uma proposta de desenvolvimento de um *software* educacional para o ensino de Matemática, especificamente, um jogo digital, uma inovação pedagógica que traz um *script* baseado na história de vida dos "povos da floresta". A pesquisa, de abordagem qualitativa, de finalidade aplicada, é exploratória e descritiva. O desenvolvimento inovador e disruptivo das tecnologias móveis permitem a evolução dos modelos educacionais e proporcionam a potencialização das ferramentas para o ensino-aprendizagem de Matemática e o papel ativo do estudante quanto à construção do seu próprio aprendizado. Diante de várias indagações a respeito de como os alunos aprendem Matemática pergunta-se: Como deve ser um *software* didático para o ensino de Trigonometria estruturado com base na teoria construcionista? Diante disso, o objetivo deste trabalho é desenvolver uma proposta teórico-metodológica de ensino em Matemática por meio do desenvolvimento de um *software* educacional. O trabalho apresenta a articulação da Teoria do Construcionismo de Seymour Papert com o desenvolvimento do *software* educacional para o ensino-aprendizagem de Trigonometria; a produção de um roteiro de um aplicativo para a autoaprendizagem da Trigonometria; a estruturação de uma proposta didático-pedagógico-tecnológica para o ensino-aprendizagem de Trigonometria, compatível com as possibilidades de uso dos dispositivos móveis. Na proposta de desenvolvimento do *software*, apresenta-se a arquitetura pedagógica e a transposição didática do jogo, as contribuições e articulações desta proposta para o ensino de Matemática, especificamente para a aprendizagem de Trigonometria. Os resultados desta investigação apresentam-se na produção de um roteiro do jogo a partir da elaboração de um plano pedagógico seguindo uma trilha de aprendizagem, que decorre de todo um estudo desenvolvido no percurso da produção do *software*. Assim, intenciona-se contribuir para a produção de outros jogos que tenham o mesmo objetivo pedagógico e de construir ferramentas inovadoras com grande potencial, como os *softwares*, para o ensino de Matemática. Além disso, o *software* pauta-se na perspectiva do *mobile learning*, para favorecer o autoestudo e a autoaprendizagem do estudante. Dessa maneira, esta pesquisa tende a favorecer a formação integral do estudante, para que se torne protagonista da sua própria aprendizagem e, sobretudo, aprenda Matemática de forma interativa e dinâmica.

Palavras-chave: Jogo digital. *Mobile-Learning*. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

In this dissertation we present a proposal to develop an educational software for teaching mathematics, specifically a digital game, a pedagogical innovation that brings a script based on the life history of the "forest peoples". The research of qualitative approach, of applied purpose, presents exploratory-descriptive research objectives. The innovative and disruptive development of mobile technologies allows the evolution of educational models and provides the potentialization of tools for the teaching-learning of mathematics and the active role of the student in the construction of his own learning. Faced with several questions about how students learn mathematics, the following question is posed: How should a didactic software for teaching Trigonometry structured based on the constructionist theory be? In view of this, the objective of this work is to develop a theoretical-methodological proposal for teaching Mathematics through the development of an educational software. The work also presents the articulation of the Seymour Papert's Theory of Constructionism to the development of educational software for the teaching-learning of Trigonometry; the production of a script of an application for the self-learning of Trigonometry; the structuring of a didactic-pedagogical-technological proposal for the teaching-learning of Trigonometry, compatible with the possibilities of use of mobile devices. In the software development proposal, the pedagogical architecture of the game, the didactic transposition of the game, and the contributions and articulations of this proposal to the teaching of mathematics, specifically to the learning of trigonometry, are presented. The results of this research are presented in the production of a game script from the elaboration of a pedagogical plan following a learning path that results from a study developed during the production of the software. Thus, the intention is to contribute to the production of other games that have the same pedagogical objective and to build innovative tools with great potential, such as software, for the teaching of mathematics. Furthermore, the software is based on the mobile learning perspective, to favor self-study and self-learning for the student. In this way, this research tends to favor the integral formation of the student, so that in an autonomous way, he becomes the protagonist of his own learning, and above all, learns Mathematics in an interactive and dynamic way.

Key-words: Digital games. Mobile-Learning. Mathematics teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
IFTO	Instituto Federal do Tocantins
PPGECS	Programa de Pós-Graduação em Ensino em Ciências e Saúde
UFT	Universidade Federal do Tocantins

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Alfa
β	Beta
$<$	Menor que
$>$	Maior que
Δ	Triângulo
$\cong$	Aproximadamente
$\hat{A}$	Ângulo
$\rightarrow$	Implica
$\leftrightarrow$	Se, e somente, se
$\overline{BC}$	Segmento de reta
$\forall$	Para quaisquer que sejam
$\in$	Pertence
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

"A aprendizagem tem um vínculo com o contexto do aprendiz, não dá para esperar bons resultados se o processo educativo não estiver integrado no modus vivendis dos aprendentes" (MARTINS, 2017, p. 38).

As grandes inovações disruptivas nas novas formas de criar, produzir e gerenciar produtos e informações no mundo acarretam uma melhoria na qualidade da educação e provocam deliberadamente a evolução dos processos tecnológicos dos modelos educacionais. O espaço digital é ilimitado e abrange inúmeras possibilidades de criação. A viabilidade técnico-científica do universo tecnológico emite possibilidades pedagógicas que antes eram impensáveis para a humanidade.

Desenvolvem-se *mindsets*[1] digitais para as tecnologias emergentes e intelectuais que se relacionam a partir da transformação digital na sociedade da informação. O mundo digital se despende e "podemos observar uma mudança de paradigmas responsável pela reconfiguração de novos modelos de produção e circulação que faz com que a inovação seja marcada pela transformação do conhecimento em tecnologia e pela capacidade das tecnologias criativas" (SANTAELLA, 2013, p. 89).

A inovação digital, sob a ótica de uma mudança disruptiva, envolve o desenvolvimento de modelos para criação, construção, comunicação, processamento de informações e simulação para a significação cognitiva. Nesse contexto, a tecnologia digital assume o papel de técnica inovadora da produção de novas tecnologias intelectuais individuais, indexadas e acessíveis quanto à produção e à difusão do saber, que acusa o progresso das redes de serviços integrados para a evolução do sistema educacional (LÉVY, 2010).

O progresso da ciência transcende o aprimoramento das estratégias de uma educação inovadora. A sociedade tecnológica, à medida que obtém o conhecimento sobre os recursos, desenvolve também novas tecnologias para o acesso às informações, às interações e para a criação de meios cada vez mais eficientes que sempre superem a tecnologia anterior. Os métodos inovadores constituem-se de maneira multidisciplinar e compreendem a diversidade e

---

[1] *Mindset* digital significa "mentalidade digital". O conceito destaca uma nova forma de pensar sobre o uso da tecnologia, além disso, consiste na reconfiguração da mudança de mentalidade das pessoas diante da realidade contemporânea, rompendo paradigmas e desenvolvendo a perspectiva e competência para inovar (MARTINS; OLIVEIRA; SANTOS, 2020).

a heterogeneidade das competências e habilidades para a emancipação humana (KENSKI, 2019).

O uso de dispositivos móveis no contexto educacional auxilia positivamente os aprendizes quanto à integração do mundo tecnológico por uma série de estudos de modelos de aprendizagem, eficazes principalmente na educação matemática. Diante disso, identificam-se as funcionalidades reais que o *mobile learning*[2] proporciona aos alunos para a autoaprendizagem, principalmente quanto aos *insights* que os aplicativos móveis dinâmicos e interativos promovem, auxiliando o processo de compreensão da matemática e contribuindo tanto com o autoestudo quanto com a aprendizagem ubíqua (NAM; THAO, 2015; SILVA; OLIVEIRA, 2018; PINHEIRO; SERUFFO; PIRES, 2019).

Os aplicativos móveis tornaram-se instrumentos didáticos diferenciados de utilização nas aulas, pois potencializam o aprendizado e proporcionam um melhor aproveitamento dos conteúdos. Vistos como inovações pedagógicas, os aplicativos (apps) são criações desenvolvidas para a melhoria e transformação do processo educacional. A aprendizagem digital abrange o espaço pedagógico da educação do futuro, da diversificação, da interação e do desenvolvimento de materiais de aprendizagem por meio do uso dos apps (CHAO *et al.*, 2018; COUTINHO; ALMEIDA; JATOBÁ, 2021).

Desse modo, na sociedade da informação, faz-se necessário o uso de "*softwares* e aplicativos para compreender e produzir conteúdos em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática", de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018, p. 475). Essas diversas ferramentas tecnológicas contribuem para a identificação, análise, modelagem e solução de problemas em diversas áreas, principalmente na área educacional.

O mais importante é que essas ferramentas educacionais possibilitam simular aplicações da matemática, o que facilita o desenvolvimento da habilidade do raciocínio lógico do aluno, o letramento matemático, bem como a literacia digital. Dessa forma, o desenvolvimento tecnológico proporciona, não somente às Ciências Exatas, mas também às diversas áreas do conhecimento, formas práticas, como os jogos pedagógicos, que motivam a

[2] "Mobile learning not only involves the use of portable devices, but also the ability to learn in different contexts (beyond the classroom, for example) through intertwined interactions with people, content, and devices". Em tradução livre: "A aprendizagem móvel ou *mobile learning* não envolve apenas o uso de dispositivos móveis, mas também a capacidade de aprender em diferentes contextos (além da sala de aula, por exemplo) através de interações entrelaçadas com pessoas, conteúdo e dispositivos" (BORBA *et al.*, 2016, p. 592, tradução nossa).

aprendizagem de maneira mais lúdica e inclusiva (STEVENSON *et al.*, 2015; BARROS, 2017; ANDRADE, 2019).

Desse modo, a aprendizagem baseada em jogos proporciona aos professores e estudantes o entendimento de que o jogo tem um sentido dentro do contexto educacional, pois significa a emissão de uma hipótese ou a aplicação de uma experiência. Assim, compreende-se que os jogos são objetos de aprendizagem, na medida em que exigem respeito a certas regras de construção, por isso a noção de jogo não nos remete a uma língua particular de uma ciência, mas ao uso particular do cotidiano (KISHIMOTO, 2008; ALVES; TORRES, 2017).

Então, quando os aprendizes têm contato com o espaço de problemas complexos propostos pelos jogos pedagógicos ou digitais, tendem a alcançar soluções criativas para um nível de complexidade dos problemas. Por isso, "os bons jogos oferecem aos jogadores um conjunto de problemas desafiadores e então os deixam resolver esses problemas até que tenham virtualmente rotinizado ou automatizado suas soluções" (GEE, 2009, p. 5).

Portanto, o uso dos jogos para a aprendizagem em matemática consiste em "um campo híbrido, poli e metamórfico que envolve programação, roteiro de navegação, design de interface, usabilidade, jogabilidade, ergonomia, técnicas de animação e paisagem sonora" (SANTAELLA, 2013, p. 88). Nesse campo, "a elaboração de um roteiro rico e a composição gráfica de excelência tornam-se componentes fundamentais para o incremento das chances de sucesso dos jogos didáticos" (SANTAELLA, 2013, p. 105).

Dentro desse contexto, este trabalho procura realizar contribuições na área educacional, especificamente no que diz respeito ao ensino-aprendizagem de Matemática, pois se trata de uma proposta de desenvolvimento de s*oftware* para o ensino de Trigonometria. Além disso, esta pesquisa busca colaborar também para a produção de outros *softwares* com o mesmo objetivo educacional. Portanto, esta investigação visa favorecer o estudante, o seu desenvolvimento em múltiplas dimensões, em toda a sua totalidade, com foco principal voltado para a autonomia, para que, dessa forma, torne-se protagonista da sua própria aprendizagem.

1.1 Problema de Pesquisa

Os processos tecnológicos e sociais influenciam a construção de conceitos da formação integral dos sujeitos, e o uso das tecnologias na educação potencializam o papel ativo do estudante ao possibilitar a produção e construção do conhecimento de forma autônoma. Papert (1985) explica que "a presença do computador pode mudar não somente a maneira como ensinamos matemática às crianças, mas, muito mais fundamentalmente; a maneira como nossa cultura como um todo pensa sobre o conhecimento e aprendizagem”. Tal fenômeno

> [...] em grande parte deve-se ao fato da nossa cultura estar inclinada a reservar o nome matemática para o tipo de matemática “leterada” ensinada na escola e talvez para uma base intuitiva mínima diretamente conectada a ela. Contudo, ao excluir uma base muito maior do conhecimento que deveria servir como alicerce para a matemática formal, interrompemos a via para uma melhor aprendizagem. [...] Até agora o uso mais potente de computadores para mudar a estrutura epistemológica da aprendizagem infantil foi a construção de micromundos[3], nos quais as crianças executam atividades matemáticas porque são espaços virtuais atrativos, exigindo o desenvolvimento de habilidades matemáticas específicas (PAPERT, 2008, p. 30).

Simultaneamente, as formas de ensinar e aprender, particularmente por meio da tecnologia móvel, reforçam a concepção da matemática como um modo não formalizado de conhecimento; ao mesmo tempo, os micromundos associados aos jogos didáticos oferecem a oportunidade de aprendizagem formal. Para o desenvolvimento de novas metodologias, é imprescindível um repensar da formação dos professores que ensinam matemática, visto que o aperfeiçoamento das práticas pedagógicas, não só quanto ao uso dos recursos digitais e de tecnologia móvel, mas, sobretudo, quanto ao uso de aplicativos móveis no contexto da aprendizagem, facilitam a mobilidade das informações e favorecem a disseminação do conhecimento (FIORENTINI *et al.*, 2016; GARCIA *et al.*, 2020).

Diante de tais prerrogativas, elege-se, como pergunta norteadora desta pesquisa, a seguinte problemática: Que aspectos deve ter um *software* didático para o ensino de Trigonometria estruturado com base na teoria construcionista?

Sob uma ótica visionária, seguindo a perspectiva de uma proposta do desenvolvimento de um *software* educacional para ensinar Trigonometria, pautada na teoria do Construcionismo de Papert (1980), este estudo preocupa-se em trazer como perspectiva o desenvolvimento de um aplicativo móvel que contribua com a “'reconstrução da matemática, ou, mais genericamente, como reconstrução do conhecimento de tal maneira que não seja necessário grande esforço para ensiná-la” (PAPERT, 1985, p. 75).

Então, buscando estruturar uma proposta teórica para a metodologia de desenvolvimento do aplicativo digital, a pesquisa fundamenta-se não somente na construção desse *software* educacional para a aprendizagem em Matemática, mas também na

---

[3] Papert (1980) define que o micromundo consiste nas próprias construções no mundo, em que os alunos podem transferir seus hábitos de exploração da vida pessoal para o contexto que permite a construção do conhecimento científico.

contextualização do ensino-aprendizagem da Trigonometria, por meio do uso de um *software* educacional e no *design* dessa proposta didático-pedagógico-metodológica.

1.1.1 Pressupostos

Esta pesquisa propõe o desenvolvimento de uma proposta teórico-metodológica de *software* educacional apresentada como jogo digital, fundamentada na teoria construcionista. Sob uma perspectiva motivacional, este estudo faz abordagens, em seu roteiro, acerca da cultura dos "povos da floresta", perspectiva que permite a aprendizagem da Matemática por meio da autonomia e da autoaprendizagem provocadas pelo delineamento do protagonismo do aprendente.

O uso das tecnologias móveis na educação demanda uma compreensão das complexidades de ensinar e aprender. A relação dinâmica entre essas tecnologias, os sistemas epistemológicos e pedagógicos determinam a qualidade e o êxito quanto ao processo de aprendizagem. Os desenhos metodológicos dos *softwares* educacionais em que se apresentam os jogos digitais, baseados nas Teorias da Aprendizagem, evidenciam a eficácia significativa das pedagogias do *m-Learning* com relação ao autoestudo e à autonomia dos estudantes (BANO *et al.*, 2018).

Desse modo, é importante destacar que a maior parte das pesquisas voltadas para o desenvolvimento de *softwares* educacionais com conteúdo de jogo não se baseiam nas teorias pedagógicas. Nesse sentido, ressalta-se que é imprescindível uma abordagem integradora, construtiva e dinâmica nas estratégias de planejamento e *design* de um app digital para proporcionar a construção do conhecimento por parte dos estudantes, uma vez que a interação com o objeto didático-pedagógico possivelmente provoca o engajamento dos aprendentes e a personalização de novos conhecimentos, além da geração de ideias (CHEUNG; HEW, 2009).

1.1.2 Delimitação de Escopo

Esta pesquisa está delineada no contexto educacional, sob os espaços de aprendizagem com o uso de aplicativos móveis que dispõem de jogos digitais que podem potencializar o desenvolvimento de diversas habilidades cognitivas. O enfoque deste trabalho concentra-se no desenvolvimento dos cenários de aprendizagem em matemática que o *software* pode proporcionar ao público estudantil, seja dos Anos Finais do Ensino Fundamental, seja do Ensino

Médio, seja para estudos de concursos e processos seletivos, contemplando também os professores que ensinam Matemática.

O objeto desta pesquisa consiste em construir um roteiro do jogo digital *TrianguLux*, que versa sobre a cultura dos "povos da floresta", em especial, da vida cotidiana e do ambiente em que viviam/vivem os seringueiros, que sobreviviam/sobrevivem do extrativismo vegetal, portanto, esta proposta se aproxima do viés característico da Etnomatemática.

1.1.3 Justificativa

O mundo tem passado por diversas transformações, inclusive quanto ao desenvolvimento acelerado da tecnologia. Não obstante, a educação segue também a passos largos. Na contramão do ensino tradicional, a educação volta-se para a emancipação humana e a formação do indivíduo em sua totalidade, integrando ciência e tecnologia.

Nesse campo, situa-se a aprendizagem mediada por tecnologias digitais que relacionam a corporificação e a multiplicidade dos objetos cotidianos instrumentalizados por meio da internet das coisas, associada a uma tecnologia que proporciona solidez ao processo educativo (DEMO, 2009; SANTAELLA, 2013). Desse modo, a apropriação pedagógica dos recursos digitais possibilita a construção da autonomia, a autorregulação, a metacognição e a autoaprendizagem dos aprendentes (MARTINS, 2017).

Esse contexto possibilita ainda a aprendizagem ubíqua, que se define como as formas de aprendizagem mediadas pelos dispositivos móveis. As tecnologias móveis permitem a acessibilidade às informações, a flexibilidade, a velocidade, a adaptabilidade e afetam diretamente as formas de educar e de aprender. A era da hipermobilidade provocou o aprendizado individualizado, centrado no aprendiz colaborativo. Essa forma de aprender pode ocorrer a qualquer momento, pois, de maneira natural, o sujeito aprende e despende o desenvolvimento das suas próprias capacidades humanas (SANTAELLA, 2013).

Assim, visando à aprendizagem ubíqua dos aprendentes, após uma busca por aplicativos móveis para ensinar os conceitos de Trigonometria, surgem dificuldades para encontrar um app disponível no *Google Play Store* que se adapte às estruturas necessárias para o processo educativo.

No decurso da procura por um *software* que se enquadre no contexto educacional, foi realizada uma análise de alguns apps encontrados na referida plataforma, voltados para a área da educação, que constatou, na maioria dos *softwares*, semelhanças entre eles, quanto aos *designs* e às funcionalidades e que, em grande parte, apresentam-se apenas como calculadoras "mecânicas" que inibem a possibilidade de construção dos conceitos e significados como bases cognitivas para o aprendente.

Além disso, a maior parte dos recursos dos apps não condiz com a perspectiva em que se apresentam, suas funcionalidades são restritas e tecnicistas e não estimulam o passo a passo como procedimento para a resolução das questões; possuem limitações quanto aos conteúdos, que são apresentados de forma específica, e também não há um nível de complexidade crescente nas atividades propostas.

Diante dessas análises dos aplicativos educacionais de matemática, percebe-se que há uma lacuna quanto à apresentação de *softwares* que possuem modelos mais dinâmicos e interativos, que atendam às diversas necessidades cognitivas, didáticas, epistemológicas e tecnológicas do ensino e da aprendizagem dos conceitos matemáticos e que se baseiam na construção do conhecimento, letramento e pensamento matemático (SANTOS, 2016).

Grande parte das pesquisas baseadas em *m-learning* não se refere às teorias pedagógicas com abordagem ao *design* instrucional, ao processo de aprendizagem por meio do *software*, ou à tecnologia utilizada para a investigação. Além disso, há uma escassez de estudos que se concentrem no desenvolvimento de metodologias de construção de *softwares* educacionais, bem como de melhorias na qualidade da educação que esses aplicativos móveis, na condição de objetos de aprendizagem, proporcionam para o ensino de matemática (ZYDNEY; WARNER, 2016; BANO *et al.*, 2018).

O jogo digital, como objeto de estudo desta pesquisa, torna-se significativamente metodológico a partir do momento em que traz o seu valor como uma forma específica de atividade lúdica. A consistência empírica e basilar dos jogos, "a extrema importância deste lugar e a necessidade, ou pelo menos a utilidade da função dos jogos é geralmente considerada coisa assente, constituindo o ponto de partida de todas as investigações científicas desse gênero" (HUIZINGA, 2008, p. 5).

Portanto, a finalidade desta pesquisa consiste em desenvolver uma proposta técnico-metodológica de *software* educacional para a aprendizagem de Matemática. Nesse sentido, a proposta metodológica do uso de aplicativos móveis integra-se como possibilidade para potencializar o objeto de conhecimento por meio de um aplicativo móvel que contenha jogo digital, além de promover a diversidade de situações de aprendizagem, inclusive no que se refere ao desenvolvimento do letramento e do pensamento matemático quanto à compreensão de conceitos abstratos. Esta pesquisa busca trazer uma proposta diferenciada de *software* que se baseia no Construcionismo de Papert (1980) e que se pauta no desenvolvimento de uma proposta teórico-metodológica de aprendizagem em Matemática por meio de *software* educacional.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma proposta teórico-metodológica de ensino em Matemática por meio da construção de um *software* educacional.

1.2.2 Objetivos Específicos

1) Articular a Teoria do Construcionismo de Seymour Papert ao desenvolvimento do *software* educacional para o ensino-aprendizagem de Matemática;

2) Produzir o roteiro de um aplicativo para gerar a autoaprendizagem em Trigonometria;

3) Estruturar uma proposta didático-pedagógico-tecnológica para o ensino-aprendizagem de Trigonometria compatível com as possibilidades de uso dos dispositivos móveis.

1.3 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está organizada em seis capítulos correlacionados. No Capítulo 1, na Introdução, apresentam-se a sua contextualização, o problema da pesquisa, os pressupostos, a delimitação do escopo, a justificativa, os objetivos gerais e específicos, além do potencial de Inovação da pesquisa, possibilitando uma visão ampla do tema relacionado neste estudo.

No Capítulo 2, apresenta-se a fundamentação teórica da pesquisa, a qual versa sobre a importância dos aplicativos móveis para o ensino de Matemática, a abordagem da temática Trigonometria no jogo digital *TrianguLux*, as contribuições dos jogos digitais para o ensino de Matemática, os trabalhos correlatos, que possuem a mesma perspectiva de abordagem desta pesquisa, a gamificação no processo de construção do jogo e as características educacionais da Etnomatemática presentes no jogo.

No Capítulo 3, apresenta-se o delineamento da metodologia da pesquisa científica, a identificação metodológica da pesquisa e o enfoque da Teoria de Aprendizagem Construcionista de Seymour Papert sobre a pesquisa.

No Capítulo 4, apresentam-se os resultados da pesquisa, bem como a análise desses resultados. Nesse capítulo, é descrito o projeto de desenvolvimento do *software* educacional, o pré-projeto do jogo digital, os personagens do jogo, as fases do jogo, a descrição do roteiro do jogo na fase, I "Caminhos da Floresta", na fase II, "Desafios Perigosos na Floresta", e na fase III, "Travessia do Rio".

No Capítulo 5, abordam-se também os resultados e as análises desta pesquisa. Ainda nesse capítulo, apresenta-se a transposição didática do jogo, o Teorema de Pitágoras na fase I, as Razões Trigonométricas no triângulo retângulo, a Trigonometria em triângulos quaisquer, a lei dos senos, a lei dos cossenos, o plano pedagógico do jogo e as trilhas de aprendizagem na fase I, na fase II e na fase III do jogo.

No Capítulo 6, são tecidas as conclusões do trabalho, relacionando os objetivos identificados inicialmente com os resultados alcançados. Também são propostas as possibilidades de continuação da pesquisa desenvolvida a partir das experiências adquiridas com a execução do trabalho.

1.4 Potencial de Inovação

O desenvolvimento expressivo da tecnologia movimenta os diversos segmentos na sociedade, inclusive viabiliza o progresso da educação. A ascensão dos jogos digitais com programação voltada para o uso em dispositivos móveis acarretou uma disruptividade nos modelos educacionais contemporâneos e trouxe um novo olhar dos educadores para essa área.

Entre os fatores precursores de caráter inovador dos jogos sérios no meio digital destacam-se a otimização e a integração de recursos de *hardware* e *software* para esses jogos, pois apresentam uma multiplicidade de recursos gráficos para o provimento máximo de realismo, engajamento e imersão, além de apresentar a tela e o d*esign* futurista que permitem uma experiência de usuário (UX) diferenciada no universo dos *mindsets* digitais.

Sobre o potencial inovador, esta pesquisa ancora-se também na teoria da adaptação-inovação de Kirton (1976), que se refere à capacidade de melhorar e de realizar ações diferentes sob pontos de vista incomensuráveis, trazendo soluções administrativas e de caráter organizacional. O *continnum* cognitivista do interacionismo entre os adaptadores e inovadores fundamenta-se no *script* de comportamento característico de cada estilo. Nessa perspectiva, o engendramento dos paradigmas que os problemas apresentam podem ser percebidos e solucionados rapidamente, de forma eficiente e precisa, além disso, podem-se realizar procedimentos diversificados nas tomadas de decisão para uma melhor qualidade do produto (KIRTON, 1976).

Sob o aspecto inovador, os *insights* que se destacam nos aplicativos educacionais tecnologicamente contemporâneos, tratados como tecnologias emergentes, potencializam a interação entre os objetos de conhecimento e a aprendizagem ativa dos estudantes. Esses *softwares* mediadores do aprendizado provocam *upgrades* nas práticas docentes, pois intensificam as habilidades e competências dos aprendizes, especialmente quanto ao letramento matemático, à literacia digital, ao pensamento computacional e matemático (LOPES; HARDOIM, 2018; ALI *et al.*, 2019; SANTOSO, SOEDJOKO, 2019; HSU *et al.*, 2021).

Portanto, a transformação digital dos jogos *mobile* proporciona as conexões entre a aprendizagem e o entretenimento, a motivação e o engajamento, além de favorecer a investigação de práticas pedagógicas inovadoras que permitem de forma ativa a autogestão, autonomia, autoaprendizagem e autorregulação do estudante.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

"Os jogos são interfaces que podem mediar diferentes perspectivas de aprendizagens"
(Lynn Alves).

2.1 O Construcionismo de Seymour Papert

O Construcionismo de Seymour Papert (1985, 2008) é uma teoria da aprendizagem baseada nos princípios da teoria piagetiana, que destaca a construção intelectual por meio da autoaprendizagem dos indivíduos. O foco dos estudos de Papert (1985) está na construção do conhecimento, nas explicações de como a aprendizagem constitui-se no cérebro, como ocorre o desenvolvimento intelectual, como as pessoas pensam e como aprendem a pensar.

Sobre a concepção construtivista, Papert (1985, 2008) defende que a construção do conhecimento ocorre por meio de práticas educativas que transformam as competências cognitivas de acordo com a interação. Segundo a "aprendizagem piagetiana", conceituada por Papert (1985) como uma aprendizagem espontânea, o indivíduo consegue ressignificar as suas próprias concepções sobre os saberes matemáticos, por meio da interação com o meio e com as aplicações dessa ciência na realidade.

Nesse sentido, o processo de ensino-aprendizagem é percebido de forma ativa em um contexto de experiências e objetos do conhecimento em que o aluno apreende as informações. O ambiente de aprendizado construcionista relaciona-se à aquisição do conhecimento e se dá a partir da ação do sujeito no ambiente que se compõe na construção de artefatos. A visão construtivista

> [...] atribui especial importância ao papel das construções no mundo como um apoio para o que ocorre na cabeça, tornando-se assim uma concepção menos mentalista. Também atribui mais importância à ideia de construir na cabeça, reconheceu do mais de um tipo de construção (algumas delas bastante longe de construções simples, como cultivar um jardim) e formulando perguntas a respeito dos métodos e materiais usados. Como pode alguém tornar-se um especialista em construir conhecimento? Que habilidades são necessárias? Essas habilidades são as mesmas para tipos diferentes de conhecimento? (PAPERT, 2008, p. 137).

Entretanto, a teoria construcionista de Seymour Papert (1985) envolve o estudante quanto à construção do seu próprio aprendizado, dos seus objetivos e planos, cuja atenção é dada à aprendizagem individual e autônoma, que permite a capacidade de aprender novas habilidades, assimilar novos conceitos, avaliar novas situações, na perspectiva de que o conhecimento constitui significado a partir das experiências dos sujeitos. Papert (2008, p. 137) define que o “construcionismo também possui a conotação de 'conjunto de peças para construção', iniciando com conjuntos no sentido literal”.

Papert (2008, p. 134) ainda explica que “a atitude construcionista no ensino não é, em absoluto, dispensável por ser minimalista – a meta é ensinar de forma a produzir a maior aprendizagem a partir do mínimo de ensino”. Nesse sentido, compreende-se que o construcionismo desenvolve-se sobre a autodescoberta do conhecimento específico de que os estudantes precisam. Além disso, é importante possuir bons instrumentos pedagógicos para o desenvolvimento de uma ampla gama de atividades em espaços virtuais atrativos ou “micromundos”.

Sobre a Matemática com enfoque no Construcionismo, Papert (1985) ressalta que a escola não está preparada para atender à demanda que os estudantes apresentam em matemática, principalmente “ao forçar as crianças em situações pedagógicas condenadas de antemão, acaba por gerar sentimentos negativos muito fortes contra a matemática e até mesmo contra a aprendizagem em geral” (PAPERT, 1985, p. 24). Porém, conforme a teoria construcionista, o aluno pode alcançar as “relações com a matemática como um exemplo para mostrar quanto os processos tecnológicos e sociais interferem na construção de ideias sobre as capacidades humanas” (PAPERT, 1985, p. 19).

Por isso, o professor deve compreender “como as pessoas pensam e como aprendem a pensar” (PAPERT, 1985, p. 24), para que o ensino e a aprendizagem tenham significado, tanto para o professor, quanto para o aluno, uma vez que o ensino e a aprendizagem consistem em uma combinação de tal forma que quem ensina aprende também. Dessa forma, o “aprender fazendo”, depois “aprender aprendendo”, “aprender pensando” e “pensar aprendendo” (PANTANO; ZORZI, 2009) são formas de como o aluno aprende e apreende as informações para a consolidação dos seus próprios saberes.

Nessa direção, Papert (1985) também afirma que as complexidades com relação à aprendizagem em matemática por parte dos alunos devem-se à incapacidade de entendimento da utilidade dos conteúdos na vida deles, e que a aplicação contextual da prática diária e essa exemplificação com a realidade reverberam aspectos de um aprendizado efetivo. Uma vez que o aluno aprende a pensar, a constituição de habilidades e competências transcende as ressignificações de novos conhecimentos.

Desse modo, a partir da inserção de novas tecnologias no ambiente educacional, o professor e o aluno, por meio de uma relação de motivação, colaboram juntos intelectualmente e compartilham a experiência com a resolução de problemas, de forma que o aluno não acabe "fazendo o que o professor diz", mas "fazendo o que o professor faz" (PAPERT, 1985).

Portanto, a reconstrução do conhecimento por meio de novas metodologias e de novas ferramentas tecnológicas educacionais contribui para o processo de construção social e para a educação do futuro, de forma que o estudante não somente aprenda, mas aprenda acerca da aprendizagem.

2.2 A Importância do Uso dos Aplicativos Móveis para o Ensino de Matemática

O desenvolvimento das tecnologias emergentes e os desdobramentos das inovações contemporâneas favorecem a ampliação do uso desses recursos de forma pedagógica, provocando o surgimento de novos desafios para a educação e a inserção desses instrumentos com finalidade didática. Uma das ferramentas educacionais que se destaca pelo seu potencial nas atividades de ensino são os aplicativos móveis, que apresentam facilidades quanto à usabilidade, à disponibilidade e à acessibilidade das informações, que se tornaram livres e contínuas e ainda proporcionam a construção da autonomia e a autoaprendizagem dos estudantes (SANTAELLA, 2013; BORBA *et al.*, 2016).

A disponibilidade do acesso à *internet* possibilita o atributo da ubiquidade ao ser humano, pois o espaço digital flexível é indispensável em diversos campos da tecnologia, já que possui dimensionalidades para a leitura e para o desenvolvimento de habilidades educacionais multifacetadas que permitem aprendizagem ubíqua[4] (SANTAELLA, 2013).

Desse modo, o uso dos dispositivos móveis tem-se ampliado em função da portabilidade, em especial do *smartphone*, que é um aparelho móvel de baixo custo, possui conectividade móvel e, por ser um dispositivo com interatividade instantânea,

---

[4] Para maior aprofundamento sobre o tema, ver o livro *Comunicação ubíqua: repercussões na cultura e na educação*, escrito por Lucia Santaella, em 2013.

direciona o usuário, inclusive, quanto à tomada de decisões, além de disponibilizar uma multiplicidade de serviços e aplicações (SILVA *et al.*, 2016).

