



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JANAINA NUNES DIAS

**UM ESTUDO SOBRE ALGUNS MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL
E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES**

ARAGUAÍNA

2021

JANAINA NUNES DIAS

**UM ESTUDO SOBRE ALGUNS MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL
E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES**

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco.

ARAGUAÍNA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

- D541e Dias, Janaina Nunes.
Um estudo sobre alguns modelos de crescimento populacional e algumas de suas aplicações. / Janaina Nunes Dias. – Araguaína, TO, 2021.
76 f.
- Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2021.
Orientador: Alvaro Julio Yuera Hanco
1. Modelagem Matemática. 2. Crescimento Populacional. 3. Equações Diferenciais Ordinárias. 4. Modelo de Malthus e Modelo de Verhulst. I. Título
- CDD 510**

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizada desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

JANAINA NUNES DIAS

**UM ESTUDO SOBRE ALGUNS MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL
E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES**

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

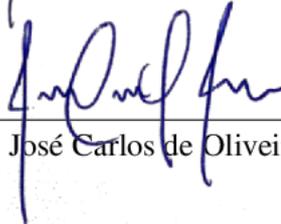
Orientador: Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco.

Aprovada em: 26 / 02 / 2021.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco (orientador)



Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior



Prof. Dra. Samara Leandro Matos da Silva

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

Olhando para tudo que já se passou, eu vejo o quanto o meu Deus tem me mostrado o Seu poder e Sua infinita bondade. Obrigada a minha padroeira, Nossa Senhora Aparecida, por está sempre intercedendo por mim. Obrigada aos meus pais celestiais!

Um simples obrigada não explica a imensa gratidão que tenho aos meus familiares e amigos, vocês merecem muito mais! A minha mãe, Raimunda Nunes, eu devo tudo a você, toda força, compreensão e por cada abraço acolhedor. Ao meu pai, Raimundo Ferreira, obrigada, sempre juntos e mais fortes. Ah, agradeço ao meu amado irmão Professor Jodailton Nunes que sempre sonhou comigo, obrigada por apoiar-me e ao meu querido Jodaci Nunes, primogênito da família, sou agradecida pelo amor e carinho. Fernando Nunes, meu afilhado, agradeço por todos os sorrisos e abraços apertados que me deste. Ah... conseguimos!

Agradeço a minha família tocantinense. Roberto Carlos, Marilza Gomes e Thamires Gomes obrigada por todo o acolhimento, conselhos, amor e conhecimentos compartilhados. Sou muito grata a cada palavra, abraços e carinho! Em especial, aquela que nunca me deixou só, sempre ao meu lado em cada decisão, com quem compartilho momentos especiais e risadas doces, além de prima, uma das minhas melhores amigas, Thayellen Gomes.

Ao Prof. Dr. Álvaro Yucra, meu orientador, agradeço imensamente pela amizade, conhecimento compartilhado e pelas palavras de incentivos, foram elas que a cada orientação me fortificavam. Obrigada aos professores Samara Leandro e José Carlos e todos os outros docentes do Colegiado, obrigada pela didática e ensinamentos.

A UFT nos uniu, chegamos na universidade e construímos uma família: a turma 2017.1. Agradeço imensamente, aos meus colegas Erica Cristina, Huan Elvis, Djane Souza, Sarah Miranda, Pablo Henrique, em especial, Ronaldo Araújo, Daniel Alves, Guilherme Tavares, Átalia Araújo, João Paulo, Gabriella Fernandes, Dáffny Lorrany e Pedro Darc. Não posso deixar de expressar aqui a minha gratidão também aos colegas de outras turmas, em que o carinho é imenso: Victor Wender, Eliabe Santos e Aico Alves. Obrigada pelo companheirismo, momentos bons, corujões em busca de conhecimentos, viagens fantásticas e muito carinho!

Gratidão a Deus por ter colocado na minha vida três colegas de curso, que hoje somos uma irmandade, compomos o quarteto fantástico: Maiza Rodrigues, Bruna Pires, Ludemilla Almeida e eu. Amigas, obrigada por todo o amor. Desejo a vocês muito sucesso, vocês são muito importantes para mim.

“Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei sobre ombros de gigantes”

Isaac Newton

RESUMO

As Equações Diferenciais Ordinárias são utilizadas frequentemente para solucionar problemas cotidianos, explicam os dados de fenômenos realísticos. O objetivo desta monografia é destacar a importância da Matemática, essencialmente as Equações Diferenciais Ordinárias, apresentando a sua aplicação no crescimento populacional de determinada população escolhida. No decorrer do trabalho, utilizamos definições e teoremas em relação à classificação das Equações Diferenciais, solução de uma Equação Diferencial Ordinária e o Problema de Valor Inicial, que julgamos necessárias, através do Modelo de Malthus e do Modelo de Verhulst, para expressar e analisar aplicações em problemas da atualidade. Por fim, realizaremos simulações de dados, tais como a projeção do crescimento efetivo do rebanho (cabeças) de bovinos no Brasil e a projeção da perspectiva do crescimento populacional da América do Sul, de modo a analisar se os dados obtidos condizem com os reais.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Crescimento Populacional. Equações Diferenciais Ordinárias. Modelo de Malthus. Modelo de Verhulst.

ABSTRACT

Ordinary Differential Equations are often used to solve everyday problems, explain the data of realistic phenomena. The objective of this monograph is to highlight the importance of Mathematics, essentially the Ordinary Differential Equations, presenting its application in the population growth of a chosen population. During the work, we used definitions and theorems in relation to the classification of Differential Equations, solution of an Ordinary Differential Equation and the Initial Value Problem, which we deem necessary, through the Malthus Model and the Verhulst Model, to express and analyze applications in today's problems. Finally, we will carry out data simulations, such as the projection of the effective growth of the cattle herd (heads) in Brazil and the projection of the population growth perspective in South America, in order to analyze whether the data obtained are consistent with the real ones.

Keywords: Mathematical Modeling. Population growth. Ordinary Differential Equations. Malthus model. Verhulst model.

Lista de Figuras

2.1	Isaac Newton.	15
2.2	Gottfried Wilhelm Leibniz.	15
2.3	Leonhard Euler.	16
2.4	Solução gráfica do Exemplo 3.	34
2.5	Retângulo R	35
2.6	A condição do Teorema da Existência.	36
3.1	Esquema simplificado de Modelagem Matemática.	39
3.2	Etapas do processo de modelagem com equações diferenciais.	42
3.3	Thomas Malthus.	43
3.4	Projeção do crescimento populacional do Brasil, em milhões.	48
3.5	Pierre François Verhulst.	49
3.6	Projeção do crescimento da árvore.	58
4.1	Projeção do crescimento efetivo dos rebanhos de bovinos no Brasil, em milhões.	63
4.2	Projeção do crescimento da população da América do Sul.	71

Lista de Tabelas

3.1	Censo demográfico da população do Brasil, em milhões.	46
3.2	Modelo de Malthus e o Censo demográfico da população do Brasil, em milhões.	48
3.3	Crescimento de uma árvore.	55
3.4	Dados para o ajuste linear.	56
3.5	Dados para a curva logística.	57
4.1	Censo demográfico do crescimento efetivo dos rebanhos de bovinos no Brasil, em milhões.	61
4.2	Modelo de Malthus e o censo demográfico do crescimento efetivo do rebanho de bovino brasileiro, em milhões.	62
4.3	Perspectiva do crescimento da população da América do Sul, em milhões.	65
4.4	Dados para o ajuste linear.	66
4.5	Dados para a curva logística.	68
4.6	Modelo de Verhulst e o censo demográfico da perspectiva populacional da América do Sul, em milhões.	70

Sumário

1	Introdução	12
2	Noções Preliminares	14
2.1	Uma Breve História sobre as Equações Diferenciais (ED)	14
2.2	As Equações Diferenciais (ED)	17
2.2.1	Classificação das Equações Diferenciais	17
2.3	Solução de uma Equação Diferencial Ordinária	20
2.3.1	Variáveis Separáveis	20
2.3.2	Equação Diferencial Ordinária Exata	22
2.3.3	Fator Integrante	25
2.3.4	Equação Diferencial Ordinária Linear Homogênea	26
2.3.5	Equação Diferencial Ordinária Linear Não-Homogênea	28
2.4	Problema de Valor Inicial (PVI)	31
2.4.1	Teorema de Existência e Unicidade	34
3	Modelagem Matemática	39
3.1	Modelos Matemáticos	41
3.2	Modelos de Crescimento Populacional	42
3.2.1	Modelo de Malthus	43
3.2.2	Modelo Logístico Contínuo (Verhulst)	49
4	Aplicações Populacionais	60
4.1	Modelo Malthusiano: crescimento efetivo dos rebanhos (cabeças) de gado no Brasil	60
4.2	Modelo de Verhulst: perspectivas do crescimento da população da América do Sul	64
5	Considerações Finais	72
	Referências	74

Capítulo 1

Introdução

No decorrer da trajetória de vida estudantil, desde a educação básica à licenciatura, ouvem-se várias indagações sobre a necessidade de aprender determinadas fórmulas e distintos conteúdos matemáticos, questionamentos diante compreensão dos estudantes em relação a esta ciência: “Onde a Matemática está presente no cotidiano? Para que aprender fórmulas matemáticas?”. Perguntas como estas instigam a buscar a relação da Matemática com o dia a dia. A Matemática concomitante com suas generalizações está presente na rotina diária muito além da sala de aula. Para visualizar a Matemática, não é necessário observar um número, ela se faz presente, de maneira explícita e implícita, na arte, na natureza, na música, em várias outras áreas. Por exemplo, Leonardo da Vinci em sua obra de 1495, “A Última Ceia”, usufrui da simetria, destacando ao centro Jesus Cristo e em ambos os lados d’Ele o mesmo quantitativo de pessoas. Outro exemplo que pode ser observado facilmente é a sequência de Fibonacci, apresentada por um matemático italiano, essa sequência pode ser vista, por exemplo, na concha de um caramujo, onde cada espaço novo formado tem a dimensão da soma dos dois antecessores.

Dispomos de um arsenal de informações, que aumenta a cada segundo. A Matemática em sincronia com suas generalizações apresenta-se em grande quantidade desses dados, assim, é importante destacar a influência do conhecimento matemático na análise de inúmeras situações que possibilitam o raciocínio no desenvolvimento e edificação de fatos.

Neste trabalho, objetivamos principalmente apresentar a aplicabilidade das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) no cotidiano, expondo uma contextualização histórica de alguns fatos e contribuições de grandes matemáticos para estudos das Equações Diferenciais (ED), bem como conceitos, noções iniciais e aplicações envolvendo as EDO’s.

As Equações Diferenciais e os sistemas dinâmicos são exemplos que a Matemática tem contribuído para explicar fatores ocorridos no cotidiano, já que o Cálculo Diferencial compõe um tópico amplo com temáticas de vastíssimos projetos, e que notadamente é abordado de diversas maneiras.

As Equações Diferenciais Ordinárias são ferramentas matemáticas para diversos estu-

dos, diante de inúmeros questionamentos, explorados em várias áreas do conhecimento, por exemplo, na Física, Engenharias, Biologia e outras áreas de conhecimento. E em destaque na Matemática Pura vem adquirindo uma atenção especial na Análise.

Observando várias concepções sobre as Equações Diferenciais Ordinárias aplicadas em temas perceptíveis na sociedade, o trabalho concernirá em uma abordagem quantitativa e bibliográfica. Segundo ([31] p.35) “a pesquisa quantitativa é aquela que se caracteriza pelo emprego de instrumentos estatísticos, tanto na coleta como no tratamento dos dados, e que tem como finalidade medir relações entre as variáveis”. Seguindo esse pressuposto, investigamos dados quantificáveis, analisando criticamente cada questão observada. Quanto aos procedimentos adotados, desenvolvemos uma pesquisa bibliográfica, na qual o seu objetivo é o acesso aos dados e informações ligadas ao tema estudado de maneira direta e prática. Deste modo, o pesquisador tende a analisar os conteúdos com precisão.

Com esse intuito, apresentaremos os conceitos, características, classificações e exemplos de Equações Diferenciais Ordinárias, usufruindo de alguns dados e fatos conhecidos no cotidiano. Em seguida, expomos alguns modelos populacionais como o Modelo de Malthus e o Modelo de Verhulst, explorando um pouco de seus respectivos contextos históricos, resolvendo suas equações e exemplificando-as. Logo depois, são apresentadas as aplicações desses modelos matemáticos em situações reais, como o crescimento da população da América do Sul e o crescimento de rebanhos bovinos no Brasil.

No Capítulo 2, além de apresentarmos um breve histórico relatando o desenvolvimento das Equações Diferenciais, exibimos definições, conceitos e exemplos básicos para melhor entendimento deste trabalho.

No Capítulo 3, estudaremos conceitos da Modelagem Matemática, essencialmente os modelos de crescimento populacional, onde as Equações Diferenciais Ordinárias são aplicadas. Apresentamos ainda, exemplos para assimilação das noções e propriedades relativas dos Modelo de Malthus e Modelo de Verhulst, onde construiremos quadros com dados e gráficos.

No Capítulo 4, estudamos de forma detalhada algumas aplicações dos modelos de crescimento populacional. Apresentamos análises de dados sobre o crescimento efetivo dos rebanhos de gado brasileiro através do Modelo Malthusiano e de dados sobre a perspectivas do crescimento da população da América do Sul por via do Modelo de Verhulst. Para uma melhor leitura deste trabalho, sugerimos ter um conhecimento básico de Equações Diferenciais Ordinárias, noções de Cálculo e Álgebra Linear.

Os gráficos e figuras aqui apresentados foram realizadas por meio dos softwares GeoGebra, Microsoft Word e o Microsoft Excel.

Capítulo 2

Noções Preliminares

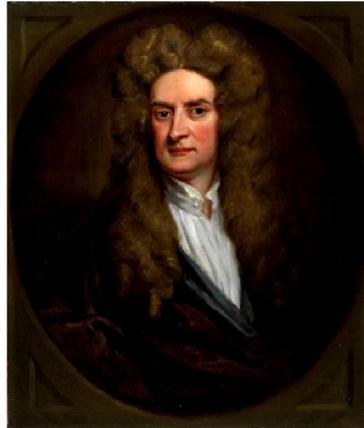
Neste capítulo serão explanadas definições e observações documentadas, incluindo o contexto histórico, resultados exordiais para embasar o entendimento dos assuntos posteriores. Na seção inicial, discutiremos as Equações Diferencias (ED), abordando acerca de participações e colaborações de matemáticos famosos. Logo após, na seção ulterior perscrutaremos alguns conteúdos para auxiliar no entendimento primordial dos modelos matemáticos que traremos nos capítulos posteriores. O desenvolvimento deste capítulo se encontra baseado nas referências [6, 17, 32].

2.1 Uma Breve História sobre as Equações Diferencias (ED)

Em meados do século XVII, Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) iniciaram um estudo sobre as Equações Diferencias (ED). Foram reconhecidos e intitulados como descobridores do Cálculo pelo fato de aprimorarem estudos e formalizarem concepções primordiais de outros matemáticos. Naqueles tempos, os meios de comunicações eram restritos, a maioria da população usufruía de correspondências, algo que demorava muito tempo para chegar ao destino. Como moravam em lugares distintos e a uma distancia longa, ambos desenvolviam o Cálculo de modo individual.

Isaac Newton, nascido na Inglaterra, desde o início da sua vida estudantil dedicou-se a desenvolver estudos em diversas as áreas, destacando-se em Matemática e Física. Além destas, outras ciências se destacou, como na Filosofia natural, Astronomia, Teologia e Alquimia. Vários estudos que hoje temos acesso foram desenvolvidos por ele, como o teorema binomial, cálculo infinitesimal e a lei da gravidade, enunciando ainda as Leis do Movimento e caracterizando os fenômenos óticos. Durante muito tempo, Newton desenvolveu estudos sobre a Alquimia associando-a com a astrologia, física, astronomia e teologia. Por volta de 1662, relatou sobre a criação do Cálculo, por meio de cartas, com Leibniz, motivando uma série de atritos aos dois.

Figura 2.1: Isaac Newton.



Fonte: Wikipedia (2020).

Gottfried W. Leibniz, nascido na Alemanha, desde muito jovem já demonstrava seu interesse pelos números, desenvolvedor de vários conceitos matemáticos e teorias importantes. Deu origem a uma máquina de calcular aprimorando suas funcionalidades denotando várias anotações matemáticas. Quando Leibniz publicou sua obra em relação ao Cálculo Diferencial e Integral, foram apresentados vários relatos sobre o possível fato que houve apropriação indevidamente da obra, isso por que em 1663, Leibniz teve acesso ao trabalho de Newton e de seu professor Barrow.

