UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS
CENTRO DE CIÊNCIAS INTEGRADAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GUILHERME TAVARES DE SOUSA

LEMA DE ZORN: APLICAÇÃO EM ESPAÇOS VETORIAIS

Araguaína (TO)
2023

GUILHERME TAVARES DE SOUSA

LEMA DE ZORN: APLICAÇÃO EM ESPAÇOS VETORIAIS

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Integradas da Universidade Federal do Norte do Tocantins, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior

Araguaína (TO)

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

T2311 TAVARES DE SOUSA, GUILHERME.
LEMA DE ZORN: APLIAÇÃO EM ESPAÇOS VETORIAIS. / GUILHERME TAVARES DE SOUSA. – Araguaína, TO, 2023.
37 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2023.
Orientador: JOSÉ CARLOS DE OLIVEIRA JUNIOR

1. DEMOSNTRANDO POR QUE TODO ESPAÇO VETORIAL POSSUI UMA BASE DE DIMENSÃO FINITA.. 2. LEMA DE ZORN. 3. ESPAÇO VETORIAL. 4. BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL. I. Título

CDD 510

GUILHERME TAVARES DE SOUSA

LEMA DE ZORN: APLICAÇÃO EM ESPAÇOS VETORIAIS

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Integradas da Universidade Federal do Norte do Tocantins, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior

Data de aprovação: 08 / 11 / 2023

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
JOSE CARLOS DE OLIVEIRA JUNIOR
Data: 12/12/2023 17:02:32-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior – UFNT – Orientador

Documento assinado digitalmente
ALVARO JULIO YUCRA HANCCO
Data: 11/12/2023 16:41:07-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Álvaro Julio Yucra Hancco – UFNT – Examinador

Documento assinado digitalmente
LUCAS PEREIRA DE ARAUJO
Data: 12/12/2023 16:57:39-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

MSc. Lucas Pereira de Araújo – UFNT – Examinador

Araguaína (TO)

2023

Dedico esse trabalho em especial a minha mãe e meu irmão, que não mediram esforços nessa longa caminhada até a conclusão do curso, e a toda minha família e amigos que me apoiaram e me ajudaram durante toda essa jornada.

AGRADECIMENTOS

De início, agradeço a Deus por ter me concedido a vida, ter me dado paciência e sabedoria, e ter me levantado de cada queda. Agradeço a ti, Senhor, por tudo que tenho e tudo que sou. Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à minha mãe, Maria Aparecida Tavares de Sousa, que sem dúvida nenhuma foi e é uma inspiração na minha vida. Uma guerreira que nunca mediu esforços para me ajudar, esteve sempre ao meu lado e me direcionou para o caminho certo. Aos meus dois irmãos, Harmando e João Paulo, que também sempre se colocaram à disposição para me ajudar, estiveram comigo nessa jornada, me deram conselhos, me ajudaram e nunca me deixaram trilhar sozinho, e minha tia Edineia, que contribuiu demais para esse sonho, me ajudou em tudo que precisei, e além de tia foi uma grande amiga em toda essa trilhada.

Agradeço aos meus avós José Barbosa e Dona Maria pelos conselhos e por terem me dado a família batalhadora que tenho, família sinônimo de luta e trabalho. E é por essa família que eu nunca pensei em desistir dos meus objetivos.

Aos meus colegas de curso, meus singelos agradecimentos, por terem me aceitado da maneira que sou. Com vocês eu pude ser verdadeiramente eu, vocês nunca deixaram ninguém desistir, mesmo nos momentos de fraqueza, havia sempre alguém ali dizendo “não desista, nós vamos conseguir”. Agradeço ao Daniel, meu amigo de curso, de estágio, de trabalhos e de muitas gargalhadas, com e sem motivos, espero que nossa amizade dure eternamente.

Aos meus amigos Júnior, Ytallo e Luís que sempre estiveram comigo, desde criança e até os dias de hoje, me apoiaram e foram duros quando necessário. Obrigado!

E à minha companheira Beatriz, que lutou essa jornada comigo e tantas outras que já enfrentamos, você sempre esteve comigo nos bons e maus momentos, agradeço por tudo e por tanto.

Agradeço a todos os meus professores, desde o ensino fundamental até o ensino superior, e que agora vou ter o orgulho de também poder ser um. Agradeço ao professor Madian por ter sido uma das pessoas a me mostrar o quão bonita é a matemática, meu grande professor do ensino médio e fundamental e uma referência até os dias de hoje, e ao meu grande professor Dr. José Carlos por ter aceitado o meu convite de ser meu orientador e ter me dado palavras de encorajamento, e sem sombra de dúvida um dos grandes exemplos de vida que levarei da faculdade.