Nessa perspectiva, a convergência tecnológica de diferentes sistemas, principalmente na área da educação, permite ao *m-learning* o envolvimento de propostas de materiais didático-tecnológicos que favorecem a usabilidade dos instrumentos de aprendizagem. Aliás, o *m-learning* propicia mudanças nas metodologias de ensino que podem ocorrer de modo mais interativo, o que proporciona aos professores uma forma de "reinventarem-se", frente à necessidade de inserção de novas práticas educativas mediacionais no contexto atual de ensino-aprendizagem, tanto em relação aos critérios, quanto às formas de apresentação dos conteúdos, das atividades e avaliações mais adequadas aos estudantes (PREBIANCA *et al*., 2013).

As ferramentas tecnológicas assumem o papel de recursos auxiliares para o desenvolvimento dos processos cognitivos, já que "a maior parte dos programas atuais desempenha um papel de tecnologia intelectual: eles reorganizam, de uma forma ou de outra, a visão de mundo de seus usuários e modificam seus reflexos mentais" (LÉVY, 2010, p. 33). A utilização dos aplicativos para o aprimoramento da aprendizagem acarretou a evolução das "ferramentas necessárias aos desenvolvedores de programas, de forma que todos os futuros aplicativos utilizassem a mesma interface com o usuário" (LÉVY, 2010, p. 30).

Nesse sentido, a diversidade de apps matemáticos educativos enfatiza a motivação da realização das atividades de modo dinâmico e autônomo. Por ser uma proposta de inovação pedagógica, que potencializa o acesso às novas informações, os apps permitem trocas simultâneas que ajudam o professor a ensinar e o aluno a aprender, de maneira que o conteúdo possa ser explorado e compartilhado para a compreensão dos conceitos por meio da visualização e da interatividade que essas ferramentas educacionais geram ao usuário (SANTOS; HOMA, 2018; BRASIL, 2018; PRABOWO *et al.*, 2018; SILVA; OLIVEIRA, 2018). Nessa perspectiva, Andrade (2019) ressalta, sobre o uso dos apps, que

> O mais importante é que eles (os *Apps*) trazem a matemática para o dia a dia facilitando o desenvolvimento lógico do aluno, mostrando o desenvolvimento tecnológico unido à matemática de forma prática e palpável, objetivando um melhor letramento matemático. Tais ferramentas visam facilitar, resolver ou simplesmente entreter seus usuários, utilizando problemas de certa complexidade, desafiando-os em qualquer lugar diariamente (ANDRADE, 2019, p. 43).

Valente (1998) ressalta que é necessário a mudança dos métodos de ensino, justamente por conta da heterogeneidade de personalidade no aprendizado, visto que são essas transformações tecnológicas que compreendem as novas concepções pedagógicas. Assim, o uso de aplicativos interfere sobre as maiores transições no processo de ensino e de gerenciamento dos saberes, sob as concepções de uma educação inclusiva e de qualidade.

A BNCC (BRASIL, 2018) destaca a importância do uso dos aplicativos educacionais no processo de aprendizagem, uma vez que essas ferramentas possuem potencialidades que viabilizam o contato dos estudantes com os objetos de conhecimento, e ainda são práticas mediadoras de inovação, capazes de estimular as habilidades e competências dos aprendizes. Ademais,

> A utilização de aplicativos móveis como proposta metodológica e/ou artefato pedagógico propicia aos educandos e professores de matemática a ampliação das situações de aprendizagem, ao mesmo tempo em que possibilitam a visualização de conceitos abstratos e o auxílio para cálculos mais complexos. Além disso, os aplicativos móveis podem motivar e estimular os alunos a desenvolverem hábitos de colaboração e tomadas de decisões diante de situações-problema. [...] O uso dos aplicativos móveis educacionais na área de matemática como recurso didático consegue tornar as aulas mais atrativas, pois a abordagem dos conceitos e a realização dos exercícios são mediadas por meio de algo que os alunos, em sua maioria, já dominam e com o qual possuem familiaridade, no caso, os *smartphones* e seus aplicativos (COUTINHO; ALMEIDA; JATOBÁ, 2021, p. 35).

Por esse motivo, no que se refere ao uso de aplicativos móveis (apps) para o ensino-aprendizagem de Matemática, eles se apresentam com interfaces atrativas, com demonstração de simulação gráfica, cálculos, *feedback* das resoluções das questões, além disso, são instrumentos importantes para aperfeiçoar a prática docente (CAMILLO; MEDEIROS, 2017), porém, é necessário que se compreenda também que “os *softwares* educacionais não vão resolver todos os problemas de aprendizagem” (FOLLADOR, 2011, p. 52), mas são opções de ferramentas de aprendizagem em um universo incontável de métodos.

Quanto ao aperfeiçoamento profissional do professor e ao preparo para o uso de novas tecnologias educacionais na prática docente, Garcia e outros destacam:

> [...] Cabe aqui ressaltar que quando se fala a respeito da capacitação profissional do professor de matemática sobre o uso de tecnologia, não se

> refere ao domínio de aparatos e ferramentas usuais como o *laptop* ou *softwares* de edição de textos ou apresentação de slides, tampouco quando se fala do uso de dispositivos móveis pretende-se discutir a capacitação para dominar os comandos de clique no *smartphone* "toque de tela". O que se pretende pôr em discussão é o uso de recursos disponíveis e específicos para a educação matemática, (jogos, aplicativos de interação, plataformas de ensino, entre outros), e como o professor em sua formação, neste caso inicial, explora-os para a prática docente [...] (GARCIA *et al.*, 2020, p. 216).

De acordo com Godoi e Padovani (2011), o uso das ferramentas tecnológicas nas aulas de Matemática requer uma preparação didática antecipada do docente, que necessita do domínio da utilização dos recursos oferecidos pelos *softwares* educacionais. Nessa perspectiva, o uso dos *apps* provoca não somente a satisfação, mas também a motivação dos estudantes quanto ao uso desses recursos nas atividades propostas, porém o professor ainda enfrenta muitos desafios quanto à proposição de práticas que se fundamentam em metodologias mais inovadoras (SCHNEIDER; NUNES, 2019).

Assim, para a obtenção de conhecimentos, valoriza-se a reconstrução dos conceitos, principalmente se houver recursos educacionais tecnológicos que facilitem o processo educativo. Para isso, esta pesquisa, que compõe uma proposta teórico-metodológica de desenvolvimento de um *software* educacional, reverbera a qualidade da educação quanto à aprendizagem em matemática.

2.3 O Ensino da Trigonometria com o Uso de Jogos

A abordagem da Trigonometria, nesta proposta pedagógica de desenvolvimento de jogo digital, destaca o desenvolvimento do pensamento matemático, o letramento matemático, além da própria gestão da aprendizagem do estudante. Sob esse enfoque, a transposição didática da Trigonometria para a estrutura do jogo digital ocorre de maneira que possibilite "operar uma transposição didática do saber (que surge da pesquisa) ao saber ensinado (aquele da prática em sala de aula)" (D'AMORE, 2007, p. 223).

Desse modo, a transposição didática permite uma intervenção didática de prevenção sobre a formação de conceitos inadequados e, ainda, permite ao professor reconhecer as suas próprias concepções sobre o ensino de Matemática (D'AMORE, 2007). Assim, o enfoque da Trigonometria na proposta do jogo relaciona novos conhecimentos específicos, reflexão e abstração, de modo que sustentam a autonomia nas formas de pensar dos estudantes sobre a formulação e resolução de problemas em contextos variados e ainda busca desenvolver

> [...] a intuição geométrica dos alunos, fazendo-os visualizar a validade de cada relação apresentada com base na percepção empírica, também os orienta no indispensável formalismo lógico, demonstrando com rigor matemático todos os teoremas e relações apresentados. Dessa maneira, procura-se aumentar a maturidade matemática e o senso crítico dos alunos bem como desenvolver a percepção necessária para associar os conteúdos estudados a fenômenos físicos do mundo real (TEIXEIRA, 2020, p. 35).

Nesse aspecto, o ensino de Trigonometria aqui tratado envolve a Geometria Euclidiana, que se baseia nos postulados escritos por Euclides de Alexandria no livro “Os Elementos de Euclides”, por volta de 300 a.C., que trata do estudo dos planos ou objetos geométricos, suas propriedades, como um corpo de conhecimento matemático de um sistema lógico dedutivo bem definido (LIMA; CARVALHO; MORGADO, 2006; MUNIZ NETO, 2013).

Dante (2016, p. 236) explica a etimologia da palavra trigonometria: “do grego: *trigōnos* + *métron*, que significa ‘medida dos triângulos’”. De modo análogo, Iezzi (2019, p. 214) explicam o significado da mesma palavra: “do grego *trigonon*, “triângulo”, e *metron*, “medida”, que nos remete ao estudo dos ângulos e lados dos triângulos – figuras básicas em qualquer estudo de Geometria”.

Boyer (2013) e Bianchini (2018) definem a trigonometria como a área da Matemática que estuda as relações entre as medidas dos ângulos e as medidas dos lados de um triângulo. Santos e Homa (2018, p. 116) afirmam que “a Trigonometria surge como extensão da Geometria, inicialmente os alunos começam, na escola, a trabalhar os aspectos relativos à posição de dois ou mais objetos, assim como construir pontos de referência e itinerário para representação de distâncias”.

Nesse sentido, a abordagem do ensino de Trigonometria na transposição didática do jogo envolve o conhecimento e a aplicação de conceitos matemáticos de forma articulada, de modo que

> Temos primeiro as definições, depois os teoremas e as demonstrações que usam essas definições e, finalmente, as aplicações dos teoremas a alguma situação particular, considerada um problema. A partir dessa apresentação, podemos demonstrar e aplicar o teorema de modo convincente. Ainda assim, diversas perguntas permanecem sem resposta, como: por que um triângulo retângulo merece uma definição especial? Por que esses nomes? O que é medir? Por que é interessante medir os lados de um triângulo? Por que

> devemos conhecer a relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo? As respostas a essas perguntas permanecem escondidas por trás do modo coerente como enunciamos o teorema e, sobretudo, do modo como utilizamos operacionalmente o resultado que ele exprime (ROQUE, 2012, p. 24-25).

Nessa conjuntura, o trabalho aqui proposto visa relacionar também o estudo das relações, razões, propriedades, conceitos e definições trigonométricas, que são de fundamental importância para a formação das características e dos princípios que norteiam a Matemática em suas múltiplas dimensões. Por isso, a metodologia de ensino da Trigonometria, na prática docente, não pode constituir-se ou delimitar-se somente na observação de elementos abstratos, deve-se levar em consideração a interdisciplinaridade, contextualização, construção dos conceitos e transversalidade dessa temática com práticas reais e cotidianas (KAMBER; TAKACI, 2018; SANTOS; HOMA, 2018).

Sobre as complexidades do ensino da trigonometria, destaca-se o ensino de um conceito trigonométrico em um contexto, uma vez que a maioria desses conceitos exige um nível maior de abstração para a compreensão dos significados. Como ensinar trigonometria e torná-la mais concreta? Essas questões aparecem frequentemente na experiência de ensinar trigonometria, bem como nas discussões sobre as dificuldades quanto ao seu ensino e à sua aprendizagem.

> Um dos fatores que contribuem para que a matemática seja considerada abstrata reside na forma como a disciplina é ensinada, fazendo-se uso, muitas vezes, da mesma ordem de exposição presente nos textos matemáticos. Ou seja, em vez de partirmos do modo como um conceito matemático foi desenvolvido, mostrando as perguntas às quais ele responde, tomamos esse conceito como algo pronto (ROQUE, 2012, p. 24).

Dessa maneira, percebemos que os problemas que envolvem Trigonometria permitem a realização de análises, discussões, conjecturas, construção de conceitos e formulação de ideias. Assim, os estudantes podem tornar-se participantes ativos de sua própria aprendizagem, pois as relações da temática no contexto possibilitam a imersão do jogo. Conforme George Polya (1995), a resolução de problemas coloca em foco a atenção dos estudantes sobre aquilo que dá sentido, pois, ao resolver problemas, os estudantes refletem sobre as concepções intrínsecas do problema.

Portanto, esta proposta envolve o reconhecimento de métodos matemáticos para o estabelecimento de conjecturas, definição de estratégias e a descoberta de procedimentos para a obtenção e validação de um resultado com base em argumentações consistentes. Além disso, busca reconhecer a aplicação das relações trigonométricas em situações do cotidiano e em diferentes contextos com suas principais características e suas representações e na identificação de situações reais e do cotidiano, além de analisar e verificar os resultados obtidos neles.

2.4 Contribuições dos Jogos Digitais para o Ensino de Matemática

O uso dos jogos como recurso didático para o ensino-aprendizagem de Matemática permeia não somente valores socioambientais, mas também de propriedade particular do indivíduo, principalmente quanto à aquisição de conhecimentos e aos domínios de saberes. Assim, a primazia dos jogos estabelece dentre inúmeros aspectos positivos, a motivação e a ludicidade. Afinal, o professor, de forma perspicaz, precisa aproveitar-se dessas ferramentas metodológicas para o aprendizado dos seus alunos.

O jogo enquanto material pedagógico envolve vários conceitos matemáticos, desvelando múltiplas possibilidades de ensinar e aprender. Mas o que é o jogo, afinal? A abordagem de Huizinga (2008) explora as várias conceituações sobre os jogos, sob diferentes olhares. Porém, o conceito de jogo do qual se pretende tratar aqui é estabelecido da seguinte forma:

> Ao falarmos do jogo como algo que todos conhecem e ao procurarmos analisar ou definir a ideia que essa palavra exprime, precisamos ter sempre presente que essa noção é definida e talvez até limitada pela palavra que usamos para exprimi-la. Nem a palavra nem a noção tiveram origem num pensamento lógico ou científico, e sim na linguagem criadora, isto é, em inúmeras línguas, pois esse ato de "concepção" foi efetuado por mais do que uma vez (HUIZINGA, 2008, p. 24).

Para Gee (2009, p. 3), o jogo é um determinado tipo de atividade, em que as pessoas “usam tipos característicos de ferramentas e de linguagens e compartilham determinados valores, ou seja, elas jogam de acordo com um determinado conjunto de 'regras'”. McGonigal (2012) afirma que as emoções positivas se destacam também com o uso de jogos didáticos, ao estabelecer regras que permitem a evolução da conduta do jogador, sobretudo no momento em que não podem “trapacear o sistema”. Além disso, a compreensão da estrutura do jogo desperta uma visão muito maior da realidade, pois passa-se a analisar a mesma situação por múltiplos olhares.

O uso dos jogos com finalidade pedagógica é de grande relevância para a educação, pois esses recursos didáticos possibilitam contribuir com o ensino-aprendizagem, bem como com o desenvolvimento cognitivo dos aprendizes. Além disso, as metodologias de ensino centradas nos jogos didáticos permitem também a construção do conhecimento, a ludicidade, o prazer, incentivam a tomada de decisão, a ação ativa e a motivação (KISHIMOTO, 2008).

Com relação aos jogos como ferramentas metodológicas para o ensino-aprendizagem de Matemática, Grando (2019) ressalta:

> [...] O jogo é considerado o "conteúdo de ensino" e o conhecimento matemático a partir do jogo possibilita ao aluno melhorar sua atuação no jogo. Esse jogo é mais interessante do ponto de vista do interesse do aluno – porque é um jogo de entretenimento que faz parte de uma cultura lúdica - e porque os alunos atribuem um sentido à aprendizagem matemática: jogar bem. Esses jogos, na maioria das vezes, são de estratégia e possibilitam a elaboração de procedimentos vencedores. A matemática se encontra impregnada em tais estratégias, procedimentos (GRANDO, 2019, p. 399).

Sob o viés dos jogos matemáticos, é importante frisar tal relevância para o desenvolvimento de competências e habilidades matemáticas, além de se constituir como experiências de práticas docentes exitosas. Nesse sentido, denota-se a necessidade de "aprofundamento teórico acerca de propostas que envolvam jogos matemáticos, e ainda, ampliando a importância das intervenções pedagógicas do professor no processo de ensinar e aprender pela via dos jogos" (RIBEIRO, 2008, p. 14).

Desse modo, infere-se que os jogos digitais possuem potencialidades que contribuem com os cenários de aprendizagem. Com o uso dos jogos, o professor necessita realizar o planejamento das atividades, inclusive para o emprego de estratégias, de forma que a metodologia de ensino com o jogo "não se reduza a uma mera atividade desconectada do processo de ensino-aprendizagem, caracterizada como um 'apêndice' em sala de aula ou mesmo como resultado de um modismo" (RIBEIRO, 2008, p. 22).

Dessa forma, destaca-se que a abordagem dos jogos digitais enfoca principalmente a resolução de problemas dentro de sua estrutura. Assim, os jogadores desenvolvem diferentes estratégias e métodos para resolver os problemas. Além disso, o jogador possui autonomia para realizar o gerenciamento das informações, o que conduz à construção e ao aprimoramento de conhecimentos, conforme explica a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) sobre o ensino de Matemática e suas tecnologias, a flexibilização curricular e o desenvolvimento de competências e habilidades, que envolvem o

> aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em resolução de problemas e análises complexas, funcionais e não-lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia, robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais, sistemas dinâmicos, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino (BRASIL, 2018, p. 477).

Nesse sentido, a aprendizagem baseada em jogos pedagógicos e digitais torna-se imprescindível para o desenvolvimento das múltiplas capacidades humanas. Inclusive, a presença da Matemática nas situações de jogabilidade favorece a interpretação do jogo para entender como o cérebro dos jogadores funciona durante as jogadas e como eles raciocinam diante da técnica e das tomadas de decisão no jogo, esse é o papel da neuromatemática[5] nos jogos.

Portanto, a neuromatemática destina-se à

> compreensão do cérebro, se não pelas possibilidades de desenvolvimento de novas técnicas de aprendizagem aplicáveis a diferentes níveis educacionais, mas além do enorme benefício que pode supor a melhoria do processo de aprendizagem para os alunos (DE LA SERNA, 2020, p. 7. Tradução nossa)[6].

Os jogos sérios envolvem o usuário para uma experiência de aprendizagem, têm propósitos determinados e, em sua essência, não são apenas jogos, constituem-se também como sistemas de utilidade (PEREIRA, 2019; ENGSTRÖM; BACKLUND, 2021). Assim, a valorização dos jogos digitais permitiu "a consolidação de uma indústria de jogos voltados para outras finalidades mais 'sérias' que o entretenimento – não à toa estes passaram a ser denominados *serious games*" (SANTAELLA; NESTERIUK; FAVA, 2018, p. 11).

---

[5] A neuromatemática é um ramo da ciência responsável pelo estudo e pela análise do cérebro e da sua atividade por meio de métodos matemáticos, bem como possibilita a observação e investigação do funcionamento neural antes das diferentes tarefas da matemática, sejam elas simples ou complexas (DE LA SERNA, 2020).

[6] Do original: "comprensión del cerebro, si no por las posibilidades de desarrollo de nuevas técnicas de aprendizaje aplicable a distintos niveles educativos; pero aparte del enorme beneficio que puede suponer la mejora del proceso de aprendizaje a los alumnos" (DE LA SERNA, 2020, p. 7).

Os *serious games* são "objetos lúdicos por natureza, originalmente estruturados como jogos, mas que seguem o vetor contrário: direcionam elementos pertencentes ao "universo não lúdico", do mundo "sério", para uma estrutura nativa de jogo" (SANTAELLA; NESTERIUK; FAVA, 2018, p. 13). Esses jogos com finalidade de aprendizagem adentraram as redes sociais, os dispositivos móveis, podendo ser facilmente adquiridos, inclusive de forma gratuita, por meio de uma diversidade de plataformas, e provocaram um *start* nos usuários, com isso, a ubiquidade dos *games* invadiu espaços para além dos ambientes analógicos (SANTAELLA, 2013).

Nesse contexto, "a criação dos computadores e dos *displays* gráficos levou ao aparecimento de uma nova modalidade de jogos: os jogos digitais" (MARIÑO; PEREIRA; TOLEDO, 2017, p. 43). Desse modo, o uso dos jogos digitais na educação representa uma reflexão das potencialidades dessas ferramentas frente ao ensino de conteúdos matemáticos por meio do domínio semiótico para a reconstrução de conceitos (SILVA, 2017; 2018).

De caráter dinâmico, os jogos digitais conectam o mundo tecnológico da nova geração *expert* e cognitivamente mais desenvolvida, que requer o aprendizado mais divertido, prático, desafiador, imersivo e interativo. Então, os jogos digitais utilizados como recursos educacionais na área de Matemática podem contribuir significativamente no processo de ensino-aprendizagem de diversas formas, como correspondendo ao efeito motivador, facilitador do aprendizado, desenvolvimento de habilidades cognitivas, à aprendizagem por descoberta, experiência de novas identidades, socialização, coordenação motora e intelectualidade (BARROS, 2017).

Dentre os componentes básicos dos jogos digitais, conforme Prensky (2012), podemos destacar: 1) o papel ou personagem do jogador; 2) as regras do jogo; 3) as metas e os objetivos; 4) os quebra-cabeças, problemas ou desafios; 5) a história ou narrativa; 6) as interações do jogador; 7) as estratégias; 8) o *feedback* e os resultados. Tais elementos caracterizam a importância do planejamento de construção de um jogo digital matemático, incluindo o seu próprio aperfeiçoamento.

Assim, pode-se afirmar que os jogos digitais são excelentes objetos de aprendizagem, pois são aplicados em diversas áreas do conhecimento, "levam seus usuários a aprender sem perceber, de forma natural, além de desenvolver a habilidade para se trabalhar em equipe" (SANTAELLA, 2013, p. 91). Porém, um dos maiores desafios dos jogos pedagógicos é possibilitar um contexto no qual os usuários almejam participar, explorar e entreter-se, de forma que aprendam sem nem perceber que estão aprendendo. Santaella explana sobre algumas complexidades das abordagens dos jogos digitais na educação, quando afirma:

> O principal problema que se aponta nos jogos educacionais existentes consiste, com raras exceções, no fato de que possuem desafios fracos e pouco motivadores. Na maioria das vezes, esses jogos foram projetados por educadores e pedagogos, dando uma forte ênfase aos aspectos didáticos, não enfocando aspectos lúdicos. Dessa forma, esses jogos perdem sua espontaneidade, seu caráter prazeroso, e tornam-se semelhantes às tradicionais aulas com textos didáticos usando quadro e giz. Para que esses perigos sejam afastados, os jogos educativos têm muito a aprender com os jogos de entretenimento, num processo de tradução em que o lúdico seja colocado a serviço da aprendizagem (SANTAELLA, 2013, p. 106).

Portanto, os jogos digitais devem ser vistos como um espaço reflexivo e estratégico que integra princípios significativos de aprendizado, conforme a Ciência Cognitiva. Além disso, essas ferramentas digitais facilitam a polivalência das habilidades e competências dos estudantes, favorecem o letramento digital e a própria aprendizagem por meio de seu compromisso com sua nova identidade. Por isso, a tomada de decisão torna-se tão importante no contexto de uma relação interativa entre o jogador e o mundo virtual, pois as ações que executa e as decisões que toma produzem a "escrita" e o desenho dos mundos em que vive, inclusive, ele planeja o campo e o currículo que estuda (GEE, 2009).

Sobre o impacto dos jogos digitais sob formas diferentes no processo educacional, Prensky (2012) ressalta a aprendizagem de forma renovada, mais adequada às expectativas das novas gerações, à linguagem tecnológica dos "nativos digitais"[7]. E ainda, a tecnologia digital proporcionou a atualização e a transformação da educação em potencial e centra-se no aprendiz de tal forma que as interações, o entretenimento e a comunicação modelam os interesses e as competências. Inclusive, aceleram o processamento das informações, desenvolvem os aspectos cognitivos, a habilidade para resolver problemas e a exploração do "erro".

---

[7] Os "nativos digitais", termo empregado por Prensky (2012), representam uma grande quantidade de estudantes que possui habilidades individuais que se aperfeiçoaram a partir da interação e da prática com os ambientes tecnológicos e digitais.

2.5 Trabalhos Correlatos

Sob a abordagem da proposta pedagógica aqui apresentada, selecionamos alguns trabalhos de dissertação de mestrado que possuem objetivos semelhantes, quais sejam: o planejamento e a produção de jogos digitais para o ensino e a aprendizagem de Matemática.

Na dissertação intitulada "O Uso de Jogos Digitais como Ferramenta Auxiliar no Ensino da Matemática e o Protótipo do Game Sinapsis", de Siena (2018), o autor propõe a viabilidade de elaboração do protótipo de um *game* digital desenvolvido para *smartphones* com sistema *android*, que tem como propósito sua utilização como ferramenta auxiliar no processo de ensino-aprendizagem da matemática por alunos e professores da educação básica. O protótipo envolve o tema "as quatro operações básicas" e possui questões pré-elaboradas. O objetivo do jogo é encontrar o amigo Bernard para desvendar a fórmula secreta a fim de suspender o ataque de sanduíches do mal. Para isso, o estudante/jogador deve desvendar os sinais que estão sendo deixados dentro dos prédios da cidade.

Maziviero (2014) destaca, na dissertação intitulada "Jogos Digitais no Ensino de Matemática – o desenvolvimento de um instrumento de apoio ao diagnóstico das concepções dos alunos sobre diferentes representações dos números", a história do jogo, que narra a convocação de Janjão, um zagueiro da Seleção Brasileira de futebol que comete erros na disputa da Copa do Mundo. O papel do jogador é ajudar o goleiro do Brasil, ordenando os jogadores da barreira em ordem crescente, antes do tempo de término do jogo. As fases se alternam entre a ordenação de números inteiros, decimais, frações e raízes quadradas.

A dissertação "Jogo Digital Educativo para o Ensino de Matemática", de Lealdino Filho (2014), apresenta o jogo "As aventuras de Simon Bile", cujas fases são contínuas. O jogo possui duas fases: Jardim – o jogador deve empurrar a caixa indicada pelo objetivo na posição correta enquanto foge de um cachorro que tenta alcançar o personagem; Sala de Estar – um cano no teto arremessa sólidos geométricos e o jogador deve levar cada sólido para a caixa correspondente. A missão do jogo é cobrir todos os conteúdos de matemática do ensino fundamental avaliados no sistema de avaliação Prova Brasil.

Silva (2018) desenvolveu a dissertação intitulada “Handles – a trajetória de desenvolvimento de um jogo digital para ensino de Matemática”. O jogo *Handles in Scratch 2.0* conta com três grandes diferenciais: o aumento nas funções tanto do personagem quanto dos elementos do cenário; a interatividade com o usuário a partir do mecanismo de *feedback* Amanda e a modularização dos componentes do jogo. Os problemas matemáticos desse jogo envolvem os conteúdos de Múltiplos e Divisores. O jogo possui 42 níveis que dificultam que os jogadores explorem dinâmicas diferentes daqueles que envolvem alterar o critério do Divisor.

Esses estudos apresentam apenas alguns exemplos de pesquisas em que houve o planejamento da proposta de construção de um jogo digital para o ensino de Matemática. As referidas pesquisas destacam os roteiros produzidos dos jogos, o *design*, as tecnologias utilizadas, a modelagem e o conteúdo matemático abordado em seus contextos. O que se evidencia nesses trabalhos em comum é a preocupação da produção de uma ferramenta tecnológica, no caso, o jogo, cujo papel centralizador possui finalidade educacional que produz contribuições consideravelmente significativas para a prática pedagógica e para o engajamento do aprendente.

2.6 A Gamificação no Processo de Construção do Jogo Digital

A gamificação compreende a aplicação de elementos de jogos em atividades de não jogos. Consiste no processo de pensamento e mecânica do jogo para a imersão e para o engajamento dos usuários, além da resolução de problemas. A gamificação aplicada à educação produz a aquisição de conhecimentos e o desenvolvimento de habilidades e competências que possibilitam o crescimento da capacidade cognitiva em um mundo divertido e de competição (BUNCHBALL, 2010; ZICHERMANN; CUNNINGHAM, 2011; SALEN; ZIMMERMAN, 2012; SOUTO; FRAGELLI, 2016; PEREIRA, 2019).

A gamificação envolve o engajamento dos indivíduos e a sua interação. Com propósito educacional de inovação pedagógica, a “gamificação tem como base a ação de se pensar como em um jogo, utilizando as sistemáticas e mecânicas do ato de jogar em um contexto fora de jogo” (FADEL *et al*., 2014, p. 15). Santaella, Nesteriuk e Fava (2018) explicam que a gamificação estimula e impulsiona os usuários a realizarem tarefas de outra maneira, que antes não se sentiam motivados para realizar, e ainda “se sintam motivados a executar uma atividade sem grandes dificuldades, algo que os jogos normalmente fazem muito bem" (SANTAELLA; NESTERIUK; FAVA, 2018, p. 12). Para Fadel e outros (2014),

> O foco da gamificação é envolver emocionalmente o indivíduo dentro de uma gama de tarefas realizadas. Para isso se utiliza de mecanismos provenientes de jogos que são percebidos pelos sujeitos como elementos prazerosos e desafiadores, favorecendo a criação de um ambiente propício ao engajamento do indivíduo. Esse engajamento, por sua vez, pode ser medido e visto como os níveis de relação entre sujeito e o ambiente – trabalho e outras pessoas -, e é um dos principais fatores a serem explorados dentro dos recursos de gamificação. Isso porque é o foco da própria gamificação e é responsável pelo sucesso ou insucesso do jogo enquanto estratégia. Compreende-se que a criação de ambientes que interajam positivamente com as emoções dos indivíduos favoreça o crescimento desses níveis de engajamento (FADEL *et al.*, 2014, p. 34).

O objetivo geral da gamificação é o envolvimento das pessoas quanto à participação, socialização e interação (BARTLE, 1996). Essa imersão, como resultado de compartilhamento, concede uma experiência de gamificação contínua, dinâmica e sustentada, a qual pode ser usada no cumprimento das finalidades para a qual está sendo designada (BUNCHBALL, 2010; SALEN; ZIMMERMAN, 2012). Portanto, o entendimento da gamificação como ferramenta potente na educação reverbera o fato de que

> A gamificação se constitui na utilização da mecânica dos *games* em cenários *non games,* criando espaços de aprendizagem mediados pelo desafio, pelo prazer e pelo entretenimento. Compreendemos espaços de aprendizagem como distintos cenários escolares e não escolares que potencializam o desenvolvimento de habilidades cognitivas (planejamento, memória, atenção, entre outros), habilidades sociais (comunicação, assertividade, resolução de conflitos interpessoais, entre outros) e habilidades motoras (FADEL *et al.*, 2014, p. 76-77).

Sob essa perspectiva, a gamificação é uma estratégia para envolver, influenciar e motivar as pessoas por meio do engajamento para interagir conforme as tarefas ou funções designadas. Dessa forma, a "gamificação pode ser aplicada em um amplo espectro de situações em que os indivíduos precisam ser motivados ou incentivados a buscar ações ou atividades" (BUNCHBALL, 2010, p. 8, tradução nossa)[8].

---

[8] Do original: "gamification can be applied across a broad spectrum of situations where individuals need to be motivated or incented to pursue specific actions or activities" (BUNCHBALL, 2010, p. 8).

Então, entende-se que a gamificação é um processo em que os elementos lúdicos são aplicados em contextos que não se relacionam a jogos. Nesse contexto, os "conceitos e processos de um *design* de jogo, como progressão, organização em níveis, componentes da mecânica de um jogo, dentre outros, são aplicados em produtos – materiais ou imateriais – que não foram estruturados como tal" (SANTAELLA; NESTERIUK; FAVA, 2018, p. 13).

Pereira (2019, p.11) explica os elementos dos jogos como "mecânicas, troféus e afins, normalmente a fim de tornar uma atividade mais interessante ou mais competitiva, visando reforçar sua prática". Zichermann e Cunningham (2011) destacam os princípios básicos da gamificação e o uso criterioso da mecânica do jogo, como pontos, emblemas, níveis, desafios e recompensas. Em seu estudo, Hunicke, LeBlanc e Zubek (2004) apresentam a estrutura MDA (Mecânica, Dinâmica e Estética/*Mechanics, Dynamics and Aesthetics*) do jogo, da seguinte forma:

> [...] a mecânica descreve os componentes particulares do jogo (por exemplo, representação de dados e algoritmos), a dinâmica descreve o comportamento de tempo de execução dos mecanismos e a estética descreve as respostas emocionais do usuário durante o jogo. A estética do jogo está relacionada a vários fatores, tais como: o jogo como uma sensação de prazer, como um faz de conta, como um drama, como pista de obstáculos, como framework social, como um território desconhecido, como autodescoberta, como passatempo [...] (SOUTO; FRAGELLI, 2016, p. 24).

A abordagem MDA destaca as diferentes visões e versões dos *designers* e dos usuários, pois, para os *designers*, a mecânica envolve o comportamento dinâmico do sistema que leva a experiências estéticas. Quanto aos usuários ou jogadores, a estética envolve características de gerenciamento e de informações na visualização que se destacam na dinâmica e na mecânica do jogo (HUNICKE; LEBLANC; ZUBEK, 2004).