Figura 2.2: Gottfried Wilhelm Leibniz.



Fonte: Wikipedia (2020).

Leibniz, autodidata matemático, publicou os resultados fundamentais do Cálculo independentemente em 1684, antes de Newton mostrar que foi o primeiro a descobrir esse fato que hoje é fundamental para vários problemas que anteriormente mostravam não ter soluções. Observando atentamente, constata-se que esses questionamentos posteriormente direcionavam para algumas equações com variáveis que sujeitam-se a outras, originando assim as primeiras

EDO's.

Com o passar dos anos, Leibniz descreveu a notação que utilizamos nos dias atuais utilizada para citar as mínimas diferenças possíveis: $\frac{dy}{dx}$ e “Descobriu o método de separação de variáveis em 1691, a redução de equações homogêneas a equações separáveis em 1691 e o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem em 1694.” ([6] p. 53)

Com o decorrer do tempo, no século XVIII, Leonhard Euler, nascido no ano de 1707 em Basileia, destacou-se por ser um importante cientista suíço, visto como um dos mais memoráveis estudiosos da Matemática, desenvolveu pesquisas, baseando-se nos estudos de Newton com a aplicabilidade das Equações Diferenciais. Euler apresentou gigantescos avanços no Cálculo em seus livros intitulados *Institutiones calculi differentialis* (Petersburgo, 1755) e *Institutiones calculi integralis* (Petersburgo, 1768-1770, 3 volumes)

Durante os anos de 1734 a 1769, Euler com métodos fecundos e diversos trabalhos, apresenta estudos com um vasto campo de aplicações e pesquisas matemáticas. De acordo com [6], no período de 1734 a 1735, Euler identificou as circunstâncias para que as Equações Diferenciais de primeira ordem sejam exatas e precisas, além de desenvolver a teoria dos fatores integrantes. Dedicado aos seus projetos, em 1743, encontrou a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes. Descoberta essa que contribuiu para, em 1750 a 1751, solucionar as equações não homogêneas. Nesse período, foi o início do uso das séries de potências para resolver as Equações Diferenciais. Após um intervalo de tempo de dezoito anos, em 1768 até o ano posterior, exibiu um modelo numérico com o objetivo de solucionar as equações de modo aproximado.

Figura 2.3: Leonhard Euler.



Fonte: Wikipedia (2020).

Posteriormente, muitos estudos mostraram métodos elementares para solucionar as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's), desenvolvendo a abrangência de aplicações em diversas outras áreas de conhecimento, levando a conceitos investigativos diante a existência e a

unicidade. A presença das ED é notória em diversificados estudos e áreas, principalmente na Engenharia, Física, Medicina, Biologia, Economia, Química e diversos outros campos.

As equações diferenciais são divididas em dois tipos: as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) contendo apenas funções de uma única variável e diferenciais da mesma e as Equações Diferenciais Parciais (EDP's) que apresentam derivadas envolvendo mais de uma variável.

As equações diferenciais de primeira ordem foram classificadas por Newton, de três maneiras:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.1)$$

Seguindo com o desenvolvimento do estudo, Isaac Newton se assegurando na Mecânica, solucionou a (2.1) usufruindo de séries infinitas, vendo que $f(x, y)$ trata-se de um polinômio.

2.2 As Equações Diferenciais (ED)

Nesta seção, apresentamos um estudo sobre Equações Diferenciais, explorando definições e exemplos que são essenciais para a construção dos conceitos, além do entendimento primordial que julgamos importante para compreensão deste trabalho.

Definição 2.1. É dita uma Equação Diferencial (ED) a equação contendo derivadas ou diferenciais de uma função desconhecida, ou seja, a incógnita da equação.

Exemplo 2.2. Consideremos as seguintes Equações Diferenciais:

i) $\frac{dx}{du} + \frac{dy}{du} = 2x + y$, x e y são variáveis dependentes e u é a independente.

ii) $\frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial y} = 2x - 4y$, t é a dependente e x e y as variáveis independentes.

2.2.1 Classificação das Equações Diferenciais

De acordo com classificação das Equações Diferenciais segundo Zill, temos:

i) **Classificação por Tipo**

Definição 2.3. Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação diferencial que contém unicamente derivadas ordinárias de uma ou mais funções desconhecidas em relação a apenas uma variável.

Exemplo 2.4.

- $\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{k} \right) N;$
- $\frac{dy}{dx} + 2xy = 0 .$

Ao longo do trabalho serão explorados outros exemplos de EDO's importantes para encontrar soluções dos modelos analisados.

Definição 2.5. Equação diferencial parcial (EDP) trata-se de uma equação envolvendo derivadas parciais de uma ou mais funções desconhecidas de duas ou mais variáveis independentes.

Exemplo 2.6. A seguir, apresentamos as seguintes EDP's:

- $\frac{\partial u}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$ (Equação do calor)
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7 \frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0 .$

ii) Classificação por Ordem

Nomeia-se à maior das ordens das derivadas que nela aparecem de ordem da equação diferencial, com a possibilidade de ser de 1º, 2º, ..., n -ésima ordem.

Exemplo 2.7. Consideremos a seguinte Equação Diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + 5y = \ln(x)$, e destacamos que:

- o termo $\frac{d^2y}{dx^2}$ corresponde a segunda ordem;
- o termo $\frac{dy}{dx}$ corresponde a primeira ordem.

Observação 2.8. Utilizando símbolos podemos apresentar uma EDO de n -ésima ordem em uma variável dependente na forma geral

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

em que:

- F = função de valores reais de $n + 2$;

- $y^{(i)} = \frac{d^i y}{dx^i}$, onde $i = 1, 2, \dots, n$.

Exemplo 2.9. Consideremos a seguinte equação $y''' + 10e^x y'' + y' = x^2$, que é uma equação diferencial de terceira ordem para $y = u(x)$.

Deste modo, pode ser utilizada a forma que mais convém diante do propósito analisado.

iii) Classificação por Linearidade

Definição 2.10. Uma equação diferencial pode ser linear ou não linear. É considerada linear se as incógnitas e suas possíveis derivadas se apresentam de maneira linear. Exemplificando, temos uma equação ordinária de enésima ordem que se trata de uma equação que apresenta a seguinte estrutura:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

As equações diferenciais ordinárias que não atendem essa forma apresentada são equações não lineares.

Uma EDO é considerada linear de primeira ordem quando ela apresentar a seguinte forma:

$$y' + m(x)y = n(x), \quad (2.2)$$

onde consideramos m e n quaisquer funções dadas de x .

De acordo com [17] (p.21) a função $n(x)$ pode está representando força e a solução $y(x)$ representando uma corrente elétrica ou outra característica física. Na Engenharia se utiliza bastante os conceitos de entrada (*input*) ao relacionar com $n(x)$ e a $y(x)$ como saída (*output*). É utilizado até mesmo um modelo de transformação, onde há um processo que recebe entradas e com valores inerentes as transformam em saídas (input – transformação – output).

Exemplo 2.11.

- $x^2 y'' + 2xy' + 3y = 0$, uma EDO de 2º ordem e linear.
- $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y}$, uma EDP de 4º ordem e linear.
- $\text{sen } y'' + y = 0$, uma EDO de 2º ordem, não linear.

2.3 Solução de uma Equação Diferencial Ordinária

Definição 2.12. Uma solução de uma equação diferencial ordinária de ordem n

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

é uma função que possui, no mínimo, n derivadas, contínuas no intervalo $]a, b[$, que ao ser substituídas em uma EDO de ordem n reduz a equação a uma identidade

Introduzindo a ideia de solução de Equações Diferenciais, consideramos que a equação diferencial ordinária de primeira ordem (2.1), onde f é uma função que depende apenas de x , isto é, $f(x, y) = g(x)$. Logo, obtemos a equação

$$\frac{dy}{dx} = g(x),$$

que é solucionada também utilizando a integração, com o método de separação de variáveis.

Para solucionar uma equação diferencial de variáveis separáveis, analisamos se $g(x)$ trata-se de uma função contínua e em seguida integramos ambos os membros da equação:

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int g(x) dx = G(x) + C,$$

onde:

- $G(x)$ é a primitiva de $g(x)$;
- C é uma constante.

2.3.1 Variáveis Separáveis

Definição 2.13. Uma equação diferencial de primeira ordem é separável se puder ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)},$$

ou então, como Leibniz formalizou:

$$f(y)dy = g(x)dx.$$

Apresentada também na forma $\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$, podemos fatorar em funções o coeficiente articulado a cada diferencial.

Exemplo 2.14. Notemos que $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$ é uma equação separável e que é possível fatorar a função, onde:

- $f(x) = -4x$;
- $g(x) = y^2$.

Para solucionar, o primeiro passo é separar as variáveis:

$$dy = -4xy^2 dx,$$

$$\frac{dy}{y^2} = -4x dx.$$

Integrando ambos os membros da igualdade, temos:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int -4x dx,$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int -4x dx,$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} + C_1 = -4 \left(\frac{x^2}{2} + C_2 \right),$$

$$\frac{-1}{y} + C_1 = \frac{-4x^2}{2} - 4C_2,$$

$$\frac{-1}{y} = -2x^2 - 4C_2 - C_1,$$

$$\frac{-1}{y} = -2x^2 + C_3,$$

$$(-2x^2 + C_3) y = -1,$$

$$y = \frac{-1}{-2x^2 + C_3}.$$

Então a solução da equação é $y = \frac{1}{2x^2 - C}$.

Exemplo 2.15. Consideremos a Equação Diferencial Ordinária $\frac{dy}{dx} = x - 2y$, e notemos que $f(x, y) = x - 2y$, isto é, uma subtração de funções não constantes de x e y . Não é satisfeita a definição, dado que não podemos apresentar o produto de duas funções, uma que dependa apenas de x e outra função que dependa somente de y . Então, trata-se de uma equação não separável.

2.3.2 Equação Diferencial Ordinária Exata

Consideremos uma EDO de primeira ordem

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0,$$

ao substituirmos $dy = y'dx$, obtemos a equação

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (2.3)$$

chamada de equação diferencial exata se existe uma função $u(x, y)$, tal que

$$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy. \quad (2.4)$$

Observação 2.16. Se a Equação Diferencial Ordinária $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ for exata, então de acordo a (2.3) e (2.4), existe uma função $u(x, y)$, tal que

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

onde

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y). \end{cases} \quad (2.5)$$

Daqui, (2.3) pode ser escrita da seguinte forma $du = 0$, conseqüentemente $u(x, y) = C$.

Se considerarmos M e N funções contínuas e que possuem derivadas contínuas em um retângulo $R: \alpha < x < b, \gamma < y < \delta$ do plano xy , calculando a derivada parcial de M em relação a y e N em relação a x , obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

De acordo com a suposição de continuidade, as segundas derivadas parciais são iguais.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Esta condição, se torna uma necessária e suficiente para que (2.3) seja uma EDO exata.

Se a EDO (2.3) for exata, para determinar a função $u(x, y)$, temos que considerar as equações $du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ e (2.5). Ao integrar a primeira expressão de (2.5) em relação a x , obtemos:

$$\int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int M(x, y) dx,$$

daqui,

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y), \quad (2.6)$$

onde $g(y)$ é a constante de integração.

Observação 2.17. Para obter o valor de $g(y)$, derivamos a função u em relação a y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) + g'(y).$$

Igualando a N , de acordo a (2.5), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) + g'(y) = N(x, y),$$

$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right).$$

Exemplo 2.18. A seguir, consideremos a seguinte EDO

$$2xydx + (x^2 - 2)dy = 0, \quad (2.7)$$

Notemos que

Temos

- $M(x, y) = 2xy$,
- $N(x, y) = x^2 - 2$.

Para verificar se (2.7) é uma EDO exata, temos que verificar se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Dado que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x,$$

e

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x,$$

resulta que a EDO (2.7) é exata.

Para encontrar a solução de (2.7), consideremos a expressão (2.6), de forma que

$$u(x, y) = \int 2xy dx + g(y) = C,$$

$$u(x, y) = x^2y + g(y) = C, \quad (2.8)$$

derivando (2.8) em relação a y , tal que $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(x^2y)}{\partial y} + g'(y) = x^2 - 2,$$

daqui,

$$x^2 + g'(y) = x^2 - 2,$$

logo,

$$g'(y) = -2.$$

Portanto, $g(y) = -2y$.

Ao substituirmos em (2.8), resulta que

$$x^2y - 2y = C$$

é a solução geral da EDO (2.7).

Exemplo 2.19. Consideremos a Equação Diferencial Ordinária

$$xy dx + (2x^2 + 6y^3) dy = 0. \quad (2.9)$$

Observemos que

- $M(x, y) = xy$,
- $N(x, y) = 2x^2 + 6y^3$.

Analisando a condição necessária e suficiente para que (2.9) seja uma EDO exata, notamos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

pois

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x,$$

e

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 4x.$$

Portanto a equação diferencial (2.9) não é exata, no entanto podemos multiplica-la por y^3 , obtendo

$$xy^4 dx + (2x^2y^3 + 6y^6)dy = 0. \quad (2.10)$$

Notemos que (2.10) é uma equação diferencial ordinária exata. Esse fato ocorreu pois multiplicamos a uma Equação Diferencial não-exata, que pode ser escrita na forma

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (2.11)$$

por uma função $F(x, y)$. Daqui, obtemos a nova Equação Diferencial Ordinária Exata

$$FPdx + FQdy = 0.$$

A função $F(x, y)$ é chamada de **fator integrante** da equação (2.11).

2.3.3 Fator Integrante

Como vimos anteriormente, existem casos de EDO's não exatas, escritas da forma (2.11) que podem se tornar exatas, para tal fim, basta multiplicarmos essa equação não exata por uma função $F(x, y)$ chamada de fator integrante, obtendo a EDO exata

$$FPdx + FQdy = 0$$

que satisfaz a igualdade

$$\frac{\partial}{\partial y}(FP) = \frac{\partial}{\partial x}(FQ).$$

Pela regra do produto, temos

$$\frac{\partial F}{\partial y}P + F\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}Q + F\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (2.12)$$

usando outra notação obtemos

$$F_yP + FP_y = F_xQ + FQ_x.$$

Notamos que determinar o fator integrante através da equação anterior não é simples, neste caso para encontrar o fator integrante F , optamos por uma função que dependa somente de x , isto é $F = F(x)$. Daqui $F_y = 0$ e $F_x = F'$, logo

$$FP_y = F'Q + FQ_x. \quad (2.13)$$

Ao dividirmos (2.13) por FQ , obtemos

$$\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right). \quad (2.14)$$

A partir dessa expressão, escrevemos

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = R, \quad (2.15)$$

em que

$$R = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right). \quad (2.16)$$

Em consequência disso temos o seguinte teorema:

Teorema 2.20 (Fator integrante $F(x)$). *Seja (2.11), se R de (2.15) é uma função dependente somente de x , então (2.11) admitirá um fator integrante $F = F(x)$, obtido a partir da integral de (2.15) e aplicando a função exponencial em ambos os membros da igualdade,*

$$F(x) = \exp \int R(x) dx.$$

Temos um caso análogo, se $F^* = F^*(y)$, resultando, ao invés de (2.14), a equação

$$\frac{1}{F^*} \frac{dF^*}{dx} = R^*, \quad (2.17)$$

onde

$$R^* = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right).$$

Dessa forma, apresentamos o seguinte teorema que está associado a este caso.

Teorema 2.21 (Fator integrante $F^*(x)$). *Seja (2.11), se R^* de (2.17) é uma função dependente somente de y , então (2.11) admitirá um fator integrante $F^* = F^*(y)$, obtido a partir da integral de (2.17),*

$$F^*(y) = \exp \int R^*(y) dy.$$

Observação 2.22. Para uma melhor análise dos Teoremas 2.20 e 2.21 consultar a referência [17], p. 19.

2.3.4 Equação Diferencial Ordinária Linear Homogênea

Definição 2.23. Considerando a EDO linear (2.2), de acordo com [17] chama-se uma equação homogênea quando $n(x) \equiv 0$, em um intervalo $a < x < b$ nomeado de J .

Definição 2.24. Seja $f : Dom(f) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, ela é chamada homogênea de grau p se, para todo $m \in \mathbb{R}$, a relação $f(mx, my) = m^p f(x, y)$ for satisfeita para todo (mx, my) pertencente ao $Dom(f)$.

Definição 2.25. Dada uma equação diferencial da forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (2.18)$$

é considerada uma Equação diferencial homogênea de primeira ordem se ambos os coeficientes M e N são funções homogêneas do mesmo grau.