Por fim, agradeço a Deus por ter me concedido a vida, ter me dado paciência e sabedoria, e ter me levantado de cada queda. Agradeço a ti, Senhor, por tudo que tenho e tudo que sou.

A matemática é o alfabeto com qual deus escreveu oUniverso .

(Galileu Galilei)

RESUMO

Inicialmente, apresenta-se uma introdução aos espaços vetoriais, explorando suas definições e propriedades. Para ilustrar esses conceitos, apresentaremos exemplos tanto em contextos de espaços vetoriais finitos quanto infinitos. Serão discutidas algumas operações pertinentes a esses espaços e suas propriedades. Em seguida, aprofundaremos nas premissas do Lema de Zorn, fornecendo definições cruciais para nosso estudo. Cada definição será acompanhada de exemplos elucidativos, visando melhor compreensão. Utilizando o Lema de Zorn como ferramenta, demonstraremos a existência de bases para espaços vetoriais, sejam elas finitas ou infinitas. Esse resultado será respaldado por argumentos sólidos e poderá ser visualizado através de casos exemplificativos. Por fim, concluiremos nosso trabalho revisitando os pontos cruciais abordados e consolidando a importância do Axioma da Escolha e do Lema de Zorn na teoria dos espaços vetoriais. Dessa forma, teremos construído uma base sólida de entendimento sobre como os preceitos teóricos se aplicam na prática, enriquecendo nossa compreensão sobre espaços vetoriais e suas bases.

Palavras-chave: Lema de Zorn, Axioma da Escolha, Base.

ABSTRACT

The present thesis will delve into the principles of Vector Spaces, the Axiom of Choice, and Zorn's Lemma. The main focus will be on grasping the fundamentals of a vector space by utilizing Zorn's Lemma (equivalent to the Axiom of Choice) to demonstrate that every vector space possesses a base, whether finite or infinite. We will start with an introduction to vector spaces, exploring their definitions and properties and providing examples in both finite and infinite vector space contexts. Various operations and their properties will also be discussed. Moving forward, we will delve into the prerequisites of Zorn's Lemma, offering crucial definitions accompanied by illustrative examples for better comprehension. Utilizing Zorn's Lemma as a tool, we will show the existence of bases for vector spaces, whether finite or infinite, supported by robust arguments and exemplified cases. In conclusion, we will recapitulate the key points discussed, solidifying the significance of the Axiom of Choice and Zorn's Lemma in the theory of vector spaces. By doing so, we will have established a strong foundation for understanding how theoretical principles apply in practice, enhancing our comprehension of vector spaces and their bases.

Keyword: Zorn's lemma, Axiom of Choice, Base.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho, faremos um estudo do lema de zorn e algumas aplicações, em particular estudaremos uma aplicação do lema de zorn nos espaços vetoriais. Os espaços vetoriais têm sua origem no ramo da geometria afim, surgindo a partir da introdução de coordenadas no plano ou no espaço tridimensional. Um espaço vetorial é uma coleção de objetos chamados vetores, que podem ser somados um ao outro e multiplicados por números, denominados escalares. Os números reais são escalares frequentemente utilizados, mesmo havendo também multiplicação por números complexos, números racionais, no geral por qualquer corpo. As operações de adição de vetores e multiplicação por vetores precisam satisfazer certas propriedades, denominadas axiomas as quais serão apresentadas no decorrer do trabalho.

Normalmente um espaço vetorial tem sua base, a qual é formada por um conjunto finito ou infinito de vetores, que por conveniência são frequentemente indexados por um conjunto de índices, que gera todo o espaço e é linearmente independente. No entanto, será que todo espaço vetorial tem base? Será que existe um conjunto de vetores tal que todos os demais vetores do espaço vetorial podem ser escritos de forma única por uma quantidade finita de vetores desse conjunto?

O trabalho tem como principal obejetivo, provar que todo espaço vetorial possui uma base seja ela finita ou infinita, e alguns outros conceitos interessantes acerca do assunto estudado.

Afim de alcançarmos nossos objetivos, iremos apresentar no capítulo 2, a definição de espaços vetoriais, seguidos de exemplos. Em seguida apresentaremos algumas operações que podem ser feitas e as propriedades que devem ser seguidas, chegando até as bases de um espaço vetorial, mostrando suas propriedades e alguns exemplos.