A Figura 1, a seguir, ilustra o *MDA framework* e as diferenças de perspectivas entre os *designers* e os jogadores:

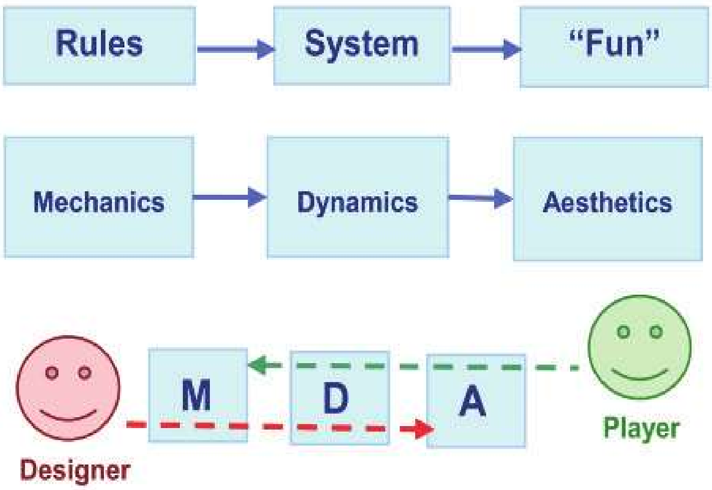
Figura 1 – MDA *Framework*

Fonte: Adaptado de Hunicke, LeBlanc e Zubek (2004).

Portanto, o "MDA é uma abordagem formal para entender os jogos – que tenta preencher a lacuna entre o *design* do jogo, desenvolvimento, crítica de jogos e pesquisa técnica de jogos" (HUNICKE; LEBLANC; ZUBEC, 2004, p. 1, tradução nossa)[9].

A Figura 2, a seguir, apresenta o MDA *Framework* para o desenho do jogo, em que o jogador e o *designer* possuem perspectivas diferentes:

Figura 2 – MDA *Framework for game design*



Fonte: Hunicke, LeBlanc e Zubec (2004, p. 1).

Deste modo, a Figura 2 apresenta os diversos níveis de construção e desenvolvimento dos jogos como os mecanismos e sistemas básicos do jogo, os resultados abrangentes do projeto de *game design* e os resultados experimentais do jogo a partir do MDA. Assim sendo, a mecânica, a dinâmica e a estética de um jogo comportam os elementos descritos no Quadro 1:

Quadro 1 - Conceitos dos elementos da mecânica, dinâmica e estética de um jogo

MECÂNICA	DINÂMICA	ESTÉTICA
Pontos: conjunto de bônus ou pontuação por ações de sucesso durante o jogo ou recompensa por atividades ao longo do núcleo.	**Recompensa:** fonte de conquistas contínuas e premiações que oferece uma infinidade de realizações de vários graus de dificuldade.	**Sensação:** jogo como prazer dos sentidos
Níveis: indicam progresso no jogo, marcador para os jogadores saberem a sua classificação nas	**Status**: o contexto da relação do jogador com os outros, de acordo com a hierarquia.	**Fantasia:** jogo como faz-de-conta

[9] Do original: "MDA is a formal approach to understanding games - one which attempts to bridge the gap between game design and development, game criticism, and technical game research" (HUNICKE; LEBLANC; ZUBEC, 2004, p. 1).

experiências de jogo ao longo do tempo.		
Desafios: o nível de dificuldade nas fases aumenta de acordo com a habilidade desenvolvida, e a aprendizagem é contínua, o jogo passa a ficar mais difícil quanto melhores se tornam as habilidades dos jogadores.	**Realização:** a realização de algo difícil por meio de esforços prolongados e repetidos, para trabalhar em direção às metas e para vencer. Em busca de realizações, os jogadores tendem a buscar desafios e definir metas. Sua recompensa mais satisfatória é o reconhecimento de suas conquistas.	**Narrativa:** jogo como drama
Bens e espaços virtuais: são objetos não físicos que são comprados perseguidos para uso em comunidades *online* ou jogos *online* e incluem artefatos como espadas, moedas e poções, bem como presentes digitais e roupas digitais para avatares e salas virtuais.	**Autoexpressão:** ações dos jogadores ao expressar sua autonomia, originalidade, identidade e personalidade única.	**Desafio:** jogo como pista de obstáculos
Tabelas de classificação: também conhecidas como "tabela de pontuação alta", trazem aspiração, "fama" e apresentam os placares com os nomes com luzes.	**Concorrência:** os indivíduos são motivados pela competição. Os níveis mais altos de desempenho podem ser alcançados quando um ambiente competitivo é estabelecido e o vencedor é recompensado.	**Companheirismo:** jogo como estrutura social
Presentes: usados para expressar conectividade como um método central de socialização e viralidade no *design*; devem ser divertidos.	**Altruísmo:** ações ou formas de os jogadores se expressarem para contribuir com a doação de presentes em uma comunidade onde as pessoas procuram fomentar relacionamentos.	**Descoberta:** jogo como território desconhecido
		Expressão: jogo como autodescoberta
		Submissão: jogo como passatempo

Fonte: Adaptado de Zichermann e Cunningham (2011).

Nessa abordagem, o Quadro 1 apresenta os elementos que compõem a mecânica, a dinâmica e a estética do jogo. Esses elementos são abordados na proposta do jogo digital *TrianguLux* como componentes essenciais para a compreensão da estrutura e do *design* do jogo. O tópico seguinte envolve uma abordagem da Etnomatemática presente no jogo digital, bem como as perspectivas que esta pesquisa aborda e as características socioculturais fortemente presentes neste trabalho.

2.7 A Etnomatemática Presente no Jogo

O jogo digital *TrianguLux* envolve as perspectivas da Etnomatemática, pois propõe uma forma legítima de fundamentar os saberes culturais de um povo para sua própria formação, de forma a incluir esses conhecimentos para mediar ou mesmo facilitar a aprendizagem, para que tenha significado e se aproxime mais da realidade de vivência das comunidades conhecidas como “povos da floresta”, que fazem parte da região amazônica. Desse modo, a Etnomatemática “surge do reconhecimento de que diferentes culturas têm maneiras diferentes de lidar com situações e problemas do cotidiano e de dar explicações sobre fatos e fenômenos naturais e sociais” (D’AMBROSIO, 2018, p. 189).

A proposta pedagógica da Etnomatemática constitui-se como prática facilitadora dos processos de aprendizagem, principalmente porque as competências matemáticas são desenvolvidas em contextos socioculturais em que o indivíduo está inserido. D’Ambrosio (2008) enfatiza que o papel da etnomatemática é trazer a matemática sob uma abordagem que envolve situações reais no tempo e no espaço, visto que, por meio da crítica e das reflexões, “mergulhamos nas raízes culturais e praticamos dinâmica cultural” (D’AMBROSIO, 2008 p. 80).

Nesta pesquisa, a Etnomatemática está presente no *script* e no *design* do jogo digital *TrianguLux*, de forma que os conhecimentos matemáticos sejam também desenvolvidos por intermédio de uma cultura existente, que é a cultura dos “povos da floresta”, comunidades tradicionais que vivem exclusivamente do extrativismo. A reflexão que se almeja alcançar diz respeito à conscientização ambiental, justamente porque, de forma revolucionária e ideológica, o jogo possibilita compreender as relações entre o ser humano e a natureza, levando a uma aprendizagem não somente da Matemática, mas também de uma multiplicidade de conceitos educacionais, sociais, culturais e ambientais.

Nesse sentido, a Etnomatemática possui um viés de entendimento histórico-cultural dos grupos sociais que alicerça a diversidade de formas de conhecimento que divergem das ideias de universalização da matemática. Sabemos que as concepções sobre Matemática não são únicas, já que é uma área do conhecimento, um constructo humano que está em constante evolução. Todavia, essa Matemática desenvolve-se também em ambientes diferentes, por isso, a Etnomatemática vai ao encontro dos saberes matemáticos dos povos, situação em que a matemática assume um papel importante de reconhecimento de uma legitimidade de conceitos envoltos pela multiculturalidade.

A Etnomatemática traz valor às matemáticas e “matematizações” de diferentes grupos culturais, que são tão importantes quanto as produções eurocêntricas, principalmente para a mediação nas formas singulares de ensinar. Os conhecimentos matemáticos sob as abordagens culturais manifestam-se matematicamente à medida que essa Matemática tem espaço para ser trabalhada e inserida, para que se possam compreender os modos de geração, desenvolvimento, organização e difusão dos saberes dos mais variados grupos sociais. Por isso, devemos levar em consideração essa perspectiva de que

> Indivíduos e povos têm, ao longo de suas existências e ao longo da história, criado e desenvolvido instrumentos de reflexão, de observação, instrumentos teóricos e, associados a esses, técnicas, habilidades (artes, técnicas, techné, ticas) para explicar, entender, conhecer, aprender, para saber e fazer como resposta a necessidades de sobrevivência e de transcendência (matema), em ambientes naturais, sociais e culturais (etno) os mais diversos (D'AMBROSIO, 2009, p. 27).

Diante disso, entende-se que a Etnomatemática se fundamenta também nas concepções e práticas da pluralidade cultural e apresenta formas alternativas de compreender e lutar contra as desigualdades sociais. Dessa forma, a Etnomatemática transforma-se em uma necessidade de cunho social para os povos, "além de constituir-se num canal aberto para a valorização e o fortalecimento de experiências sociais e culturais de grupos excluídos" (MORAES, 2014, p. 30).

Desse modo, a prática docente, por meio de metodologias reconhecidamente aplicáveis e abordadas de acordo com um viés cultural característico de cada povo, pode em muito contribuir com a melhoria da qualidade da aprendizagem. Nesse contexto, compreende-se que a "etnomatemática como campo de pesquisa e proposta educacional – comprometida com a luta dos grupos marginalizados, oprimidos e excluídos – propõe a visibilidade, legitimidade e abordagem de distintas formas de conhecer" (RAMOS, 2016, p. 18).

De acordo com essa visão, "essas práticas não podem ser desvinculadas do seu contexto sociocultural para que sejam reconhecidas, mas consideradas em articulação com o próprio meio natural desses indivíduos" (MORAES, 2014, p. 40). Por isso, a ideia de uma adaptação na educação matemática desenvolveu-se sob os pressupostos de que existem competências matemáticas que se revelam de diversas formas nas diferentes esferas culturais.

Assim, torna-se necessário o emprego de metodologias de ensino que enfocam os aspectos socioculturais. Por esse motivo, a primazia dos métodos de quem ensina está nas formas de aprender as manifestações da matemática em contextos socioculturais variados. Alicerçada nessas concepções,

> [...] a etnomatemática torna-se um campo multidimensional em que os objetivos – antes focalizados no medir, avaliar, classificar e quantificar - assumem uma perspectiva dos diferentes modos de compreender a espécie humana, manifestos na geração, organização e difusão dos saberes e fazeres em diversos ambientes culturais. Estas diferentes formas apresentam as necessidades de adaptação, sobrevivência e transcendência [...] (MORAES, 2014, p. 31).

O ciclo de aquisição individual e social do conhecimento se faz conforme os contextos natural, social e cultural, de forma que o saber se origina da prática de como fazer, proporcionando a reconstrução dos conceitos. Assim, "o homem executa seu ciclo vital não apenas pela motivação animal de sobrevivência, mas subordina esse ciclo à transcendência, por meio da consciência do fazer/saber, isto é, faz porque está sabendo e sabe por estar fazendo" (D'AMBROSIO, 2009, p. 21).

Nesse contexto, "o foco de nosso estudo é o homem, como indivíduo integrado, imerso, numa realidade natural e social, o que significa [estar] em permanente interação com o seu meio ambiente natural e sociocultural" (D'AMBROSIO, 2009, p. 19), de modo que possamos

> [...] refletir sobre a abertura de espaços para a diversidade e os conhecimentos socialmente válidos, de modo a reconhecer o valor intrínseco do indivíduo e da sua integração na realidade histórica e natural como parte essencial de um todo. Sob esta ótica, a etnomatemática se revela como um caminho para a valorização e o fortalecimento de experiências sociais e culturais dos grupos menos favorecidos, haja vista as questões de desigualdades sociais refletidas nas angústias de uma sociedade construída pelas diferenças (MORAES, 2014, p. 25).

Nesse sentido, a Etnomatemática apresentada no jogo corrobora para levar conhecimento aos estudantes a respeito de como os povos da floresta vivem em meio aos próprios desafios diários de sobrevivência e das características pertinentes ao hábitat em que vivem. A proposta da Etnomatemática insere-se sobre a

> [...] ampla investigação da evolução das ideias, das práticas e do conhecimento da espécie humana em diferentes ambientes culturais. Essencialmente, implica uma análise de como grupos de seres humanos geraram formas, estilos, artes e técnicas de fazer e de saber, de aprender e explicar, como lidam com situações e resolvem os problemas do seu cotidiano, do seu ambiente natural e sociocultural (D'AMBROSIO, 2018, p. 191).

Portanto, o *design* da proposta do jogo digital enfoca as abordagens de uma situação de vida que transpassa a realidade e conecta-se, de forma reflexiva, à existência de pessoas que vivem em um mundo e sobrevivem desse mundo de realidades socioculturais distintas de tantas outras, que traz perspectivas e aspectos culturais de uma das classes menos favorecidas que se superam e criam raízes por meio da sua própria força a cada dia.

Então, para além de uma proposta pedagógica, ou a busca de uma metodologia diferenciada de ensino, nesta pesquisa, encontram-se formas de mostrar a permanência da cultura dos “povos da floresta”, a fim de evitar o apagamento dessa cultura. Além disso, valorizar e disseminar os saberes tradicionais e culturais de uma comunidade sobrevivente, de modo que possa deixar marcas na memória da sociedade, sem exclusão, opressão e marginalização de uma história que possui um papel importante de uma cultura existente no contexto amazônico.

Por isso, por meio desta proposta, espera-se que os professores que ensinam Matemática compreendam os aspectos metodológicos diferenciados para o ensino, que os estudantes sejam protagonistas do seu próprio processo de aprendizagem e que descubram procedimentos eficazes e diversificados de resolução de problemas em contextos reais e heterogêneos, de forma que desenvolvam criticidade e entendimento quanto às formas de conservação do meio ambiente e o respeito aos saberes tradicionais e culturais de outros indivíduos.

Neste capítulo, destacamos a fundamentação teórica acerca dos principais conceitos tratados nesta dissertação. O pensamento foi articulado a partir do diálogo entre autores de referência em cada subtópico para a compreensão da apresentação desta proposta. No Capítulo III, a seguir, apresentamos os conceitos metodológicos que são pontos de ancoragem para o desenvolvimento da pesquisa.

3 METODOLOGIA

> *"Trata-se sempre de saber qual jogo deve jogar o estudante, para que as estratégias mais eficazes impliquem no uso do saber que se quer ensinar"* (Guy Brousseau).

3.1 Identificação Metodológica da Pesquisa

A pesquisa proposta pode ser caracterizada como qualitativa, pois o que se propõe não é somente o *software* como objeto tecnológico, mas o processo de aprendizagem que envolve uma proposta de um aplicativo com a finalidade de uso didático para a aprendizagem em matemática. Precisamos entender não apenas a engenharia e o *design* da produção do *software*, mas também o aporte metodológico envolvido para que ele de fato possa contribuir com a aprendizagem de matemática. A intenção é que, com as competências e habilidades a serem desenvolvidas por esse estudo, possamos entender a produção de outros *softwares* que tenham o mesmo objetivo pedagógico, bem como contribuir para a produção deles.

A abordagem qualitativa consiste em apresentar aspectos qualitativos da pesquisa, a sua essência e a natureza da investigação, dando ênfase aos métodos diversificados de estratégias, que visam à completude das informações na investigação, contribuem para a descrição e a compreensão das situações. Sob uma multiplicidade de visões na investigação, a pesquisa qualitativa propõe diferentes orientações e metodologias (COUTINHO, 2015; YIN, 2016).

Quanto à finalidade, a pesquisa classifica-se como básica e aplicada. A pesquisa básica "envolve verdades e interesses universais, procurando gerar conhecimentos novos úteis para o avanço da ciência, sem aplicação prática prevista". (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 126). A pesquisa é aplicada quando se volta para a resolução de problemas práticos e específicos, sem preocupações por generalizar resultados e incorporar teorias. Além disso, trata-se de uma investigação que visa à tomada de decisões na aplicação prática, cuja finalidade é construir conhecimento para a busca das soluções para os problemas, conforme as suas especificidades (COUTINHO, 2015).

Quanto aos objetivos, a pesquisa aqui apresentada caracteriza-se como exploratório-descritiva. A pesquisa descritiva "observa, registra, analisa e ordena dados, sem manipulá-los, isto é, sem interferência do pesquisador. Procura descobrir a frequência com que um fato ocorre, sua natureza, suas características, causas, relações com outros fatos" (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 52).

Sobre os objetivos da pesquisa qualitativa descritiva, Yin afirma que

> As melhores descrições incluem os dados de um estudo. Esses dados podem ser altamente diversos, incluindo perfis de pessoas baseados nas entrevistas de um estudo, dados históricos baseados em buscas de documentos e dados numéricos escolhidos de fontes arquivais. Como lembrete, a terceira fase de sua análise de dados teria incluído alguma mínima tentativa de recompor esses dados. Entretanto, a recomposição também pode continuar à medida que você constrói sua interpretação descritiva (YIN, 2016, p. 380).

Quanto aos objetivos, a pesquisa exploratória concentra-se no conhecimento que primeiramente se pretende adquirir da situação que se deseja estudar. A pesquisa exploratória também visa proporcionar mais informações acerca do assunto que se pretende investigar, possibilitando a sua definição e seu delineamento, de forma que possa "facilitar a delimitação do tema da pesquisa; orientar a fixação dos objetivos e a formulação das hipóteses ou descobrir um novo tipo de enfoque para o assunto" (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 52).

Portanto, conforme a descrição da metodologia, trataremos a seguir, do projeto de desenvolvimento do *software*. Pode-se compreender por meio do tópico a seguir, a estrutura, a fundamentação, o *design*, a organização, a transposição didática e a modelagem do jogo.

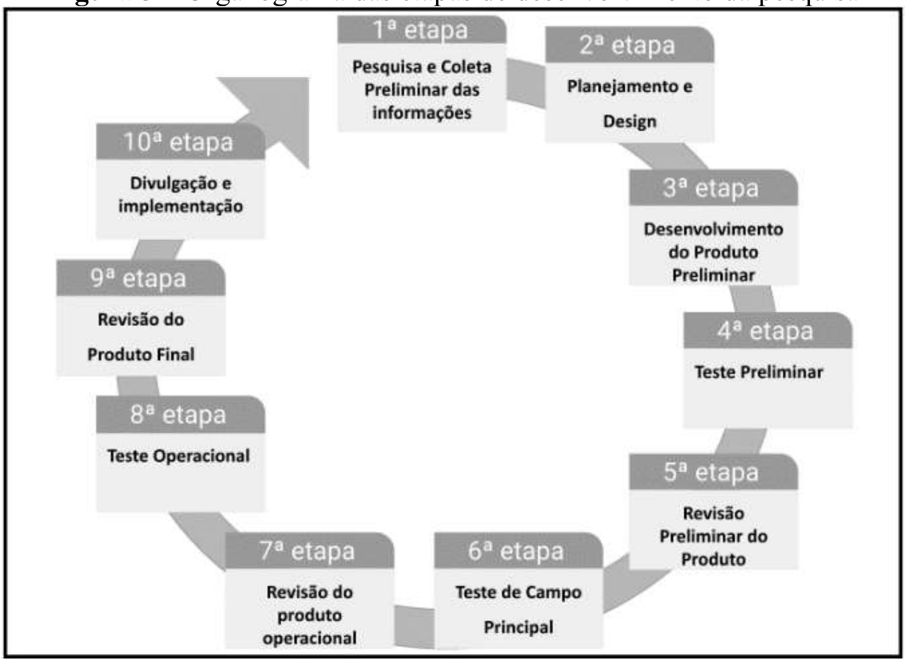
4 PROJETO DE DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE EDUCACIONAL

"Os jogos são armas poderosas
para se contar histórias"
(Olivia Alexander).

Esta proposta se fundamenta na Pesquisa e Desenvolvimento (P&D) (BORG; GALL, 2006), que consiste na busca de novos produtos, processos e conhecimentos. A Pesquisa de *Design* e Desenvolvimento (AKKER, 1999) trata de uma abordagem geral de conhecimento em *design* embasado teoricamente para o desenvolvimento de ferramentas educacionais, com o objetivo de alcançar melhorias na qualidade da educação.

A proposta de desenvolvimento desse *software* de aprendizagem móvel também se sustenta no modelo de desenvolvimento ADDIE (Análise, *Design*, Desenvolvimento, Implementação e Avaliação) (DICK; CAREY, 2004), que compreende um conjunto de critérios para a análise do produto, considerando os aspectos de engenharia de *software*, de *design*, de aprendizagem e de comunicação visual. O desenvolvimento desta pesquisa está planejado para ocorrer no período de 4 (quatro) anos, porém o *design* dessa proposta está projetado para ser desenvolvido em 2 (dois) anos. As etapas de desenvolvimento do *software*, conforme Borg e Gall (2006), estão expressas na Figura 3:

Figura 3 – Organograma das etapas de desenvolvimento da pesquisa



Fonte: Adaptado de Borg e Gall (2006).

Neste trabalho, propõe-se apresentar o *design* do roteiro do desenvolvimento do *software*, o *storyboard*, "a história do jogo", o *storytelling*, o percurso metodológico, juntamente com a idealização do *design*, da arquitetura e estrutura de todo o jogo, mostrando, no enredo, o comportamento do personagem diante das situações apresentadas no contexto da floresta amazônica, aludindo às práticas culturais e às narrativas místicas da floresta amazônica.

Nesse cenário, busca-se trazer a educação matemática para a aprendizagem do usuário, com o objetivo de que o jogador conheça, em parte, a cultura dos "povos da floresta" e que vivencie a experimentação a partir da etnomatemática, ancorada à diversidade cultural e à educação ambiental na realização do jogo, para a resolução de problemas.

O conteúdo escolhido para esse experimento é a Trigonometria no triângulo retângulo e em quaisquer triângulos, especificamente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos, além de trabalhar a mobilização e articulação de conceitos, procedimentos e linguagens para a compreensão das relações dos diferentes campos da Matemática, considerando-os como aporte para a Trigonometria. O nome escolhido para o app é *Triangulux* que é o produto final do projeto.

O jogo digital *Triangulux* foi idealizado para ser interativo e dinâmico, com abordagem educacional na área de Trigonometria. Nossa proposta é adaptar o desenvolvimento do jogo para multiplataformas, como o *Google Play* e a *(iOS) App Store.* Dessa forma, o app poderá ser liberado para dispositivos móveis com configuração Android e iOS, a fim de obtermos uma maior abrangência de usuários. A programação do jogo poderá ser desenvolvida para que o jogo seja executado de forma *online* e *offline*, tornando-o acessível, disponível para *download*.

Portanto, para o desenvolvimento do aplicativo móvel *Triangulux*, devem ser consideradas as limitações dos recursos dos dispositivos móveis, como a capacidade de memória, espaço interno, armazenamento e processamento de dados, tamanho da tela e as configurações do *hardware*, permitindo a inclusão digital do público.

A projeção da visualização das interfaces é delineada conforme a organização das informações dispostas no aplicativo. Por meio da apresentação das telas do app para o usuário, é possível estabelecer padrões para a verificação das pré-interferências, tomadas de decisão e execuções de comandos a partir da estruturação dos recursos de navegação do app, como menus, botões, ícones, imagens, espaços de textos, caixas de seleção e barras de rolagem.

A facilidade da interação desses componentes disponibilizados no *software* permite a relação dos elementos do sistema, a otimização da navegabilidade e o seu nível de adesão por parte do utilizador. Nessa fase do processo de construção do *software*, é interessante apresentar a visualização da disposição do *storyboard* do app.

O recurso de navegação do aplicativo apresenta os fluxos de entrada e saída das variedades de conteúdos. Por isso, para uma boa UX (*user experience*), ou experiência do usuário (NORMAN; DRAPE, 1986), é necessário primeiramente esse planejamento das etapas para o desenvolvimento do *software*. Dessa forma, o usuário tem a disponibilidade de manusear o conjunto de controles relacionados à sua interação que se inicia no planejamento do *design* do *software* (GODOI; PADOVANI, 2011).

Apoiamos o desenvolvimento nas "Oito Regras de Ouro" de Shneiderman (1986), citado por Shneiderman e Plaisant (2004), descritas conforme a interpretação do refinamento e aplicadas a cada ambiente de navegação. Os princípios mais comuns para o *design* da interface estão dispostos no Quadro 2, a seguir:

Quadro 2 – Princípios do *design* de *software*

Princípios	**Definição**
Consistência	O sistema deve ser programado para a consistência e a precisão das sequências de ações utilizadas em avisos, menus, caixas de seleção, telas de ajuda, consistência de cores, layout e fontes.
Usabilidade universal	É preciso identificar as necessidades dos usuários para projetar a flexibilidade da interação dos conteúdos, possibilitando a inclusão de recursos para valorizar o *design* da interface e melhorar a qualidade do sistema.
Feedback informativo	As ações dos usuários requerem respostas do sistema mais ou menos explicativas. O *feedback* do sistema é ativado para cada interferência ou execução por parte do usuário.
Diálogo que indique o fim de uma ação	Os usuários devem ser capazes de controlar as suas interações, as sequências de ações devem apresentar a informação de *feedback* ao usuário, como a resposta de realização e a indicação para se preparar para a sequência do sistema.
Evitar erros	O sistema deve ser programado para a prevenção e recuperação de erros e para a projeção do sistema, de tal forma que os usuários não possam cometer erros.
Reversão de ações	A configuração do sistema deve permitir aos usuários a reversão de suas ações. O usuário deve ter a opção de desfazer os erros.
Controle do usuário	Os usuários devem ter o controle sobre as respostas do sistema. O sistema deve permitir que os comandos da interface pertençam aos usuários.

Memória de trabalho	O sistema deve permitir a redução da carga de memória de curta duração, a memória de processamento de informação deve ser reduzida, devido à limitação dos seres humanos.

Fonte: Adaptado de Sabadin (2016).

No Quadro 2, acima, destacamos os principais elementos para o *design* de um *software*. Os conceitos nele apresentados são essenciais para a compreensão das *guidelines* de usabilidade dos aplicativos, que proporcionam ao usuário uma maior interação e mais facilidade de uso. Esses elementos expostos no Quadro 2 são primordiais para a elaboração e avaliação de um *software,* pois garantem uma maior qualidade quanto às funcionalidades e ao gerenciamento dos aplicativos.

A seguir, para uma melhor compreensão da proposta desta pesquisa, apresentamos o projeto inicial do jogo digital: o planejamento do jogo, o documento de *game design*, bem como os personagens, as fases e o roteiro do jogo digital *TrianguLux*.

4.1 O Projeto Inicial do Jogo Digital *TrianguLux*

O projeto do jogo digital *TrianguLux* é baseado no *High Concept*, que é um pré-planejamento do *design* do jogo digital, do conceito de jogo. Conforme Zaffari e Battaiola (2014, p. 1045), é o "momento em que se põe a ideia no papel; onde as primeiras ideias de como o jogo deve funcionar, qual o seu espírito, são registradas". O *High Concept* é o "tratamento de *design*", a "proposta de projeto", o "*outline* do jogo" para explicar alguns componentes e elementos imprescindíveis ao *design* de jogos (LARAMEE, 1999).

O Quadro 3, junto à imagem, à esquerda da tela inicial do *software* abaixo, descreve o escopo do *design* do jogo:

Quadro 3 – Escopo do *design* do jogo

Título	TrianguLux
Plataforma	Android e Ios
Jogadores	Apenas um jogador, podendo evoluir para mais jogadores
Gênero	Ação e aventura
High Concept	O *TrianguLux* promove imersão do jogador no contexto da floresta amazônica, apresentando os principais problemas enfrentados pelos "povos da floresta", que lutam pela sobrevivência deles mesmos e da floresta amazônica. Por isso, o jogo conduz o jogador ao confronto contra os inimigos que tentam destruir a natureza.
Objetivo	O objetivo é acumular o máximo de pontos possível. O jogador deve impedir as ações prejudiciais do homem sobre a fauna e a flora da Amazônia.

Recursos	- O *game* é para ser jogado em dispositivos móveis; - O mundo do *game* é a floresta amazônica; - O jogador controla as ações sobre os desafios a serem enfrentados pelo personagem no jogo; - O *game* termina na fase III, após o jogador cumprir todas as propostas das fases anteriores.	

Fonte: Elaboração da autora (2021).

O *Game Design Document* (GDD) ou Documento de Desenho do Jogo consiste em um elemento principal para o desenvolvimento do jogo, apresenta uma descrição abrangente e é uma evolução do *High Concept*, no sentido da projeção do jogo para a organização da produção. Além disso, contempla a inclusão das informações completas sobre o *gameplay*, a interface do usuário, a história, os personagens até os últimos ajustes mais específicos (ZAFFARI; BATAIOLLA, 2014).

O Quadro 4, a seguir, mostra o GDD do jogo *TrianguLux*. Nele podemos observar as principais informações do projeto do jogo. O desenvolvimento dessa proposta mais detalhada destaca o planejamento de uma intenção mais robusta, relacionada não somente ao fato de uma história ser contada em um *game*, mas também com propósito pedagógico, para a melhoria do ensino e da aprendizagem em Matemática:

Quadro 4 – *Game Design Document* do jogo digital *TrianguLux*

I – Visão Geral Essencial	1) Resumo	O principal personagem do jogo é um seringueiro que vive na floresta amazônica. O jogo envolve o usuário em uma imersão de ação e aventura na Amazônia. O objetivo do jogo é levar o jogador à compreensão da preservação da floresta amazônica e conhecer um pouco da cultura e dos modos de sobrevivência dos "povos da floresta". Além disso, a proposta do jogo leva o usuário a compreender, sob um aspecto educacional, os conceitos matemáticos para o desenvolvimento do pensamento trigonométrico.
	2) Aspectos Fundamentais	A sobrevivência do seringueiro consiste no extrativismo vegetal, por isso, ele protege o bioma amazônico contra a caça predatória e o tráfico de animais, o desmatamento, as queimadas e o garimpo. O jogador, antes dos combates, poderá transfigurar o seu avatar em personagens lendários da floresta amazônica. O direcionamento do personagem é realizado pelo usuário para a superação dos desafios e dos obstáculos na floresta, além do combate aos principais problemas causados pelo homem na natureza. Uma característica fundamental do jogo, no aspecto pedagógico, relaciona-se ao entendimento de como o seringueiro compreende as operações e conceituações da Matemática aplicada ao seu próprio contexto cultural que integram linguagem, comportamentos, lendas e mitos.
	3) *Golden Nuggets*	O diferencial do *game* são os modos de combate à destruição do bioma amazônico para levar o usuário à

		reflexão de preservação da natureza e ao respeito a outras culturas. O jogo também possui objetivo educacional, pois aborda processos de aprendizagem em Trigonometria e envolve aspectos relacionados à Etnomatemática, para a tomada de decisões acerca dos modos de planejamento de soluções que exigem iniciativa e criatividade.
II – Contexto do Jogo	1) História do Jogo	O personagem enfrenta desafios em meio à floresta amazônica. Sobreviver faz parte da rotina do seringueiro que conhece bem a “mata” (floresta), colhe castanhas, açaí, bananas, frutas em geral. O látex é a sua principal fonte de renda, pois, a partir da extração deste da seringueira, ocorre a produção de borracha. Da mandioca, faz-se farinha, manipueira, tapioca. Quase tudo é possível ser reaproveitado nesse ambiente: não há desperdício. Vivenciar incertezas, aventuras e emoções faz parte da vida dos “povos da floresta”. A história do jogo se entrelaça a partir desse enfoque, mas existe um objetivo bem maior por trás dele: o desenvolvimento de saberes para o estabelecimento de relações, conexões e integração entre os eixos temáticos da Matemática para a resolução de problemas, por meio de interpretações de diferentes formas e sob diversas perspectivas.
	2) Eventos Anteriores	O contexto de abordagem se fixa no ambiente de vivência dos “povos da floresta”, todavia, como um todo, vê-se que existe um objeto de conhecimento matemático que ressoa para um objetivo educacional delimitado, porém que se despende em expansões em outras áreas do conhecimento, para o desenvolvimento da autonomia, das competências e habilidades.
	3) Principais Jogadores	Lux é o seringueiro, o personagem principal. Os caçadores de animais são os oponentes do Lux, eles aparecem na floresta para capturar os animais silvestres e para colocar armadilhas. No combate com o Lux, os caçadores carregam armas de fogo. Os desmatadores também são inimigos do Lux que entram em combate. Também aparecem armados com motosserras, armas de fogo e facões nas mãos. Os garimpeiros igualmente são adversários do Lux; no confronto, eles surgem com picaretas, pás, facões e armas de fogo, eles desmatam a floresta e provocam o assoreamento do fluxo das águas, além de prejudicarem e contaminarem o solo e destruírem o bioma amazônico.
III – Objetos Essenciais do *Game*	1) Personagens	Lux – seringueiro, caçadores de animais, desmatadores, garimpeiros, indígenas, personagens míticos e lendários da cultura dos povos da floresta e animais.
	2) Armas	Armas de fogo, motosserras, machado, picaretas, pás e facões.
	3) Estruturas	O aporte à cultura dos “povos da floresta” enseja-se sobre as transformações do personagem principal em seres mitológicos imortais no momento dos combates. O agricultor da Amazônia cultiva frutas, vegetais, legumes, verduras e raízes e extrai produtos da floresta nativa, como a seringa (seiva da seringueira) e castanhas. Questões ambientais são apresentadas

		também na estrutura do jogo, uma vez que o que se pretende é abordar a cultura de um povo que possui identidade e o saber fazer matemático sobre a ótica da expressão cultural que inclui criticidade, natureza histórica e representações.
	4) Objetos	Gaiolas, armadilhas, barco, canoa, remo, capa protetora, uniforme.
IV- Conflitos e Soluções	Os confrontos ocorrem entre o personagem principal e os caçadores; depois, com os desmatadores e, por último, com os garimpeiros. Nos conflitos, o objetivo do Lux é destruir os seus oponentes, salvar os animais, reflorestar e plantar faz parte de uma grande conquista e reflexão socioambiental para o jogador. O *design* de mundo, a partir do caos provocado pelas ações prejudiciais do homem à natureza, pode ser modificado a partir das atitudes do próprio jogador, no momento em que cumpre as funções de reflorestar.	
V – Inteligência Artificial	Em situações adversas, o jogador adquire ferramentas, instrumentos ou algum tipo de equipamento ou artefato para conseguir superar os desafios ao cair no gapó, no rio ou mesmo no fosso profundo de lama e água contaminada provenientes da prática do garimpo. A transfiguração do personagem em lendas amazônicas acontece para o confronto, bem como a troca dos valores que o jogador adquiriu no jogo por materiais ocorre para ele lidar com as diversas situações que aparecem no decorrer do contexto do *game*.	
VI – Fluxo do *Game*	A evolução do jogador no jogo consiste na passagem das fases. A fase I do *game* envolve os conflitos entre o personagem e os caçadores, o resgate de animais das armadilhas e do fogo, principalmente salvar-se das armadilhas, das queimadas e dos tiros das armas de fogo dos caçadores. A fase II compreende a aventura do personagem em escapar das árvores que estão caindo, passar por árvores derrubadas ou parcialmente derrubadas e por queimadas na floresta. Na fase III, o personagem precisa desviar-se dos balseiros e troncos de árvores, escapar dos buracos e fossos de lama, desviar da pororoca e desvencilhar-se dos encantos da Iara.	
VII – Controles	Os comandos diretos do jogador concernem às ações do personagem em pular, saltar, nadar, lutar, remar, agachar, plantar, colher e resgatar.	
VIII – Variações de Jogo	Transformações de paisagens e de relevo e transições de ambientes nas mudanças de trechos e de fases, ora superfícies planas, ora subidas de um terreno íngreme, ora descida de ladeira, ora na correnteza do rio, ora na turbulência das águas do rio, ora no calor escaldante, ora na chuva torrencial, ora na paisagem do bioma amazônico com biodiversidade, ora na lama dos fossos do garimpo, ora em meio às seringueiras, ora em meio à vegetação de ar puro e limpo, ora nas queimadas da floresta, ora em um ambiente de derrubadas de árvores. O trajeto é identificado a partir da classificação quanto aos lados e quanto aos ângulos, bem como dos procedimentos de resolução que cabem no contexto.	
IX – Definições	Os conceitos e as definições a serem desenvolvidos no decorrer da dinâmica do jogo estão relacionados à abordagem do objeto de conhecimento em cada fase, que é a Trigonometria no triângulo retângulo e em triângulos quaisquer.	
X – Referências	*Survive, As aventuras do Edu, Jogos RPG* e os jogos derivados.	