Se admitirmos que $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são funções homogêneas de grau p , obtemos

$$M(x, y) = M\left(x, x\frac{y}{x}\right) = x^p M\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

$$N(x, y) = N\left(x, x\frac{y}{x}\right) = x^p N\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Ao substituírmos em (2.18), resulta

$$x^p M\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + x^p N\left(1, \frac{y}{x}\right) dy = 0.$$

Ao dividir ambos os membros da igualdade pela potencia x elevado ao expoente correspondente ao grau de homogeneidade da equação (x^p), temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)},$$

Dado que, o segundo membro da igualdade depende somente de $\frac{y}{x}$. Então:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.19)$$

Analisando o termo encontrado, nota-se que é fundamental substituir a função $\frac{y}{x}$ por outra função que facilite transformar a equação em uma equação diferencial de 1ª ordem separável. Em efeito disso, substituí $\frac{y}{x}$ por v , resulta

$$y = xv. \quad (2.20)$$

Se derivarmos (2.20) em relação a x , obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

Fazendo a substituição dos resultados encontrados em (2.19), temos:

$$v + x\frac{dv}{dx} = F\left(\frac{xv}{x}\right)$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = F(v)$$

$$\frac{dv}{F(v) - v} = \frac{dx}{x}.$$

Dessa forma, encontramos uma equação de variáveis separáveis.

Exemplo 2.26. Consideremos a EDO

$$y' - \frac{x-y}{x+3y} + \operatorname{sen} \frac{x}{y} = 0.$$

Isolando a derivada, obtemos

$$y' = \frac{x-y}{x+3y} - \operatorname{sen} \frac{x}{y}.$$

Se chamarmos o lado direito da equação de $f(x, y)$, temos que

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x+3y} - \operatorname{sen} \frac{x}{y}.$$

Daqui, ao substituirmos x por mx e y por my em $f(x, y)$, resulta em

$$f(mx, my) = \frac{mx-my}{mx+3my} - \operatorname{sen} \frac{mx}{my},$$

ou seja, $m^0 f(x, y) = f(mx, my)$, então a EDO é linear homogênea.

Exemplo 2.27. Atentemos a seguinte EDO

$$y' - \frac{x^2 - y^2}{xy} = 0.$$

Ao isolar a derivada, temos

$$y' = \frac{x^2 - y^2}{xy}.$$

Se nomearmos o segundo membro da equação de $f(x, y)$, obtemos

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}.$$

Daqui, ao substituirmos x por mx e y por my em $f(x, y)$, resulta em

$$f(mx, my) = \frac{(mx)^2 - (my)^2}{(mx)(my)},$$

ou seja, $m^0 f(x, y) = f(mx, my)$, então a EDO é linear homogênea.

2.3.5 Equação Diferencial Ordinária Linear Não-Homogênea

Definição 2.28. Considerando a equação (2.2), quando a função $n(x) \neq 0$, a equação é denominada não-homogênea.

A seguir, vamos analisar se a EDO (2.2) possui um fator integrante dependente unicamente de x , isto é, $F(x)$. Para tal fim, utilizamos o Teorema (2.20). A partir de (2.2), temos:

$$\frac{dy}{dx} + m(x)y = n(x),$$

$$dy + m(x)ydx = n(x)dx,$$

$$dy + m(x)ydx - n(x)dx = 0,$$

$$(m(x)y - n(x))dx + dy = 0,$$

relacionamos essa equação com $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, onde $P = m(x)y - n(x)$ e $Q = 1$, substituindo em (2.16), resulta

$$R = \frac{1}{1}(m(x) - 0) \Rightarrow R = m(x). \quad (2.21)$$

Dado que R depende apenas de x , pelo Teorema 2.20, resulta que a EDO (2.2) possui um fator integrante $F = F(x)$. Agora, substituindo (2.21) em (2.15), obtemos

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dx} = m(x).$$

Para encontrar o fator integrante $F(x)$, separamos as variáveis:

$$\frac{dF}{F} = m(x)dx,$$

logo, integramos ambos os membros da igualdade, obtendo

$$\ln |F| = \int m(x)dx,$$

aplicamos exponencial com a finalidade de obter o fator integrante, resultando

$$e^{\ln |F|} = e^{\int m(x)dx}$$

portanto,

$$F(x) = e^{\int m(x)dx}.$$

Ao multiplicarmos (2.2) por F e aplicando regra do produto, obtemos

$$e^{\int m(x)dx}(y' + m(x)y) = e^{\int m(x)dx}(n(x))$$

e

$$e^{\int m(x)dx}(y' + m(x)y) = e^{\int m(x)dx}(n(x)),$$

daqui,

$$(e^{\int m(x)dx}y)' = e^{\int m(x)dx}n(x). \quad (2.22)$$

Quando integramos em relação a x ambos os lados de (2.22) chega-se a

$$\begin{aligned} \int (e^{\int m(x)dx} y)' dx &= \int e^{\int m(x)dx} n(x) dx, \\ e^{\int m(x)dx} y &= \int e^{\int m(x)dx} n(x) dx + C. \end{aligned}$$

Para simplificarmos a equação (2.3.5) dividimos por $e^{\int m(x)dx}$ e nomeando $\int m(x)dx$ de h , resulta:

$$y(x) = e^{-h} \left(\int e^h n dx + C \right), h = \int m(x) dx. \quad (2.23)$$

Observamos que (2.23) é a solução geral de (2.2) na forma de uma integral.

Exemplo 2.29. Atentemos a seguinte EDO

$$4y' + 3y = \cos(2x).$$

Isolando a derivada, temos

$$y' = \frac{\cos(2x) - 3y}{4}.$$

Se chamarmos o segundo membro da equação de $f(x, y)$, obtemos

$$f(x, y) = \frac{\cos(2x) - 3y}{4}.$$

Daqui, ao substituirmos x por mx e y por my em $f(x, y)$, resulta em

$$f(mx, my) = \frac{\cos(2mx) - 3my}{4},$$

ou seja, não é possível encontrar um número p , tal que $f(mx, my) = m^p f(x, y)$ para $m \in \mathbb{R}$, então a EDO é linear não-homogênea.

Exemplo 2.30. Observemos a seguinte EDO

$$y' = -xy$$

Se chamarmos o segundo membro da equação de $f(x, y)$, obtemos

$$f(x, y) = -xy.$$

Ao substituirmos x por mx e y por my em $f(x, y)$, resulta em

$$f(mx, my) = -m^2 xy,$$

ou seja, não é possível encontrar um número p , tal que $f(mx, my) = m^p f(x, y)$ para $m \in \mathbb{R}$, então a EDO é linear não-homogênea.

2.4 Problema de Valor Inicial (PVI)

O objetivo desta seção é apresentar a explanação acerca do estudo sobre Problema de Valor Inicial (PVI) com o intuito de definirmos e apresentarmos exemplos. Será discutido também sobre os teoremas de existência e unicidade para o PVI.

Em concordância com [32] (p. 13), seja a Equação Diferencial

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1}), \quad (2.24)$$

sujeita a condições que são impostas à função desconhecida $y(x)$ e suas derivadas em um ponto x_0 , ou seja, $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{n-1}(x_0) = y^{n-1}$ são constantes reais prescritas e especificamente condições iniciais, em algum intervalo I , é chamado de problema de valor inicial (PVI).

Para salientar a aplicação deste problema, se sucederá a exibição do Exemplo 3 de [17] (p. 23), onde é apresentado o nível de um certo hormônio no sangue de um paciente de acordo com a variação de tempo. De acordo com a variação de tempo, conforme [17], imaginemos “que a taxa temporal dessa variação seja a diferença entre uma entrada senoidal (com um período de 24 h) da glândula tireóide e uma taxa contínua de remoção, proporcional ao nível presente de hormônio”. Em decorrência disso, elaborar um modelo que atenda o nível de hormônio no sangue e apresente a solução particular para cumprir com a condição inicial adequada.

Como já foi apresentado, uma EDO quando apresentar a forma (2.2) é linear onde [17] relaciona $n(x)$ com o termo entrada e $y(x)$ com o termo saída para elaborar um modelo. Temos que, se $y(t)$ é o nível de hormônio em um determinado instante t , então a taxa de saída corresponde a $Py(t)$. Já a taxa de entrada é igual a $A + B \cos\left(\frac{2\pi t}{24}\right)$, sendo A correspondente à taxa de média de entrada, com $A \geq B$. Os termos A, B e P são constantes que podem ser constatadas por meio de diligências laboratoriais .

O modelo elaborado é :

$$y'(t) = \text{Entrada} - \text{Saída},$$

isto é,

$$y' = A + B \cos\left(\frac{2\pi t}{24}\right) - Py(t) \Rightarrow y' = A + B \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - Py(t),$$

onde a condição inicial particular de y_{part} é $y_{part}(0) = y_0$, de acordo com $t = 0$ escolhido, por exemplo, 10 horas.

Para encontrar a solução geral, observamos (2.6), onde $m = P = \text{constante}$, $h = Pt$ e $n = A + B \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$. Então:

$$y(t) = e^{-Pt} \int e^{Pt} \left(A + B \cos \frac{\pi t}{12} \right) dt + Ce^{-Pt}$$

$$y(t) = e^{-Pt} \left[\int e^{Pt} A dt + \int e^{Pt} B \cos \frac{\pi t}{12} dt \right] + Ce^{-Pt}$$

$$y(t) = e^{-Pt} \left[A \frac{e^{Pt}}{P} + B \int e^{Pt} \cos \frac{\pi t}{12} dt \right] + Ce^{-Pt}. \quad (2.25)$$

Para desenvolver a solução desta equação vamos observar a integral em (2.25) e resolvê-la separadamente. Vamos começar, calculando

$$\int e^{Pt} \cos \frac{\pi t}{12} dt.$$

Podemos resolver essa integral utilizando um método de integração que possibilita descrever a integral de produtos de funções diferentes, esse método é chamado de integração por partes. A fórmula típica utilizada é

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Consideremos,

- $u = e^{Pt}$,
- $dv = \cos \frac{\pi t}{12} dt$,
- $du = Pe^{Pt} dt$,
- $v = \frac{12}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{12}$.

Temos:

$$\int e^{Pt} \cos \frac{\pi t}{12} dt = e^{Pt} \left(\frac{12}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{12} \right) - \frac{12P}{\pi} \int \operatorname{sen} \frac{\pi t}{12} e^{Pt} dt. \quad (2.26)$$

Usaremos novamente do método de integração por partes para resolver

$$\int \operatorname{sen} \frac{\pi t}{12} e^{Pt} dt,$$

onde

- $u = e^{Pt}$,
- $dv = \operatorname{sen} \frac{\pi t}{12} dt$,
- $du = Pe^{Pt} dt$,

- $v = \frac{-12}{\pi} \cos \frac{\pi t}{12}$.

$$\int \operatorname{sen} \frac{\pi t}{12} e^{Pt} dt = e^{Pt} \left(\frac{-12}{\pi} \cos \frac{\pi t}{12} \right) - \int \frac{-12}{\pi} \cos \frac{\pi t}{12} P e^{Pt} dt.$$

Substituindo em (2.26), obtemos

$$\begin{aligned} \int e^{Pt} \cos \frac{\pi t}{12} dt &= \frac{e^{Pt} 12}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{12} - \frac{12P}{\pi} \left[\frac{-e^{Pt} 12}{\pi} \cos \frac{\pi t}{12} + \frac{12P}{\pi} \int e^{Pt} \cos \frac{\pi t}{12} dt \right] \\ \Rightarrow \int e^{Pt} \cos \frac{\pi t}{12} dt + \frac{144P^2}{\pi^2} \int e^{Pt} \cos \frac{\pi t}{12} dt &= e^{Pt} \left(\frac{12}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{12} + \frac{144P}{\pi^2} \cos \frac{\pi t}{12} \right) \\ \Rightarrow \int e^{Pt} \cos \frac{\pi t}{12} dt &= e^{Pt} \left(12\pi \operatorname{sen} \frac{\pi t}{12} + 144P \cos \frac{\pi t}{12} \right) \left(\frac{1}{\pi^2 + 144P^2} \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Substituindo (2.27) em (2.25), obtemos a solução geral :

$$y(t) = e^{-Pt} \left[A \frac{e^{Pt}}{P} + B \left(e^{Pt} \left(12\pi \operatorname{sen} \frac{\pi t}{12} + 144P \cos \frac{\pi t}{12} \right) \left(\frac{1}{\pi^2 + 144P^2} \right) \right) \right] + C e^{-Pt},$$

daqui,

$$\frac{A}{P} + \frac{B}{\pi^2 + 144P^2} \left(12\pi \operatorname{sen} \frac{\pi t}{12} + 144P \cos \frac{\pi t}{12} \right) + C e^{-Pt}. \quad (2.28)$$

A solução (2.28) é nomeada de solução de regime transiente, o termo $C e^{-Pt}$ tende a 0 conforme t vai aumentando.

A solução particular solicitada no exemplo é dada fazendo $t = 0$ em $y(t)$, optando por $y_0 = 0$, daqui

$$y(0) = \frac{A}{P} + \frac{B}{\pi^2 + 144P^2} \cdot 144P + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{A}{P} - \frac{B}{\pi^2 + 144P^2} \cdot 144P. \quad (2.29)$$

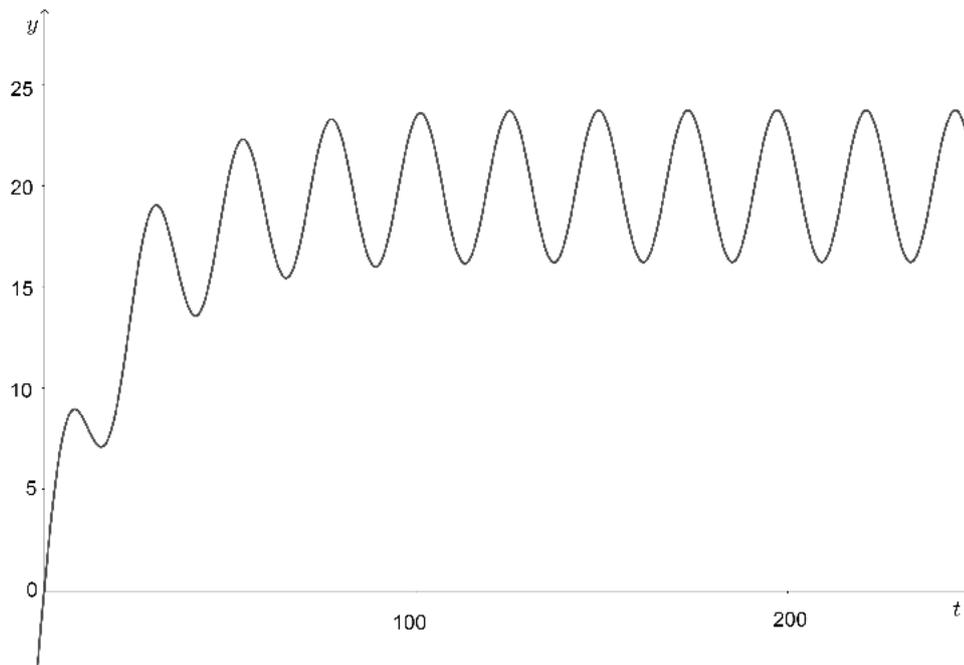
Inserindo o valor encontrado de C em (2.29) encontramos a solução particular, ou seja,

$$y_{part}(t) = \frac{A}{P} + \frac{B}{\pi^2 + 144P^2} \left(12\pi \operatorname{sen} \frac{\pi t}{12} + 144P \cos \frac{\pi t}{12} \right) - \left(\frac{A}{P} + \frac{B}{\pi^2 + 144P^2} \cdot 144P \right) e^{-Pt}.$$

Para representar o gráfico desta solução é necessário atribuir valores específicos para as constantes $A = B$ e P . Consideremos os seguintes valores:

- $A = B = 1$,
- $P = 0,05$.

Figura 2.4: Solução gráfica do Exemplo 3.



Fonte: Adaptação de ([17], p. 23).

No gráfico, é notório que o período de transição é relativamente curto, onde a curva assemelha-se a forma senoidal.

2.4.1 Teorema de Existência e Unicidade

De acordo com [17], trataremos sobre dois teoremas importantes para compreensão dos PVI, tratam-se do Teorema da Existência e do Teorema da Unicidade.