No capítulo 3, mostraremos as preliminares para o lema de zorn. De início apresentaremos algumas definições a partir de conjuntos parcialmente ordenados, subconjuntos de conjuntos parcialmente ordenado, conjuntos totalmente ordenados, elemento maximal, elemento minimal e elemento supremo, todos estes seguidos de exemplos, até chegarmos no axioma da escolha. O axioma da escolha é um dos axiomas mais controverso e discutido na Matemática, e afirma que para toda a família de conjuntos não vazios o produto associado é não vazio, isto é, tendo uma família de conjuntos é possível fazer uma regra de escolha de modo a obter um elemento de cada conjunto dessa família.

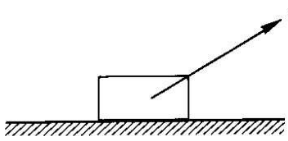
Para finalizar no capítulo 4, temos como objetivos apresentar algumas aplicações e algumas equivalências ao Lema de Zorn. Apresentaremos uma equivalência clássica entre o Lema de Zorn e o Axioma da Escolha, aproveitando para tecer comentários a respeito da equivalência ou não-equivalência dos resultados, partindo do axioma da escolha, trazendo um pouco da sua história e mostrando alguns conceitos. Enunciado pelo matemático Marx Zorn, o Lema de Zorn passou por algumas transformações a partir do que foi criado no início. Zorn propôs esta formulação como um novo axioma da teoria de conjuntos, como um substituto do teorema da boa ordenação, exibiu algumas das suas aplicações da álgebra. Neste trabalho mostraremos um exemplo de uma aplicação do lema de zorn na álgebra, vamos provar que todo espaço vetorial tem uma base. Para tanto vamos mostrar que todo espaço vetorial possui uma base seja ela finita ou infinita. Contudo, precisaremos mostrar que todo espaço vetorial contém um conjunto de vetores linearmente independente, e que todo conjunto linearmente independente é um subconjunto de uma base.

2. ESPAÇOS VETORIAIS

2.1 VETORES NO PLANO E NO ESPAÇO

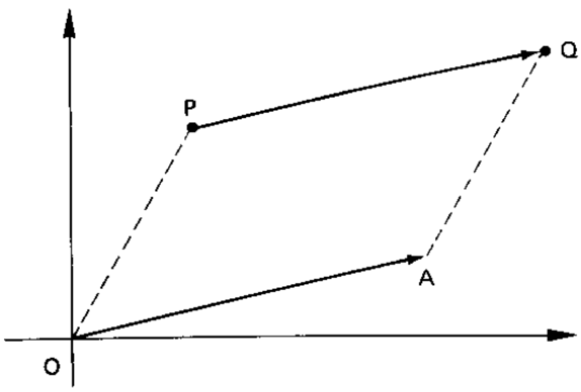
Imagine uma força atuando sobre um corpo. Você conseguirá precisá-la determinando sua intensidade e direção. Força é um exemplo típico de grandeza que será representada por um vetor. Neste capítulo desenvolveremos o conceito de vetor de uma forma bem ampla, de modo que, por exemplo, soluções de sistemas de equações lineares ou de equações diferenciais também possam ser representada por vetores, conforme apresenta as figuras 1e 2.

Figura 1 - Exemplo de Vetor



Fonte: BOLDRINI (1980, pg. 97 – recortada)

Figura 2 – Exemplo de vetor

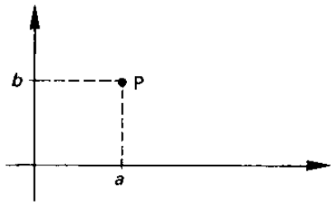


Fonte: BOLDRINI (1980, pg.97 – recortada)

2.1.1 Vetores no Plano

Inicialmente, introduziremos a ideia de vetor, restringindo-nos ao plano. Para isto, consideremos o plano cartesiano que consiste de um sistema de coordenadas dado por um par de retas ortogonais, com orientação. Fixada uma urna de comprimento, um ponto P do plano pode ser identificado com o par (a, b) de números reais, que são coordenadas.

Figura 2 - Vetor no Plano

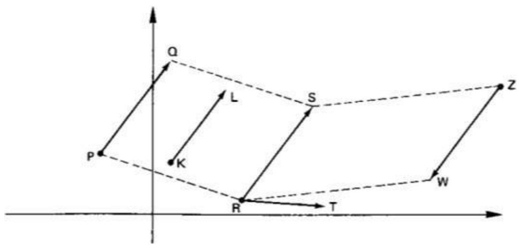


Fonte: BOLDRINI (1980, pg. 98 – recortada)

Dados dois pontos *P* e *Q* do plano, podemos considerar o segmento de reta orientada *PQ*, com ponto inicial P e ponto final Q, note que embora como conjunto de pontos os segmentos *PQ* e *QP* sejam iguais, como segmentos orientados eles são distintos. Diremos que eles são segmentos opostos.