Fonte: Adaptado de Schuytema (2008).

Após a apresentação do escopo, do projeto e da evolução deste para o desenvolvimento do jogo e o GDD, a seguir apresentamos as concepções, abordagens, os ambientes, contextos culturais e a constituição das fases para uma melhor compreensão do nível de aprendizagem e de enfoque dos elementos essenciais no jogo, a imersão, o engajamento e a compreensão do cenário em que os efeitos de ação e aventura acontecem.

4.2 Os Personagens do Jogo

O *design* de narrativa do jogo digital, que consiste em um roteiro descrito neste trabalho, é inspirado na história de vida de Mário Damião Pereira, ex-seringueiro amazônida acreano, que assume o papel de personagem principal do jogo, o Lux. O *script* e a dinâmica do jogo foram planejados com base no *design* de mundo da floresta amazônica e na história de vida dos "povos da floresta", especificamente dos meus pais, Mário Damião Pereira e Antonia Soares, que vivenciaram essas experiências na sua juventude, a partir da década de 1960.

O jogo é composto por personagens de narrativas míticas da floresta amazônica; o contexto é roteirizado sob o enfoque do conteúdo de Trigonometria para uma reflexão da transversalidade sobre o meio ambiente; as questões socioambientais e a abordagem da Etnomatemática enfatizam a compreensão do contexto sociocultural dos povos extrativistas da Amazônia.

A descrição dos personagens do jogo encontra-se no Quadro 5, a seguir:

Quadro 5 – Descrição dos personagens do jogo digital *TrianguLux*

PERSONAGENS	CARACTERÍSTICAS
 **Fonte**: Disponível em: https://br.pinterest.com/pin/540220917776665949/	**ANIMAIS** Os animais são os personagens que estão presentes em cada cenário e no *script* do jogo. Eles vivem na floresta amazônica e estão em constante perigo, ora por passarem pelos desafios das queimadas, ora por escaparem dos caçadores, das armadilhas, da morte e do tráfico.
 **Fonte**: Ilustrador – Thiago Batista (2019)	**CABOCLINHO DA MATA** É um personagem representado por um indígena capaz de castigar ou assustar os que praticam ações maldosas contra os animais. Ele pune aqueles que matam a caça e não comem, estragam a carne e maltratam os animais. A esses ele aplica severos castigos, quase todo seringueiro acredita que ele exista.

 **Fonte**: Shutterstock	**CAÇADORES DE ANIMAIS SILVESTRES** Os caçadores de animais são os personagens que buscam capturar animais na floresta amazônica para o consumo de carnes exóticas, tráfico e biopirataria. Eles são impiedosos e visam a benefícios próprios e lucros a partir da caça de animais.
 **Fonte**: Ilustração – Rodrigo Pascal (2019)	**CAIPORA** A Caipora é representada por uma índia anã, com cabelos vermelhos, orelhas pontudas e dentes esverdeados. Ela protege o ecossistema, engana os caçadores, possui uma grande força para atacá-los e agredi-los. A Caipora também detém poderes para dominar e ressuscitar animais.
 **Fonte**: Ilustração – Gustavo Garcez (2015)	**CURUPIRA** O Curupira é um menino de cabelos vermelhos que possui os pés virados para trás que sempre aparece montado em um porco-do-mato. Ele protege a floresta e os animais dos caçadores e desmatadores. O Curupira tem o poder de persuadir, assustar e confundir os caçadores.
 **Fonte**: Disponível em: https://empautaonline.com/pf-desarticula-esquema-bilionario-de-exploracao-ilicita-de-madeira-da-amazonia/.	**DESMATADORES** Esses personagens aparecem na história do jogo como pessoas que cortam e serram as árvores, desmatam a floresta amazônica, causando prejuízos ao meio ambiente, inclusive na deformação da paisagem natural.
 **Fonte**: Disponível em: http://zevitor.com.br/noticias/wp-content/uploads/2019/06/garimpeiros.jpg	**GARIMPEIROS** São os personagens que causam grandes degradações no ambiente, principalmente no solo, além do desmatamento, de forma irreversível, inclusive, porque utilizam componentes e produtos químicos que poluem e contaminam o solo e a água.
	IARA

 **Fonte**: Suportegeografico77.	É uma sereia que possui traços indígenas e vive nos rios amazônicos. De beleza infinita, possui longos cabelos pretos e olhos castanhos. A sereia Iara emite uma melodia que encanta e seduz os homens, que ficam hipnotizados ou enfeitiçados por suas canções e voz doce.
 **Fonte**: Foto - Car de Souza / AFP / CP (2021).	**INDÍGENAS** São os personagens que moram na floresta amazônica e a protegem. São consideradas pessoas vulneráveis que são atacadas pelos desmatadores. Eles sobrevivem da caça, da pesca e do extrativismo vegetal, como a coleta de frutas, vegetais, legumes, verduras, raízes, entre outros.
 **Fonte**: Ilustração - João Pedro Carvalho (2021).	**LUX** É representado por um seringueiro que sobrevive da prática do extrativismo vegetal, como a produção de borracha, colheita de castanhas-do-Pará, produção de farinha de mandioca, manipueira, coleta de frutas, vegetais, legumes, raízes, da caça e da pesca. É o personagem principal do jogo, que vive na floresta amazônica; ele é o protetor da fauna e da flora dessa região.
 **Fonte**: Ilustração – Naorú (2019).	**MAPINGUARI** O mapinguari, é um personagem lendário coberto de pelos longos e vermelhos que habita a floresta amazônica. Ele é muito forte, de estatura alta, cerca de 2 metros de altura, possui um olho grande no meio da testa; tem uma boca grande e dentes afiados; braços longos e garras grandes nas mãos. A criatura é monstruosa, emite gritos e ruídos para assustar os caçadores, desmatadores, entre outros.
 **Fonte**: Ilustração - Joe Santos (2015).	**MATINTA-PEREIRA** É uma personagem lendária da floresta amazônica representada por uma bruxa velha que se transfigura em um pássaro de mau agouro, a “Rasga Mortalha”, que emite um ruído agudo e estridente. Ela amaldiçoa as pessoas que não lhe obedecem, para que estas morram repentinamente.

 **Fonte**: Disponível em: https://www.todamateria.com.br/saci-perere/.	**SACI-PERERÊ** É um personagem mítico, um menino pequeno, negro que possui apenas uma perna, porém se locomove rapidamente e habita a floresta. Ele usa um gorro vermelho, fuma cachimbo, apresenta superpoderes, não possui cabelo nem pelos no corpo; faz travessuras e brincadeiras.

Fonte: Elaboração da autora (2021).

O Quadro 5, logo acima, traz explicações acerca do perfil dos personagens do jogo digital *TrianguLux*. Essas imagens dos personagens são meramente ilustrativas, as imagens definitivas dos personagens ainda não foram produzidas conforme o desenvolvimento técnico do jogo. A seguir, no próximo tópico, explicamos as fases do jogo digital *TrianguLux* e a descrição do roteiro do jogo, bem como mostramos o modelo do roteiro do jogo, as abordagens e as perspectivas desta proposta pedagógica.

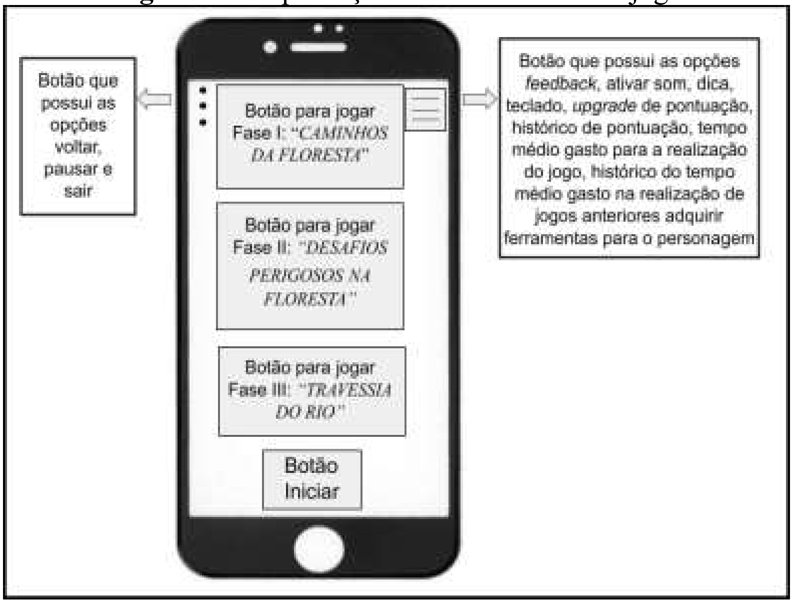
4.3 As Fases do Jogo Digital *TrianguLux*

O desenvolvimento do jogo foi planejado para ocorrer em fases, conforme o sequenciamento dos objetos de conhecimento matemático e dos níveis de complexidade dos elementos a serem apresentados nas mecânicas e dinâmicas do jogo. De forma sequenciada, a tela representada na Figura 4, a seguir, possui os botões: "*CAMINHOS DA FLORESTA*", "*DESAFIOS PERIGOSOS NA FLORESTA*" e "*TRAVESSIA DO RIO*", que são as três fases do jogo.

O botão "*CAMINHOS DA FLORESTA*" é o único que pode ser ativado neste momento, as outras fases como "*DESAFIOS PERIGOSOS NA FLORESTA*" e "*TRAVESSIA DO RIO*" constam somente como informação para o conhecimento dos jogadores e são ativados somente após o avanço sequenciado das fases.

O botão em posição superior, ao lado direito da tela, possui as funções para voltar, pausar ou sair do jogo. O botão "INICIAR", logo abaixo, pode ser acionado após a seleção de um botão dos conteúdos dos jogos, conforme o progresso dos níveis de jogabilidade e das fases, assim como mostra a Figura 4, a seguir:

Figura 4 – Reprodução da tela do início do jogo



Fonte: Elaboração da autora (2021).

No próximo tópico, apresentamos as conexões e a descrição da mecânica do jogo (HUNICKE; LEBLANC; ZUBEK, 2004), bem como o *design* do roteiro do jogo digital *TrianguLux* para um melhor entendimento do leitor sobre a proposta tratada nesta pesquisa.

4.4 Descrição do Roteiro do Jogo

A descrição do roteiro das fases do jogo é pautada nos fundamentos de *design* de jogos de Salen e Zimmerman (2012). Os conceitos sistemáticos do desenho do produto, nessa perspectiva, modelam o entendimento da interação lúdica significativa e contribuem com a ordenação de definição do jogo. Com base na interatividade imediata, mas restrita, a tecnologia digital projeta sistemas de ações e resultados. O *gameplay* interfere sobre os comandos do jogador, uma vez que molda de maneira dinâmica as decisões do usuário em tempo real.

No contexto do jogo ocorre a imersão no mundo de representações para a compreensão do roteiro na interação, manipulação, no controle, na exploração e transformação do próprio personagem e do seu ambiente por intermédio do *play* ou interação lúdica (SALEN; ZIMMERMAN, 2012). Portanto, o roteiro do jogo digital incorpora-se ao cenário da floresta amazônica, onde o protagonista é um seringueiro que sobrevive dos recursos naturais, ou seja, do extrativismo animal e vegetal. Por isso, a missão do personagem no jogo é proteger e salvar a fauna e a flora da incapacidade de reflexão de preservação do ser humano e das ações de destruição do homem.

O *script* do jogo, conforme Bryant e Giglio (2015), explora narrativas interativas por meio da compreensão do enredo, de maneira que a jogabilidade (*game play*) seja bem mais integrada com a emoção. A estrutura do *game* permite a garantia dos elementos-chave da experiência do jogador associada à dinamicidade da história para que se torne atrativa ao usuário. O *design* do roteiro consiste em uma jornada de imersão em uma mistura de sentimentos e emoções, e é nessa seção que se encontram os "*spoilers*" do universo do *game* e a mecânica, que se apresenta em uma jornada de ação e aventura.

O Quadro 6 mostra a relação significativa do roteiro e da mecânica do jogo nas três fases em que se apresentam os contextos do ambiente da floresta amazônica. A essa referência cabe o destaque das sensações que se pretende atingir no jogador durante a usabilidade, o gerenciamento dos comandos e o engajamento no *game*:

Quadro 6 – Interação significativa da mecânica com o roteiro

Jogo digital *TrianguLux*	**Mecânica**	**Contexto motivacional**	**Estética - sentimento/emoção**
Fase I	Correr, pular, saltar, combater, proteger e resgatar.	Proteção aos animais da floresta amazônica mediante os caçadores de animais silvestres.	Medo, suspense, orgulho, reflexão e satisfação.
Fase II	Correr, rastejar, agachar, pular, confrontar e plantar.	Reflorestamento após um contexto sequencial de desmatamento da floresta.	Temor, bondade, sensibilidade, triunfo e bravura.
Fase III	Correr, remar, fugir, colher, enfrentar e plantar.	Proteção da floresta e combate ao garimpo.	Pânico, pavor, aflição, contentamento, consciência e responsabilidade.

Fonte: Adaptado de Bryant e Giglio (2015).

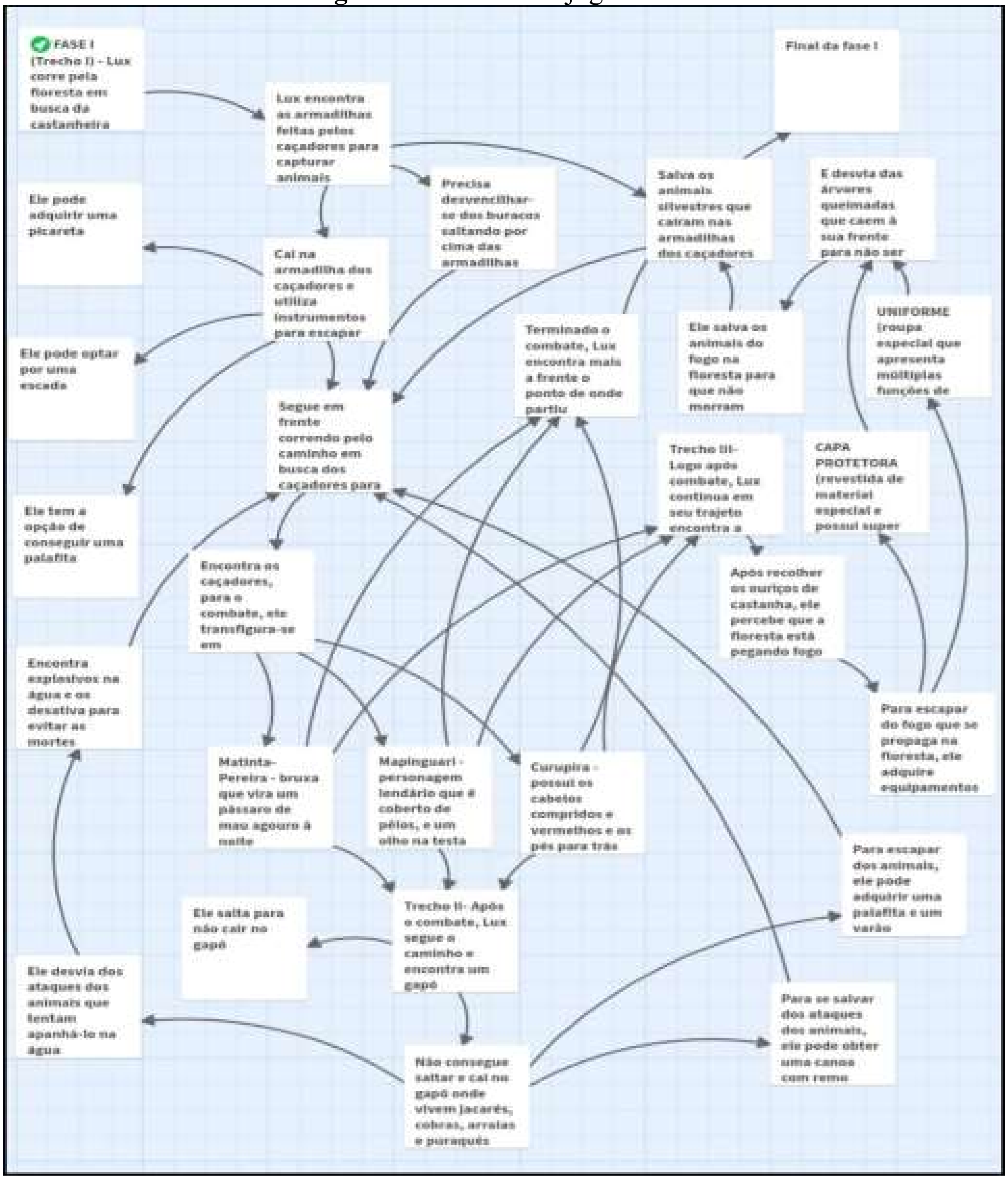
Como já dito anteriormente (no tópico 4.3), o jogo digital *TrianguLux* foi dividido em três fases: Caminhos da Floresta (fase I), Desafios Perigosos na Floresta (fase II) e Travessia do Rio (fase III). No início de cada fase, o nível de dificuldade de cada obstáculo que aparece para o jogador já prediz o que acontecerá no decorrer do percurso e na superação de cada modalidade de competição e batalhas nas fases. Os desafios principais do jogo correspondem a cada uma das fases, respectivamente, e consistem nos confrontos entre o personagem e os caçadores de animais silvestres, o desmatamento, o combate às queimadas e ao garimpo.

No Apêndice, apresentamos o roteiro do jogo com base em Salen e Zimmerman (2012), que descreveram, em suas obras, compostas em cada um dos quatro volumes, modelos de roteiros de jogos, bem como os destaques aos elementos principais no *design* da estrutura dos jogos. Cabe ressaltar aqui também a relação entre o jogo e os contextos culturais nos quais ele está imerso, cujo esboço é feito a seguir, para o entendimento da proposta pelo leitor.

4.4.1 Fase I – "CAMINHOS DA FLORESTA"

O roteiro da fase I, descrito como "Caminhos da Floresta", encontra-se no Apêndice A e foi elaborado conforme demonstra a Figura 5, a seguir:

Figura 5 – Roteiro do jogo: Fase I



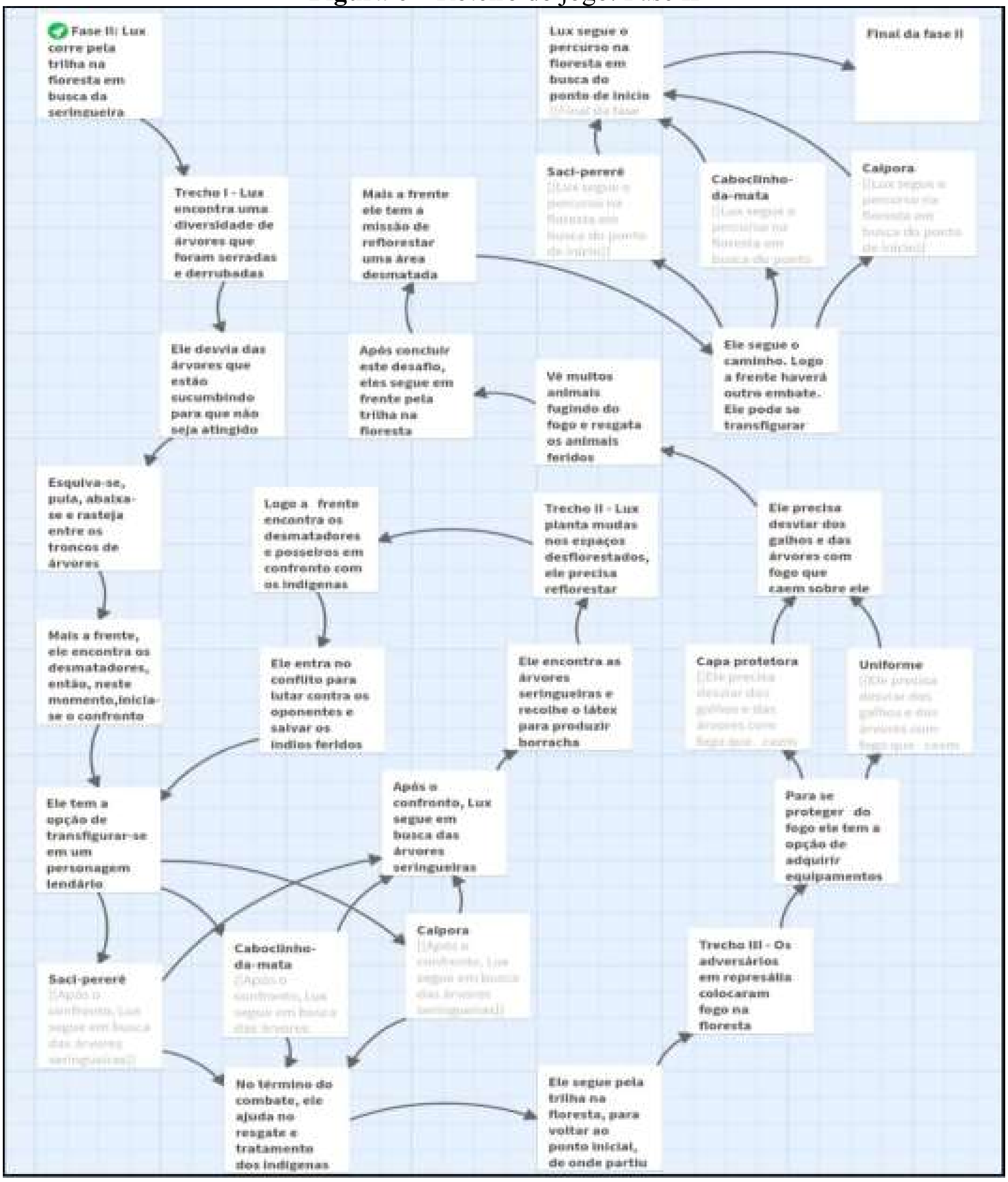
Fonte: Elaboração da autora com auxílio do *Software Twine* (2021).

A seguir, no próximo subtópico, apresentamos o modelo em que foi elaborado o roteiro da fase II do jogo.

4.4.2 Fase II – "DESAFIOS PERIGOSOS NA FLORESTA"

A fase II do jogo digital *TrianguLux*, denominada "Desafios Perigosos na Floresta", traz um roteiro que está no Apêndice A e foi elaborado conforme a descrição da Figura 6, a seguir:

Figura 6 – Roteiro do jogo: Fase II



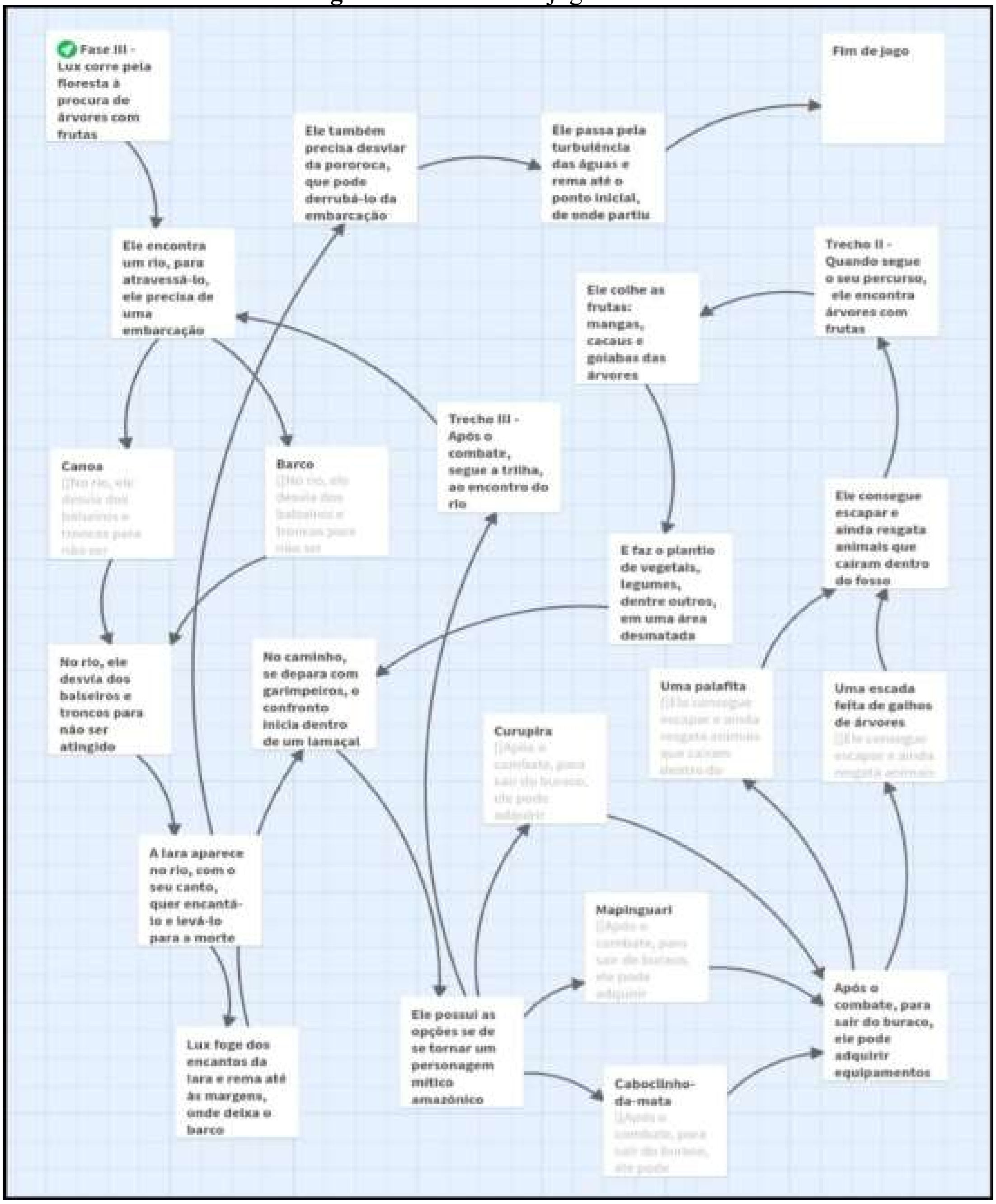
Fonte: Elaboração da autora com auxílio do *Software Twine* (2021).

A seguir, no próximo subtópico, apresentamos o modelo em que foi elaborado o roteiro da fase III do jogo.

4.4.3 Fase III – “TRAVESSIA DO RIO”

O roteiro da fase 3, intitulado “Travessia do Rio”, encontra-se no Apêndice A e foi elaborado conforme demonstra a Figura 7, a seguir:

Figura 7 – Roteiro do jogo: Fase III



Fonte: Elaboração da autora com auxílio do *Software Twine* (2021).

Os roteiros das fases do jogo digital *TrianguLux* foram desenvolvidos sob as circunstâncias de envolvimento do usuário para imergir em um mundo diferente, com o propósito de construção de um aprendizado não somente em Matemática, mas também na formação cidadã e de conscientização socioambiental. Essas perspectivas de integração são possibilitadas a partir da abordagem dos Temas Contemporâneos Transversais relacionados à Cidadania, Educação Ambiental e ao Multiculturalismo (BRASIL, 2018), demonstradas no tópico seguinte.

5 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DO JOGO

"Uma boa prática é fruto
de uma verdadeira teoria"
(Bartolache, 1769).

Neste tópico abordamos a proposta pedagógica do jogo digital *TrianguLux* a partir do estudo da Trigonometria para o desenvolvimento do pensamento matemático, além do autoestudo e da autoaprendizagem do estudante. Tratamos aqui também da transposição didática do jogo, como o "trabalho de adaptação, transformação do saber em objeto de ensino, em função do lugar, do público e das finalidades didáticas a que se propõe" (D'AMORE, 2007, p. 224). A transposição didática envolve a contextualização, interpretação e intervenção para a formulação de conceitos.

Nesta proposta, trazemos a Geometria Euclidiana com o seu enfoque sobre a "reorganização da geometria, bem como o papel das técnicas de construção propostas nos Elementos no contexto das práticas gregas de resolução de problemas" (ROQUE, 2012, p. 136). Nesse sentido, Muniz Neto (2013) enfatiza os postulados ou axiomas da Geometria Euclidiana, como características fundamentais da Matemática enquanto ciência. Por outro lado, D'Ambrosio (2018, p. 191) considera a abordagem dos conceitos na Geometria Euclidiana como uma "construção abstrata, muitas vezes chamada o estilo euclidiano, [que] é baseada na lógica do *tertium non datur*. O estilo euclideano é o protótipo de rigor matemático".

5.1 O Teorema de Pitágoras na Fase I

A proposta pedagógica do ensino de Matemática na fase I do jogo ancora-se na BNCC (BRASIL, 2018), em Muniz Neto (2013) e em autores dos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, como Iezzi (2019) e Dante e Viana (2020). Também são abordados outros autores, a fim de complementar as ideias para um melhor entendimento da proposta.

A unidade temática Geometria, abordada na fase I do jogo digital, enseja-se sobre o estudo do reconhecimento dos elementos de um triângulo retângulo e da aplicação do Teorema de Pitágoras. O objetivo dessa proposta didática na fase I do jogo centra-se em resolver situações-problema que envolvam a relação pitagórica e o reconhecimento dos elementos do triângulo retângulo. Nessa abordagem, tratamos da representação matemática das distâncias entre pontos que formam um triângulo retângulo.

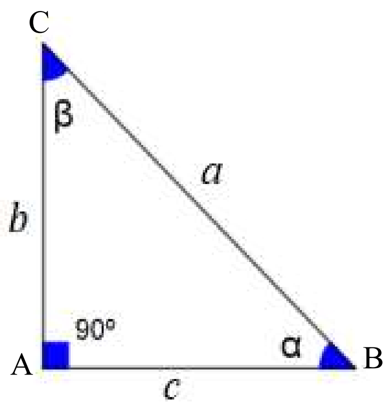
Quando tratamos de Geometria Euclidiana, consideramos que, para os triláteros (BOYER, 2013), a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180º. Desse modo, em um triângulo retângulo, um dos ângulos apresentados mede 90º, então, pode-se concluir que os outros dois ângulos agudos internos são complementares, ou seja, a sua soma é 90º e, ainda, o maior lado do triângulo, oposto ao maior ângulo que mede 90º, é a hipotenusa. Os outros dois lados do triângulo retângulo, que são perpendiculares entre si, denominam-se catetos.