Teorema 2.31 (Teorema da Existência). *Consideremos a EDO*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (2.30)$$

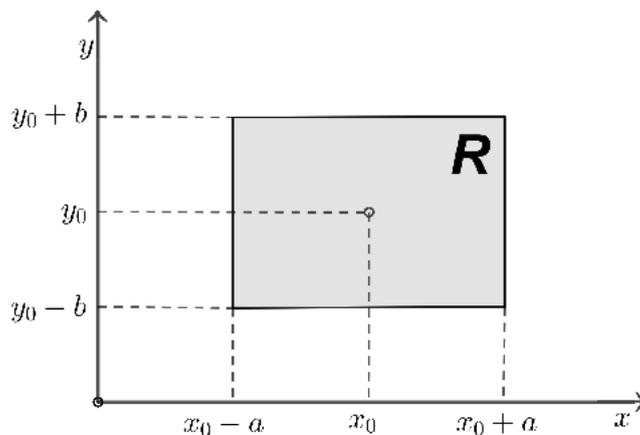
onde $f(x, y)$ seja contínua em todos os pontos (x, y) em um dado retângulo

$$R : |x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b,$$

e limitado em R , isto é, existe um número D tal que

$$|f(x, y)| \leq D \quad \forall (x, y) \text{ em } R.$$

Consequentemente, o PVI (2.30) possui pelo menos uma solução $y(x)$. A solução dada existe pelo menos para todos os valores de x que pertencem ao subintervalo $|x - x_0| < \alpha$ do intervalo $|x - x_0| < a$, onde α é menor dos dois números a e $\frac{b}{D}$.

Figura 2.5: Retângulo R .

Fonte: Adaptação de [17], p. 31 .

É notório no Teorema 2.31 a afirmação da existência de solução do PVI. A seguir, apresentamos o teorema que garante a unicidade desta solução.

Teorema 2.32 (Teorema da Unicidade). *Suponhamos que a função f e sua derivada parcial $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em algum retângulo e limitadas, isto é,*

$$i) |f(x, y)| \leq D \quad \forall (x, y) \text{ em } R,$$

$$ii) |f_y(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \text{ em } R.$$

Então, o PVI (2.30) possui no máximo uma solução $y(x)$. De acordo o Teorema 2.31, concluímos que o problema tem somente uma solução e esta existe pelo menos para todo x do intervalo $|x - x_0| < \alpha$.

Demonstração: Para maiores informações sobre os teoremas citados podemos consultar [17] (p.30-31). \square

Consideremos o PVI

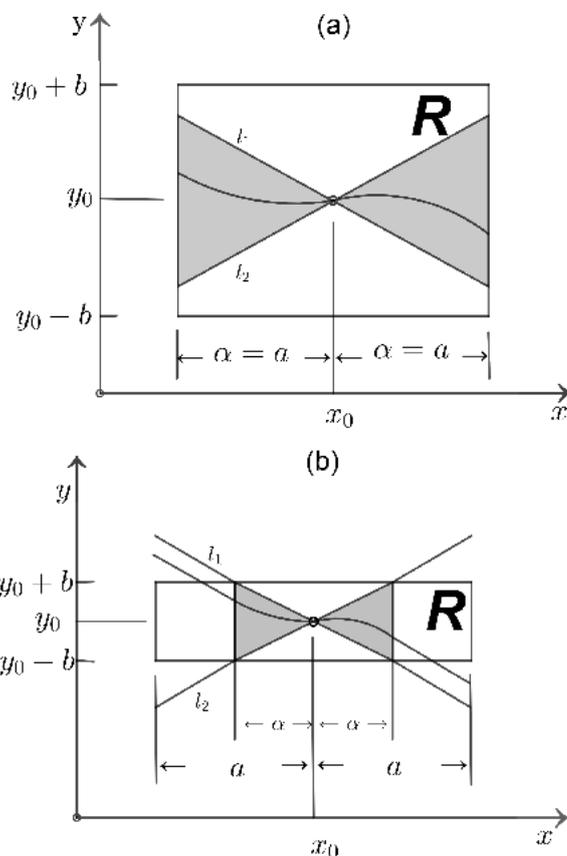
$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (2.31)$$

Pelo Teorema 2.31, se $f(x, y)$ for contínua e limitada em alguma região do plano xy que contém o ponto (x_0, y_0) , então (2.31) tem pelo menos uma solução.

De acordo ao Teorema 2.32 se além de existir ao menos uma solução, a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ de $f(x, y)$ em relação a y existir e for contínua nessa região, então a expressão (2.31) pode ter no máximo uma solução; em concordância com o Teorema 2.31, então a equação possui unicamente uma solução.

Se $y' = f(x, y)$, de acordo com a figura 2.6, é dado que $|y'| \leq D$, isto é, a inclinação de uma curva de solução qualquer $y(x)$ em R é minimamente igual a $-D$ e no máximo D .

Figura 2.6: A condição do Teorema da Existência.



Fonte: Adaptação de [17], p. 32.

Para compreender melhor, observemos a figura 2.6, onde a curva de solução que intercepta o ponto (x_0, y_0) tem que situar-se na região cinza, sendo limitadas pela linha l_1 de inclinação $-D$ e pela linha l_2 de inclinação D . De acordo com R , podem surgir casos divergentes. Na figura (a) temos $\frac{b}{D} \geq a$, então $\alpha = a$, baseado no Teorema 2.31, temos que a solução existe para todo x entre $x_0 - a$ e $x_0 + a$.

Na figura (b) temos um caso diferente, onde $\frac{b}{D} < a$, daí $\alpha = \frac{b}{D} < a$. Diante disso, com base nos dois teoremas vistos aqui, a solução existe para todo x situado entre $x_0 - \frac{b}{D}$ e $x_0 + \frac{b}{D}$.

Observação 2.33. Se os valores forem maiores ou menores que x , então a curva de solução situa-se no lado externo do retângulo R , e se caso nada se pode supor sobre f nas regiões externas a R , não se pode concluir sobre a solução diante desses valores maiores ou menores que x , isto é, a solução pode ou não existir, é algo que não sabemos.

Exemplo 2.34. Observemos o PVI

$$y' = y^2 + 4, y(0) = 0, \tag{2.32}$$

e consideremos o retângulo $R : |x| < 6, |y| < 2$. Notemos que $a = 6$ e $b = 2$ e

- $|f(x, y)| = |y^2 + 4| \leq D$, então $D = 8$.
- $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = 2|y| \leq M$, então $M = 4$.
- $\alpha = \frac{b}{D}$, então $\alpha = 0,125 < a$.

Logo, as condições dos Teoremas 2.31 e 2.32 são satisfeitas. Portanto, o PVI (2.32) possui solução e ela é única.

Vemos que $y' = y^2 + 4$ é uma EDO separável:

$$\frac{dy}{y^2 + 4} = dx.$$

Integrando essa expressão, temos

$$\int \frac{dy}{y^2 + 4} = \int dx,$$

$$\frac{1}{2} \arctan \frac{y}{2} + C_1 = x + C_2,$$

$$\arctan \frac{y}{2} = 2x + C.$$

Dado que $y(0) = 0$, temos a constante $C = 0$.

$$\frac{y}{2} = \tan(2x).$$

Notemos que $2x$ não pode ser múltiplo de $\pm \frac{\pi}{2}k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Daqui ,

$$\text{Dom}(y) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x}{\pi} + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \right\}.$$

Exemplo 2.35. O PVI

$$y' = \frac{1}{x}, \quad y(0) = 0.$$

Não admite solução. Ao integrarmos obtemos a solução da EDO:

$$\int y' dx = \int \frac{1}{x},$$

$$y(x) = \ln|x| + C,$$

mas essa solução não está definida para $x = 0$. Neste caso, não satisfaz a condição inicial dada, $y(0) = 0$.

Exemplo 2.36. Consideremos o PVI

$$y' = x\sqrt{y}, y(0) = 0$$

Vejamos que há ao menos duas soluções:

$$y_1(x) = 0 \text{ e } y_2(x) = \frac{x^4}{16}.$$

Notamos que, sendo $f(x, y) = x\sqrt{y}$ definida em qualquer retângulo R que contém o ponto $(0,0)$, possui derivada

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{y}},$$

que não é limitada em R , como pede o Teorema 2.32.

Exemplo 2.37. Agora, consideremos o PVI

$$xy' = 2y, y(a) = b, \tag{2.33}$$

quando $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$ (qualquer número Real). Notemos que

$$f(x, y) = \frac{2y}{x},$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x},$$

são contínuas quando $x \neq 0$. De acordo com os Teoremas 2.31 e 2.32, podemos afirmar que o PVI possui uma única solução se $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$. É visto que não podemos garantir a existência e a unicidade da solução quando $a = 0$. Em decorrência, observa-se que a equação é separável e usufruindo do fator integrante, temos

$$y(x) = Cx^2,$$

onde C é uma constante de integração.

Destaca-se que o PVI (2.33) admite uma única solução no intervalo que possui $a \neq 0$ com exceção do 0.

Se considerarmos $a = 1$ e $b = 1$, então para todo C , a função dada por

$$y(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ Cx^2, & x < 0. \end{cases}$$

é a solução do PVI. Vejamos que a solução do PVI não é única se considerarmos $y(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

Já a unicidade do PVI é dada quando consideramos x pertencente a um intervalo $I \subseteq (0, \infty)$. Daqui, a única solução do PVI é

$$y(x) = x^2.$$

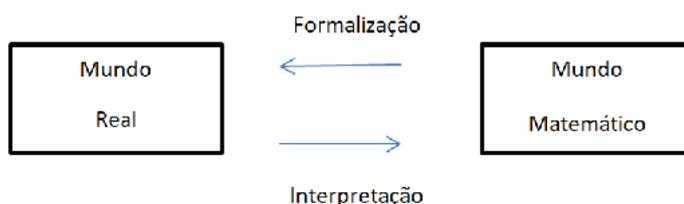
Capítulo 3

Modelagem Matemática

Neste capítulo, abordaremos alguns conceitos que julgamos importantes para a compreensão deste trabalho. A finalidade é apresentar a Modelagem Matemática e alguns modelos estudados, exibindo sua essencialidade e fatores históricos. O desenvolvimento deste capítulo se encontra baseado nas referências [1, 4, 32].

Desde os primórdios as fórmulas matemáticas nos intrigam, causando a curiosidade de onde serão aplicada, “Onde eu irei usá-las? No meu dia a dia, onde posso empregá-las?” Esses são alguns de vários questionamentos que se ouve no decorrer da trajetória estudantil, estes que nos levam a perguntar qual a aplicação de alguns conteúdos estudados no cotidiano. Segundo [4](p. 16) “A Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Preferimos usufruir da Modelagem Matemática após observarmos a sua efetividade no dia a dia e no âmbito educacional em consequência da interação constante exercida entre conteúdos e as vivências fora dos muros da escola. O esquema abaixo mostra o processo da Modelagem Matemática como instrumento para entender e formalizar uma determinada situação-problema da realidade em um mundo matemático.

Figura 3.1: Esquema simplificado de Modelagem Matemática.



Fonte: Adaptação de [1], p. 44.

O desenvolvimento pessoal ocasionado pelo aprendizado matemático e seus efeitos são temáticas discutidas por distintas concepções no cenário da educação, a Modelagem Ma-

temática, por exemplo, apresenta sua eficiência como uma opção didática e metodológica no ensino de Matemática. É uma alternativa para desmistificar e potencializar o entendimento da mesma na sua realidade. Dentre esses, [1](p. 32-33) destaca outros pontos benéficos ao trabalhar com a Modelagem:

- Pode estimular novas ideias e técnicas experimentais;
- Pode dar informações em diferentes aspectos dos inicialmente previstos;
- Pode ser um método para se fazer interpolações, extrapolações e previsões;
- Pode sugerir prioridades de aplicações de recursos e pesquisas e eventuais tomadas de decisão;
- Pode preencher lacunas onde existe falta de dados experimentais;
- Pode servir como recurso para melhor entendimento da realidade ([1], 2002).

A modelagem Matemática promove um amplo campo de alternativas na exibição de distintos fenômenos provenientes de diferentes setores de pesquisa e áreas de conhecimento. Quando aplicada em sala de aula é perceptível o progresso do conteúdo estudado como consequência de um modelo matemático, uma didática voltada para efetivação da qualidade de ensino de Matemática aplicada em qualquer fase da educação, desde o ensino básico até o superior. Na tentativa de compreender e apresentar aspectos acerca de um problema, a modelagem matemática, em vários efeitos, caracteriza-se por associar a teoria com a prática. A mesma emerge da necessidade de entender um determinado ocorrido, de modo que possibilite ao ser humano interferir ou não no seu desenvolvimento. Nessa abordagem da Matemática nos fatos habituais vivenciados, a modelagem explicam de forma quantitativa e qualitativa os fenômenos, estes frequentemente retratados por ED's, possibilitando a Análise Matemática.

Notemos que em diversos momentos da vida social as aplicações matemáticas são perceptíveis, por exemplo, na Economia são vistos os conceitos de renda, lucros, juros, investimentos e consumo relacionados com o período de tempo, onde as Equações Diferenciais são instrumentos importantes para modelar diversas percepções. Este é um exemplo, onde podemos associar o conteúdo matemático com a realidade do estudante, instruindo-o para uma vida independente e autônoma diante de variadas situações. Neste sentido, [24] (p.10) descreve a Modelagem Matemática “como alternativa de ensino, com desenvolvimento de atividades que levam o aluno a construir o seu próprio conhecimento por meio de relações concretas e por procedimentos que o valorizam como pessoa”. No processo de ensino e aprendizagem se trata de uma estratégia, levando o educando simular resoluções de problemas reais usufruindo de modelos matemáticos.

Ao trabalhar com a Modelagem Matemática é perceptível a eficácia de um processo de conhecimento matemático através de modelos matemáticos aplicados no ambiente de vivências

cotidianas contribuem para o entendimento e formalização desta ciência. Primordialmente, é interessante proporcionar uma reflexão diante a realidade aplicada em uma formulação experimental, ou seja, a simulação da realidade. As tecnologias contribuem muito para fornecer informações, além de muitas vezes, serem instrumentos de desenvolvimento de análises de dados.

As Equações Diferenciais compõem uma área da Matemática Aplicada, integrando um dos constituintes mais utilizados na Modelagem Matemática, principalmente quando tratamos de modelos de crescimento populacional. Estes modelos que abordam exclusividade de crescimento populacional possibilita ter uma visão significativa de efeitos do crescimento, deduzindo a dinâmica em decorrência do tempo e planejar ações eficazes.

3.1 Modelos Matemáticos

A expansão do crescimento de importantes zonas urbanas europeias e o avanço do crescimento da população em situação de pobreza da cidade foram cruciais para o surgimento de modelos que descrevessem o crescimento populacional. Esse fato despertou o interesse de vários pesquisadores matemáticos e também de diversas outras áreas para desenvolver hipóteses populacionais.

Os Modelos Matemáticos são um conjunto de códigos e símbolos caracterizando uma linguagem matemática que constitui o objeto analisado, moldando a situação-problema, retratando sua complexidade. Com a finalidade de assimilar e exibir a situação estudada objetivando explicar a evolução, permitindo assim, prever ações. São representados ações e fenômenos através dos modelos por meio de equações, tabelas, gráficos e outros, exibindo uma linguagem concisa.

Em muitos campos das vivências humanas são utilizados os modelos matemáticos, como a Biomatemática, Psicologia, Física, Economia, Engenharia, entre vários outros, para registrar e analisar informações importantes para estudos e entendimento de fatos.

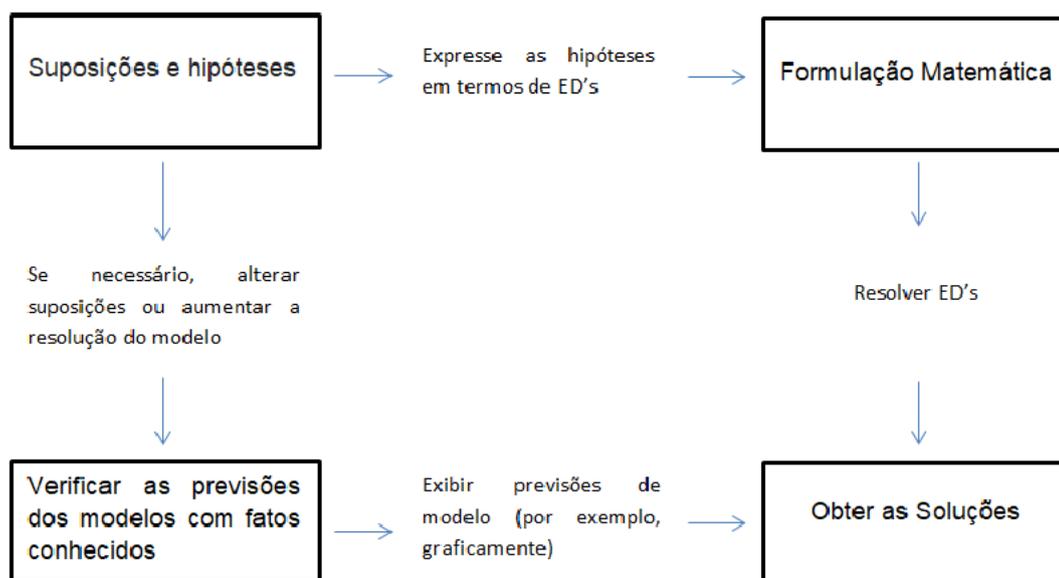
Um modelo pode apresentar-se como abstrato, por exemplo, o sistema dos números naturais planeado pelo matemático Giuseppe Peano (1858-1932), ou se identificar como modelo realístico.