Vamos estabelecer que os dois segmentos orientados são equivalentes se tiverem o mesmo comprimento e direção. Por exemplo, na figura 3

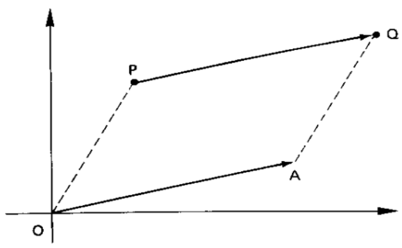
Figura 3 – Exemplo Vetores de Mesma Direção



Fonte: BOLDRINI (1980, pg. 98 – recortada)

PQ, KL e *RS* tem a mesma direção; *RT* e *KL* têm o mesmo comprimento; *PQ, RS* e *ZW* têm o memsmo comprimento, mas os unicos segmentos com orientações equivalentes são *PQ* e RS. Para qualquer segmento orientado no plano existe outro equivalente a este cujo ponto inicial é a origem. Por exemplo,

Figura 4 – Vetores Equivalentes



Fonte: BOLDRINI (1980, pg. 99 – recortada)

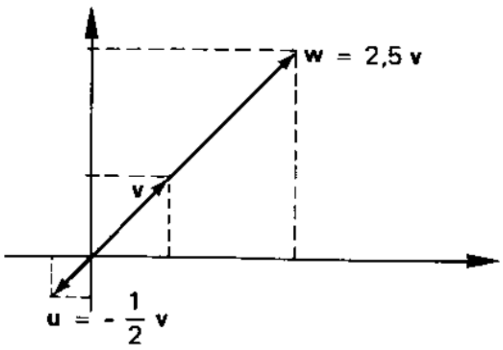
Vamos passar a considerar agora, apenas os segmentos orientados com ponto inicial na origem, denominados *vetores no plano*. É importante notar que vetores no plano são determinados exclusivamente pelo seu ponto final, pois o ponto é fixo na origem. Assim, para cada ponto do plano *P(a, b),* está associado um único vetor **v** = *OP* e, reciprocamente, dado um vetor, associamos um único ponto do plano, que é o seu ponto final. Isto é, a correspondencia entre pontos do plano de vetores é biuníca.

2.1.2 Operações com vetores no plano

a) Multiplicação de um vetor por um número.

Multiplicar um vetor v por um número $k > 0$ é considerar um novo vetor w = kv, que possui a mesma direção de v e tem como comprimento k vezes o comprimento de v. Se $K > 0$, o vetor w = *k*v será igual ao oposto do vetor I *k* I . v. Se k = 0, w = kv será o vetor nulo.

Figura 5 – Multiplicação de vetor por escalar



Fonte: BOLDRINI (1980, pg. 100 – recortada)

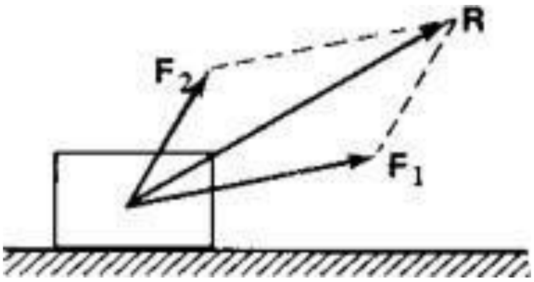
Observe a multiplicação de vetor por um numero corresponde a multiplicação da matriz-linha (ou coluna) por esse número. Assim, se v = (a, b) e w = kv, então w = (ka, kb). Por exemplo, para v = (2, -5), w = 3v = (6, -15).

b) Adição de dois vetores.

Para introduzir a soma de dois vertores, vamos voltar ao exemplo de forças atuando num corpo. Uma força que atua num ponto pode ser representada por um vetor, de comprimento igual a intensidade da força, com mesma direção em que a força atua. (Estamos supondo que a origem do sistema de coordenadas está no ponto onde a força atua.)

Suponhamos agora que temos duas forças, $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ atuando no mesmo objeto. Podemos representar o resultado destas forças por uma única força **R**? Em outras palavras, o que é a "soma" de duas forças.