Roque (2012) traz definições sobre a Trigonometria no triângulo retângulo para o ensino de Trigonometria, da seguinte forma:

Definição 1: Um triângulo é retângulo se contém um ângulo reto.

Definição 2: Em um triângulo retângulo o maior lado é chamado “hipotenusa” e os outros dois são chamados “catetos”.

Teorema: Em todo triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.



O triângulo ABC é retângulo. O ângulo reto, de 90º localiza-se no vértice A, os elementos *b* e *c* são os catetos e *a* é a hipotenusa desse triângulo. Dessa forma, temos que:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 90^0 \\ \alpha + \beta + 90^0 = 180^0 \end{cases}$$

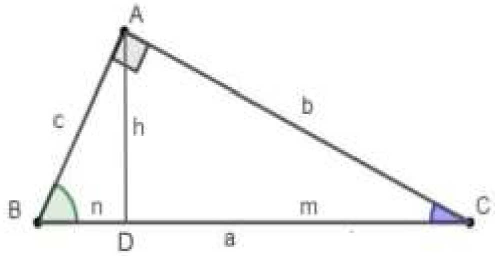
O Teorema de Pitágoras é definido por: “O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”.

$\boldsymbol{a^2} = \boldsymbol{b^2} + \boldsymbol{c^2}$, para $\forall$ a, b e c $\in \mathbb{R}$

A demonstração do teorema pode ser realizada de diversas maneiras, por diversos métodos e por meio de ferramentas diferentes da Matemática. Apresentamos a demonstração a seguir, em que utilizamos conceitos de semelhança de triângulos e de relações métricas no triângulo retângulo:

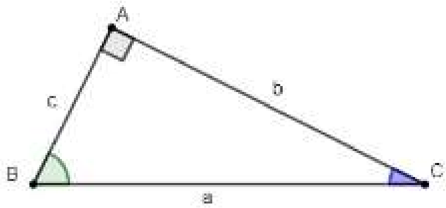
Seja o triângulo ABC, vamos demonstrar que $a^2 = b^2 + c^2$.

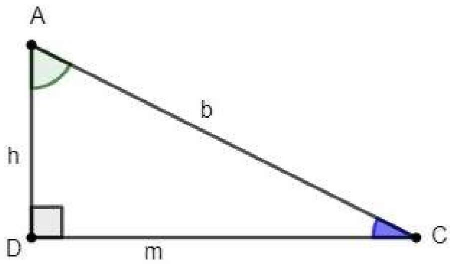
Considerando o triângulo ABC, temos que:

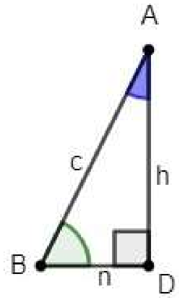


- a é a medida da $hipotenusa$;
- b é $cateto$;
- c é $cateto$;
- h é $a\ altura$;
- m é a $medida\ da\ projeção\ de\ b\ sobre\ a\ hipotenusa$;
- n é a medida da $projeção\ de\ c\ sobre\ a\ hipotenusa$.

O triângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$ da figura acima pode ser dividido em três triângulos retângulos semelhantes ΔABC, ΔDAC e ΔDAB, da seguinte forma:







Como os triângulos retângulos ΔABC e ΔDAB são semelhantes, temos que:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \rightarrow an = c^2 \qquad \text{(i)}$$

Se compararmos os triângulos ΔABC e ΔDAC, obtemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \rightarrow am = b^2 \qquad \text{(ii)}$$

Agora, somando as equações (i) e (ii), temos que:

$$an + am = c^2 + b^2$$

$$a(m + n) = c^2 + b^2$$

Como $m + n = a$, segue que,

$$a.a = c^2 + b^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Nessas condições, apresentam-se nesta proposta algumas formas de interpretação, compreensão, representação, métodos diversificados de resolução e *feedback* do problema abordado na fase I do jogo, utilizando a relação entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados das medidas dos lados do triângulo retângulo formado. Tal relação é conhecida como Teorema de Pitágoras.

5.2 As Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo Abordadas na Fase II

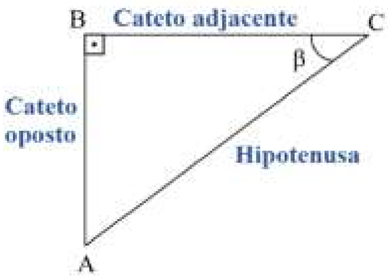
Os objetivos da atividade proposta na fase II do jogo concentram-se em identificar e calcular razões trigonométricas no triângulo retângulo; resolver problemas que envolvam razões trigonométricas e aplicar o Teorema de Pitágoras na determinação das razões trigonométricas dos ângulos de 30^0, 45^0 e 60^0.

Considerando um triângulo retângulo ABC, podemos destacar que

- Os lados do triângulo retângulo são representados pelos segmentos de retas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$;
- O segmento de reta $\overline{AB}$ é denominado **cateto oposto** com relação ao ângulo β;
- O segmento de reta $\overline{BC}$ classifica-se como **cateto adjacente** com relação ao ângulo β;
- O segmento de reta $\overline{AC}$ é a **hipotenusa** do ΔABC, pois esse segmento é o lado oposto ao ângulo de 90^0.

O ângulo β é agudo, uma vez que se trata de um triângulo retângulo, portanto valem as definições expressas por Roque (2012, p. 24), demonstradas anteriormente, no tópico 5.1.

A seguir, apresentamos o triângulo ABC, reto em $\hat{B}$, e a descrição da definição das razões trigonométricas no triângulo retângulo em relação ao ângulo agudo β:



$$sen\,\beta = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}},\ para\ 0^0 < \beta < 90^0$$

$$\cos\beta = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}},para\ 0^0 < \beta < 90^0$$

$$tg\ \beta = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}},para\ 0^0 < \beta < 90^0$$

Os ângulos com as medidas de abertura iguais a 30º, 45º e 60º são denominados ângulos notáveis, pois são relevantes para o estudo da Geometria e são provenientes da Trigonometria, para os cálculos das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo. A tabela dos ângulos notáveis é assim representada:

Tabela dos ângulos notáveis

ÂNGULOS	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Na tabela dos ângulos notáveis, podemos observar que os ângulos de 30º e 60º são agudos e complementares e o ângulo agudo de 45º é complementar de si mesmo, desse modo:

- $sen30^0 = \cos 60^0$
- $cos30^0 = \operatorname{sen} 60^0$
- $sen45^0 = cos\, 45^0$

Quanto aos valores da tangente de um ângulo agudo, podemos observar que consistem na razão entre os valores do seno e do cosseno do mesmo ângulo agudo, assim:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}, para\ 0 < \alpha < 90^0$$

$$tg30^0 = \frac{sen30^0}{cos30^0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg45^0 = \frac{sen45^0}{cos45^0} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$tg60^0 = \frac{sen60^0}{cos60^0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

A partir das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente do ângulo β, no triângulo retângulo ABC, podemos escrever as relações trigonométricas:

Quadro 7 – Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Relações Trigonométricas	Definição	Relação matemática
Relação fundamental de um triângulo retângulo	A soma do quadrado do seno de um ângulo agudo com o quadrado do cosseno desse mesmo ângulo agudo é igual a 1.	$sen^2\beta + cos^2\beta = 1,$ $para\ 0^0 < \beta < 90^0\ e\ \alpha + \beta = 90^0$
Relação da tangente	A tangente de um ângulo agudo pode ser escrita como a razão entre o seno e o cosseno desse mesmo ângulo agudo.	$tg\beta = \frac{sen\beta}{cos\beta},$ $para\ 0^0 < \beta < 90^0\ e\ \alpha + \beta = 90^0$
Relação seno, cosseno de ângulos complementares	Se dois ângulos agudos são complementares, então o seno de um ângulo é igual ao cosseno do ângulo complementar.	$sen\alpha = cos\beta\ \ e\ \ cos\alpha = sen\beta,$ $para\ 0^0 < \alpha < 90^0\ e$ $0^0 < \beta < 90^0\ e\ \alpha + \beta = 90^0$
Relação da tangente em ângulos complementares	Se dois ângulos agudos são complementares, então a tangente de um ângulo é igual ao inverso da tangente do ângulo complementar.	$tg\alpha = \frac{1}{tg\beta}$ $para\ 0^0 < \alpha < 90^0\ e\ 0^0 < \beta < 90^0$

Fonte: Adaptado de Iezzi (2019).

5.3 A Trigonometria em Triângulos Quaisquer: A Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos

A Trigonometria é abordada no jogo no sentido de contribuir com a aprendizagem do aluno no momento em que sentir a necessidade de calcular as medidas dos lados ou dos ângulos de um triângulo quando este não for retângulo. Mesmo que o estudante se depare com um triângulo acutângulo ou obtusângulo, que tenha a competência de conseguir calcular as medidas necessárias, uma vez que esta proposta pedagógica envolve o cálculo de distâncias inacessíveis.

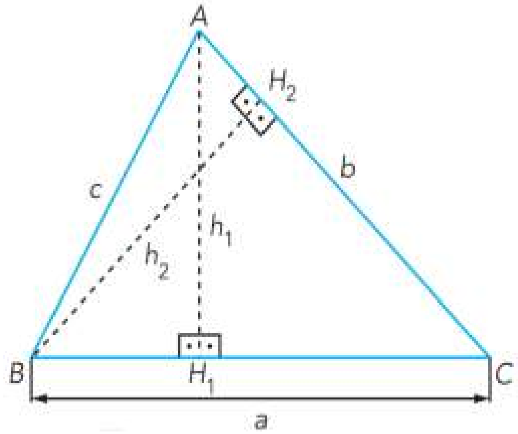
Dessa forma, a seguir, apresentamos a construção de triângulos retângulos traçando as alturas de um triângulo qualquer, o que possibilita a obtenção de resultados importantes na Geometria.

5.3.1 Lei dos Senos

Seja um triângulo qualquer ABC, as medidas de comprimento a, b e c dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos A, B, C, respectivamente.

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Traçando os segmentos correspondentes às alturas $\overline{AH_1}$ e $\overline{BH_2}$, no triângulo ABC, obtemos os triângulos retângulos ACH_1 e BCH_2.



• No ΔACH_1, retângulo em H_1, temos:

$sen\,\hat{C} = \frac{h_1}{b} \rightarrow h_1 = b\,.\,sen\,\hat{C}$

No ΔABH_1, retângulo em H_1, temos:

$sen\,\hat{B} = \frac{h_1}{c} \rightarrow h_1 = c\,.\,sen\,\hat{B}$

Comparando as igualdades, temos:

$b\,.\,sen\,\hat{C} = c\,.\,sen\,\hat{B} \rightarrow \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}\,(I)$

• No $\Delta ABCH_2$, retângulo em H_2, temos:

$$sen\,\hat{C} = \frac{h_2}{a} \rightarrow h_2 = a\,.\,sen\,\hat{C}$$

No ΔABH_2, retângulo em H_2, temos:

$$sen\,\hat{A} = \frac{h_2}{c} \rightarrow h_2 = c\,.\,sen\,\hat{A}$$

Comparando as igualdades, temos:

$$a\,.\,sen\,\hat{C} = c\,.\,sen\,\hat{A} \rightarrow \frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} \quad (II)$$

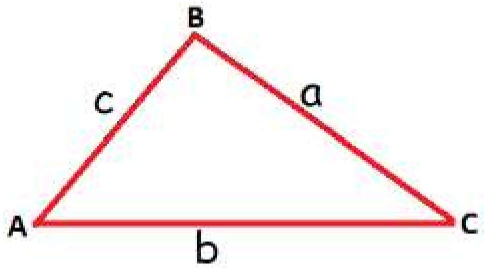
De *(I)* e *(II),* concluímos que:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Desse modo, em um triângulo qualquer, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles. Portanto, na demonstração acima, usamos um triângulo acutângulo, mas é possível demonstrar a lei dos senos também para um triângulo obtusângulo e para um triângulo retângulo.

5.3.2 Lei dos Cossenos

A lei dos cossenos relaciona as medidas dos três lados de um triângulo e um ângulo agudo oposto a um desses lados do triângulo. Para resolver um problema com essas informações, precisamos utilizar um teorema conhecido como lei dos cossenos: Em qualquer triângulo ABC, o quadrado da medida de comprimento de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas de comprimento dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas de comprimento desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam.



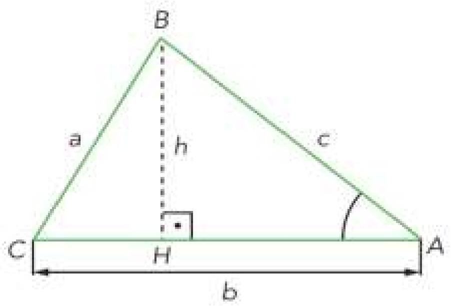
Se ABC é um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, então:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos\hat{A}}$$

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.cos\hat{B}}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.cos\hat{C}}$$

Considerando o ângulo agudo $\hat{A}$, provaremos o teorema da lei dos cossenos para um triângulo acutângulo ABC. Desse modo, traçando a altura $\overline{BH}$, relativa ao segmento $\overline{AC}$, obtemos os triângulos retângulos $A\hat{H}B$ e $B\hat{H}C$.



- No $\Delta A\hat{H}B$, temos:

$$\cos\hat{A} = \frac{\overline{AH}}{c} \rightarrow \overline{AH} = c.\cos\hat{A}$$

Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$c^2 = h^2 + (AH)^2 \rightarrow h^2 = c^2 - (c.\cos\hat{A})^2 \quad \text{(I)}$$

- No $\Delta B\hat{H}C$, temos:

$$a^2 = h^2 + (CH)^2 \rightarrow a^2 = h^2 + (b - AH)^2 \rightarrow h^2 = a^2 - (b - c.\cos\hat{A})^2$$

$$\rightarrow h^2 = a^2 - b^2 + 2bc.\cos\hat{A} - c^2.cos^2\hat{A} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), concluímos que:

$$c^2 - (c.\cos\hat{A})^2 = a^2 - b^2 + 2bc.\cos\hat{A} - c^2.cos^2\hat{A}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 + 2bc.\cos\hat{A}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{A}$$

A demonstração do teorema para um triângulo acutângulo também vale para um triângulo retângulo e para um triângulo obtusângulo.

No que segue, relacionamos três consequências importantes da lei dos cossenos.

Se ABC é um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, com $a > b > c$, então:

I) ABC é retângulo (em A) $\leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$.

II) ABC é acutângulo $\leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$.

III) ABC é obtusângulo (em A) $\leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$.

Já demonstramos o item (I), na seção do Teorema de Pitágoras. Para provar (II), segue da lei dos cossenos em que,

$$a^2 < b^2 + c^2 \leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc.cos\hat{A} < b^2 + c^2$$
$$\leftrightarrow -2bc.cos\hat{A} > 0 \leftrightarrow cos\hat{A} > 0$$
$$\leftrightarrow \hat{A} < 90^0.$$

Por outro lado, $a > b > c$ implica $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$, de modo que ABC é acutângulo. Por fim,

$$a^2 > b^2 + c^2 \leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc.cos\hat{A} > b^2 + c^2$$
$$\leftrightarrow -2bc.cos\hat{A} > 0 \leftrightarrow cos\hat{A} < 0$$
$$\leftrightarrow \hat{A} > 90^0$$

5.4 O Plano Pedagógico do Jogo digital *TrianguLux*

O objetivo desta seção é complementar os conceitos abordados e os exemplos apresentados com o auxílio de tarefas cujas resoluções são apresentadas aos alunos de maneira detalhada, facilitando-lhes compreender a aplicação prática do conteúdo em questão. Esta seção também tem a finalidade de auxiliar os alunos a exercitar suas habilidades e estratégias na resolução de tarefas que são propostas em outras seções, favorecendo o desenvolvimento de sua autonomia.

Nesta seção, apresentamos também, como atividade para a prática docente, uma proposta metodológica para uma melhor compreensão de como os conhecimentos podem ser ensinados de forma que os estudantes possam construir conceitos para uma aprendizagem significativa.

O Quadro 8, a seguir, apresenta o plano pedagógico do jogo digital *TrianguLux* que destaca os objetos do conhecimento abordados no jogo, a fim de contribuir para a compreensão do procedimento metodológico de ensino e da aprendizagem em Matemática.

Quadro 8 – Plano pedagógico do jogo digital *TrianguLux*

PLANO PEDAGÓGICO DO JOGO	
Público-alvo	• Estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental (9º ano); • Estudantes do Ensino Médio (1º, 2º, 3º anos); • Estudantes do Ensino Profissional e Tecnológico; • Estudantes de cursos preparatórios para concursos públicos, vestibulares, ENEM, entre outros.
Unidade temática	Geometria
Objeto do conhecimento	• Conhecimento geométrico: Trigonometria do ângulo agudo e Teorema de Pitágoras; • Razões trigonométricas no triângulo retângulo; • Trigonometria em triângulos quaisquer.
Objetivo	• Geral: - Utilizar os conhecimentos acerca da Trigonometria em Triângulos Retângulos ou em Triângulos Quaisquer – Geometria Euclidiana para a resolução de problemas envolvendo o cálculo de distâncias. • Específicos: - Identificar os ângulos notáveis, bem como o triângulo retângulo, conforme a sua classificação quanto aos ângulos; - Reconhecer os catetos conforme o posicionamento do ângulo no triângulo e a hipotenusa; - Resolver problemas com triângulos retângulos relacionados aos cálculos de distâncias; - Apresentar as relações métricas no triângulo retângulo a partir da representação dos problemas, demonstrando a validade do Teorema de Pitágoras; - Aplicar as razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente, com base no ângulo destacado; - Estabelecer os valores numéricos relacionados ao seno, ao cosseno e à tangente dos ângulos notáveis; - Usar as relações trigonométricas na resolução dos problemas; - Ampliar as razões trigonométricas para ângulos maiores que 90°; - Utilizar a lei dos senos e a lei dos cossenos na resolução de problemas; - Compreender em quais situações é mais conveniente utilizar a lei dos senos ou a lei dos cossenos; - Obter a medida do comprimento dos lados ou a medida dos ângulos internos de um triângulo qualquer, dados o comprimento de alguns lados ou a medida de alguns ângulos.
Competências (BRASIL, 2018, p. 267) (BRASIL, 2018, p. 531)	• C1 (EF) - Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções; • C2 (EF) - Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo; • C1 (EM) - Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática; • C2 (EM) - Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Habilidades (BRASIL, 2018, p. 319) (BRASIL, 2018, p. 536)	• (EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora; • (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos; • (EF06MA26) Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão; • (EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos; • (EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°; • (EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada; • (EF08MA04) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais; • (EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos; • (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes; • (EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa; • (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
Temas contemporâneos transversais	• Ciência e Tecnologia; • Meio Ambiente: Educação ambiental; • Multiculturalismo: Diversidade cultural e Educação para a valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras.
Recursos didáticos	• Calculadora, papel, lápis, caneta, régua, dispositivo móvel, material multimídia (UNICAMP) de apoio ao professor e ao aluno e a plataforma virtual multimídia *Khan Academy*.
Tempo previsto	Seis aulas, sendo duas aulas para cada fase do jogo. Cada atividade possui objetivos específicos relacionados à ideia de que o estudante necessita investigar para resolver os problemas propostos em cada etapa.
Procedimentos metodológicos	O jogo digital pode ser utilizado ou aplicado como metodologia de ensino durante o desenvolvimento da temática Trigonometria nas aulas de Matemática ou mesmo após a explanação de todo o conteúdo referente a esse tema, para a realização das atividades como revisão ou mesmo como uma avaliação da aprendizagem. Primeiramente o jogo digital *TrianguLux* deve ser apresentado aos estudantes, que conhecerão suas funcionalidades, formas de manuseio, botões, gerenciamento de informações, ícones, caixas de seleção e as fases do jogo. Os alunos podem sentar-se individualmente ou em duplas. Caso algum estudante não possua dispositivo móvel, é recomendado que esse aluno resolva a atividade em dupla com um colega que possua aparelho móvel. Logo após, o professor pode dar início ao jogo juntamente com os estudantes. Caso ocorram dúvidas por parte do estudante, o jogo digital apresenta também recursos, como plataformas e materiais multimídias para direcionar o estudante durante a resolução da atividade proposta. No decorrer do jogo, os usuários podem pausar para discutir soluções para as atividades apresentadas.
Avaliação	A avaliação pode ser de forma conjunta, individual ou em dupla, seja conforme a pontuação final do jogo, seja como a apresentação de argumentos e conjecturas por parte dos estudantes ou de um grupo durante a resolução dos problemas que constam no jogo.

Orientações para o uso do jogo	O jogo inicia-se na fase I, que envolve as competências e habilidades referentes ao Teorema de Pitágoras. As outras fases são subsequentes e de forma ordenada, de acordo com os níveis de conhecimento relacionados à Trigonometria. Portanto, a fase II faz abordagem dos conhecimentos relacionados às razões trigonométricas no triângulo retângulo e a fase III concerne ao enfoque das Leis do Seno e do Cosseno de um triângulo qualquer.

Fonte: Elaboração da autora (2021).

5.4.1 A Fase I

As atividades a serem exploradas no decorrer da dinâmica do *storyboard* do jogo se centram na resolução de problemas que o personagem Lux enfrenta na floresta amazônica. Nessa fase, procura-se consolidar o pensamento matemático dos estudantes, para que possam associar os conteúdos estudados a situações do mundo real.

Desse modo, buscam-se formas de impulsionar a criatividade geométrica e trigonométrica dos alunos na resolução de problemas, inclusive nas tarefas propostas, que envolvem uma grande possibilidade de resoluções, às vezes únicas e individuais dos próprios estudantes. Essas formas diferentes de pensar e de modelar problemas remetem à capacidade de interpretar informações e abstrair dados na construção de métodos para a resolução dos problemas.

Para que o professor compreenda os conhecimentos matemáticos que são relacionados no *script* e *design* do jogo, apresentamos, a seguir, a problematização da fase I do jogo:

<u>Problema I:</u>

No meio da floresta amazônica, um seringueiro que sobrevive do extrativismo procura por uma castanheira para recolher os ouriços de castanha. Para encontrá-la, o personagem corre na direção norte. Dá 4131 passos para frente e 5508 passos à esquerda, na direção oeste. Qual a menor distância a ser percorrida pelo personagem a partir do ponto de onde encontrou a castanheira até o ponto de onde partiu?

<u>Objetivo:</u>

Calcular as medidas das distâncias apresentadas em um triângulo retângulo por meio do Teorema de Pitágoras na resolução do problema.

<u>Orientações para a resolução da atividade:</u>

1) Transformar a quantidade de passos de cada trecho em metros. Para a realização desse procedimento, é necessário utilizar a dica que foi dada no jogo: “Para encontrar o tamanho do passo do personagem, deve-se calcular 41,5% da sua altura, que é 1,75 metros;

2) Transformar as unidades de medida de comprimento que estão em metros para quilômetros;

3) Outra possibilidade é realizar as transformações das unidades de medida de comprimento dos trechos I e II e, posteriormente, proceder à identificação do trajeto, como um triângulo retângulo e utilizar o Teorema de Pitágoras (ver seção 5.1) na resolução do problema;

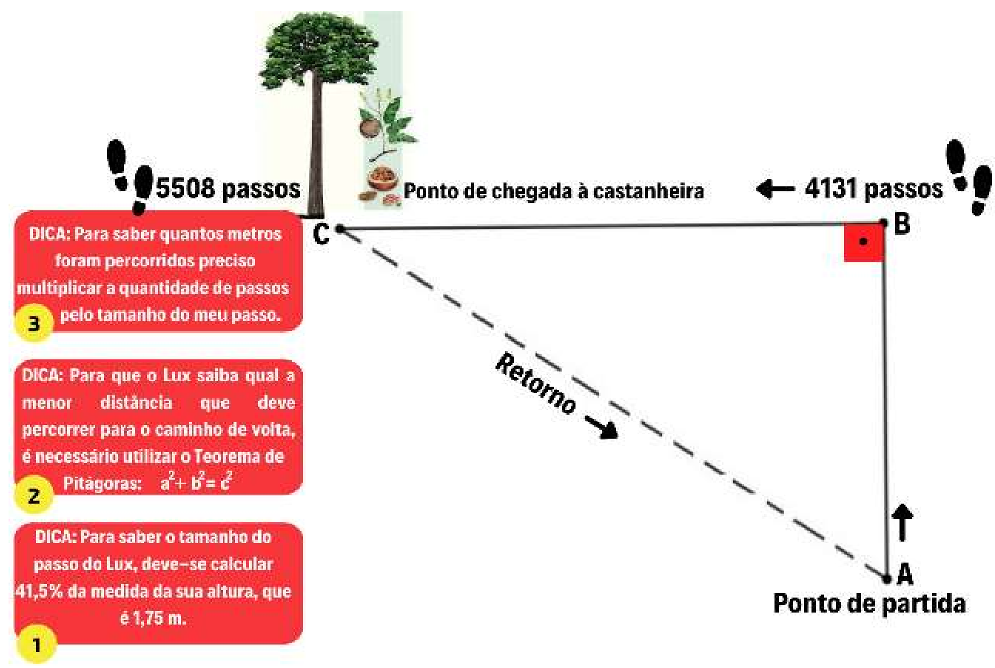
4) Como o triângulo possui um ângulo reto em $\hat{B}$, então ele classifica-se quanto aos ângulos como um triângulo retângulo. Portanto, podemos calcular a menor distância $\overline{CA}$ a ser percorrida no trajeto de volta ao ponto de partida por meio do Teorema de Pitágoras, utilizando os próprios valores relativos à quantidade de passos do personagem em cada trajeto;

5) A partir daí, calcular o tamanho do passo do personagem efetuando 41,5% de 1,75m, que é a altura do personagem. O valor encontrado do passo do Lux deve ser multiplicado pela quantidade de passos do trecho $\overline{AC}$. Essa medida em metros deve ser a distância transformada em quilômetros.

O Quadro 9, abaixo, apresenta as relações dos conhecimentos matemáticos abordados na fase I do jogo digital *TrianguLux*:

Quadro 9 – Fase I: Relações dos conceitos matemáticos no roteiro do jogo

Desafios por trecho

Apresentação do problema


***Feedback* da resolução do problema**

Solução: Como o Lux tem 1,75 m de altura, então, para encontrarmos o tamanho do seu passo, devemos calcular 41,5% de 1,75, da seguinte forma:

$$\frac{41,5}{100} x 1,75 = 0,72625\ m$$

Assim, como o Lux deu 4131 passos ao norte, em linha reta, faremos:

$$4131\ x\ 0,72625 = 3000\ m$$
$$3000 : 1000 = 3\ km$$

Lux deu 5508 passos à esquerda, a oeste:

$$5508\ x\ 0,72625 = 4000\ m$$
$$4000 : 1000 = 4\ km$$

O valor da menor distância a ser percorrida é:

$$\overline{AC} = 6885\ x\ 0,72625 = 5000\ m$$
$$\overline{AC} = 5000 : 1000 = 5\ km$$

Como o triângulo é retângulo, pelo Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = 3^2 + 4^2$$
$$a^2 = 9 + 16$$
$$a^2 = 25$$
$$a = \sqrt{25}$$
$$a = 5\ km$$

Logo, a menor distância a ser percorrida pelo Lux é:

$$\overline{AC} = 5\ km$$

Solução: Como Lux deu 4131 passos ao norte, em linha reta, e 5508 passos à esquerda, a oeste, então:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = 4131^2 + 5508^2$$
$$a^2 = 17.065.161 + 30.338.064$$
$$a^2 = 47.403.225$$
$$a = \sqrt{47.403.225}$$
$$a = 6885$$

Dessa forma, percebemos que, na distância mais curta *AC*, Lux deu 6685 passos. Assim, para encontrarmos essa distância em metros, devemos multiplicar o tamanho do passo do Lux por 6685 passos:

$$\frac{41,5}{100} x 1,75 = 0,72625$$

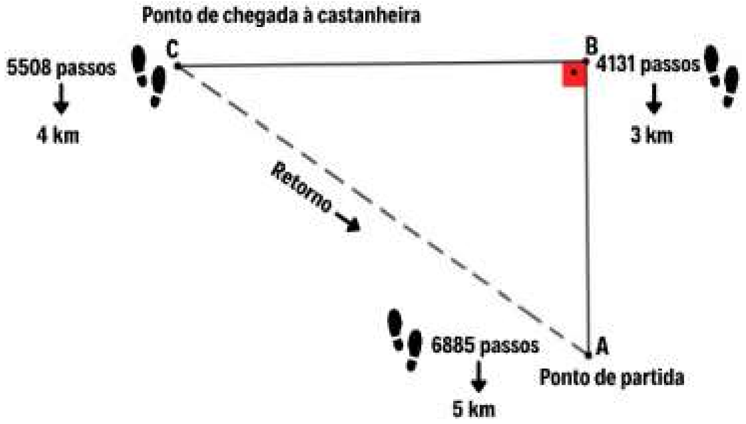
$$0,72625 \,.\, 6885 = 5000\ m$$
$$5000 : 1000 = 5 km$$

A distância percorrida pelo caminho de volta seria a soma dos dois catetos, calculada da seguinte forma:

$$3\ km + 4\ km = 7km$$

Portanto, a menor distância a ser percorrida pelo caminho de volta seria a distância de

$$\overline{AC} = 5\ km$$

Representação matemática

Conhecimentos matemáticos abordados
• Porcentagem; • Conversões de unidades de medida de comprimento; • Operações fundamentais; • Classificação dos triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos; • Teorema de Pitágoras.

Fonte: Elaboração da autora (2021).

A partir dos estudos dos conceitos relacionados à Trigonometria, com a resolução do problema proposto no Quadro 9, o professor pode contribuir com a aprendizagem dos estudantes, que podem aperfeiçoar os seus conhecimentos matemáticos básicos da Geometria, por exemplo, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são agudos, ou seja, $\hat{A} < 90°$ e $\hat{C} < 90°$, conforme os tipos, ou "três espécies de ângulo (reto, agudo e obtuso), e o primeiro tipo é superior aos demais, pois o ângulo reto é caracterizado pela igualdade e semelhança, ao passo que os outros dois são identificados de acordo com critérios de grandeza e pequenez relativos ao ângulo reto" (ROQUE, 2012, p. 98).

Além desses, outro conceito importante que se destaca é o reconhecimento de que o ângulo B é reto, ou seja, mede 90º. Portanto, a identificação de que o triângulo ABC é retângulo é extremamente importante, pois significa que os estudantes compreenderam a classificação desse triângulo quanto aos seus ângulos. Além disso, é essencial que os aprendizes entendam a diferenciação entre a medida dos catetos e da hipotenusa, pois a medida da hipotenusa no triângulo retângulo sempre se posiciona como lado oposto ao maior ângulo, que é o ângulo de 90º.

O professor, por meio das suas práticas de ensino, pode colaborar com o aprendizado dos estudantes, de forma que possam identificar a hipotenusa como o maior lado, analisem e descubram que o terno de números 3, 4 e 5 é pitagórico, como mesmo Roque (2012, p. 95) destaca, explicando que a “relação 3:4:5 determinava a forma do triângulo retângulo” e que os múltiplos desses números formam os elementos do triângulo retângulo conhecidos como catetos e hipotenusa, que validam o Teorema de Pitágoras.

E, ainda, os estudantes podem comprovar a veracidade da relação do Teorema de Pitágoras, substituindo os valores das distâncias em quilômetros, conforme a equação (I) ou as distâncias dos trechos percorridas em metros, de acordo com a equação (II), ou as distâncias dos trechos dadas por meio da quantidade de passos, em conformidade com a equação (III). Essa validação pode ser verificada por meio da fórmula do Teorema de Pitágoras, da seguinte forma:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$5^2 = 4^2 + 3^2$$
$$25 = 16 + 9 \qquad \text{(I)}$$

Ou,

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$5000^2 = 4000^2 + 3000^2$$
$$25000000 = 16000000 + 9000000 \qquad \text{(II)}$$

Ou,

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$6885^2 = 5508^2 + 4131^2$$
$$47403225 = 30338064 + 17065161 \qquad \text{(III)}$$

Portanto, com o desenvolvimento dessa temática, as contribuições pedagógicas para o aprimoramento dos conceitos matemáticos permitem que o aluno possa identificar dados relevantes no problema apresentado, para buscar possíveis estratégias de resoluções, ou mesmo investigar para modelar a resolução do problema proposto. Ou, ainda, os estudantes podem desenvolver os conceitos trigonométricos, conforme explica Roque (2012, p. 101), que os “triângulos retângulos podiam ser usados para somar áreas e o resultado expresso pelo teorema ‘de Pitágoras’ podia ser útil por possibilitar encontrar um quadrado cuja área fosse a soma das áreas de dois quadrados”.

Como sugestões de atividades complementares de autoestudo ou metodologias de ensino concernentes ao estudo dos triângulos, apontamos como componentes importantes as condições de existência de um triângulo, a História ou biografia de Pitágoras, bem como o cálculo da área e do perímetro do triângulo.