O modelo matemático é empregado de acordo à matemática envolvida na problematização, adequando a natureza dos fenômenos, [1] (p.20) descreve a classificação dos modelos como *Linear* ou *não-linear*, *Estático*, *Educacional* e *Estocástico* ou *Determinístico*. Dentre os modelos pedagógicos podemos exemplificar o de experimentação, de experiência em trabalhos realizados em programas de iniciação científica e históricos.

Um modelo matemático expressa um agrupamento de equações que apresentam de uma maneira quantitativa as eventualidades previstas, as mesmas são apoiadas diante o sistema real.

Segundo [32] (p. 21) “o modelo matemático pode ser uma equação diferencial ou um sistema de equações diferenciais”. Exemplificando no esquema abaixo como é dado um modelo que utiliza equações diferenciais:

Figura 3.2: Etapas do processo de modelagem com equações diferenciais.



Fonte: Adaptação de [32], p. 23.

As equações são solucionadas em função de dados já em mãos ou previstos em uma situação real e são adquiridos novos valores como perspectivas que mostram aproximações muito próximas dos valores reais.

A Modelagem Matemática evidencia um preceito que permite elaborar, organizar e resolver questionamentos, com isso, o modelo matemático tende a uma edificação simbólica apresentada essencialmente na linguagem matemática, expresso como meio de interpretação e assimilações levando ao conhecimento de ações diante a tal situação. Neste contexto, com a finalidade de exemplificar e compreender os modelos analisados, exporemos definições e conceitos sobre alguns modelos de crescimento populacional.

3.2 Modelos de Crescimento Populacional

Os modelos populacionais exibem a dinâmica e o crescimento de uma dada população, visando o entendimento da variação de indivíduos. O crescimento do número de indivíduos pode apresentar -se como positivo ou negativo, quando observado um aumento da população inicial e quando há uma retração tendo como base o número da população dada de início, respectivamente.

Ao analisar os modelos de crescimento populacional, percebe que há dois modos,

Contínuo que é o caso que as alterações sucedem constantemente e a todo momento, ou seja, é imprescindível o conhecimento de dados, como tempo, quantitativo de taxas em que analisem as perdas e ganhos de indivíduos e outros ou **Discreto** quando as mudanças são dadas de período a período, e quando ocorre uma modificação é dito que houve uma transição. Disponibilizamos dos seguintes modelos que serão detalhados no decorrer deste trabalho.

Um modelo deve ser visto como uma ferramenta para retratar ou simular um fenômeno e sua validação, no qual depende da escolha das variáveis trabalhadas e das estimativas formuladas.

3.2.1 Modelo de Malthus

Figura 3.3: Thomas Malthus.



Fonte: Wikipedia (2021).

Considerado o pai da demografia, o economista inglês Thomas Robert Malthus (1766-1834), fundador do enorme e primeiro avanço na modelagem de crescimento de populações. Publicou seu trabalho intitulado de “Um Ensaio sobre o Princípio da População” em 1798, no qual relatou que em consequência da superpopulação ocorria malefícios sociais, como patologias e pobreza extrema. O reverendo Malthus utilizou um modelo que descrevia o crescimento populacional representado por uma progressão geométrica, mas não conseguiu explicitar suas ideias as tornando claras, mas ele compreendeu que se a população não fosse contida, dobraria a cada 25 anos. É fundamental contextualizar o período em que as ideias de Malthus foram expostas. Na Inglaterra, entre o século XVIII e o XIX, ocorreu um processo histórico chamado de Industrialismo, onde naquela época a substituição da manufatura por máquinas gerou uma grande massa de desempregados. Devido a essa mudança, houve uma grande movimentação da população de um espaço para outro, entre outros fatores. Diante desse contexto, foi estruturada a teoria populacional malthusiana. ([1], p.327) afirma que o “modelo” que Malthus apresentou nesta obra foi fundamentado em dois postulados:

1. “ O alimento é necessário à subsistência do homem”;
2. “ A paixão entre os sexos é necessária e deverá permanecer aproximadamente em seu estado permanente” ([1], 2002).

De acordo a esses postulados, Malthus fomenta a ideia que a superpopulação devido à aptidão de reprodução humana era matematicamente impreterível, na qual os meios de sobrevivência cresciam aritmeticamente, ou seja, as populações demonstravam crescimento exponencial. Malthus baseava-se em que a capacidade de reprodução biológica humana é superior a sua capacidade de produzir alimentos, então o controle da capacidade de reprodução humana é viabilizado a partir da limitação da oferta de alimentos. Ainda expõe que as maneiras de controle sobre o crescimento populacional estão na diminuição da natalidade ou na ampliação dos números de mortes diante uma sociedade contínua em suas operações.

Hodiernamente, é tratado como modelo Malthusiano àquele que adere que o crescimento de uma população é proporcional à população a cada momento, neste caso, desconsiderando as inibições, males sociais, desconsiderando também que os seres humanos vivem em um espaço ecológico fechado e não contemplando o fato que socialmente os indivíduos são diferentes, então é considerada uma vida de qualidade, sem catástrofes e doenças. Malthus, em seu modelo, deduz uma expansão do crescimento populacional desprezando os empecilhos para esse fenômeno. Vale ressaltar, que o modelo valida a variação da população como constante. No decorrer dos tempos, o modelo apresentado tornou-se não condizente com a realidade quando trabalhado com longo prazo.

Conforme [1] apresentamos, a seguir, a construção do modelo Malthusiano.

Malthus propôs que a taxa na qual uma população cresce é proporcional à população total naquele instante, ou seja, quanto mais indivíduos houver em um momento t , mais pessoas existirão futuramente. Observemos que se $N(t)$ é a população, considerando valores inteiros, como apresenta uma função discreta em relação a t . Formalizando matematicamente, temos:

$$\frac{dN}{dt} = N(t).$$

Tendo como hipótese que a proporção de seres reprodutores continua constante perdurante o crescimento da população. Assumimos que os nascimentos e mortes no ambiente eram proporcionais à população atual. Diante uma população de grande números de indivíduos, neste caso, são consideradas condições favoráveis, ideais e livre de inibitivos. Temos

$$\frac{N(t+1) - N(t)}{N(t)} = a - b = \alpha, \quad (3.1)$$

considerando $N(t)$ constante, ou seja, em cada período de tempo a variação da população é proporcional à própria população. Onde

- a = número de nascimentos;

- b = número de mortes.

Obtemos então modelo discreto

$$N(t+1) - N(t) = \alpha N(t). \quad (3.2)$$

Se $N(0) = N_0$, então

$$\begin{cases} N(t+1) = (1 + \alpha)N(t) \\ N(0) = N_0, \end{cases} \quad (3.3)$$

ou seja,

$$N(t) = (\alpha + 1)^t N_0,$$

que pode também ser escrito na forma exponencial $N(t) = N_0 e^{\ln(\alpha+1)t}$.

Consequentemente, supomos dois censos N_0 e $N(t)$ para descobrirmos a taxa de crescimento demográfico em anos (t), então

$$(\alpha + 1)^t = \frac{N(t)}{N_0}$$

$$\sqrt[t]{(\alpha + 1)^t} = \sqrt[t]{\frac{N(t)}{N_0}}$$

$$\alpha + 1 = \sqrt[t]{\frac{N(t)}{N_0}}$$

$$\alpha = \sqrt[t]{\frac{N(t)}{N_0}} - 1. \quad (3.4)$$

Em comparação do Modelo discreto de Malthus (3.3) com a solução do modelo contínuo correspondente, temos que limite quando $\Delta t \rightarrow 0$ (a variação da população vista entre dois períodos em um espaço de Δt):

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t},$$

dado que

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \beta N(t),$$

$$N(t + \Delta t) - N(t) = \beta N(t) \Delta t.$$

Considerando uma população inicial $N(0) = N_0$, apresentamos então o modelo malthusiano contínuo

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \beta N(t) \\ N(0) = N_0. \end{cases} \quad (3.5)$$

O modelo Malthusiano contínuo foi representado formalmente como uma simples EDO linear de primeira ordem homogênea, onde :

- N = população animal ou vegetal;
- β = constante de proporcionalidade.

Temos que β é a taxa de crescimento ou declínio de acordo se for positiva ou negativa.

O primeiro passo para encontrar a resolução analítica do modelo de Malthus é separar as variáveis da EDO, logo teremos

$$N(t) = N_0 e^{\beta t}. \quad (3.6)$$

Ao analisar o modelo malthusiano discreto representado com taxa α e o modelo malthusiano contínuo representado com taxa β , observa-se que é encontrada a mesma solução se $\beta = \ln(\alpha + 1)$.

A Modelagem Matemática se desenvolveu grandemente em relação ao crescimento populacional, em decorrência de várias alterações posteriores a Malthus. A sua aplicação é eficaz em problemas elaborados em intervalos curtos de tempo, como exemplo, o censo realizado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Segundo [14], O IBGE faz operações geográficas nacionais e a periodicidade da pesquisa abrange dez anos, em exceção no período de 1910 e 1930, quando o levantamento foi suspenso, e em 1990 quando o processo foi adiado para o ano seguinte. Consideremos o exemplo a seguir, onde a variável analisada é a população residente (pessoas) no Brasil em relação ao período de tempo.

Exemplo 3.1. Censos Demográficos do Brasil de 1970 a 2010.

Tabela 3.1: Censo demográfico da população do Brasil, em milhões.

Período	Censo demográfico
1970	93,135
1980	119,011
1991	146,825
2000	169,873
2010	190,756

Fonte: IBGE, 2012.

De acordo com os dados do censo demográfico, calculemos a taxa e crescimento da população do Brasil, sabendo que esta é constante a cada ano, dentre o período de 1970 à 2010.

Compreendemos que a taxa de crescimento populacional dada por (3.1)

$$\alpha = \frac{N(t+1) - N(t)}{N(t)},$$

$$\alpha = \sqrt[t]{\frac{N(t)}{N_0}} - 1,$$

neste caso, temos que o período é de 40 anos, ou seja,

- $t = 40$,
- $N_0 = 93,135$,
- $N(40) = 190,756$.

Isto é,

$$\alpha = \sqrt[40]{\frac{190,756}{93,135}} - 1,$$

$$\alpha = 0,01808,$$

$$\alpha = 1,8\%.$$

De acordo ao Modelo discreto de Malthus temos conhecimento da taxa de crescimento constante $\alpha = 1,8\%$ ao ano, durante os 40 anos aqui analisados. Daqui, podemos encontrar a população do Brasil nos anos de 1980, 1991, 2000 e 2010.

$$N(t) = (\alpha + 1)^t N_0.$$

Para encontrar a população de 1980, temos $t = 10$:

$$N(10) = 93.135 \cdot (1,018)^{10},$$

$$N(10) = 111,324.$$

Para encontrar a população de 1991, temos $t = 21$:

$$N(21) = 93.135 \cdot (1,018)^{21},$$

$$N(21) = 135,462.$$

Para encontrar a população de 2000, temos $t = 30$:

$$N(30) = 93.135 \cdot (1,018)^{30},$$

$$N(30) = 159,055.$$

Para encontrar a população de 2010, temos $t = 40$:

$$N(40) = 93.135 \cdot (1,018)^{40},$$

$$N(40) = 190,118.$$

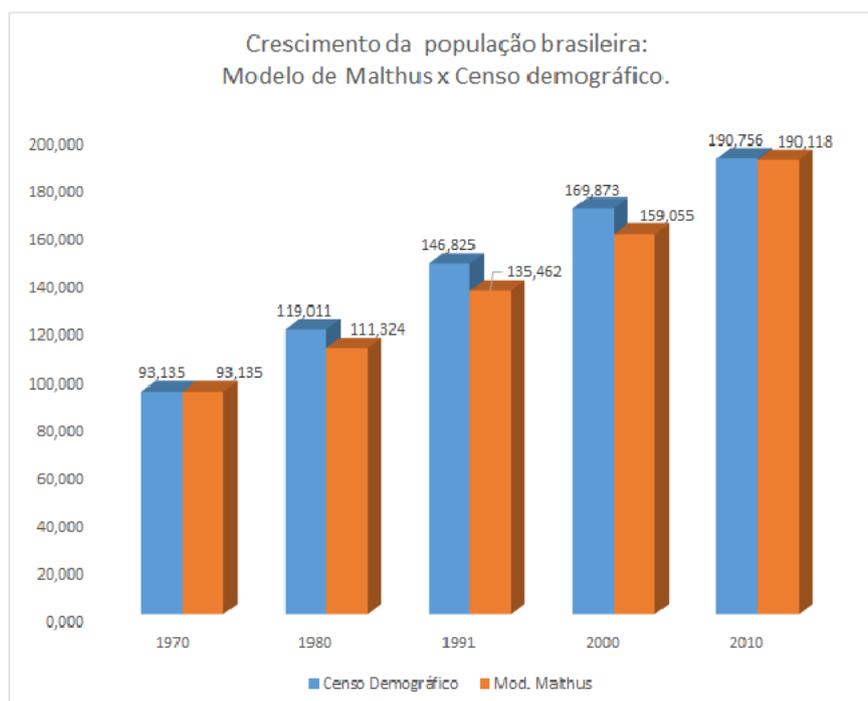
Tabela 3.2: Modelo de Malthus e o Censo demográfico da população do Brasil, em milhões.

Período	Censo demográfico	Modelo Discreto de Malthus
1970	93,135	93,135
1980	119,011	111,324
1991	146,825	135,462
2000	169,873	159,055
2010	190,756	190,118

Fonte: Adaptação de IBGE, 2012.

O quadro denuncia uma perspectiva da população diante o período analisado. É visto que há um distanciamento considerável em relação alguns valores, já em 2010 é observado uma aproximação mais precisa. Vejamos na figura abaixo, a comparação dos dados segundo o IBGE e o modelo discreto de Malthus.

Figura 3.4: Projeção do crescimento populacional do Brasil, em milhões.



Fonte: Arquivo pessoal.

3.2.2 Modelo Logístico Contínuo (Verhulst)

Figura 3.5: Pierre François Verhulst.



Fonte: Wikipedia (2021).

Pierre François Verhulst (1804-1849) mostrou aptidão desde muito cedo pela Matemática, foi um matemático belga e doutor na teoria dos números da Universidade de Gante, destacando-se também na Física. Quando ainda estudante foi compensado com dois prêmios em relação aos seus estudos no cálculo das variações.

Após grande influência dos trabalhos de Thomas Robert Malthus na Economia e Estatísticas Populacionais, Verhurst em 1837 formulou o primeiro modelo que atende a variação da taxa de crescimento populacional, atendendo a condição que a população pode crescer até um limite máximo sustentável onde tende a se estabilizar. O fator que diferencia este modelo do modelo de Malthus é que a equação deste modelo foi formulada considerando uma queda de crescimento da população devido a fatores inibidores de proporcionalidade, veja em [1]. Desta forma, Verhurst leva em consideração o crescimento da população diante fatores (variáveis) do âmbito no qual estão presentes.

Entendemos o modelo de Verhurst como um modelo derivado da modificação do modelo de Malthus, considerando a taxa do crescimento relativa $\beta(N)$ decrescente diante à população N em cada instante. Temos

$$\frac{dN}{dt} = \beta(N)N, \quad (3.7)$$

com $\beta(N) = r \left(\frac{k - N}{k} \right)$, onde

- r é constante e $r > 0$, representando a taxa de crescimento na ausência de qualquer inibidor,
- k é o valor limite da população, isto é, a capacidade suporte, também constante.

Daqui, tem que $\beta(N)$ tende a 0 quando $N \rightarrow k$. Então, supondo que $N(0) = N_0$, obtemos o modelo logístico ou modelo clássico de Verhurst

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{k}\right) N \\ N(0) = N_0, \text{ com } r > 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Onde N_0 é a população inicial.

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{k}\right) N.$$

Ao separar as variáveis, tem-se

$$\frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{N}{k}\right) N} = r.$$

Integrando ambos os lados da igualdade:

$$\int \frac{dN}{\left(1 - \frac{N}{k}\right) N} = \int r dt. \quad (3.9)$$

Observamos que temos uma divisão de polinômios, para resolver a integral usufruímos do método das frações parciais,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N \left(1 - \frac{N}{k}\right)} &= \frac{A}{N} + \frac{B}{1 - \frac{N}{k}}, & (3.10) \\ \frac{1}{N \left(1 - \frac{N}{k}\right)} &= \frac{A \left(1 - \frac{N}{k}\right) + BN}{N \left(1 - \frac{N}{k}\right)}, \\ \frac{1}{N \left(1 - \frac{N}{k}\right)} &= \frac{A - \frac{AN}{k} + BN}{N \left(1 - \frac{N}{k}\right)}. \\ 1 &= A + \left(B - \frac{A}{k}\right) N. \end{aligned}$$

Daqui, temos $A = 1$ e $B = \frac{1}{k}$.