5.4.2 Trilha de Aprendizagem – Fase I

Como método de autoestudo para os estudantes, são propostas trilhas de aprendizagem como metodologias eficazes que otimizam, dinamizam, personalizam e oportunizam as diversas formas de aprender. Como ferramentas potencializadoras para o desenvolvimento de competências e habilidades, além de constituírem-se como recursos para a compreensão, interpretação e orientação, as trilhas contribuem para "obter ganhos matemáticos e *insight*, promovendo a compreensão matemática, auxiliando no autoestudo em casa e na abordagem da aprendizagem onipresente" (NAM; THAO, 2015, p. 135).

Esse material pedagógico contempla a autonomia, autoaprendizagem e o autoestudo dos estudantes (MARTINS, 2017; CHAO *et al.*, 2018). Além disso, o objetivo dessa estratégia concentra-se em oportunizar o desenvolvimento dos aprendizes em todas as suas dimensões, inclusive no processo educativo, promovendo a formação integral do indivíduo.

A seguir, apresentamos, na Figura 8, a trilha de aprendizagem da fase I do jogo digital *TrianguLux*, para que o estudante possa ser orientado e direcionado no processo de autoestudo e de autoaprendizagem:

Figura 8 – Trilha de aprendizagem do jogo: fase I

Fonte: Elaboração da autora (2021).

Os passos para a realização da atividade sobre Trigonometria no triângulo retângulo apresentada na fase I do jogo são os seguintes, conforme o Quadro 10:

Quadro 10 – Orientação para a resolução do problema da fase I do jogo

Passos	Orientações
1	Esta primeira parte do jogo envolve a interpretação e a compreensão do *storytelling* do jogo, que envolve Matemática básica com operações fundamentais e cálculo de porcentagens, bem como o reconhecimento da Trigonometria aplicada nesse problema. Então, para que o estudante prossiga, é necessário conhecer o tamanho do passo do personagem em metros: é necessário calcular 41,5% do valor correspondente à sua altura, que é de 1,75 metros.
2	Esta parte do jogo relaciona as complexidades que o usuário possa apresentar durante a resolução do problema no jogo. Nesse caso, se o estudante não conseguir dar continuidade à resolução do problema no jogo, será disponibilizado um link (https://pt.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-ratios-rates/pre-algebra-percent-problems/v/finding-percentages-example) que o levará a uma página na internet que o auxilie no processo de autoaprendizagem sobre os conhecimentos matemáticos exigidos nesta fase do jogo.

3	Se não houver atividade no jogo por 5 minutos, então um sinal de alerta será emitido, solicitando que o jogador volte ao jogo. A caixa de seleção "continuar" aparecerá no visor do dispositivo móvel do usuário.
4	Como abordagem da Matemática elementar, essencial na resolução do problema, recomenda-se multiplicar o tamanho do passo do personagem pela quantidade de passos em cada trecho para saber a quantidade de metros percorridos em cada trajeto.
5	Para a continuidade da resolução, o próximo passo é transformar as unidades de medida de comprimento que estão em metros para quilômetros.
6	Como finalização, o "*spoiler"* do problema, nesta parte final da resolução, consiste na utilização do Teorema de Pitágoras para encontrar o menor trajeto a ser percorrido pelo personagem para chegar ao ponto de onde partiu inicialmente.
7	Caso o estudante apresente dúvidas na resolução do problema, um link será disponibilizado para levar o estudante a uma plataforma virtual de ensino, como recurso didático-pedagógico para o autoestudo e a autoaprendizagem: https://pt.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geometry-pythagorean-theorem.
8	Se não houver atividade nele por 5 minutos, então a configuração do jogo emitirá um sinal de alerta, um som, solicitando que o jogador volte ao jogo. A caixa de seleção "continuar" aparecerá no visor do dispositivo móvel do usuário.
9	Deve-se considerar a heterogeneidade de pensamentos, aprendizagens e raciocínios na resolução desse problema. Nesse sentido, o caminho inverso para a resolução do problema também é válido, principalmente para a verificação do resultado.
10	Como as quantidades de passos do personagem aparecerão na interface do aplicativo em cada trajeto, o usuário poderá começar calculando a quantidade de passos do personagem no terceiro trecho, por meio do Teorema de Pitágoras.
11	Com essa quantidade de passos do trecho III, pode-se calcular o tamanho do passo do personagem em metros, basta utilizar os conceitos de porcentagens, multiplicando 41,5% do valor correspondente à altura do avatar, que é 1,75 metros. O link do passo 2 será disponibilizado nesse momento para o direcionamento à plataforma virtual para autoestudo.
12	Sabendo a medida do passo do personagem em metros, agora o que se recomenda é realizar o produto do tamanho do passo do personagem pela quantidade de passos em cada trecho para saber a quantidade de metros percorridos em cada trajeto.
13	Na conclusão do problema, é necessário transformar o valor encontrado referente ao tamanho do trecho III, que está em metros, para quilômetros.

Fonte: Elaboração da autora (2021).

Nessa fase do jogo, percebe-se que esta proposta metodológica de ensino e aprendizagem visa alcançar não somente o professor, mas também o aluno. Portanto, trazemos, nesta pesquisa, sugestões de métodos eficazes para ensinar e para aprender. Nessa parte, enfatizamos o autoestudo dos estudantes na área da Trigonometria durante a realização do jogo, por meio de uma trilha de aprendizagem, como ferramenta promotora e viabilizadora desse processo.

5.4.3 A Fase II

A fase II do jogo envolve o estudo da Trigonometria no triângulo retângulo, em especial, as Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo. A abordagem dessa temática estimula o pensamento trigonométrico dos estudantes de forma que possam visualizar os esquemas dos problemas, inclusive validar relações e teoremas por meio de métodos empíricos para a demonstração do rigor matemático, com base no formalismo lógico da Matemática científica.

A seguir, apresentamos o problema abordado na fase II do jogo:

Problema II:

Um seringueiro está na floresta em busca das seringueiras para recolher o látex. Do ponto A, de onde se encontra, que é o ponto de partida até o ponto B, onde estão as plantações de seringueiras, são 450 metros de distância em linha reta, ou 450 "passadas" para o seringueiro, conforme a unidade de medida usada por ele. Entre os pontos B e C, a área das seringueiras foi desmatada e o seringueiro desconhece a medida desse trecho. No ponto C há mais plantações de seringueiras. E, para voltar ao ponto de início, pelo caminho mais curto, Lux necessita traçar o itinerário com precisão, formando um ângulo de 60º.

Objetivo:

Reconhecer as relações do seno, do cosseno e da tangente de um ângulo para a aplicação desses conceitos na resolução de problemas matemáticos.

Orientações para a resolução da atividade:

1) Para determinar a distância entre os pontos B e C, por meio da tangente do ângulo de 60º (cf. Figura 10), é necessário utilizar a medida 450 metros, como cateto oposto ao ângulo de 60º;

2) O ângulo $\hat{A}$ pode ser calculado por meio da soma dos ângulos internos de qualquer triângulo, que são 180º;

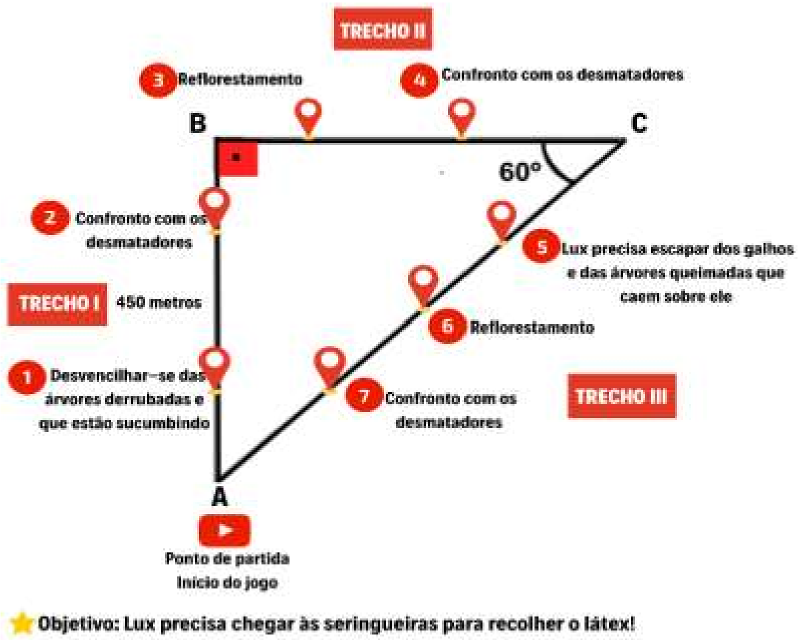
3) Levando-se em consideração o ângulo $\hat{A}$, de 30º, a medida $\overline{BC}$ também pode ser calculada utilizando a tangente do ângulo de 30º. Nessas circunstâncias, o cateto oposto é a medida $\overline{BC}$ e o cateto adjacente é a medida 450 metros;

4) Existem vários modos para determinar o tamanho do trecho $\overline{AC}$, que é a medida da hipotenusa. Podemos utilizar sen 30º, sen 60º, cos 60º, cos 30º (cf. Quadro 11) ou mesmo o Teorema de Pitágoras.

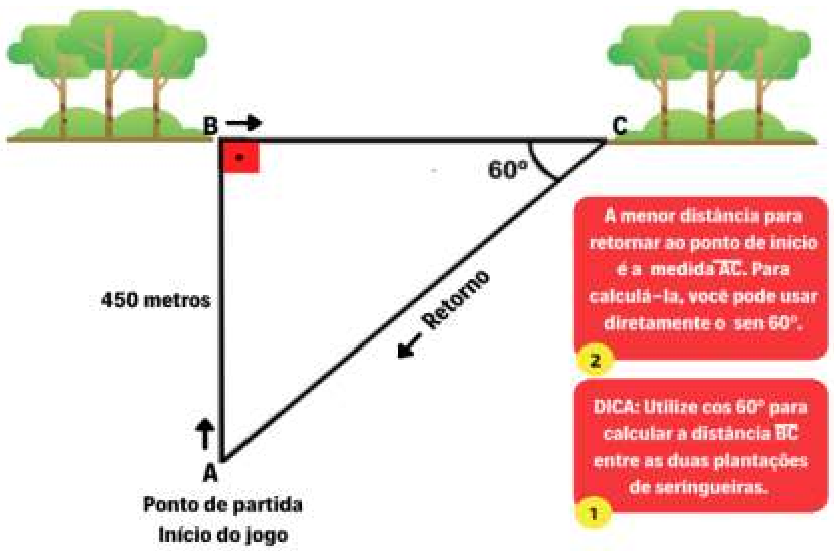
A seguir, no Quadro 11, apresentamos a representação do problema da fase II, que esboça as relações acerca dos conceitos matemáticos existentes no roteiro do jogo:

Quadro 11 – Fase II: Relações dos conceitos matemáticos no roteiro do jogo

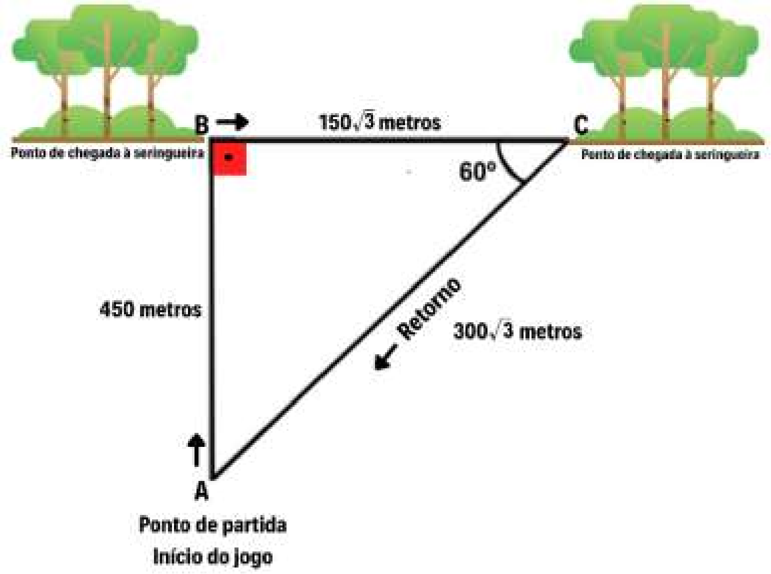
Desafios por trecho



Apresentação do problema



***Feedback* da resolução do problema**	
O triângulo é retângulo e escaleno, além disso, possui ângulos notáveis. Para encontrarmos o valor da distância $\overline{BC}$, podemos utilizar a tg 60º ou a tg 30º. A medida da tangente é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente, da seguinte forma: $tg60^0 = \frac{450}{x}$ $\sqrt{3} = \frac{450}{x}$ $3x = 450\sqrt{3}$ $x \cong 259{,}8\, m$ $x = \frac{450}{\sqrt{3}}$ $x \cong 259{,}8$ $tg30^0 = \frac{x}{450}$ $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{450}$ $x = \frac{450\sqrt{3}}{3}$ $x \cong 259{,}8\, m$	Para encontrarmos o valor do trajeto $\overline{AC}$, podemos utilizar o sen 60º, sen 30º, cos 60º, cos 30º ou o Teorema de Pitágoras. A medida do seno é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida da hipotenusa, da seguinte forma: $sen30^0 = \frac{150\sqrt{3}}{a}$ $\frac{1}{2} = \frac{150\sqrt{3}}{a}$ $a = 300\sqrt{3}\, m$ $sen60^0 = \frac{450}{a}$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{450}{a}$ $a = \frac{900}{\sqrt{3}}$ $a = 300\sqrt{3}$ $a \cong 519{,}6\, m$
Para encontrarmos o valor da distância $\overline{AC}$, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras, do seguinte modo: $a^2 = b^2 + c^2$ $a^2 = 450^2 + \left(150\sqrt{3}\right)^2$ $a^2 = 202500 + 22500 \,.\, 3$ $a = \sqrt{270000}$ $a = 519{,}6\, m$	A medida do cosseno é a razão entre a medida do cateto adjacente e a medida da hipotenusa, da seguinte maneira: $\cos 30^0 = \frac{450}{a}$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{450}{a}$ $a = \frac{900}{\sqrt{3}}$ $a = 300\sqrt{3}\, m$ $a \cong 519{,}6\, m$ $cos\ 60^0 = \frac{150\sqrt{3}}{a}$ $\frac{1}{2} = \frac{150\sqrt{3}}{a}$ $a = 300\sqrt{3}\, m$ $a \cong 519{,}6\, m$
Representação matemática	



Conhecimentos matemáticos abordados

- Trigonometria no triângulo retângulo;
- Operações fundamentais;
- Classificação dos triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos;
- Teorema de Pitágoras;
- Razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Fonte: Elaboração da autora (2021).

Nessa atividade proposta na fase II do jogo, o professor pode colaborar para que os estudantes possam identificar os elementos de um triângulo retângulo com base no posicionamento do ângulo agudo, do cateto oposto, do cateto adjacente e da hipotenusa. Além disso, o aluno pode aprimorar os seus conhecimentos trigonométricos ao aplicar corretamente os valores dos ângulos notáveis das razões trigonométricas e realizar eficazmente os procedimentos matemáticos para encontrar a solução do problema.

Os estudantes também podem utilizar os recursos trigonométricos para a interpretação, aplicação e análise dos resultados, a fim de que possam levantar questionamentos, hipóteses e estabelecer conjecturas a respeito não somente dos resultados encontrados, mas também do método utilizado. Por meio desse tipo de análise, o que se estabelece aqui é a capacitação dos estudantes para a elaboração de argumentação consistente para explicar os procedimentos da modelação do problema, inclusive, nessa fase, destacam-se as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo como outras possibilidades de resolução para a situação apresentada.

Além disso, como autoestudo e metodologias de ensino complementares, enfatizamos a abordagem da História da Trigonometria, o estudo do cálculo de áreas e de perímetro de um triângulo, bem como o estudo das relações métricas e trigonométricas de um triângulo retângulo.

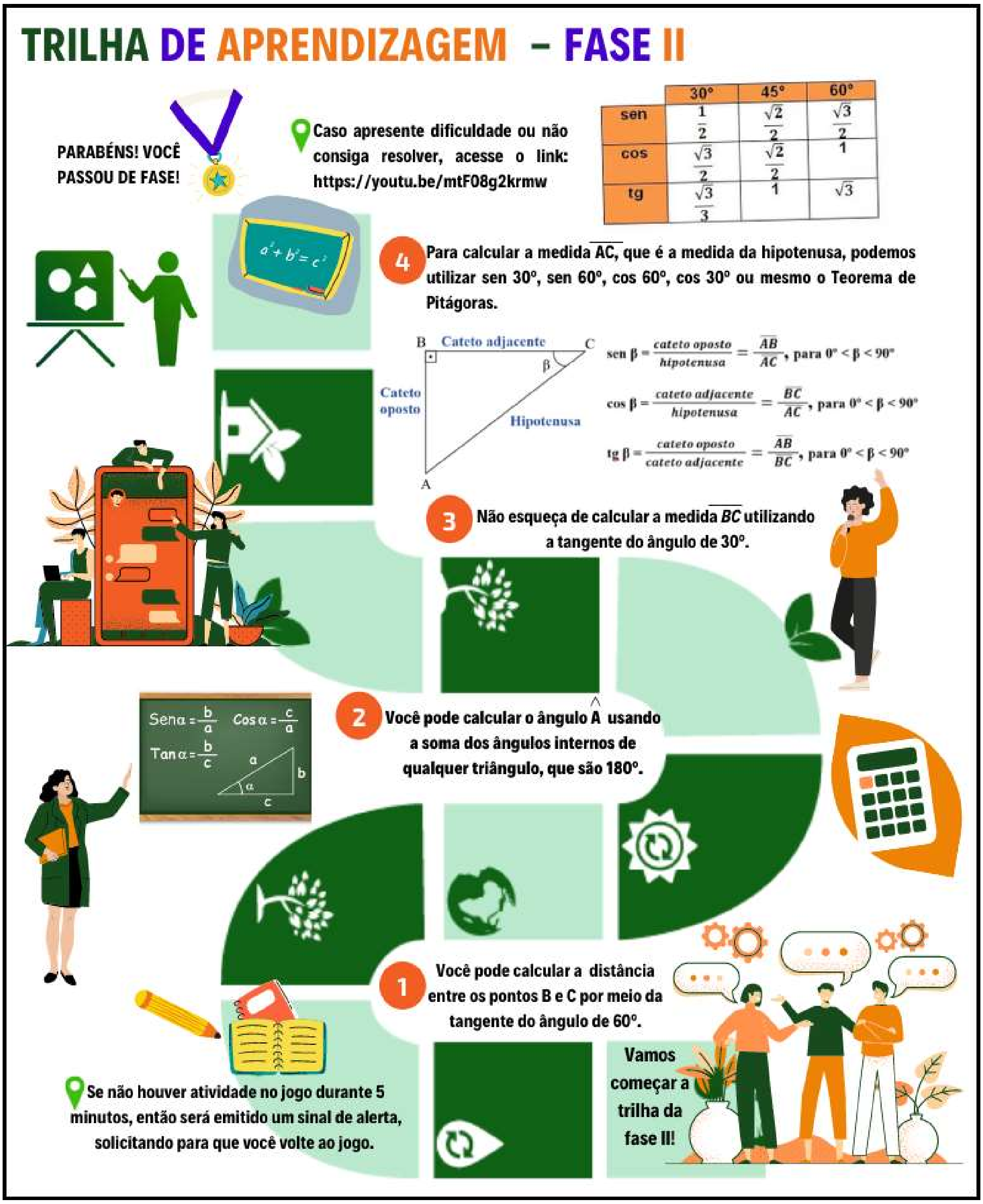
5.4.4 Trilha de Aprendizagem – Fase II

Para a fase II do jogo, a atividade a ser desenvolvida envolve as Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo. O estudante precisa relacionar o conhecimento trigonométrico teórico com o prático para subir de fase. Por isso, o processo das etapas nas trilhas de aprendizagem reporta, sobretudo, um delineamento de pré-conceitos e de pós-conceitos. Assim, "é necessário que os professores se insiram neste meio digital, interagindo com esses jogos e delineiem trilhas para o diálogo com os jogos digitais comerciais dentro de um contexto educacional" (ALVES; TORRES, 2017, p. 116).

Dessa maneira, os desafios e obstáculos do jogo possibilitam o engajamento do estudante para chegar ao ápice da resolução do problema, causando *frenesi* no momento em que estabelece a inferência do conhecimento aprendido nos procedimentos de modelagem, consolidando cognitivamente os saberes matemáticos de forma dinâmica e empírica.

A seguir, apresentamos, na Figura 9, a trilha de aprendizagem sobre a temática Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo, que corresponde à fase II do jogo digital *TrianguLux*:

Figura 9 – Trilha de aprendizagem do jogo: fase II



Fonte: Elaboração da autora (2021).

Nessa proposta de ensino, visamos também o desenvolvimento da autonomia do estudante, para que ele aprenda também por meio do seu dispositivo móvel, sobre um jogo digital, bem como sobre aspectos socioculturais de uma cultura existente, que se centra no extrativismo. Diante disso, a Matemática apresenta-se como uma Ciência de forma ubíqua, no sentido de que está presente em qualquer momento e em qualquer lugar.

Para a resolução do problema apresentado na fase II do jogo, seguem as orientações no Quadro 12:

Quadro 12 – Orientações para a resolução do problema da fase II do jogo

Passos	Orientações
1	Como o problema envolve a Trigonometria no triângulo retângulo, as Razões Trigonométricas, como os conceitos de seno, cosseno e tangente de um ângulo, podem ser utilizadas na resolução. Uma das formas de se iniciar a resolução do problema é calculando a distância entre os pontos B e C por meio da tangente do ângulo de 60º, pois são fornecidas as medidas do trajeto $\overline{AB}$, que correspondem a 450 metros.
2	A propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, que resulta em 180º, pode ser utilizada para encontrar a medida do ângulo $\hat{A}$. Dessa forma, o usuário obterá mais opções para resolver o problema, pois ele poderá tomar como referências os ângulos de 30º ou de 60º.
3	Como opção, a medida $\overline{BC}$ pode ser calculada pela tangente de 30º. Esse passo é de fundamental importância na abordagem da tangente de um ângulo, pois, a partir daqui, o usuário poderá identificar os elementos envolvidos nesse triângulo, bem como a sua classificação e a interpretação desses conhecimentos matemáticos no contexto do problema.
4	Para calcular a hipotenusa do triângulo retângulo, que é a medida $\overline{AC}$, podem ser utilizados o sen 30º, sen 60º, cos 60º, cos 30º ou mesmo o Teorema de Pitágoras. Essa diversidade de opções confere autonomia ao estudante, visto que são consideradas as pluralidades de aprendizagens dos indivíduos.
5	Um link para autoestudo é disponibilizado na interface do aplicativo com o objetivo de levar o estudante a outro patamar. O usuário também possui outras possibilidades de buscar a aprendizagem, por meio de livros, materiais didáticos, plataformas multimídias, videoaulas. Por isso, como opção, recomendamos: "Caso não consiga acertar, ou tenha dúvida, um link será disponibilizado: https://youtu.be/mtF08g2krmw".
6	Se não houver atividade no jogo durante 5 minutos, a configuração do jogo emitirá um sinal de alerta, como aviso ao jogador, solicitando que volte ao jogo. Na tela do dispositivo móvel do usuário, aparecerá uma caixa de seleção: "continuar".

Fonte: Elaboração da autora (2021).

5.4.5 A Fase III

Nessa fase do jogo, explora-se o nível de conhecimento sobre a Trigonometria em Triângulos Quaisquer, com abordagem da Lei dos Senos e/ou da Lei dos Cossenos para a resolução do problema apresentado, conforme estabelece a habilidade EM13MAT308 da BNCC (BRASIL, 2018, p. 536).

Procura-se aplicar a temática ao cálculo de distâncias inacessíveis, pois "medir distâncias é uma necessidade antiga da humanidade, facilmente atendida, no caso de envolver pontos próximos. [...] Há situações, no entanto, em que se deseja efetuar medidas envolvendo objetos que não são diretamente acessíveis" (LIMA; CARVALHO;

MORGADO, 2013, p. 113). O objetivo é de capacitar os estudantes para a resolução de problemas do cotidiano por meio de um ensino-aprendizagem contextualizado, envolvendo o uso da Lei dos Senos e da Lei dos Cossenos.

O trabalho com esse tema possibilita o desenvolvimento da Competência geral 1 da BNCC (BRASIL, 2018, p. 9), no que concerne à valorização e utilização dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital. Diante disso, considera-se o contexto sociocultural dos povos extrativistas que habitam na floresta amazônica na roteirização do jogo e da temática abordada, para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Apresentamos, a seguir, a problematização da fase III do jogo:

Problema III:

Na floresta amazônica, um extrativista precisa atravessar um rio com um barco a remo para colher frutas, legumes, verduras e raízes. Ele parte de um ponto C e sabe que o tempo gasto é de 20 minutos, mas desconhece o tamanho do trajeto $\overline{BC}$ para percorrer a distância até chegar ao seu destino, que é do outro lado da margem do rio, no ponto B. Ele conhece o tamanho do comprimento da terra onde plantou bananas, mamão, manga, laranja-lima, batata, cheiro-verde, couve e mandioca, que é de 300 metros. O extrativista percorre esses 300 metros de distância, tanto colhendo alimentos, quanto plantando sementes. Ele sabe que a essa mesma distância se encontra outro barco à beira do rio. É inviável para o extrativista o retorno ao ponto onde deixou o primeiro barco atracado, pois ele carrega sacos de palhinha e estopas cheias de "rancho". Ele embarca numa canoa que estava atracada à beira do rio, no ponto A. Qual é a medida da distância $\overline{AC}$ a ser percorrida, de barco, pelo extrativista, para que retorne ao ponto de onde partiu?

Objetivo:

Utilizar a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos para o cálculo dos ângulos ou das medidas desconhecidas dos lados dos triângulos.

Orientações para a resolução da atividade:

1) Para o cálculo das distâncias $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, relacionar os comprimentos dos lados e a medida dos ângulos internos de um triângulo qualquer, relacionando dois lados e seus respectivos ângulos opostos;

2) Identificar a classificação do triângulo quanto aos ângulos;

3) Utilizar a Lei dos Senos para o cálculo das medidas das distâncias $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, uma vez que a medida $\overline{AB}$ é dada no problema;

4) Caso o valor da medida da distância $\overline{BC}$ seja primeiramente calculada, posteriormente se pode utilizar a Lei dos Cossenos para calcular a distância $\overline{AC}$ e/ou vice-versa;

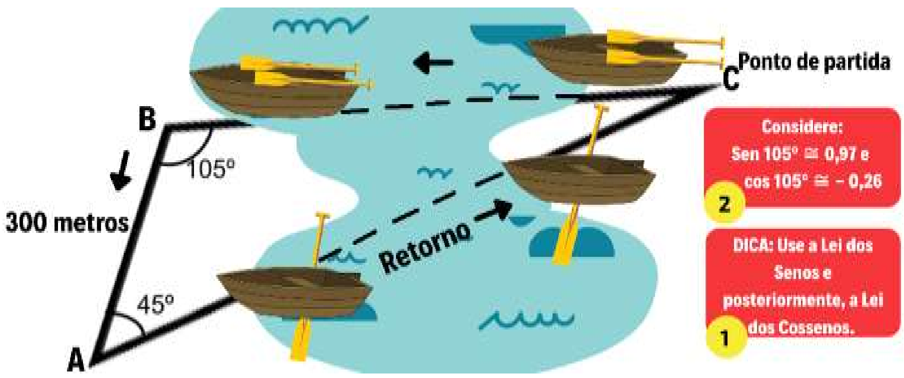
5) Pode-se verificar o resultado, para a validação dos valores encontrados por meio da substituição desses valores nas fórmulas da Lei dos Senos e/ou da Lei dos Cossenos.

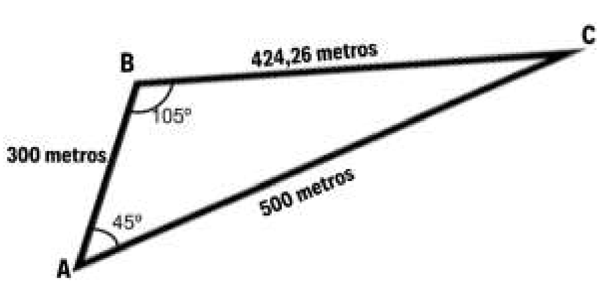
A seguir, apresentamos, no Quadro 13, as relações dos conceitos matemáticos abordados na fase III do jogo digital *TrianguLux*:

Quadro 13 – Fase III: Relações dos conceitos matemáticos no roteiro do jogo

Desafios por trecho

Apresentação do problema



<table>
<tr><th colspan="2">Feedback da resolução do problema</th></tr>
<tr><td>Como o triângulo é obtusângulo e escaleno, o valor da medida $\overline{AC}$ pode ser calculado por meio da Lei dos Senos, conforme a resolução a seguir:
$$\frac{\overline{AC}}{sen\ 105^0} = \frac{300}{sen\ 30^0}$$
$$\frac{\overline{AC}}{0{,}97} = \frac{300}{0{,}5}$$
$$0{,}5\overline{AC} = 291$$
$$\overline{AC} = \frac{291}{0{,}5}$$
$$\overline{AC} \cong 582\ m$$</td><td>A distância $\overline{BC}$ pode ser calculada pela Lei dos Senos, deste modo:
$$\frac{300}{sen\ 30^0} = \frac{\overline{BC}}{sen\ 45^0}$$
$$\frac{300}{0{,}5} = \frac{\overline{BC}}{0{,}707}$$
$$0{,}5\overline{BC} = 212{,}13$$
$$\overline{BC} = \frac{212{,}13}{0{,}5}$$
$$\overline{BC} \cong 424{,}26\ m$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">A distância $\overline{AC}$ também pode ser calculada pela Lei dos Cossenos, assim:
$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2.\overline{AB}.\overline{BC}.cos105^0$$
$$\overline{AC}^2 = 300^2 + (300\sqrt{2})^2 - 2.300.300\sqrt{2}.cos105^0$$
$$\overline{AC}^2 = 90000 + 180000 + 66185{,}195$$
$$\overline{AC} = \sqrt{336185{,}195}$$
$$\overline{AC} \cong 580\ m$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">O segmento $\overline{BC}$ pode ser calculado pela Lei dos Cossenos, da seguinte forma:
$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2.\overline{AC}.\overline{AB}.cos45^0$$
$$\overline{BC}^2 = 582 + 300 - 2.582.300.cos45^0$$
$$\overline{BC}^2 = 338724 + 90000 - 246921{,}69$$
$$\overline{BC} = \sqrt{181802{,}31}$$
$$\overline{BC} \cong 426{,}38\ m$$</td></tr>
<tr><th>Representação matemática</th><th>Conhecimentos matemáticos abordados</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Classificação dos triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos;
Trigonometria em Triângulos quaisquer;
Lei dos Senos;
Lei dos Cossenos.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaboração da autora (2021).

Por meio da proposta apresentada, o professor pode contribuir para que os estudantes compreendam como e em qual momento utilizar os conceitos relacionados à

Lei dos Senos e à Lei dos Cossenos. O tópico Lei dos Senos permite determinar as medidas dos comprimentos dos lados e a medida dos ângulos internos de um triângulo qualquer, de forma que cada segmento de reta identificado seja oposto ao ângulo. Desse modo, os estudantes necessitam reconhecer que a Lei dos Senos relaciona, na forma de proporção direta, cada medida do lado com a medida de cada ângulo oposto a esses lados, justamente para a substituição desses valores na fórmula da Lei dos Senos.

Dessa forma, o estudante desenvolve a habilidade de aplicar da Lei dos Cossenos como possibilidade de resolução para determinar a medida de um dos lados ou de um ângulo do triângulo. Portanto, almeja-se que a resolução desse problema da fase III do jogo possibilite ao estudante a compreensão de que a Lei dos Cossenos relaciona os comprimentos dos três lados e a medida dos ângulos de um triângulo qualquer.

O estudante pode resolver também esse mesmo problema por diferentes métodos, inclusive por meio do Teorema de Pitágoras, segundo o que Boyer (2013, p. 116) afirma: “as leis de cossenos para ângulos obtuso e agudo respectivamente enunciadas em linguagem geométrica em vez de trigonométrica, e são provadas por método semelhante ao usado por Euclides para o teorema de Pitágoras”.

Há também outras possibilidades de desenvolver a resolução do problema por meio das razões trigonométricas e das relações métricas no triângulo retângulo. Além de compreender a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos a partir de conhecimentos geométricos e algébricos e utilizar as leis dos senos e cossenos para resolver problemas relacionados a triângulos em contextos variados.

5.4.6 Trilha de aprendizagem – fase III

A trilha de aprendizagem, na fase III do jogo, traz conceitos sobre a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos em casos da aplicação da Trigonometria em triângulos quaisquer. Nessa abordagem, os passos do percurso do jogo indicam ao aluno como seguir, o que fazer, onde procurar respostas, ou seja, apresenta um direcionamento de aprendizagem para o estudante. A finalidade dessa metodologia de aprendizagem consiste em personalizar e adaptar as formas dinâmicas de disseminação do conhecimento. Desse modo, a educação matemática presente nesta proposta traz perspectivas para a otimização da autoaprendizagem, do autoestudo e do autodidatismo.