Substituindo os valores encontrados em (3.10)

$$\int \frac{dN}{N \left(1 - \frac{N}{k}\right)} = \int \frac{1}{N} dN + \int \frac{\frac{1}{k}}{1 - \frac{N}{k}} dN,$$

- $u = 1 - \frac{N}{k},$
- $du = -\frac{1}{k} dN.$

$$\int \frac{dN}{N \left(1 - \frac{N}{k}\right)} = \ln |N| - \ln \left|1 - \frac{N}{k}\right|.$$

De acordo com (3.9),

$$\ln |N| - \ln \left|1 - \frac{N}{k}\right| = rt + C_1.$$

Aplicando a propriedade logarítmica $\ln \left|\frac{a}{b}\right| = \ln |a| - \ln |b|$, temos que

$$\ln \left| \frac{N}{1 - \frac{N}{k}} \right| = rt + C_1.$$

Dáí, aplicamos a função exponencial,

$$e^{\ln \left| \frac{N}{1 - \frac{N}{k}} \right|} = e^{rt + C_1},$$

$$\frac{N}{1 - \frac{N}{k}} = e^{rt} e^{C_1},$$

$$N = \left(1 - \frac{N}{k}\right) e^{rt} C,$$

$$N = C e^{rt} - \frac{C}{k} e^{rt} N,$$

$$C e^{rt} = N \left(1 + \frac{C}{k} e^{rt}\right),$$

$$N(t) = \frac{C e^{rt}}{1 + \frac{C}{k} e^{rt}}.$$

Para obtermos a solução geral do modelo de Verhulst, divide-se o numerador e o denominador por $\frac{C}{k}e^{rt}$:

$$N(t) = \frac{k}{\frac{k}{C}e^{-rt} + 1}. \quad (3.11)$$

De acordo com a condição inicial, obtemos

$$N(0) = N_0,$$

$$N(0) = \frac{k}{\frac{k}{C}e^{-r \cdot 0} + 1},$$

$$N(0) = \frac{k}{\frac{k}{C} + 1},$$

$$\frac{k}{C} = \frac{k}{N_0} - 1,$$

$$\frac{k}{C} = \frac{k - N_0}{N_0},$$

$$C = \frac{kN_0}{k - N_0},$$

$$C = \frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{k}}.$$

Encontrado o valor da constante, substitui na solução geral (3.11):

$$N(t) = \frac{k}{\frac{k}{\left(\frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{k}}\right)}e^{-rt} + 1},$$

$$N(t) = \frac{k}{\frac{k^2e^{-rt} - N_0ke^{-rt} + N_0k}{N_0k}},$$

$$N(t) = \frac{k^2N_0}{k^2e^{-rt} - N_0ke^{-rt} + N_0k}.$$

Ao dividirmos o numerador e o denominador por k , com a finalidade de encontrar a solução para a ED, temos

$$N(t) = \frac{N_0 k}{(k - N_0)e^{-rt} + N_0}. \quad (3.12)$$

De acordo à solução dada pelo modelo de Verhulst, podemos observar que

- i) Quando $r = 0$, temos então que $N(t) = N_0$ para todo t , isto é, a população mantém-se constante.
- ii) Quando $r < 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0$, isto é, a população é extinta.
- iii) Quando $r < 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_0 k}{(k - N_0)e^{-rt} + N_0} = k$. Neste caso, observa-se que a solução tende a estabilizar-se, ou seja, $N(t) = k$. Vejamos que posterior a um longo período de tempo, a população aproxima-se do limite da capacidade suporte, fato esse, ocorre de maneira independente do tamanho da população inicial.

Observamos ainda,

- i) se $N_0 < k$, a população cresce se aproximando assintoticamente do limite da capacidade suporte com $t \rightarrow \infty$;
- ii) se $N_0 > k$, a população tende a decrescer se aproximando também assintoticamente do limite da capacidade suporte com $t \rightarrow \infty$;
- iii) se $N_0 = k$, a população será constante o tempo todo.

Portanto, a modelagem dinâmica do modelo de Verhulst mostra que a população cresce até um limite máximo tendendo a se estabilizar.

A partir da solução (3.12), escrita na forma

$$N(t) = \frac{N_0 k}{ke^{-rt} - N_0 e^{-rt} + N_0},$$

ao evidenciar o termo N_0 , temos

$$N(t) = \frac{N_0 k}{ke^{-rt} - N_0(e^{-rt} - 1)},$$

$$N(t) = \frac{N_0 k}{N_0 \left(\frac{ke^{-rt}}{N_0} - (e^{-rt} - 1) \right)},$$

$$N(t) = \frac{k}{\frac{ke^{-rt}}{N_0} - e^{-rt} + 1},$$

$$N(t) = \frac{k}{e^{-rt} \left(\frac{k}{N_0} - 1 \right) + 1}.$$

Nomeamos,

$$b = \left(\frac{k}{N_0} - 1 \right),$$

temos aqui o modelo que apresentará a curva logística da população:

$$N(t) = \frac{k}{be^{-rt} + 1}. \quad (3.13)$$

Segundo [9], para obter os valores dos parâmetros b , r e k pode se utilizar o método de regressão linear por meio do método dos mínimos quadrados. O método aqui citado é utilizado com a finalidade de aproximar valores obtidos experimentalmente através de uma função linear ou não linear, para encontrar a curva que minimize a soma dos quadrados dos desvios e se adeque de maneira mais ajustada aos dados.

Para linearizar o modelo de Verhulst, reescrevemos a solução (3.13):

$$\begin{aligned} \frac{N(t)}{k} &= \frac{1}{be^{-rt} + 1}, \\ be^{-rt} + 1 &= \frac{1}{\frac{N(t)}{k}}, \\ be^{-rt} &= \frac{1}{\frac{N(t)}{k}} - 1, \\ \frac{b}{e^{rt}} &= \frac{1 - \frac{N}{k}}{\frac{N}{k}}, \\ \frac{e^{rt}}{b} &= \frac{\frac{N}{k}}{1 - \frac{N}{k}}. \end{aligned}$$

Daqui, aplicamos a função logarítmica em ambos os membros da igualdade:

$$\begin{aligned} \ln e^{rt} - \ln b &= \ln \left(\frac{\frac{N}{k}}{1 - \frac{N}{k}} \right), \\ rt - \ln b &= \ln \left(\frac{N}{k - N} \right). \end{aligned}$$

Portanto, $At + B = y$, onde

- $A = r$,
- $B = -\ln b$,
- $y = \ln \left(\frac{N}{k - N} \right)$.

Temos $B = -\ln b$, aplicando a função exponencial em ambos os lados:

$$e^B = e^{\ln b^{-1}},$$

$$e^B = \frac{1}{b},$$

$$be^B = 1,$$

$$b = e^{-B}.$$

Analisaremos o exemplo a seguir, encontrado em ([1], p.77), tratando do crescimento de uma árvore em um espaço de tempo. Ao utilizarmos o modelo de Verhulst, obtemos o valor máximo que esta árvore pode atingir e podemos visualizar a dinâmica do crescimento diante determinados períodos de tempo.

Exemplo 3.2. Crescimento de uma árvore.

Tabela 3.3: Crescimento de uma árvore.

x_i	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9
y_i	21.7	22.5	23.3	24.0	24.7	25.4	26.0	26.6	27.1	27.6	28.1	28.5	28.9

Fonte: [1], p. 77.

- $x_i =$ tempo,
- $y_i =$ altura em decímetros.

Sejam:

- $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \rightarrow$ crescimento simples,
- $\lambda_i = \frac{\Delta y_i}{y_i} \rightarrow$ crescimento relativo.

Daqui, será antevisto o valor da estabilidade, o “valor limite” que a árvore possa alcançar, ou seja, crescer. [1], para estimar o valor de estabilidade, usufrui de dois métodos: o método de Ford-Walford que possui algumas restrições, além de, em alguns casos, não pode ser utilizado para estimar o valor do ponto de estabilidade de uma variável e um modelo logístico destinado ao crescimento de uma árvore, utilizaremos este último.

Deste modo, levando em consideração um modelo logístico que apresente o crescimento da árvore, temos

$$\frac{\Delta y_i}{y_i} = \lambda_i = \hat{a}y_{i+1} + \hat{b},$$

onde $\lambda_i = 0$, quando $y_{i+1} = y^*$, ou seja, $y^* = \frac{-\hat{b}}{\hat{a}}$.

A partir daí, construímos a tabela a seguir:

Tabela 3.4: Dados para o ajuste linear.

y_i	λ_i	y_i^2	$y_i \lambda_i$
21,7	-	470,89	-
22,5	0,0369	506,25	0,8303
23,3	0,0355	542,89	0,8272
24	0,0300	576,00	0,7200
24,7	0,0292	610,09	0,7212
25,4	0,0283	645,16	0,7188
26	0,0236	676,00	0,6136
26,6	0,0231	707,56	0,6145
27,1	0,0188	734,41	0,5095
27,6	0,0184	761,76	0,5078
28,1	0,0181	789,61	0,5086
28,5	0,0142	812,25	0,4047
28,9	0,0140	835,21	0,4046
$\Sigma = 312,7$	$\Sigma = 0,2901$	$\Sigma = 8197,19$	$\Sigma = 7,3808$

Fonte: Arquivo pessoal.

Ao resolver o sistema seguinte são encontrados os valores dos coeficientes \hat{a} e \hat{b} .

$$\begin{pmatrix} 8197,19 & 312,7 \\ 312,7 & 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,3808 \\ 0,2901 \end{pmatrix}.$$

Obtem-se,

$$\lambda = -0,0037y + 0,1206.$$

Assim, para encontrar o valor estimado da altura máxima que a árvore pode atingir, temos

$$y^* = \frac{-\hat{b}}{\hat{a}},$$

$$y^* = 32,5946 \text{ dm.}$$

Através do ajuste de curva, ou seja, determinar os coeficientes de uma função, [1] transforma a curva logística na reta

$$z = \lambda x - \ln b,$$

observemos que

- $A = \lambda,$
- $B = -\ln b,$
- $z_i = \ln \left(\frac{y_i}{y^* - y_i} \right).$

Para isso, encontra-se:

Tabela 3.5: Dados para a curva logística.

x_i	y_i	z_i	x_i^2	$x_i z_i$
3	21,7	0,6890	9	2,0670
3,5	22,5	0,8015	12,25	2,8053
4	23,3	0,9190	16	3,6760
4,5	24	1,0269	20,25	4,6211
5	24,7	1,1406	25	5,7030
5,5	25,4	1,2614	30,25	6,9377
6	26	1,3718	36	8,2308
6,5	26,6	1,4900	42,25	9,6850
7	27,1	1,5958	49	11,1706
7,5	27,6	1,7095	56,25	12,8213
8	28,1	1,8329	64	14,6632
8,5	28,5	1,9402	72,25	16,4917
9	28,9	2,0570	81	18,5130
$\Sigma = 78$	$\Sigma = 334,4$	$\Sigma = 17,8356$	$\Sigma = 513,5$	$\Sigma = 117,3856$

Fonte: Arquivo pessoal.

A seguir, resolvemos o sistema abaixo, obtido a partir dos dados da tabela anterior, temos:

$$\begin{pmatrix} 513,5 & 78 \\ 78 & 13 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 117,3856 \\ 17,8356 \end{pmatrix},$$

logo,

$$z = 0,228x + 0,004.$$

Portanto,

$$A = 0,228$$

e

$$e^{\ln b^{-1}} = e^{0,004},$$

$$b^{-1} = e^{0,004},$$

$$b = \frac{1}{e^{0,004}},$$

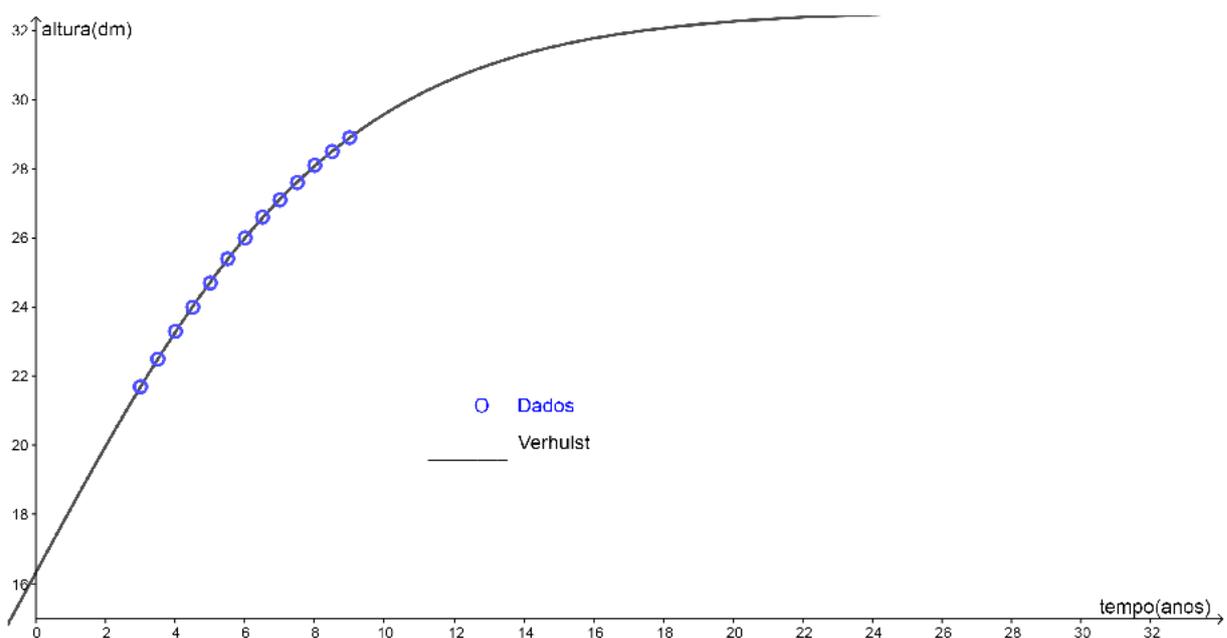
$$b \approx 0,996.$$

Assim, obtemos uma curva logística que ajusta o crescimento da árvore:

$$y(x) = \frac{32,5946}{1 + 0,996e^{-0,228x}}$$

A figura a seguir, exibe a curva logística no crescimento da árvore, visto que esta aproxima-se à realidade apresentada pelos dados.

Figura 3.6: Projeção do crescimento da árvore.



Fonte: Arquivo pessoal.

Diante das observações e análises feitas neste capítulo, observamos o quanto a Modelagem Matemática interliga a Matemática realística e o modelo matemático aplicado em diversos campos de estudo, de maneira, a apresentar simulações do cotidiano agregadas a aspectos práticos e concretos. Ao indagar esta temática, entende-se que o modelo é a representação, uma imagem que retrata uma concepção do cotidiano. Assim, é apresentado um fenômeno ou situação que possibilita tomada de decisões e ações eficazes.

Como vimos, o modelo de Malthus foi essencial para o descobrimento de vários outros modelos matemáticos populacionais que hoje temos acesso, por exemplo, o modelo de Verhulst que apresenta modificações das ideias e fatores do modelo populacional malthusiano, explorando o fato que chegará a um determinado período onde haverá um esgotamento dos recursos disponíveis que acarretará em limites ao crescimento. A partir destes, analisamos dados concretos e parâmetros essenciais para validar a aproximação do modelo com informações da realidade, assim, exibiremos aplicações dos modelos mencionados em assuntos abordados atualmente.

Capítulo 4

Aplicações Populacionais

Neste capítulo, serão abordadas algumas aplicações das EDO's em modelos matemáticos. Assim como em diversas outras ciências, as aplicações das EDO's na Medicina, Agronomia, Agricultura, Geografia e em outras áreas são inúmeras. Como exemplo, na Medicina, os primeiros modelos matemáticos utilizados para analisar e descrever os tumores, mostram o desenvolvimento da massa de tumores sólidos em decorrência de um certo período, por meio das EDO's, onde são desconsiderado os efeitos espaciais, como podemos encontrar em [8]. Já na Agricultura, temos uma aplicação da modelagem matemática no resfriamento do leite, como vemos em [5], e por outro lado temos a aplicação que iremos analisar minuciosamente, através do modelo Malthusiano, utilizando dados do crescimento efetivo dos rebanhos de bovinos no Brasil. Nosso país, se tornou um dos mais importantes produtores e exportadores de carne bovina do mundo. Logo em seguida, trataremos da aplicação do Modelo de Verhult em uma análise do crescimento da população da América do sul. O desenvolvimento deste capítulo se encontra baseado nas referências [7, 10, 15, 21].

4.1 Modelo Malthusiano: crescimento efetivo dos rebanhos (cabeças) de gado no Brasil

O Brasil é visto como o país com maior potencialidade agrícola mundial, de acordo com [7] suas médias de rentabilidade e produtividade no setor da pecuária e da agricultura são expressivas e otimistas. O setor agropecuário tem mostrado a sua efetividade econômica para o país, mesmo diante a pandemia, apresentou crescimento 1,9 % do Produto Interno Bruto (PIB) no primeiro trimestre de 2020 em comparação ao PIB do ano anterior. O agro se expandiu em diversas regiões brasileiras, sendo responsável por grande parte do desenvolvimento econômico ruralista e também urbano. A pecuária de corte, por exemplo, ocupa o segundo lugar no ranking do valor bruto da produção (VBP) agropecuária, com R\$ 139,7 bilhões, no ano de 2020. Levando em consideração, a presença constante e desenvolvimento atual do Agro, exibiremos

a aplicabilidade do Modelo de Malthus em um estudo sobre o crescimento efetivo dos rebanhos bovinos no Brasil.

A tabela abaixo apresenta dados dos censos realizados pelo IBGE [15] diante o efetivo de bovinos em milhões de cabeças, no período de 1975 à 2010.

Tabela 4.1: Censo demográfico do crescimento efetivo dos rebanhos de bovinos no Brasil, em milhões.

Período	Censo demográfico
1975	102,532
1980	118,971
1985	128,423
1995	161,228
2000	169,875
2010	209,541

Fonte: IBGE, 2010.

Sabemos que a taxa de crescimento dos rebanhos (cabeças) de bovinos do Brasil é dado por:

$$\alpha = \sqrt[t]{\frac{N(t)}{N_0}} - 1,$$

o período aqui analisado é de 35 anos, ou seja, o $t = 35$, a população inicial é $N_0 = 102,532$ e a população no período de 35 anos é $N(35) = 209,541$. Isto é,

$$\alpha = \sqrt[35]{\frac{209,541}{102,532}} - 1,$$

$$\alpha = 0,021,$$

$$\alpha = 2,1\%.$$

O modelo discreto de Malthus propõe que o crescimento é constante, então vejamos que aqui os rebanhos (cabeças) bovinos cresceu 2,1 % ao ano durante os 35 anos analisados.

Para obtermos a população dos anos de 1980, 1985, 1990, 1995, 2000 e 2010, calculemos :

$$N(t) = (\alpha + 1)^t N_0.$$

Para encontrar a população de 1980, temos $t = 5$:

$$\begin{aligned} N(5) &= 102,532 \cdot (1,021)^5, \\ N(5) &= 113,760. \end{aligned}$$

Para encontrar a população de 1985, temos $t = 10$:

$$\begin{aligned} N(10) &= 102,532 \cdot (1,021)^{10}, \\ N(10) &= 126,217. \end{aligned}$$

Para encontrar a população de 1990, temos $t = 15$:

$$\begin{aligned} N(15) &= 102,532 \cdot (1,021)^{15}, \\ N(15) &= 140,038. \end{aligned}$$

Para encontrar a população de 1995, temos $t = 20$:

$$\begin{aligned} N(20) &= 102,532 \cdot (1,021)^{20}, \\ N(20) &= 155,372. \end{aligned}$$

Para encontrar a população de 2000, temos $t = 25$:

$$\begin{aligned} N(25) &= 102,532 \cdot (1,021)^{25}, \\ N(25) &= 172,386. \end{aligned}$$

Para encontrar a população de 2010, temos $t = 35$:

$$\begin{aligned} N(35) &= 102,532 \cdot (1,021)^{35}, \\ N(35) &= 212,207. \end{aligned}$$

Tabela 4.2: Modelo de Malthus e o censo demográfico do crescimento efetivo do rebanho de bovino brasileiro, em milhões.

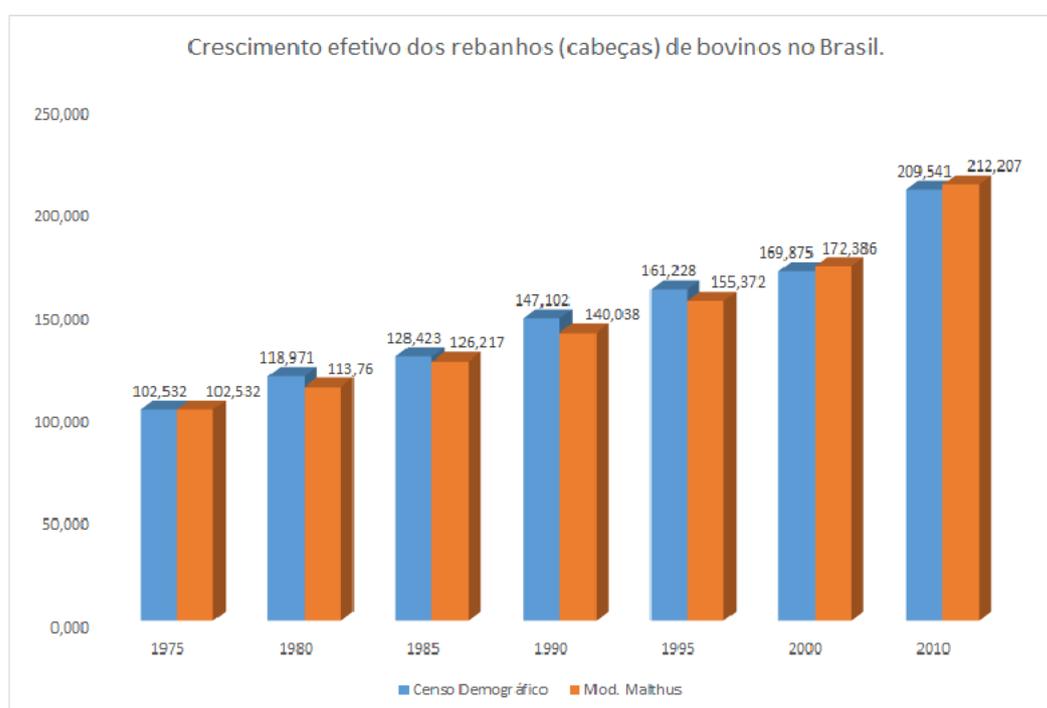
Período	Censo demográfico	Modelo Discreto de Malthus
1975	102,532	102,532
1980	118,971	113,76
1985	128,423	126,217
1995	161,228	155,372
2000	169,875	172,386
2010	209,541	212,207

Fonte: Adaptação de IBGE, 2010.

Se consideramos a taxa de crescimento médio constante, vemos que em 2000 e 2010 houve uma valorização da população em relação ao censo demográfico realizado pelo IBGE.

De acordo com a Teoria demográfica de Malthus, dadas duas populações, com o passar do tempo o número de indivíduos cresce infinitamente, sem impedimentos. Ele apresenta que a taxa de crescimento de habitantes de uma população é dependente do número de habitantes, ou seja, a taxa é diretamente proporcional ao valor dado de habitantes. Observemos na Figura 4.1 que este modelo prever o crescimento de maneira eficaz quando é trabalhado com curtos períodos, como o que foi apresentado. A partir do Modelo de Malthus foi que surgiram novos modelos para o cálculo de crescimento de populações, como exemplo, temos o modelo de Gompertz e o modelo logístico de Verhulst.

Figura 4.1: Projeção do crescimento efetivo dos rebanhos de bovinos no Brasil, em milhões.



Fonte: Arquivo pessoal.

Os resultados mostrados pelo modelo Malthusiano apontam que a evolução do rebanho bovino brasileiro está positivamente crescendo e destacando-se na última década analisada, o crescimento do rebanho bovino alcança 212,207 milhões, o que equivale a 39,821 milhões de cabeças de gado a mais que nos anos 2000. Com base nos dados reais fornecidos pelos censos demográficos estudados e os resultados obtidos, observamos que podemos prever algumas ações futuras e fornecer dados para possíveis pesquisas sobre o crescimento da bovinocultura, quantitativo de pastejo, crescimento do rebanho destinado ao corte e várias atividades relacionadas ao comportamento do crescimento de rebanho bovino no Brasil. Entretanto, são fundamentais as adequações que condigam com a área de pesquisa e as particularidades de cada setor.

4.2 Modelo de Verhulst: perspectivas do crescimento da população da América do Sul

O convívio do dia a dia é perpassado por inúmeras pessoas, trabalhando, dialogando, vivendo no âmbito expressivo de diversas outras ações que marcam os espaços caracterizados pelos seus costumes, línguas e atos. Analisar a população de uma sub-região, país, estado, ou neste traço de estudo, é crucial para assimilar e compreender como as pessoas se organizam diante tal sociedade, no seu espaço de acordo seu perfil social e cultural. Com o passar do tempo, as interpretações a respeito da dinâmica populacional passaram por mudanças em decorrência do desenvolvimento da humanidade.

Investigando a fundo a História, nos deparamos com numerosos registros que tratam da dinâmica e crescimento populacional, como por exemplo, uma passagem bíblica ([3]): “Sejam fecundos, multipliquem-se”, além de serem relatados vários movimentos migratórios dos povos. É perceptível em bibliografias mais antigas o aparecimento de expressões sobre a migração, fecundidade e mortalidade em relação ao meio que estão situados. Segundo ([10]),

Os filósofos gregos Platão (427 a.C - 347 a.C) e Aristóteles (348 a.C - 222 a.C) defendiam a necessidade de otimizar o tamanho da população e da terra (no sentido de território), para que a defesa e a segurança pudessem ser maximizados, os recursos pudessem ser adequados para o povo e o governo pudesse utiliza-los de forma eficiente. ([10], p.15)

Compreende-se a importância do estudo populacional para entender as necessidades dos indivíduos, quais ações a serem realizadas com a finalidade de atender positivamente as demandas do número máximo de pessoas. Diante deste fato, em conhecimento que as EDO's são fundamentais para entender o crescimento populacional, vemos uma aplicação do Modelo de Verhulst no crescimento da população da América do Sul, uma porção continental constituída pelos países: Argentina, Bolívia, Brasil, Chile, Colômbia, Equador, Guiana, Paraguai, Peru, Suriname, Uruguai e Venezuela, além do território da Guiana Francesa. Atualmente a América do Sul possui uma extensão territorial de 17,8 milhões de quilômetros quadrados.

A Organização das Nações Unidas (United Nations) é uma organização intergovernamental criada para promover a paz mundial, comodidade diante a sociedade e a economia do mundo. Neste contexto, foram realizada uma perspectiva da população sul-americana. Considera-se que dados demográficos e socioeconômicos possibilitam a compreensão diante a população, através de suas proporções qualitativas e quantitativas, viabilizando planejamentos e estratégias cabíveis para atender as características da sociedade.

Vejamos a tabela abaixo, são analisados dados adaptados para esta análise, de acordo aos dados apresentados por [21], com a finalidade de exibir o crescimento da população utilizando o modelo de Verhulst, onde a variável aqui considerada é a população total da América do Sul.

Tabela 4.3: Perspectiva do crescimento da população da América do Sul, em milhões.

Período	População
1950	113,765
1960	148,686
1970	192,074
1980	240,515
1990	295,398
2000	348,412
2010	392,544

Fonte: United Nations, 2019.

De início, encontra-se a taxa de crescimento populacional em cada período.

$$\lambda_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{y_i}.$$

Entre 1950 e 1960:

$$\lambda_1 = \frac{148,686 - 113,765}{113,765},$$

$$\lambda_1 = 0,3070.$$

Entre 1960 e 1970:

$$\lambda_2 = \frac{192,074 - 148,686}{148,686},$$

$$\lambda_2 = 0,2918.$$

Entre 1970 e 1980:

$$\lambda_3 = \frac{240,515 - 192,074}{192,074},$$

$$\lambda_3 = 0,2522.$$

Entre 1980 e 1990:

$$\lambda_4 = \frac{295,398 - 240,515}{240,515},$$

$$\lambda_4 = 0,2282.$$

Entre 1990 e 2000:

$$\lambda_5 = \frac{348,412 - 295,398}{295,398},$$

$$\lambda_5 = 0,1795.$$

Entre 2000 e 2010:

$$\lambda_6 = \frac{392,544 - 348,412}{348,412},$$

$$\lambda_6 = 0,1267.$$

Lembrando que

- x_i = tempo em anos,
- y_i = população em milhões.

Construiremos a tabela:

Tabela 4.4: Dados para o ajuste linear.

y_i	λ_i	y_i^2	$y_i \lambda_i$
113,765	-	12942,4752	-
148,686	0,307	22107,5266	45,6466
192,074	0,2918	36892,4215	56,0472
240,515	0,2522	57847,4652	60,6579
295,398	0,2282	87259,9784	67,4098
348,412	0,1795	121390,9217	62,5400
392,544	0,1267	154090,7919	49,7353
$\Sigma=1617,629$	$\Sigma=1,3854$	$\Sigma=479589,1054$	$\Sigma=342,0368$

Fonte: Arquivo pessoal.

Para ajustarmos esses dados, são desconsiderados os valores da primeira linha. Neste caso, observa-se, que não temos dados anteriores ao período de 1950 para calcular a taxa de crescimento.

Para determinar o valor dos coeficientes \hat{a} e \hat{b} , resolvemos o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} 479589,1054 & 1617,629 \\ 1617,629 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 342,0368 \\ 1,3854 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, obtemos

$$\lambda = -0,0007y + 0,4261.$$

Para obter o valor limite estimado, calculemos

$$y^* = \frac{-\hat{b}}{\hat{a}},$$

$$y^* = \frac{0,4261}{0,0007},$$

daqui,

$$y^* = 608,7142857 \text{ milhões.}$$

Para encontrar a curva linear, temos:

$$z = \lambda x - \ln b,$$

observemos que

- $A = \lambda,$
- $B = -\ln b,$
- $z_i = \ln \left(\frac{y_i}{y^* - y_i} \right).$

Para 113,765 milhões:

$$z_1 = \ln \left(\frac{113,765}{608,77142857 - 113,765} \right),$$

$$z_1 = -1,4703.$$

Para 148,686 milhões:

$$z_2 = \ln \left(\frac{148,686}{608,77142857 - 148,686} \right),$$

$$z_2 = -1,1294.$$

Para 192,074 milhões:

$$z_3 = \ln \left(\frac{192,074}{608,77142857 - 192,074} \right),$$

$$z_3 = -0,7743.$$

Para 240,515 milhões:

$$z_4 = \ln \left(\frac{240,515}{608,77142857 - 240,515} \right),$$

$$z_4 = -0,4258.$$

Para 295,398 milhões:

$$z_5 = \ln \left(\frac{295,398}{608,77142857 - 295,398} \right),$$

$$z_5 = -0,0589.$$

Para 348,412 milhões:

$$z_6 = \ln\left(\frac{348,412}{608,77142857 - 348,412}\right),$$

$$z_6 = 0,2915.$$

Para 392,544 milhões:

$$z_7 = \ln\left(\frac{392,544}{608,77142857 - 392,544}\right),$$

$$z_7 = 0,5966.$$

Tabela 4.5: Dados para a curva logística.

x_i	y_i	z_i	x_i^2	$x_i z_i$
0	113,765	-1,4703	0	0
10	148,686	-1,1294	100	-11,2940
20	192,074	-0,7743	400	-15,4860
30	240,515	-0,4258	900	-12,7740
40	295,398	-0,0589	1600	-2,3560
50	348,412	0,2915	2500	14,5750
60	392,544	0,5966	3600	35,7960
$\sum=210$	$\sum=1731,394$	$\sum=-2,9706$	$\sum=9100$	$\sum=8,4610$

Fonte: Arquivo pessoal.

A partir daqui, resolvemos o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} 9100 & 210 \\ 210 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,4610 \\ -2,9706 \end{pmatrix}$$

e encontra-se:

$$z = 0,0348x - 1,4684.$$

Portanto,

$$A = 0,0348$$

e

$$e^{\ln b^{-1}} = e^{-1,4684},$$

$$b^{-1} = e^{-1,4684},$$

$$b = e^{1,4684},$$

$$b = 4,3423.$$

Para encontrar a curva logística da população, temos

$$y(x) = \frac{608,7142857}{1 + 4,3423e^{-0,0348x}}.$$

Este modelo, expõe a concepção que no início não há disputa por alimento ou por espaço, mas em determinado momento passa a existir esta competição, logo a taxa de crescimento vai diminuindo e a população irá crescer até um determinado limite.