Essa ferramenta que esboça a fase III do jogo envolve as propriedades dos triângulos, os métodos de observação do problema para além de uma história de jogo, para a aprendizagem em matemática. Portanto, as trilhas levam o estudante às experiências contínuas para um conjunto integrado de ações no estudo da Trigonometria em triângulos quaisquer, no qual o estudante estabelece diferenciações e, ao mesmo tempo, articulações dos conceitos, movimento que o leva a refletir sobre esse método para aprimorar os seus conhecimentos.

A seguir, apresentamos a trilha de aprendizagem para a interação do estudante com a fase III do jogo:

Figura 10 – Trilha de aprendizagem do jogo: fase III

Fonte: Elaboração da autora (2021).

O Quadro 14 apresenta algumas explicações acerca das orientações propostas nessa fase do jogo:

Quadro 14 – Orientação para a resolução do problema da fase II do jogo

Passos	Orientações
1	Na primeira parte do jogo, cabem as observações do formato do trajeto. Então, para o cálculo das distâncias $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, é necessário relacionar os comprimentos dos lados e a medida dos ângulos internos de um triângulo qualquer, de forma que as medidas dos três lados sejam verificadas sobre seus respectivos ângulos opostos.
2	Nesse caso, a identificação dos elementos do triângulo, a sua classificação e as suas propriedades são primordiais para a resolução do problema proposto nessa fase do jogo.
3	É muito importante que o estudante compreenda a utilização da Lei dos Senos para o cálculo das medidas das distâncias $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, uma vez que a medida $\overline{AB}$ é dada no problema. Um link para autoestudo é disponibilizado na interface do aplicativo, com o objetivo de levar o estudante a outro patamar. O usuário também possui outras possibilidades de buscar a aprendizagem, por meio de livros, materiais didáticos, plataformas multimídias, videoaulas. Por isso, como opção, recomendamos: https://youtu.be/244wBRtvFbQ.
4	Se o estudante atentar primeiramente para o cálculo do valor da medida da distância $\overline{BC}$, posteriormente, pode utilizar a Lei dos Cossenos para calcular a distância $\overline{AC}$ e/ou vice-versa. No entanto, é essencial que o estudante sempre tente utilizar os dois métodos de resolução, para o aprendizado e para validá-los. Será disponibilizado um link para autoestudo, na interface do aplicativo, com o objetivo de levar o estudante a outro patamar. O usuário também possui outras possibilidades de buscar a aprendizagem, por meio de livros, materiais didáticos, plataformas multimídias, videoaulas. Por isso, como opção, recomendamos: https://youtu.be/OZYm_nzUUb8**.**
5	O estudante também pode realizar o caminho inverso na resolução do problema, inclusive para a verificação do resultado. Para o autoestudo do aluno, será disponibilizado um link na interface do aplicativo. Como sugestão, recomendamos: https://youtu.be/KJzHvikTFLU**.**
6	Essa última parte caracteriza-se pela validação dos resultados pelas fórmulas da Lei dos Senos e/ou da Lei dos Cossenos. Recomendamos a plataforma educacional: https://pt.khanacademy.org/math/trigonometry/trig-with-general-triangles/law-of-cosines/v/law-of-cosines-example.
7	Caso não ocorra atividade no jogo durante 5 minutos, o jogo emitirá um sinal de alerta como aviso ao jogador, solicitando que volte ao jogo. Na tela do dispositivo móvel do usuário, aparecerá a caixa de seleção “continuar”, para dar prosseguimento ao jogo.

Fonte: Elaboração da autora (2021).

A terceira fase do jogo abrange os níveis mais elevados de aprendizagem, com a finalidade de impulsionar a criatividade geométrica e trigonométrica dos alunos na construção da resolução de problemas. A temática trabalhada aqui é a Trigonometria em triângulos quaisquer, a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos. A atividade proposta relaciona diversos contextos vivenciados na floresta amazônica, os quais são repletos de desafios pelos quais os seringueiros passam.

Nessa perspectiva, entrelaça-se a Matemática, cujos conhecimentos relacionados demandam as competências C1, C2, C3 e habilidade EM13MAT308 do Ensino Médio da BNCC (BRASIL, 2018), conforme o Quadro 8 da seção 5.4. Nesse aspecto também são abordadas as interpretações das informações e a compreensão dos dados na construção de esquemas gráficos para a representação dos triângulos, para que os conhecimentos matemáticos sejam aplicados durante todo o processo.

Dentre as competências matemáticas a serem desenvolvidas pelos estudantes no decorrer do Ensino Fundamental, aponta-se, nesta proposta de trabalho, com relação ao estudo da Trigonometria, a competência específica I da BNCC: "reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos" (BRASIL, 2018, p. 167). Por isso, as habilidades matemáticas desenvolvidas nessa etapa contribuem para a solução de problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções.

Sobre o desenvolvimento do pensamento trigonométrico no Ensino Fundamental, esta pesquisa fundamenta-se em "desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo" (BRASIL, 2018, p. 167). Dessa forma, ressaltamos, nesta análise, conforme Bianchini (2018), que os alunos podem desenvolver habilidades no que se refere aos processos investigativos acerca da elaboração de modelos e à explicação e argumentação matemática das soluções.

Convém reiterar, de forma analítica, que o desenvolvimento das capacidades cognitivas dos estudantes com base na Trigonometria também se dá a partir da utilização de "processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados" (BRASIL, 2018, p. 167). Nesse sentido, o processo de aprendizagem envolve a análise dos fundamentos e das propriedades que os estudantes podem construir, como determinar e reconhecer a modelagem dos problemas (POLYA, 1995).

Desse modo, a partir desta proposta, o desenvolvimento de habilidades em Matemática destaca a primazia das investigações de situações que mobilizam a prática de ações coletivas com base nos princípios éticos e sustentáveis. Cabe aqui, por meio dessa competência, a valorização da diversidade de culturas e dos mais variados grupos sociais (D'AMBROSIO, 2009, 2018; MORAES, 2014). Além disso, a educação matemática desempenha reflexões sob os diferentes contextos sociopolíticos e culturais dos saberes construídos nas práticas sociais e educativas (BRASIL, 2018). Destacamos também, como competência específica da Trigonometria,

> [...] colocar os estudantes em situações nas quais precisam investigar questões de impacto social que os mobilizem a propor ou participar de ações individuais ou coletivas que visem solucionar eventuais problemas. O desenvolvimento dessa competência específica prevê ainda que os estudantes possam identificar aspectos consensuais ou não na discussão tanto dos problemas investigados como das intervenções propostas, com base em princípios solidários, éticos e sustentáveis, valorizando a diversidade de opiniões de grupos sociais e de indivíduos e sem quaisquer preconceitos. Nesse sentido, favorece a interação entre os estudantes, de forma cooperativa, para aprender e ensinar Matemática de forma significativa (BRASIL, 2018, p. 534).

Nessa conjuntura, o desenvolvimento do conhecimento matemático em si também parte de uma reflexão sobre a multiplicidade de papéis de representação da educação matemática em diversos contextos sociopolíticos e culturais, como forma de articulação dos saberes tradicionais com as práticas socioeducativas (D'AMBROSIO, 2009, 2018; MORAES, 2014).

Desse modo, a abordagem da Trigonometria no jogo proporciona a resolução e formulação de problemas que contemplam várias áreas do conhecimento (KAMBER; TAKACI, 2018; SANTOS; HOMA, 2018). Nesse aspecto, para a resolução dos problemas apresentados no jogo, é necessário primeiramente que se identifiquem os conceitos e os procedimentos matemáticos por meio de "alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações" (BRASIL, 2018, p. 536).

Para além das etapas de resolução de problemas, deve-se considerar também a multiplicidade de processos investigativos e a construção de modelos na metodologia adotada. O Quadro 15, a seguir, apresenta os conceitos que podem ser atribuídos na realização desse processo:

Quadro 15 – Procedimentos para a resolução de problemas

MÉTODOS DE INVESTIGAÇÃO	ORGANIZAÇÃO DOS MODELOS	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
• observação e análise dos objetos matemáticos; • identificação das suas propriedades, métodos de resolução e conceitos; • reconhecimento dos seus padrões; • formulação de conjecturas e conceitos; • utilização de representações diversificadas; • generalização de processos; • análise dos resultados; • validação dos métodos e dos resultados; • comunicação dos resultados.	• observação dos processos; • realização de análises de situações reais; • formulação de questões; • escolha de representações; • identificação das variáveis; • resolução dos problemas modelados; • compreensão do modelo; • interpretação do modelo; • elaboração de estimativas; • testagem do modelo; • tomada de decisões; • observação de situações reais.	• observação de situações; • análise de situações; • identificação dos dados da situação; • reconhecimento do problema pesquisado; • representação do problema por meio da linguagem matemática; • elaboração de um plano de resolução; • proposição de estratégias, procedimentos e de modelos; • efetuação de cálculos; • realização das construções geométricas ou demonstrações formais; • realização da verificação.

Fonte: Elaboração da autora (2021).

Desse modo, apresentamos a proposta teórico-metodológica de ensino em Matemática ancorada à proposta de produção do jogo digital *TrianguLux*. Percebe-se que a teoria do Construcionismo de Seymour Papert (1985) envolve a construção do conhecimento dos estudantes por meio de práticas educativas que transformam as competências cognitivas de acordo com a interação, para que o processo de ensino-aprendizagem seja percebido de forma ativa, em um contexto de experiências e objetos do conhecimento em que o aluno apreende as informações.

Portanto, essa produção metodológica delineada na pesquisa apresenta, como resultado, um material de apoio ao professor e de aprendizagem para o aluno. Quanto às contribuições para o desenvolvimento intelectual do estudante, enfatiza-se neste estudo a compreensão por meio da motivação das experiências de aprendizagem em Matemática que o jogo digital pode proporcionar. Tais concepções para a aprendizagem do estudante embasam-se nas ideias do Construcionismo.

Enquanto proposta pedagógica, esta pesquisa concentra-se em contribuir com a prática docente e incentivar o professor a analisar os critérios para entender como ocorre a apreensão do conhecimento por parte do aluno, por meio da proposta do jogo digital. Dessa forma, conforme a teoria construcionista (1985), o desenvolvimento cognitivo do aluno transcende situações que envolvam os estudantes na resolução de problemas, pois é necessário que se compreendam os procedimentos e os resultados.

Como demonstrado em toda esta proposta pedagógica para o ensino de Matemática, ficam as contribuições para o trabalho docente, para uma prática pedagógica significativa e de excelência no que se refere ao ensinamento dos conceitos e ao desenvolvimento das competências e habilidades dos aprendizes. E, como material didático de apoio ao aluno, esta proposta enseja-se para contribuir com o autoestudo e com a autoaprendizagem a fim de direcionar o estudante ao caminho do protagonismo, para que ele aprenda acerca de si mesmo e da sua própria aprendizagem.

6 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentou-se o processo de planejamento e de desenvolvimento do jogo digital *TrianguLux*, inclusive o contexto de sua abordagem, a fundamentação da teoria construcionista do Seymour Papert (1980; 1985; 2008) na pesquisa, as etapas de construção, o *design* e a transposição didática do jogo. Verifica-se que, no processo de planejamento para a produção do jogo, são apontadas ferramentas de aprendizagem diversificadas. Observa-se também que esta proposta procurou evidenciar estratégias de desenvolvimento educacional e colaborativo. Entende-se, por meio da explanação desta investigação, que o produto final desta pesquisa resulta em uma inovação pedagógica.

O desenvolvimento desta proposta metodológica proporcionou para mim, como docente, uma reflexão sobre a minha própria prática pedagógica e levou-me a buscar um aperfeiçoamento para uma melhor abordagem dos conceitos e conhecimentos a serem tratados com os meus alunos na sala de aula.

Desse modo, a construção da proposta teórico-metodológica apontada nesta pesquisa para o ensino de Matemática por meio da produção de um *software* educacional levou-me a passar por desafios maiores e inimagináveis, como aprender sobre o desenvolvimento de um *software* e como são as suas etapas de construção. Também pude perceber uma melhora considerável quanto à qualidade das minhas aulas, quanto às diversificações das metodologias de ensino e uma preocupação maior com a aprendizagem dos meus alunos.

Nesta pesquisa, verificou-se que a articulação da Teoria do Construcionismo de Seymour Papert (1985) com o desenvolvimento do jogo digital permite que os estudantes, como protagonistas da sua própria aprendizagem, possam interagir na construção do próprio conhecimento por meio das práticas e experiências.

Assim, a produção do roteiro do jogo digital *TrianguLux* proporcionou a elaboração do plano pedagógico desse jogo como estratégia didática para promover a autoaprendizagem em Trigonometria por parte do estudante. Dessa forma, podemos constatar que esta proposta buscou trazer interesses e facilidades para o aprendizado em Matemática para o aluno, de acordo com o que orienta a Base Nacional Comum Curricular.

Este estudo tratou sobre o uso dos jogos digitais como ferramentas potentes para o ensino e a aprendizagem de Matemática. Nele, o jogo é tomado com um recurso didático-pedagógico, porque traz a abrangência de contextos matemáticos para dentro da sala de aula e proporciona ao estudante a interação, a dinâmica, a visualização gráfica e a representação geométrica das temáticas relacionadas à Matemática a partir de uma visão que mistura entretenimento e distração, além de proporcionar uma contextualização que move o jogador/estudante a pensar questões passadas e contemporâneas que envolvem a realidade social brasileira, a saber, situações relacionadas ao meio ambiente, à preservação/devastação da biodiversidade amazônica, os modos de vida das comunidades tradicionais da região (como indígenas, ribeirinhos e seringueiros).

Diante disso, a alusão ao objeto pedagógico que se traz nesta proposta reverbera sobre o fato de que os estudantes aprendem brincando e aprendem mais quando despertam interesse pelo assunto proposto. Essa perspectiva rompe com o modelo tradicional de ensino, uma vez que os estudantes aprendem sem nem perceber que estão estudando, pois se envolvem com a temática a partir de algo próprio do seu universo contextual lúdico: o jogo.

Nessa concepção, a pesquisa ora delineada demonstrou um diferencial acerca do planejamento para a construção de um jogo digital, de forma que os estudantes e os professores possam crescer conjuntamente e se relacionar na sala de aula. A abordagem proposta buscou apontar o uso de jogos digitais como metodologia para o ensino de Matemática. O *design* do jogo, como vimos anteriormente, remete às estruturas dos desafios programados, envolvendo emoção, ação, aventura e dinamicidade das fases, além disso, possui abordagem interdisciplinar.

Nesse aspecto, sob uma perspectiva visionária na área educacional, como já foi relatado, esse *software* possibilita ao jogador avançar o nível a partir da evolução das fases e da progressão sequencial dos conteúdos matemáticos abordados no jogo. Como diferencial, apresentaram-se os problemas que aparecem na dinâmica do jogo, voltados para as situações da realidade de vida do seringueiro. Também cabe aqui o destaque que os inimigos ou adversários do personagem principal do jogo são os desmatadores, caçadores de animais e garimpeiros. O *spoiler* do jogo concentra-se na transfiguração do avatar em um personagem mítico da cultura dos povos da floresta amazônica durante o combate.

Neste trabalho, buscou-se apresentar, principalmente, uma proposta de desenvolvimento de *software* educacional com base na teoria construcionista de Papert para a aprendizagem em Matemática. Essa etapa da pesquisa mostrou a modelagem, o *design* do roteiro do desenvolvimento do *software*, o *storyboard*, “a história do jogo”, o *storytelling*, o percurso metodológico, juntamente com a idealização do *design*, da arquitetura e da estrutura de todo o jogo, o enredo, o comportamento do personagem principal diante das situações apresentadas no contexto da floresta amazônica, aludindo às práticas culturais, ao imaginário, às narrativas míticas e às identidades sociais dos habitantes da floresta amazônica.

Apresentou-se também, neste trabalho, o plano pedagógico do jogo como metodologia para o ensino de Matemática e como suporte para a aprendizagem do estudante. A estrutura do jogo apresentada abrange a cultura dos “povos da floresta”, em especial o estilo de vida dos extrativistas, como meio de envolver (e provocar) o jogador a vivenciar cenários e situações da floresta amazônica, fazendo o estudante envolver-se nos desafios apresentados na trajetória do jogo repletos de aventura e emoção, bem como encaminhando-o a tornar-se um ser mais reflexivo e crítico acerca das práticas predatórias e de destruição do meio ambiente promovidas contra a Amazônia na contemporaneidade.

Além disso, esta pesquisa apontou como foco o ensino da Trigonometria. Por isso, realizou-se a descrição de toda a arquitetura pedagógica do *software*, assim como a transposição didática do jogo, com a apresentação do plano pedagógico do jogo e das trilhas de aprendizagem. Realizou-se também a roteirização da história do jogo matemático. Reitera-se que a sistematização do planejamento do jogo abordou desde o Teorema de Pitágoras até a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos. Tudo isso implica que a abordagem do objeto do conhecimento foi proposta de forma aprofundada e contextualizada, de acordo o nível de complexidade que o conteúdo requer, com a realidade social do estudante e, ainda, considerando os mecanismos que fazem parte do universo de preferências dos jovens, como os jogos digitais.

O recorte desta pesquisa centrou-se na descrição e roteirização do jogo digital *Triangulux*, como uma proposta para o ensino-aprendizagem de Matemática. Diante disso, as pendências que ficaram remetem à produção técnica do jogo: 1) Escolha das ferramentas tecnológicas que melhor se adaptam à construção do jogo digital; 2) Modelagem computacional do *software*; 3) Caracterização do modelo de navegação; 4) Modelagem da gamificação; 5) Testes com o *software*; 6) Análise dos resultados; 7) Empregabilidade do jogo digital em cursos de extensão para alunos e professores; 8) Coleta de dados e informações para o aprimoramento do jogo digital e registros da pesquisa; 9) Ajustes finais; 10) Divulgação, disponibilização e implementação do *software*.

Essas pendências fazem parte da próxima etapa de desenvolvimento do *software*, constituída como a criação do jogo. A fase do planejamento do *software* foi concluída e a proposta pode ser readequada conforme as situações que se apresentarem durante a produção do jogo. Para a próxima etapa da pesquisa, há a publicação do livro "*Lux: o protetor da floresta*", sobre a história de um ex-seringueiro que inspirou a construção do roteiro do jogo digital *TrianguLux*: meu pai.

Como trabalho futuro, destaca-se a evolução pedagógica do jogo, de forma que ocorra uma abrangência maior sobre as mais diversas áreas do conhecimento, pautando-se de forma interdisciplinar e transdisciplinar. Há também perspectivas para o desenvolvimento do jogo sobre outros aspectos, inclusive sobre a quantidade simultânea de jogadores. A primeira versão do jogo poderá ser distribuída gratuitamente, para alcançar os mais diversos níveis educacionais.

Futuramente, a fase de produção, modelagem computacional, desenvolvimento e aprimoramento físico e tecnológico do *software* está planejada para ser realizada com os estudantes do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, no *campus* Palmas. Também serão trabalhados cursos de extensão com alunos da Educação Básica e professores que ensinam Matemática para a testagem do *software*, para a capacitação docente e para a melhoria da qualidade da educação, em especial, do ensino de Matemática.

Por fim, conclui-se que o modelo de trabalho realizado no desenvolvimento desta pesquisa pode ser utilizado universalmente, em qualquer comunidade, dentro das mais variadas situações de ambientes educacionais, não somente como metodologia de ensino, mas também como ferramenta pedagógica para a aprendizagem dos indivíduos em sua totalidade.

REFERÊNCIAS

AKKER, J. V. D. Principles and Methods of Development Research. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1999. p. 1-14. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-011-4255-7_1. Acesso em: 30 abr. 2021.

ALI, S. R. B.; ZAINI, S. H. B.; AHMAD, H. B.; MUKHTAR, F. B. E-Numeracy: Mobile Application of The Numeracy Understanding Model for Primary School. **Interactive Mobile Technologies**, v. 13, n. 11, 2019. Disponível em: https://online-journals.org/index.php/i-jim/article/view/11378. Acesso em: 30 ago. 2021.

ALVES, L.; TORRES, V. **Jogos digitais, entretenimento, consumo e aprendizagens**: uma análise do Pokémon Go. Salvador: Edufba, 2017.

ANDRADE, R. S. O uso de aplicativos móveis para o ensino e aprendizagem de Matemática em turmas do Ensino Médio e Superior de Matemática. **Revista Projeção e Docência**, v. 10, n. 2, p. 31-41, 2019. Disponível em: http://revista.faculdadeprojecao.edu.br/index.php/Projecao3/article/view/1406. Acesso em: 20 mar. 2021.

BANO, M.; ZOWGHI, D.; KEARNEY, M.; SCHUCK, S.; AUBUSSON, P. Mobile learning for science and mathematics school education: a systematic review of empirical evidence. **Computers & Education**, v. 121, p. 30-58, 2018. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S036013151830038. Acesso em: 30 abr. 2021.

BARROS, V. L. S. O ensino de matemática através do uso dos jogos digitais. **Educação Matemática em Pesquisa: Perspectivas e Tendências**, v. 1, p. 529-536, 2017. Disponível em: https://downloads.editoracientifica.org/articles/201102095.pdf. Acesso em: 12 set. 2021.

BARTLE, R. Hearts, Clubs, Diamonds, Spades: Players who suit MUDs. **Journal of MUD Research**, 1996. Disponível em: http://www.arise.mae.usp.br/wp-content/uploads/2018/03/Bartle-player-types.pdf. Acesso em: 12 set. 2021.

BIANCHINI, E. **Matemática**. 9. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

BORBA, M. C.; ASKAR, P.; ENGELBRECHT, J.; GADANIDIS, G.; LLINARES, S.; AGUILAR, M. S. Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education. **ZDM Mathematics Education**, v. 48, n. 5, p. 589-610, ago. 2016. Disponível em: https://eric.ed.gov/?id=EJ1106594. Acesso em: 25 mar. 2021.

BORG, W. R.; GALL, M. D. **Educational research**. Nova Iorque: Longman, 2006.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 4. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio. Acesso em: 12 maio 2021.

BRYANT, R. D.; GIGLIO, K. **Slay the Dragon**: Writing Great Video Games, Studio City, CA: Michael Wiese Productions, 2015.

BUNCHBALL INC. **Gamification 101**: an introduction to the use of game dynamics to influence behavior. 2010. Disponível em: http://jndglobal.com/wp-content/uploads/2011/05/gamification1011.pdf. Acesso em: 12 set. 2021.

CAMILLO, C. M.; MEDEIROS, L. M. Aplicativos educacionais livres para M-Learning e sua integração com o ensino da Matemática. **Revista Educacional Interdisciplinar**, v. 6, n. 20, p. 1-9, 2017. Disponível em: https://seer.faccat.br/index.php/redin/article/view/612. Acesso em: 20 mar. 2021.

CHAO, W. H.; YANG C. Y.; HSIEN S. M.; CHANG, R. C. Using mobile apps to support effective Game-Based Learning in the Mathematics classroom. **International Journal of Information and Education Technology**, v. 8, n. 5, p. 354-357, 2018. Disponível em: http://www.ijiet.org/show-100-1226-1.html. Acesso em: 20 mar. 2021.

CHEUNG, W. S.; HEW, K. F. Examining the impact of object owners "anonymity on learners" participation rate and critical thinking in an asynchronous online discussion environment. *In*: CAMERON, L.; DALZIEL, J. (ed.). **Proceedings of the 4th International LAMS and Learning Design Conference**. Sidnei: LAMS Foundation, 2009. p. 48-53.

COUTINHO, C. P. **Metodologia de investigação em Ciências Sociais e Humanas**: teoria e prática. 2. ed. reimp. Coimbra: Almedina, 2015.

COUTINHO, W. A.; ALMEIDA, V. E.; JATOBÁ, A. Aplicativos móveis em sala de aula: uso e possibilidades para o ensino da Matemática na EJA. **Educação Temática Digital**, v. 23, n. 1, p. 20-43, Campinas, SP, jan./mar. 2021. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/etd/article/view/8656231. Acesso em: 29 abr. 2021.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 17. ed. Campinas: Papirus, 2009.

______. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 32, n. 94, p. 189-204, set./dez. 2018. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-40142018000300189&script=sci_arttext&tlng=pt. Acesso em: 1 dez. 2021.

______. O Programa Etnomatemática: uma síntese. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 10, n. 1, p. 7-16, jan./jun. 2008.

D'AMORE, B. **Elementos da didática da Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações – Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em contextos**: trigonometria e sistemas lineares. São Paulo: Ática, 2020.

DE LA SERNA, T. J. M. Introducción a la Neuromatemática. *In*: ______. **Aproximación a las Neuromatemáticas**: el cerebro Matemático. Montefranco: Tektime, 2020. p. 8-41. v. 1. Disponível em: https://figshare.com/articles/book/Introducci_n_a_la_Neuromatem_tica/13501968. Acesso em: 29 abr. 2021.

DEMO, P. **Educação hoje** – "Novas" tecnologias, pressões e oportunidades. São Paulo: Atlas, 2009.

DICK, W.; CAREY, L. **The systematic design of instruction**. 6. ed. Nova Iorque: Harper/Collins, 2004.

ENGSTRÖM, H; BACKLUND, P. Serious games design knowledge – Experiences from a decade (+) of serious games development. **EAI**. maio 2021. Disponível em: https://eudl.eu/doi/10.4108/eai.27-5-2021.170008. Acesso em: 12 set. 2021.

FADEL, L. M.; ULBRICHT, V. R.; BATISTA, C. R.; VANZIN, T. **Gamificação na educação**. São Paulo: Pimenta Cultural, 2014.

FIORENTINI, D. *et al*. Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática: período 2001-2012. *In*: FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R. (org.). **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática**: período 2001-2012. Campinas: FE/UNICAMP, 2016.

FOLLADOR, D. **Metodologia do Ensino da Matemática e Física** – Tópicos Especiais no Ensino de Matemática. 2. ed. Curitiba: IBPEX, 2011.

GARCIA, F. O.; PEREIRA, C. S.; FRASSON, A. C.; SALLES, V. O. Tecnologias móveis na formação inicial do professor de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 22, n. 1, p. 214-230, 2020. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/43483. Acesso em: 30 abr. 2021.

GEE, J. P. Bons videogames e boa aprendizagem (Dossiê Educação, Comunicação e Tecnologia). **Revista Perspectiva**, v. 27, n. 1, p. 1-11, jan. 2009. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/perspectiva/article/view/2175-795X.2009v27n1p167. Acesso em: 30 abr. 2021.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GODOI, K. A.; PADOVANI, S. Instrumentos avaliativos de software educativo: uma investigação de sua utilização por professores. **Estudos em Design Revista (online)**, v.19, n. 1, p. 1 – 23, 2011. Disponível em: https://www.eed.emnuvens.com.br/design/article/view/68. Acesso em: 22/04/2021.

GRANDO, R. C. Recursos didáticos na Educação Matemática: jogos e materiais manipulativos. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, v. 5, n. 2, p. 393-416, set. 2019. Disponível em: https://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/view/117. Acesso em: 20 nov. 2021.

HSU, Y. C.; CHING, Y. H.; CALLAHAN, J.; BULLOCK, D. Enhancing STEM Majors' College Trigonometry Learning through Collaborative Mobile Apps Coding. **TechTrends**, v. 65, n. 1, p. 26-37, jan. 2021. Disponível em: https://eric.ed.gov/?id=EJ1283916. Acesso em: 30 jul. /2021.

HUIZINGA, J. **Homo ludens**: proeve eener bepaling van het spel-element der cultuur. [*S. l.*]: Amsterdam University Press, 2008.

HUNICKE, R.; LEBLANC, M.; ZUBEK, R. MDA: A Formal Approach to Game Design and Game Research. **Proc. AAAI workshop on Challenges in Game**, AAAI Press, 2004.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**: trigonometria. 9. ed., v. 3, São Paulo: Atual, 2019.

KAMBER, D.; TAKACI, D. On problematic aspects in learning trigonometry, International Journal of Mathematical Education. **Science and Technology**, v. 49, n. 2, p. 161-175, 2018. Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0020739X.2017.1357846. Acesso em: 29/06/2021.

KENSKI, V. M. **Tecnologias e ensino presencial e a distância**. 7. ed. Campinas: Papirus, 2019.

KIRTON, M. J. Adaptors and innovators — a description and measure. **Journal of Applied Psychology**, v. 61, n. 5, p. 622-629, 1976. Disponível em: https://psycnet.apa.org/doiLanding?doi=10.1037%2F0021-9010.61.5.622. Acesso em: 19 jul. 2020.

KISHIMOTO, T. M. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a Educação**. 11. ed. São Paulo: Cortez, 2008.

LARAMEE, F. **The Game Design Process**. 1999. Disponível em: www.gamedev net/page/resources/_/creative/gamedesign/the-game-design-process-r273. Acesso em: 23 set. 2021.

LEALDINO FILHO, P. **Jogo digital educativo para o ensino de matemática**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2014. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/1442. Acesso em: 26 nov. 2021.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência**: o futuro do pensamento da era da informática. 2. ed. Tradução: Carlos Irineu da Costa. São Paulo: 34, 2010.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. W. E.; MORGADO, A. C. **Coleção do professor de Matemática**: temas e problemas. 12. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LOPES, T. B.; HARDOIM, E. L. **Revista Exitus**, Santarém-PA, v. 8, n. 2, p. 219-243, maio/ago. 2018. Disponível em: https://www.redalyc.org/jatsRepo/5531/553159852010/html/index.html. Acesso em: 12 set. 2021.

MARIÑO, J. R. H.; PEREIRA, L.T.; TOLEDO, C. F. M. Geração procedural de conteúdos para jogos digitais: conceitos e trabalhos relacionados. **Revista de Sistemas de Informação da FSMA**, n. 18, p. 43-57, 2017. Disponível em: http://www.fsma.edu.br/si/edicao18/FSMA_SI_2016_2_Principal_5.pdf. Acesso em: 12 set. 2021.

MARTINS, G.; OLIVEIRA, M. I. V. R.; SANTOS, T. O mindset da administração de empresas de futuro: administração digital contemporânea. **Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento**, ano 5, v. 21, n. 11, p. 5-15, nov. 2020. Disponível em: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/administracao/administracao-digital. Acesso em: 29 nov. 2021

MARTINS, J. L. **Enquanto uns ensinam, outros navegam**: a gestão da aprendizagem em tempos digitais [recurso eletrônico]. Porto Alegre: Fi, 2017.

MAZIVIERO, H. F. G. **Jogos digitais no ensino de Matemática**: o desenvolvimento de um instrumento de apoio ao diagnóstico das concepções dos alunos sobre diferentes representações dos números. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP, Bauru, 2014.

MCGONIGAL, J. **Realidade em jogo**: por que os games nos tornam melhores e como eles podem mudar o mundo. Rio de Janeiro: Best Seller, 2012.

MORAES, W. S. **Um olhar etnomatemático sobre os saberes e fazeres de carpinteiros da construção civil de Goiânia – GO**. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014. Disponível em: https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/4988. Acesso em: 22 nov. 2021.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

NAM, N. D.; THAO, T. T. P. An Empirical Research on the Use of Mobile Phones to Support Students’ Mathematics Learning. **International Journal of Learning, Teaching and Educational Research**, v. 12, n. 1, p. 133-141, jun. 2015. Disponível em: https://www.ijlter.org/index.php/ijlter/article/view/83. Acesso em: 20 maio 2021.

NORMAN, D. A.; DRAPER, S. W. **User Centered System Design**: New Perspectives on Human-Computer Interaction. Nova Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1986.

PANTANO, T; ZORZI, J. L. (org.) **Neurociência aplicada à aprendizagem**. São José dos Campos: Pulso Editorial, 2009.

PAPERT, S. M. **Logo**: computadores e educação. São Paulo: Brasiliense, 1985.

______. **Máquina das crianças**: repensando a escola na era da informática. Porto Alegre: ArtMed, 2008.

______. **Mindstorms**: children, computers, and powerful ideas. Nova Iorque: Basic, 1980.

PEREIRA, L. T. **Introdução aos jogos digitais**: desenvolvimento, produção e design, 2019. Disponível em: https://central3.to.gov.br/arquivo/453377/. Acesso em: 25 de ago. 2021.

PINHEIRO, P. S. B.; SERUFFO, M. C. R.; PIRES, Y. P. Experience of Using an Educational Application for Mobile Devices in the Municipality of Castanhal (Experiência de Uso de um Aplicativo Educacional Para Dispositivos Móveis no Município de Castanhal - Pará). **Brazilian Journal of Computers in Education** (**Revista Brasileira de Informática na Educação - RBIE**), v. 3, n. 27, p. 242-264, 2019. DOI: 10.5753/RBIE.2019.27.03.242. Disponível em: https://br-ie.org/pub/index.php/rbie. Acesso em: 30 abr. 2021.

POLLAK, H. A conversation with Henry Pollak. *In*: BLUM, W. *et al*. (ed.). **Modelling and applications in mathematics education** – the 14 th ICMI Study. Nova Iorque: Springer, 2007. p. 109-122.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PRABOWO, A.; ANGGORO, R. P.; ADIYANTO, R.; RAHAMAWATI, U. Interactive multimedia-based teaching material for trigonometry. IOP Conf. Series: **Journal of Physics**: Conf. Series 1097, 2018.

PREBIANCA, G. V. V.; SANTOS JÚNIOR, V. P.; MOMM, C. F.; SILVA, L. F.; NEHRING, H. O uso dos softwares educacionais como ferramentas mediacionais e de inclusão tecnológica. **Educação Temática Digital**, Campinas, v. 15, n. 3, p. 474-494, set./dez. 2013. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/etd/article/view/1267. Acesso em: 30 abr. 2021.