Para encontrarmos a população dos anos de 1960, 1970, 1980, 1990, 2000 e 2010, realizamos os cálculos substituindo em (3.12):

$$y(x) = \frac{y_0 y^*}{(y^* - y_0)e^{-Ax} + y_0}.$$

Para encontrar a população de 1960, temos $x = 10$:

$$y(10) = \frac{113,765 \cdot 608,7142857}{(608,7142857 - 113,765)e^{-0,0348 \cdot 10} + 113,765},$$

$$y(10) = 149,489.$$

Para encontrar a população de 1970, temos $x = 20$:

$$y(20) = \frac{113,765 \cdot 608,7142857}{(608,7142857 - 113,765)e^{-0,0348 \cdot 20} + 113,765},$$

$$y(20) = 192,077.$$

Para encontrar a população de 1980, temos $x = 30$:

$$y(30) = \frac{113,765 \cdot 608,7142857}{(608,7142857 - 113,765)e^{-0,0348 \cdot 30} + 113,765},$$

$$y(30) = 240,445.$$

Para encontrar a população de 1990, temos $x = 40$:

$$y(40) = \frac{113,765 \cdot 608,7142857}{(608,7142857 - 113,765)e^{-0,0348 \cdot 40} + 113,765},$$

$$y(40) = 292,444.$$

Para encontrar a população de 2000, temos $x = 50$:

$$y(50) = \frac{113,765 \cdot 608,7142857}{(608,7142857 - 113,765)e^{-0,0348 \cdot 50} + 113,765},$$

$$y(50) = 345,150.$$

Para encontrar a população de 2010, temos $x = 60$:

$$y(60) = \frac{113,765 \cdot 608,7142857}{(608,7142857 - 113,765)e^{-0,0348 \cdot 60} + 113,765},$$

$$y(60) = 395,476.$$

Tabela 4.6: Modelo de Verhulst e o censo demográfico da perspectiva populacional da América do Sul, em milhões.

Período	Censo demográfico	Modelo Logístico Contínuo de Verhulst
1950	113,765	113,765
1960	148,686	149,489
1970	192,074	192,077
1980	240,515	240,445
1990	295,398	292,444
2000	348,412	345,150
2010	392,544	395,476

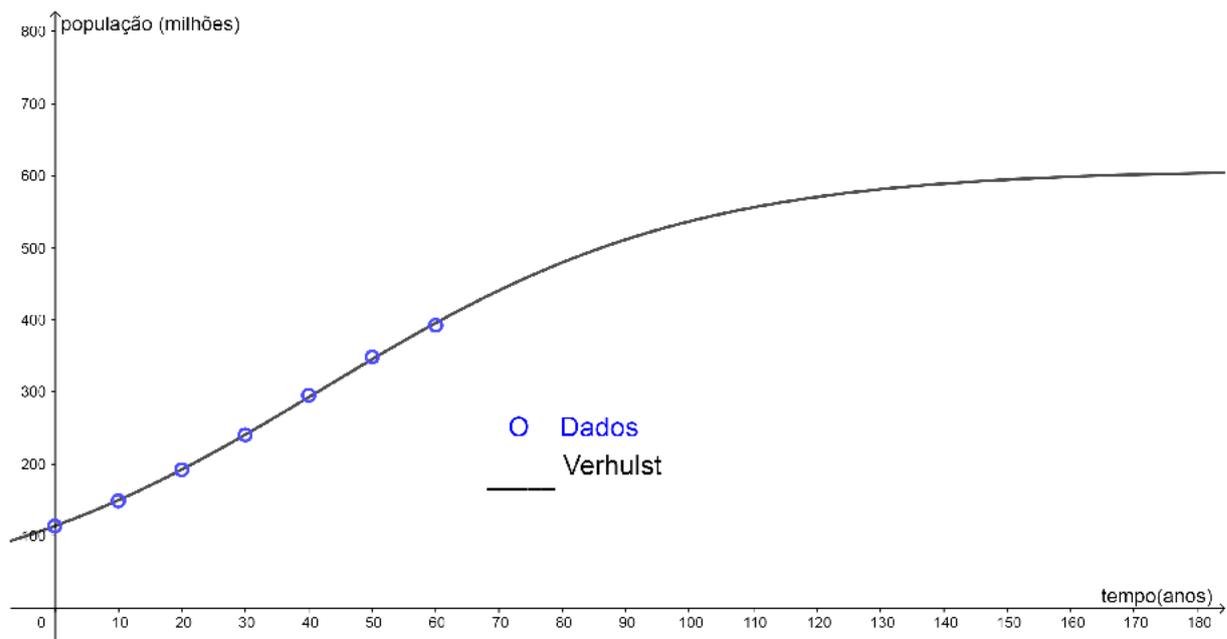
Fonte: Adaptação de United Nations, 2019.

A leitura dos dados permite inferir que, de acordo com os dados apresentados por [21], houve um crescimento positivo da população de 1950 a 1990, já nas duas últimas décadas aqui analisadas, o crescimento retrai. Vejamos que a população no ano de 1990 cresceu 54,881 milhões em relação 1980, já no ano de 2000, o crescimento da população foi de mais 53,014 milhões em relação a década anterior, retraindo também em 2010. Se considerarmos as estimativas obtidas de acordo ao modelo de Verhulst, o crescimento populacional inicia uma retração na última década, em 2010 apresenta um crescimento populacional de 50,326 milhões. Mesmo diante das variações de valores, observemos que são próximos os quantitativos da população em ambos. O modelo de Verhulst é um dos modelos mais preciso em seus resultados.

A partir da perspectiva da população aqui observada, temos informações sobre o valor limite que a população sul-americana pode atingir e assimilar ações diretamente relacionadas ao desenvolvimento desta população. É essencial o uso de metodologias que possibilitem prever com confiabilidade o crescimento populacional, observemos o modelo de Verhulst trabalhado

em períodos de tempo longos ou mais curtos com eficiência, visualizamos a sua aplicação e proximidade da realidade na Figura 4.2. Diante do gráfico, é visto que o Modelo de Verhulst mostra uma curva logística que se assemelha aos dados, vejamos que a linha passa extremamente próxima aos dados que [21] apresenta.

Figura 4.2: Projeção do crescimento da população da América do Sul.



Fonte: Arquivo pessoal.

Analisar a temática população sucede um processo de ampliação do conjunto, no qual são agregados diversos elementos, viabilizando estudos de diferentes mecanismos, diante disso, compreende-se a dinâmica geral e particular social. Nesse contexto, torna-se fundamental, entre outros fatores, que se tenha conhecimento da crescente população para que se atenda as necessidades exigidas, como exemplos, a saúde pública e a sustentabilidade. Estamos vivendo um momento histórico, uma pandemia se alastrou no mundo, os modelos de crescimento populacional, neste caso, o modelo de Verhulst pode suprir algumas informações necessárias, como apresentar dados sobre a evolução da população para entender o crescimento e atender as demandas de controle sanitário. Destaca-se que cada pesquisa tem um contexto e objetivo a ser suprido, então cada setor necessita adequar a suas especificidades.

Capítulo 5

Considerações Finais

As Equações Diferenciais Ordinárias ofertam uma ampla ala de conhecimento aplicado em diversas áreas em que a Matemática está envolvida. Vimos que fenômenos distintos podem ser descritos por modelos matemáticos através de uma única equação diferencial, por exemplo os modelos analisados nesta monografia: Modelo de Malthus e Modelo de Verhulst. No desenvolvimento deste trabalho, apresentamos um estudo acerca das colaborações e pensamentos de vultuosos matemáticos, que evoluíram significativamente para o que hoje temos, diante das EDO's e conseqüentemente sua aplicabilidade no crescimento populacional. Aqui, também expomos o conceito de Modelagem Matemática, uma forma intangível para entrevir tendências, prognosticar e assimilar situações, de acordo com uma linguagem matemática acessível para conhecedores e leigos diante à Matemática. Tendo em vista o quão interessante é explorar esse campo de conhecimento, mostramos que a Matemática está presente em nosso meio social, aplicada e precisa em seus dados.

Com a finalidade de compreender a aplicabilidade da Matemática no cotidiano, estudamos o comportamento das Equações Diferenciais Ordinárias. A partir dessas equações mostramos, usufruindo do Modelo de Malthus, a aplicação na agricultura, quando analisamos o crescimento dos rebanhos (cabeça) no Brasil e por meio do Modelo de Verhulst analisamos as perspectivas de crescimento da população da América do Sul. Observa-se que mesmo em situações diferentes, em relação a comparação dos modelos com os dados, vimos que o Modelo de Malthus é utilizado em períodos mais curtos com eficácia. As aproximações das soluções foram próximas aos valores reais, um efeito que contribui para entender a evolução do crescimento dos rebanhos bovinos no Brasil. Já o Modelo de Verhulst quando aplicado em períodos, sejam eles curtos ou mais longos, exhibe aproximações mais precisas, aqui a curva logística apresenta uma perspectiva da população, fornecendo informações essenciais como o valor limite de indivíduos que, na aplicação analisada, a população da América do Sul pode atingir, levando em consideração fatores inibidores de crescimento.

Há diversos outros modelos matemáticos, como o modelo de Gompertz e modelo de

Lotka-Volterra, os quais também estudam e buscam explicar parâmetros, dimensões e relações com o crescimento populacional, possibilitando também comparar dados, analisar taxas e até assimilar conteúdos.

O desenvolvimento deste trabalho possibilitou, além de explorar conceitos vistos em disciplinas do curso, compreender novas teorias e algumas aplicações em assuntos presentes no cotidiano. O conhecimento diante os modelos de crescimento populacional entusiasmaram o desejo para explorar ainda mais essa área de estudo, e possivelmente uma nova versão.

Por fim, tendo em vista os temas aqui abordados, podem ser trabalhados os modelos na educação Básica, em conteúdos como funções exponenciais e logarítmicas, além de possibilitar a interdisciplinaridade, apoiando de aparatos midiáticos para plotar e exibir o crescimento de populações.

Referências

- [1] BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**, São Paulo, Editora Contexto, 2002.
- [2] Bertone, Ana Maria Amarillo Bassanezi, Rodney Carlos Jafelice, Rosana Sueli da Motta. **Modelagem Matemática** . Uberlândia, MG : UFU, 2014, 187 p. Licenciatura em Matemática .
- [3] BÍBLIA, A. T. Gênesis. In BÍBLIA. Português. **Nova Bíblia Pastoral**. Tradução de Luiz José Dietrich, José Ademar Kaefer, Maria Antônia Marques, Rafael Rodrigues e Shigeyuki Nakaose. São Paulo: Paulus, 2014. p. 23.
- [4] BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2003.
- [5] BIZOLATTI, A. S.; KURIKI, C. Y. EDO e a produção de leite. **Passei Direto**, Cornélio Procopio, 2018. Disponível em: < <https://www.passeidireto.com/arquivo/58971135/edo-leite-versao-final>>. Acesso em : 18 de fevereiro de 2021.
- [6] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Tradução: Valéria Magalhães Lório. 8ªed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [7] BUONAFINA, Júlia. **Produtividade agropecuária do Brasil é uma das que mais crescem, diz estudo**. 2017. Disponível em: < <http://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2017-05/produtividadeagropecuaria-do-brasil-e-uma-das-que-mais-crescem-diz-estudo>>. Acesso em: 02 de fevereiro de 2021.
- [8] Carvalho, Daniela Schimitz de. **Modelagem matemática do crescimento tumoral mamário** / Daniela Schimitz de Carvalho. – 2016. 124 f.
- [9] CECCO, B. L.; FIORI, A. F. **A relação entre a Biologia e a Matemática: Biomatemática**. Unochapecó, Chapecó, 2012.

- [10] Dantas, Eugenia Maria. **Geografia da população**/ Eugenia Maria Dantas, Ione Rodrigues Diniz Morais e Maria José da Costa Fernandes.-2. ed. -Natal: EDUFRN, 2011.
- [11] DE PAULA, Elton Weiglas. **Uma Introdução às Equações Diferenciais Parciais: As Séries de Fourier e a Equação de Ondas**. 2019. 56 f. Trabalho De Conclusão De Curso- Universidade Federal de São João del-Rei, São João del-Rei, 2019.
- [12] FIGUEIREDO, J.; RIBEIRO, C. **Apontamentos de Equações Diferenciais** (Complementos de Análise Matemática EE). Departamento de Matemática e Aplicações Universidade do Minho, 2013. Disponível em: <<https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/27285/1/ApontamentosEDs-CAM.pdf>> Acesso em: 05 de Janeiro de 2021.
- [13] GONTIJO, A. B. **Estudo e modelagem das dinâmicas estruturais de assembleias de formigas tropicais em diferentes escalas ecológicas**. 2009. 96 f. Dissertação (Mestrado em Ecologia de Biomas Tropicais) – Universidade Federal de Ouro Preto, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. Ouro Preto, 2009.
- [14] IBGE–Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Censo Demográfico: O que é **IBGE**. 2020. Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/22827-censo-2020-censo4.html>>. Acesso em: 05 de fevereiro de 2021.
- [15] IBGE–Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Efetivo dos rebanhos por tipo de rebanho. **SIDRA.IBGE**. 2010. Disponível em: <<https://sidra.ibge.gov.br/tabela/3939#resultado>>. Acesso em: 1 de fevereiro de 2021.
- [16] IBGE–Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. População residente, por sexo, situação e grupo de idade-Amostra-Characterísticas Gerais da População. **SIDRA.IBGE**. 2012. Disponível em: <[https://sidra.ibge.gov.br/tabela/3939# resultado](https://sidra.ibge.gov.br/tabela/3939#resultado)>. Acesso em: 1 de fevereiro de 2021.
- [17] KREYSZIG, E. **Matemática Superior para Engenharia**. Vols. 1 e 2. 9.^a ed. LTC. 2009.
- [18] **Panorama do Agro**. CNA. Disponível em: <<https://www.cnabrazil.org.br/cna/panorama-do-agro>>. Acesso em: 02 de fevereiro de 2021.
- [19] Sodré, Ulysses. **Modelos matemáticos**. UEL, Londrina, 2007. Disponível em: <<http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/modelos.pdf>>. Acesso em: 05 de fevereiro de 2021.

- [20] Tavoni, Robinson. **Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst: uma motivação para o ensino de logsritmos e exponenciais**/Robinson Tavoni.-Rio Claro, 2013.
- [21] United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division (2019). **World Population Prospects 2019**, Online Edition. Rev. 1. Disponível em:< <https://population.un.org/wpp2019/Download/Standard/Population/>>. Acesso em: 2 de janeiro de 2021.
- [22] Valle, Marcos Eduardo. **Cálculo III: Teorema de Existência e Unicidade. Redução de Ordem**. 19 slides. Disponível em: < <http://www.ime.unicamp.br/valle/Teaching/MA311/Aula04.pdf>>. Acesso em: 15 de fevereiro de 2021.
- [23] **VBP–Valor Bruto da Produção Agropecuária**. Ministério da Economia. Disponível em: <https://www.gov.br/fazenda/pt-br/centrais-de-contenudos/publicacoes/conjuntura-economica/agricola/2020/2020-05-14-vbp-abril_2020.pdf>. Acesso em: 02 de fevereiro de 2021.
- [24] VIECILI, C.R.C. **Modelagem Matemática: Uma proposta para o ensino da matemática**. 2006. 119 f. Dissertação (Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática) Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.
- [25] WIKIPEDIA. Artigo: **Gottfried Wilhelm Leibniz**. Disponível em:<https://pt.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz>. Acesso em: 24 de dezembro de 2020.
- [26] WIKIPEDIA. Artigo: **Isaac Newton**. Disponível em:<https://pt.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton>. Acesso em: 24 de dezembro de 2020.
- [27] WIKIPEDIA. Artigo: **Leonhard Euler**. Disponível em:<https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler>. Acesso em: 24 de dezembro de 2020.
- [28] WIKIPEDIA. Artigo: **Thomas Malthus**. Disponível em:<https://pt.wikipedia.org/wiki/Thomas_Malthus>. Acesso em: 02 de fevereiro de 2021.
- [29] WIKIPEDIA. Artigo: **Pierre François Verhulst**. Disponível em:<https://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre_François_Verhulst>. Acesso em: 02 de fevereiro de 2021.

- [30] Yartey, Joseph Nee Anyah. **Equações diferenciais** / Joseph N. A. Yartey e Simone S. Ribeiro - Salvador: UFBA, Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação a Distância, 2017. 174p.: il.
- [31] Zanella, Liane Carly Hermes **Metodologia de pesquisa** / Liane Carly Hermes Zanella. – 2. ed.rev. atual. – Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração/UFSC, 2011.
- [32] ZILL, Dennis G. **A First Course in Differential Equations with Modeling Applications**. Tenth Edition. Boston: Brooks/Cole, 2013.