PRENSKY, M. **Aprendizagem baseada em jogos digitais**. São Paulo: Senac, 2012.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. D. **Metodologia do trabalho científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Universidade Freevale, 2013.

RAMOS, G. C. **Sistemas de numeração e pinturas corporais Javaé**: a etnomatemática por uma relação dialógica entre cultura e educação escolar. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2016.

RIBEIRO, F. D. **Jogos e modelagem na Educação Matemática**. Curitiba: IBPEX, 2008.

ROQUE, T. **História da Matemática** – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

SABADIN, N. M. **Interação humano-computador**. Santa Catarina: UNIASSELVI, 2016.

SALEN, K.; ZIMMERMAN, E. **Rules of Play**: Game Design Fundamentals. Massachusetts: MIT Press, 2012.

SANTAELLA, L. **Comunicação** u**bíqua**: repercussões na cultura e na educação. São Paulo: Paulus, 2013.

SANTAELLA, L.; NESTERIUK, S.; FAVA, F. **Gamificação em debate**. São Paulo: Blucher, 2018.

SANTOS, J. S.; HOMA, A. I. R. A trigonometria para o ensino fundamental e médio com a utilização das tecnologias digitais. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura: Rematec**, v. 13, n. 28, p. 114-126, maio/ago. 2018. Disponível em: http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/139. Acesso em: 30 abr. 2021.

SANTOS, R. T. **Processo de Desenvolvimento de Software Educativo**: um estudo da prototipação de um software para o estudo de função. 2016. 110 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/17425. Acesso em: 30 abr. 2021.

SANTOSO, F. A.; SOEDJOKO E. The problem solving ability of 7th grade students on problem based learning assisted by mathematics mobile learning application. **Unnes Journal of Mathematics Education**, v. 8, n. 2, p. 89-97, set. 2019. Disponível em: https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujme/article/view/32284. Acesso: 21 jul. 2021.

SCHNEIDER, J.; NUNES, V. B. APLICATIVOS DIGITAIS NO CONTEXTO DO ENSINO DE MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES DOS ALUNOS POR MEIO DE OFICINAS TEMÁTICAS. **Revista Eletrônica: Sala de Aula em Foco**, v. 8, n. 2, p. 72-84, 2019.

SCHUYTEMA, P. **Projeto de jogos**: uma abordagem prática. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

SHNEIDERMAN, B.; PLAISANT, C. **Designing the user interface**: strategies for effective human-computer interaction. 4. ed. AddisonWesley Publishing Company, 2004.

SIENA, M. C. S. **O uso de jogos digitais como ferramenta auxiliar no ensino da matemática e o protótipo do game sinapsis**. 2018. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2018. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160280961. Acesso em: 20 nov. 2021.

SILVA, A. L.; CAVALCANTE, M. T. M.; VIANA, L. H. V.; MOITA, F. M. G. S. C. A utilização do Minecraft na construção de conceitos geométricos como forma de estímulo à aprendizagem da Matemática. *In*: **Anais do III CONEDU**. p. 5-7. Natal - RN, Realize, out. 2016. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/index.php/artigo/visualizar/20131). Acesso em: 30 abr. 2021.

SILVA, A. L. **Mundo virtual Minecraft**: um contexto de aprendizagens de conceitos geométricos. 2018. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2018. Disponível em: http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/3617. Acesso em: 30 abr. 2021.

SILVA, H. W. **Estudo sobre as potencialidades do jogo digital Minecraft para o ensino de proporcionalidade e tópicos de geometria**. 2017.113 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/20273/2/Hudson%20William%20da%20Silva.pdf. Acesso em: 30 abr. 2021.

SILVA, J. L.; OLIVEIRA, C. A. Possibilidades pedagógicas do uso das tecnologias móveis no ensino de Matemática na perspectiva da m-learning. **BoEM**, Joinville, v. 6, n. 11, p. 200-221, 2018. Disponível em: file:///C:/Users/Lilian/Downloads/11918-Texto%20do%20artigo-46569-1-10-20181008.pdf. Acesso em: 22 abr. 2021.

SILVA, M. H. P. D. **Handles** – a trajetória de desenvolvimento de um jogo digital para ensino de Matemática. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2018.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica**: a questão da democracia. Campinas, São Paulo: Papirus, 2009.

SOUTO, V. T.; FRAGELLI, R. R. (org.) **Design de jogos educativos**: da ideia ao jogo. Quito: Ciespal, 2016.

STEVENSON, M.; HEDBERG, J.; HIGHFIELD, K.; DIAO, M. Visualizing solutions: Apps as Cognitive Stepping-Stones in the Learning Process. **Electronic Journal of e-Learning**, v. 13, n. 5, p. 366-379, 2015. Disponível em: https://eric.ed.gov/?id=EJ1084237. Acesso em: 22 abr. 2021.

TEIXEIRA, L. A. **Diálogo**: matemática e suas tecnologias. São Paulo: Moderna, 2020.

VALENTE, J. A. **Computadores e conhecimento**: repensando a educação. Campinas: Gráfica Central da UNICAMP, 1998.

YIN, R. K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim**. Porto Alegre: Penso, 2016.

ZAFFARI, G.; BATTAIOLA, A. L. **Integração do processo industrial de design de jogos com o modelo MDA**. Proceedings do XIII SBGames – Trilha Indústria. Porto Alegre, nov. 2014. Disponível em: https://www.sbgames.org/sbgames2014/papers/industry/full/101-industryfullpages.pdf. Acesso: 11/10/2021.

ZICHERMANN, G.; CUNNINGHAM, C. **Gamification by Design**: Implementing Game Mechanics in Web and Mobile Apps. Sebastopol, Calif: O'Reilly Media, 2011.

ZYDNEY, J. M.; WARNER, Z. Mobile Apps for Science Learning: Review of Research. **Computers & Education**, v. 94, p. 1-17, 2016. Disponível em: https://scirp.org/reference/referencespapers.aspx?referenceid=2086012. Acesso em: 15 abr. 2021.

APÊNDICE A – ROTEIRO DO JOGO DIGITAL TRIANGULUX

Fase I - “CAMINHOS DA FLORESTA”

Visão Geral

O personagem do jogo é um seringueiro que vive na floresta amazônica. Ele sobrevive do extrativismo vegetal e protege a fauna e a flora do bioma amazônico. Durante o trajeto de toda a fase I, aparecem desafios, como armadilhas de queda, armadilhas de laço e jaulas feitos pelos caçadores de animais silvestres (trecho I – buracos, laços feitos com corda cobertos por folhas no solo); combate com os caçadores de animais (trechos I, II e III); travessia sobre um gapó (trecho II – terrenos ou espaços alagadiços), onde foram colocadas bombas pelos caçadores para matar os peixes e os outros animais por meio da pesca predatória. O gapó está repleto de jacarés, peixes elétricos, arraias e cobras venenosas; e o combate às queimadas (trecho III – os caçadores colocam fogo na floresta e ficam de tocaia em cima de árvores ou escondidos para capturar os animais).

O jogador tem a possibilidade de marcar pontos, avançar na pontuação do jogo, conseguir recompensas e adquirir artefatos para a sua sobrevivência. O usuário deve direcionar o personagem na superação dos desafios e obstáculos na floresta, além de combater os caçadores de animais silvestres, a prática da biopirataria e o tráfico da fauna amazônica. O objetivo da fase I do jogo é ajudar o personagem a encontrar a castanheira.

Regras

Configurações do jogo

O próprio navegador direciona o personagem pelo caminho que deve seguir. Esse jogo é para um único jogador que joga contra o sistema do jogo. O movimento do personagem segue conforme o comando do gerenciador do *software*, que controla o personagem a uma velocidade fixa na apresentação dos trajetos e a contagem dos passos, que aparecem no visor do dispositivo móvel. O controle do jogador está sobre as ações de pular, esquivar-se, saltar para evitar obstáculos ou alcançar ambientes seguros. O jogador pode permitir ou escolher a transfiguração do avatar em personagens míticos da floresta amazônica, que possuem superpoderes, inclusive, o usuário possui o comando da mobilidade do personagem no momento do ataque e da defesa, do combate corpo a corpo e individual no jogo contra os seus oponentes. É importante ressaltar que, em todas as fases jogo, à medida que o jogador ganha pontuações, recompensas, vidas, emblemas e medalhas, são emitidos sons ou músicas para representar e avisar o usuário das conquistas e vitórias alcançadas.

Equipamentos e/ou artefatos

O jogador pode adquirir equipamentos para a sobrevivência do personagem no jogo. Por exemplo, no trecho I, quando o personagem cai num buraco, o jogador pode trocar parte de seus pontos por uma picareta, uma palafita ou uma escada feita de galhos de árvores para sair do buraco em que caiu. No trecho II, no momento em que o personagem cai na água, o jogador poderá usar um emblema para adquirir uma canoa com um remo ou uma palafita com varão para flutuar e/ou se locomover sobre a água. No trecho III, o jogador pode permutar um emblema por uma capa protetora ou um uniforme para salvar o personagem durante a passagem pelo fogo na floresta.

Pontuações

• Trecho I

A cada função do ato de pular executada pelo usuário sobre as armadilhas de queda, o jogador adquire pontuação. Se o personagem cair em uma das armadilhas, o jogador perde pontuação, mas pode adquirir instrumentos para ajudá-lo a sair do buraco. A cada animal resgatado das armadilhas de queda, de laço e das jaulas ou gaiolas, o jogador ganha um emblema. A cada cinco animais regatados, os emblemas são permutados por uma medalha.

No confronto com os caçadores, cada vez que o personagem é atingido, o jogador perde pontos. Se o jogador for atingido cinco vezes seguidas, ele perde uma vida. Caso o jogador não seja atingido nenhuma vez durante o combate, então o usuário ganha uma medalha como recompensa.

• Trecho II

Se o jogador conseguir salvar o personagem do gapó por meio da função saltar, à pontuação do usuário são adicionados mais pontos e, como recompensa, o jogador pode recuperar uma vida que porventura tenha perdido. Caso o personagem caia na água, o jogador pode desviar-se dos animais que tentam atacá-lo. À medida que consegue desviar-se de cada animal, ganha pontuação até chegar ao ambiente seguro, seco e terrestre, assim, o jogador pode recuperar a pontuação perdida.

Caso o jogador encontre bombas e explosivos à margem do gapó colocadas pelos caçadores, a desativação desse material explosivo permite que se ganhe a recompensa, que é um emblema. Se o personagem não conseguir escapar e for atacado por algum animal, o jogador perde pontos. A cada cinco vezes que for atingido, o personagem perde uma vida.

• Trecho III

O jogador pode obter, por meio de um emblema, uma capa de proteção ou um uniforme para o personagem se proteger do fogo. À medida que o personagem desvia-se das árvores caindo, vai ganhando pontos; se for atingido, perde pontuação; se salvar animais, ganha emblemas. Durante o conflito com os caçadores nessa fase do jogo, no caso de o personagem ser atingido, o jogador perde pontos; se for atingido cinco vezes seguidas, perde uma vida; sempre que acertar o inimigo, ganha pontos e, caso não seja atingido (se somente atacar), o jogador ganha um emblema.

O quadro de pontuações da fase I do jogo segue da seguinte forma:

Quadro 16 – Pontuação específica da fase I do jogo

FASE I					
Pontuações					
Trecho I		**Trecho II**		**Trecho III**	
Saltar sobre as armadilhas de queda	Ganha 10 pontos em cada salto	Saltar sobre o gapó	Ganha 10 pontos e recupera uma vida	Adquirir capa de proteção ou uniforme	Custa 1 emblema
Cair na armadilha	Perde 5 pontos	Cair no gapó	Perde 5 pontos	Desviar-se das árvores e dos galhos	Ganha 10 pontos
Adquirir instrumentos para sair do buraco	Gasta 1 ponto	Desviar-se dos animais	Ganha 10 pontos	Se o personagem for atingido	Perde 5 pontos
A cada animal resgatado das armadilhas	Ganha 1 emblema	Desativar bombas e explosivos	Ganha 1 emblema	Salvar 1 animal	Ganha 1 emblema
A cada 5 animais resgatados	Ganha 1 medalha ou 1 vida	Se for atacado por animais	Perde 5 pontos	Se for atingido 5 vezes	Perde 1 vida
Se for atingido no confronto	Perde 5 pontos	A cada 5 ataques em que o	Perde 1 vida	Acertar o inimigo	Ganha 5 pontos

		personagem for atingido			
Se for atingido 5 vezes	Perde 1 vida			Derrotar o adversário	Ganha 1 medalha ou 1 vida
Acertar o inimigo	Ganha 5 pontos			Caso não seja atingido nenhuma vez	Ganha 1 medalha
Derrotar o adversário	Ganha 1 medalha ou 1 vida				
Caso não seja atingido nenhuma vez	Ganha 1 medalha				

Fonte: Elaboração da autora (2021).

Fase II - “DESAFIOS PERIGOSOS NA FLORESTA”

Visão Geral

Na fase II, a luta do personagem é contra o desmatamento. O confronto ocorre contra os desmatadores, grileiros e posseiros de terras protegidas por legislação ambiental. O jogador pode adicionar pontos ao *score* do jogo, conquistar recompensas e medalhas para adquirir artefatos e equipamentos para a sua sobrevivência. O jogo apresenta desafios e obstáculos na floresta sob os aspectos prejudiciais do desmatamento causados ao meio ambiente. O objetivo dessa fase do jogo é ajudar o personagem a encontrar a seringueira para recolher o látex.

Regras

Configurações do jogo

O próprio jogo possui o comando do seu gerenciamento automático da função “correr” no início de cada trecho das fases. O jogo está projetado para um único jogador. O sistema de configuração do *software* controla o personagem a uma velocidade fixa nos trajetos dessa fase. Inicialmente, a distância em metros a ser percorrida pelo personagem aparece na tela do dispositivo móvel. Os comandos que o jogador exerce são sobre as ações de ataque e defesa na luta contra os adversários, os movimentos dos braços, das pernas, a emissão dos superpoderes do avatar, pular, esquivar-se, saltar para evitar obstáculos.

No trecho I, o personagem pode esquivar-se, pular, abaixar-se ou desvencilhar-se das árvores derrubadas e daquelas que estão sucumbindo, pois estavam enraizadas com as outras árvores maiores que foram derrubadas. Ainda em toda essa fase do jogo, o personagem tem a opção de transfigurar-se em Saci-Pererê, Caboclinho-da-Mata ou Caipora para o confronto com os desmatadores da floresta. No trecho II, o jogador tem a opção de reflorestar para ganhar recompensas. Nesse trajeto há um combate com os desmatadores e, posteriormente, o autogerenciamento para a recolha de látex.

Equipamentos e/ou artefatos

Durante a passagem pelo terceiro trecho, o usuário poderá utilizar um emblema para trocar por uma capa protetora ou um uniforme para se proteger das queimadas da floresta. Em todos os trechos, ocorrem batalhas entre o personagem protetor da floresta e os desmatadores. Ao final de cada percurso, toca uma música finalizando a etapa e, no visor do dispositivo móvel, aparece o *score* de pontos do jogo.

Pontuações

• Trecho I

O usuário executa o comando de pular, esquivar-se, abaixar ou rastejar por baixo das árvores derrubadas e dos troncos de árvores no meio da floresta amazônica. Nessas situações, a cada acerto, o jogador ganha pontuação. Caso o jogador não consiga desvencilhar o personagem, ele perde pontuações. No momento em que as árvores estão caindo, se o jogador conseguir ajudar o personagem a escapar dessas árvores em queda, é adicionada uma pontuação, se, porventura, o personagem for atingido cinco vezes, então ele perde uma vida.

Durante o combate, o personagem já transfigurado, se for atingido, perde pontuações, se não for atingido nenhuma vez, ganha um emblema ou pode recuperar uma vida. Ao final do trecho, toca uma música ou som para o despertamento do jogador sobre a sua pontuação no jogo.

• Trecho II

Nesse percurso, para o personagem será apresentado o desafio de reflorestar. A cada árvore ou muda plantada, o jogador ganha pontuações. Se forem plantadas cinco árvores, o jogador recebe um emblema como recompensa; a cada dois emblemas, o jogador recebe uma medalha. Mais à frente, o personagem entra em conflito com os desmatadores, grileiros e posseiros e utiliza os seus superpoderes para ajudar e salvar os indígenas que estão em combate. Para cada pessoa que ele resgatar, ganha um emblema; a cada cinco emblemas, automaticamente eles são trocados por uma medalha. Se o personagem for atingido cinco vezes, perde uma vida; se não for atingido nenhuma vez, ganha um emblema ou pode recuperar uma vida. Ao final do trecho, toca uma música ou som para o despertamento do jogador sobre a sua pontuação no jogo.

• Trecho III

Nesse percurso, os desmatadores colocaram fogo na floresta. Ele precisa se desvencilhar dos galhos e árvores que caem sobre ele. O jogador pode trocar um emblema por uma capa de proteção ou um uniforme para o personagem se proteger do fogo. A cada vez que consegue ir desviando-se dos obstáculos, ganha pontuação. Se for atingido, perde pontuação. A cada cinco vezes que for atingido, perde uma vida. Se o jogador conseguir controlar o personagem para salvar os animais do fogo, ganha um emblema por cinco animais resgatados. A cada dois emblemas, ele ganha, à sua escolha, uma medalha ou uma vida como recompensa. Se o personagem for atingido pelo fogo ou por árvores e galhos de árvores, ele perde uma vida a cada cinco vezes que for atingido. Se conseguir desvencilhar-se dos obstáculos, são adicionados mais pontos ao *score* do usuário.

No próximo desafio, será apresentado ao jogador a ação de reflorestar. A cada cinco árvores ou mudas plantadas, o jogador ganha um emblema como recompensa. Com o acúmulo de dois emblemas, o jogador recebe uma medalha. No fim do trecho, ocorre o último combate entre o personagem e os desmatadores. Se, porventura, o personagem for atingido cinco vezes, então ele perde uma vida; se não for atingido nenhuma vez, ao final, ganha uma medalha ou uma vida, à sua escolha. Nesse momento, toca uma música de finalização da etapa.

A seguir, apresentamos, no Quadro 17, a pontuação específica da fase II do jogo digital *TrianguLux*:

Quadro 17 – Pontuação específica da fase II do jogo

FASE II					
Pontuações					
Trecho I		**Trecho II**		**Trecho III**	
Esquivar-se, pular, abaixar ou desvencilhar-se das árvores caídas e que estão sucumbindo	Ganha 10 pontos cada vez que consegue escapar	A cada árvore plantada	Ganha 10 pontos	Adquirir capa de proteção ou uniforme	Custa 1 emblema
Cada vez que é atingido	Perde 5 pontos	A cada 5 árvores plantadas	Ganha 1 emblema	A cada vez que se desvia das	Ganha 10 pontos

				árvores e dos galhos que estão pegando fogo	
Se for atingido 5 vezes	Perde 1 vida	Cada vez que é atingido pelos desmatadores	Perde 5 pontos	Se o personagem for atingido	Perde 5 pontos
Cada vez que é atingido pelos desmatadores	Perde 5 pontos	Se for atingido por 5 vezes no confronto	Perde 1 vida	Salvar 5 animais	Ganha 1 emblema
Se for atingido 5 vezes no confronto	Perde 1 vida	Acertar o inimigo	Ganha 5 pontos	Se for atingido 5 vezes	Perde 1 vida
Acertar o inimigo	Ganha 5 pontos	Resgatar 1 indígena	Ganha 1 emblema	A cada árvore plantada	Ganha 10 pontos
Derrotar o adversário	Ganha 1 medalha ou 1 vida	Resgatar 5 indígenas	Ganha 5 emblemas ou 1 medalha ou 1 vida	A cada 5 árvores plantadas	Ganha 1 emblema
Caso não seja atingido nenhuma vez	Ganha 1 medalha	Derrotar o adversário	Ganha 1 medalha ou 1 vida	Cada vez que é atingido pelos desmatadores	Perde 5 pontos
		Caso não seja atingido nenhuma vez	Ganha 1 medalha	Se for atingido por 5 vezes no confronto	Perde 1 vida
				Acertar o inimigo	Ganha 5 pontos
				Derrotar o adversário	Ganha 1 medalha ou 1 vida
				Caso não seja atingido nenhuma vez	Ganha 1 medalha

Fonte: Elaboração da autora (2021).

Fase III - "TRAVESSIA DO RIO"

Visão Geral

Na fase III do jogo ocorre o conflito entre o personagem e os garimpeiros. Dentre os principais problemas causados, o garimpo causa a deformação da paisagem amazônica, a compactação do solo, a extinção da vegetação, a contaminação do solo com mercúrio, o assoreamento dos decursos de água. Esses elementos serão apresentados no *design* dessa etapa do jogo.

Inicialmente, no contexto do jogo, o personagem precisa atravessar o rio. À margem do rio há uma embarcação para ser usada na travessia. Durante a travessia do rio (no trecho I), aparecem troncos de árvores e balseiros que tentam impedir a passagem. Além disso, a Iara (sereia amazônica que encanta os navegadores) tenta encantá-lo nesse percurso.

No trecho II, logo no início, o seringueiro encontra goiabeiras e mangueiras. O desafio é recolher o máximo de frutas que puder. Nessa trajetória também ocorrem dois confrontos com os garimpeiros. O personagem também pode plantar raízes e vegetais e colher bananas e laranjas-lima no fim do trecho II. Ao avançar no jogo, o personagem utiliza o barco que está à margem do rio. Nas águas turbulentas do rio, o desafio para o seringueiro é desviar-se da pororoca. Nesse segmento, é necessário escapar também da Iara, que tenta encantá-lo na travessia do rio. O objetivo da fase III do jogo é ajudar o personagem a encontrar as árvores frutíferas para colher os frutos.

Regras

Configurações do jogo

No próprio contexto do jogo, o personagem vai ao encontro de uma embarcação (canoa ou barco) à margem do rio. O navegador gerencia a ação de remar, porém, no momento em que é necessário desviar-se dos troncos de árvores e balseiros e escapar do encantamento da Iara, o jogador exerce o comando. No instante em que o seringueiro deixa o barco às margens do rio, o botão automático é ativado, inclusive durante a corrida no fim do trecho I.

Nesse intervalo, as configurações do jogo permitem a emissão de um som que avisa o jogador sobre o término de cada trecho. No início do trecho II, o seringueiro encontra as árvores frutíferas e o comando do jogo passa a ser do jogador para a colheita das frutas. Na continuidade do percurso, o personagem pode transformar-se em personagens míticos que povoam o imaginário dos seringueiros da Amazônia, a fim de adquirir e utilizar os seus superpoderes durante o confronto com os garimpeiros. O desbarrancamento de terra faz com que o personagem caia num fosso com lama. Nesse momento, para se salvar dali, o personagem pode adquirir uma escada feita de troncos de árvores ou uma palafita. O controle do usuário permite que o seringueiro também resgate um animal que está morrendo afogado em meio à lama contaminada, misturada com arsênio e mercúrio.

Mais à frente, sob o comando do jogador, o personagem pode plantar legumes, raízes e vegetais. A função mecânica e automática de correr é ativada após cada desafio. No decorrer da trajetória, ocorre outro combate entre o seringueiro transfigurado com os seus superpoderes e os garimpeiros. No momento desse confronto, o comando do jogo é gerenciado pelo jogador, bem como a colheita das frutas no fim desse trecho.

No terceiro trecho da fase III do jogo, o comando automático "correr" é ativado até que o personagem encontre a embarcação (à sua escolha: barco ou canoa) para atravessar o rio e voltar ao ponto inicial. Durante o trajeto turbulento em decorrência da pororoca, o jogador possui o controle sobre a embarcação para desviar dela ou salvar o personagem, caso ele caia no rio. O jogador também controla o personagem para escapar dos encantos da Iara. O jogo finaliza quando o seringueiro chega à margem do rio, no ponto inicial da fase III.

Equipamentos e/ou artefatos

O jogador pode adquirir equipamentos para a sobrevivência do personagem no jogo. Por exemplo, nos trechos I e III, quando o seringueiro precisa atravessar o rio, o jogador pode adquirir uma embarcação que se encontra às margens do rio. No trecho II, para escapar da depressão e da erosão do solo, o usuário poderá trocar um emblema por uma escada feita de troncos ou por uma palafita.

Pontuações

• Trecho I

Para adquirir uma embarcação, o jogador poderá utilizar um dos seus emblemas adquiridos nas fases anteriores. No momento em que o jogador gerencia as ações do personagem de desviar-se dos troncos de árvores, balseiros no rio sem se chocar com os materiais ou até mesmo de conseguir escapar da Iara no jogo, o jogador adquire pontuação. Se o personagem cair na água, o jogador perde pontuação e poderá salvá-lo, direcionando-o novamente para o barco ou a canoa. O jogador deve escapar dos encantos da Iara, que está no rio à espreita.

O confronto com os garimpeiros ocorre dentro de uma escavação, de um lamaçal. O personagem poderá se transfigurar, à sua escolha, em Caboclinho-da-mata, Mapinguari ou Curupira, além disso, cada um desses seres míticos tem superpoderes. Cada vez que o personagem é atingido, o jogador perde pontos. Se o jogador for atingido cinco vezes seguidas, ele perde uma vida. Caso o jogador não seja atingido nenhuma vez durante o combate, o usuário ganha uma medalha como recompensa. O jogador pode adquirir, por meio da troca de um emblema, uma palafita ou uma escada feita de troncos de madeira para escapar da depressão e erosão no solo e do risco de contaminação com arsênio e mercúrio, devido às atividades do garimpo no meio da selva.

Se o jogador resgatar um animal de dentro do fosso com lama, ele ganha um emblema.

• Trecho II

Se o seringueiro colher frutas, são contabilizados pontos para ele, bem como a plantação de vegetais, legumes, grãos, frutas e raízes favorece o ganho de um emblema. A cada cinco tipos de plantações de sementes diferentes, o jogador ganha uma medalha. Durante o conflito com os garimpeiros, cada vez que o personagem é atingido, o jogador perde pontos. Se o jogador for atingido cinco vezes seguidas, ele perde uma vida. Caso o jogador não seja atingido nenhuma vez durante o combate, o usuário ganha uma medalha como recompensa. O jogador pode utilizar um emblema para adquirir uma palafita ou uma escada feita de troncos de madeira para sair do buraco ou fosso do garimpo. Se o jogador resgatar um animal de dentro do fosso com lama, ele ganha um emblema.

• Trecho III

O jogador pode obter, por meio de um emblema, um barco ou uma canoa. À medida que o personagem desvia-se dos troncos de árvores e balseiros, vai ganhando pontos; se for atingido, perde pontuação. O jogador também controla o personagem para escapar dos encantos da Iara: se conseguir, ganha pontuação; se não conseguir escapar, perde pontos ao cair na água. Em meio à turbulência das águas, o jogador possui o controle sobre a embarcação para desviar-se da pororoca e ganhar uma medalha, caso sobreviva, ou salvar o personagem, caso ele caia no rio. Nesse último caso, ele perde uma vida. O jogo finaliza quando o seringueiro chega à margem do rio, no ponto inicial da fase III.

Evolução da pontuação

O jogador, durante os desafios apresentados no jogo, poderá adquirir pontuações, emblemas, medalhas, inclusive para utilizá-las na troca de equipamentos e artefatos. Ao longo do jogo, o *upgrade* dos pontos ficará fixo no visor do dispositivo móvel do jogador, que avisará constantemente sobre os próximos obstáculos e ajudará o usuário com informações sobre a dinâmica do jogo. No fim de cada fase do jogo, o jogador terá acesso ao *score* dos pontos no *game*.

Evolução do número de jogadores

Nas próximas versões do jogo, ele será programado para aceitar dois ou mais jogadores para competirem entre si.

Evolução da ergonomia do jogo

O aprimoramento do processo de jogabilidade, as estranhezas, a complexidade, o tempo gasto nas manipulações das ações do personagem e os *bugs*.

Evolução pedagógica

O aperfeiçoamento posterior do jogo permitirá a abordagem de outras áreas do conhecimento a serem tratadas sob uma perspectiva educacional.

O Quadro 18 apresenta as pontuações específicas da fase III do jogo digital *TrianguLux*:

Quadro 18 – Pontuação específica da fase III do jogo

FASE III					
Pontuações					
Trecho I		**Trecho II**		**Trecho III**	
Adquirir embarcação	Custa 1 emblema	A cada fruta colhida	Ganha 1 ponto	Adquirir 1 barco ou 1 canoa	Custa 1 emblema
A cada vez que se desvia dos troncos de árvores e balseiros no rio	Ganha 10 pontos	Plantar vegetais, legumes, grãos, frutas e raízes	Ganha 1 emblema	A cada vez que se desvia dos troncos de árvores e balseiros no rio	Ganha 10 pontos
Cada vez que é atingido pelos obstáculos no rio	Perde 5 pontos	Cada vez que é atingido pelos garimpeiros	Perde 5 pontos	Cada vez que é atingido pelos obstáculos no rio	Perde 5 pontos
Escapar da Iara	Ganha 10 pontos	Se for atingido 5 vezes no confronto	Perde 1 vida	Escapar da Iara	Ganha 10 pontos
Cair no rio	Perde 5 pontos	Acertar o inimigo	Ganha 5 pontos	Cair no rio	Perde 5 pontos
Cada vez que é atingido pelos garimpeiros	Perde 5 pontos	Derrotar o adversário	Ganha 1 medalha ou 1 vida	Sobreviver à pororoca	Ganha 1 medalha

Se for atingido 5 vezes no confronto	Perde 1 vida	Caso não seja atingido nenhuma vez	Ganha 1 medalha	Cair na pororoca	Perde 1 vida
Acertar o inimigo	Ganha 5 pontos	Se cair no fosso do garimpo	Perde 5 pontos		
Derrotar o adversário	Ganha 1 medalha ou 1 vida	Adquirir 1 palafita ou 1 escada feita de troncos de madeira	Gasta 1 emblema		
Caso não seja atingido nenhuma vez	Ganha 1 medalha	Salvar um animal	Ganha 1 emblema		
Se cair no fosso do garimpo	Perde 5 pontos				
Adquirir 1 palafita ou 1 escada feita de troncos de madeira	Gasta 1 emblema				
Salvar um animal	Ganha 1 emblema				

Fonte: Elaboração da autora (2021).

APÊNDICE B – ROTEIRO DO LIVRO – “LUX: O PROTETOR DA FLORESTA”

Roteiro do livro: “Lux: o protetor da floresta”

Autores:	Antônia Lília Soares Pereira, Carla Soares Pereira e Pablo Marquinho
Quantidade de capítulos:	5 capítulos.
Quantidade de páginas:	aproximadamente 75 páginas.
Ilustrações:	sim (em torno de 10 a 12 ilustrações)
Ilustrador:	Pablo Marquinho
Personagens:	Lux, Nenê Gordo (vizinho), Mariazinha (irmã do Lux), Velho da Floresta, Kaxi (índio da etnia Kaxinawá), animais, personagens lendários (Matinta Pereira, Curupira, Saci-Pererê, Caboclinho- da-Mata, Caipora, Iara)
Espaço da história:	Floresta Amazônica
Tempo da narrativa:	Século XX
Sinopse:	A narrativa trata da vida do personagem Lux, suas vivências e aventuras na floresta amazônica. O livro explica as culturas, o ambiente em que os seringueiros vivem, como vivem, os aspectos culturais e identitários, os desafios quanto à sobrevivência e à proteção da fauna e da flora, bem como a linguagem característica dos povos da floresta. A obra traz reflexões que envolvem desde questões socioambientais até a aprendizagem em Matemática.

ORGANIZAÇÃO DOS CAPÍTULOS DO LIVRO

Capítulo 1

Lux é um jovem que mora na floresta amazônica. Ele combate madeireiros invasores usando abelhas. Lux visita seu vizinho e ouve histórias míticas.

Educação Matemática: Lux apresenta as unidades de medida utilizadas pelos seringueiros.

Capítulo 2

Lux encontra a sua irmã que o convida para pescar. Na travessia do rio, ele encontra obstáculos. Lux fica com medo de voltar para casa sozinho à noite.

Educação Matemática: A irmã de Lux costura uma calça. O conhecimento matemático relaciona as medidas utilizadas por ela para produzir roupas.

Capítulo 3

Lux encontra indígenas da etnia Kaxinawá na floresta, enquanto recolhia ouriços de castanha. Lux toma Ayahuasca com os índios Kaxinawás. Lux tem alucinações com o Saci-Pererê.

Educação Matemática: A interessante pintura corporal dos índios com o formato das formas geométricas.

Capítulo 4

Lux entra num caminho que é um labirinto, fica temeroso com o vulto que vê na floresta, pensa que é o Curupira. Ele se perde na mata e encontra uma pessoa que lhe ajuda a encontrar o caminho de volta.

Educação Matemática: As formas geométricas presentes na vitória-régia e nas folhas de outras plantas da floresta amazônica.

Capítulo 5

Lux vai cortar e colher seringa com o seu irmão. Eles escutam um barulho, vento forte e fogem, pensam que é a Matinta-Pereira.

Educação Matemática: Lux fica curioso para saber quanto mede a altura de uma seringueira gigante que encontra na floresta, ele encontra meios para medir a altura aproximada da árvore.

Previsão de publicação: Até o mês de julho de 2022.