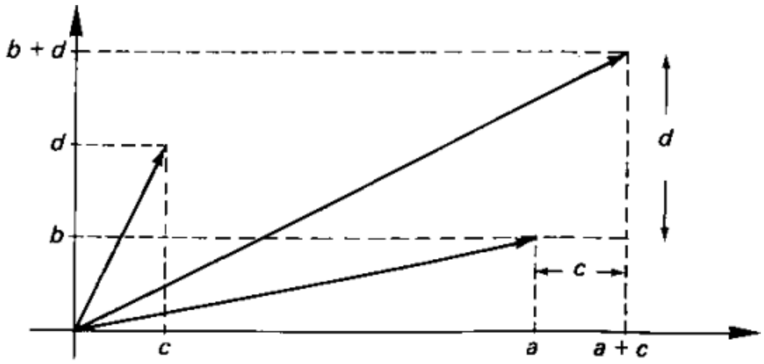
Figura 6 – Adição de vetores



Fonte: BOLDRINI (1980, pg. 100 – recortada)

A experiência mostra que a força resultante é representada pelo vetor diagonal do paralelograma costruído a partir dos vetores F_1 e F_2. Chamamos a força resultante de soma **F1** com **F_2** e denotamos **R** = **F_1** + **F_2**. Agora, pensemos em termos de coordenadas. Se **F_1** = (a, b) e **F_2** = (c, d) quais são as coordenadas de **R**?

Figura 7 – Adição de vetores



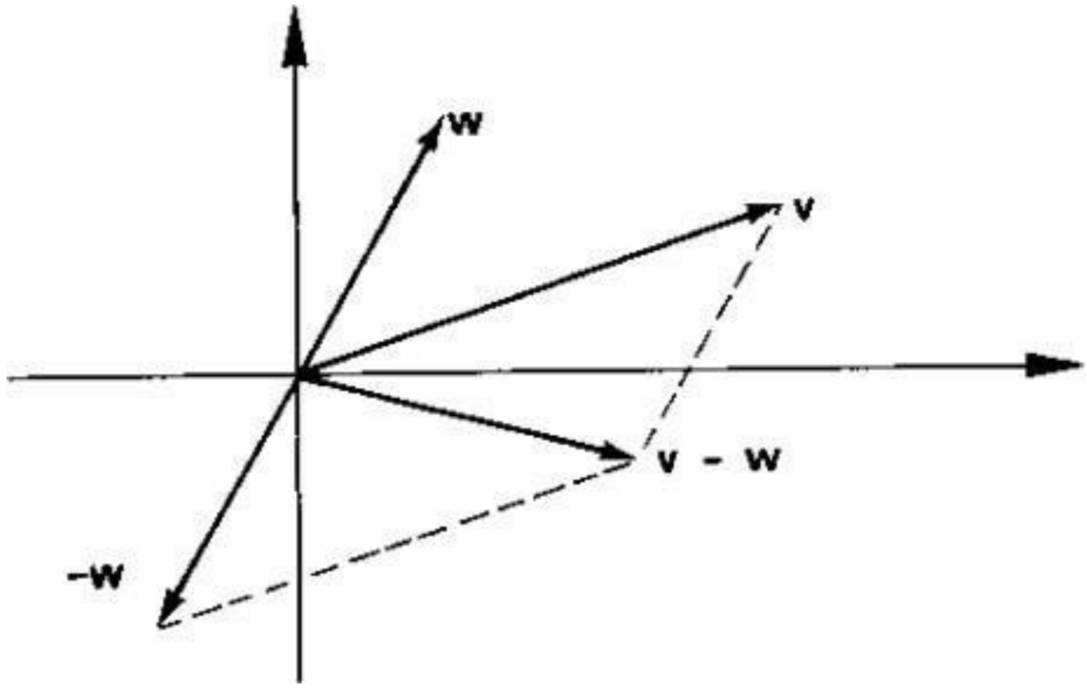
Fonte: BOLDRINI (1980, pg. 100 – recortada)

Usando congruência de triangulos, você pode notar que as coordenadas de **R** são (a + c, b + d).

Foram resultados como este que motivaram a definição formal de soma de dois vetores no plano. Se **v** = (a, b) e **w** = (c, d) então o vetor-soma será **v + w** = (a + c, b + d). Observe que somar vetores corresponde simplismente a somar matrizes que os representam. As operações entre vetores herdam, portanto todas as propriedades das operações correspondentes para matrizes.

Podemos ainda observar que a soma de um vetor **v** = (a, b) com seu oposto **w** =**-v** = **(-a, -b)** é o valor nulo. Isto é **v + w = v + (-v) = (a – a, b – b) = (0, 0).**

Figura 8 – Soma de vetor com seu oposto

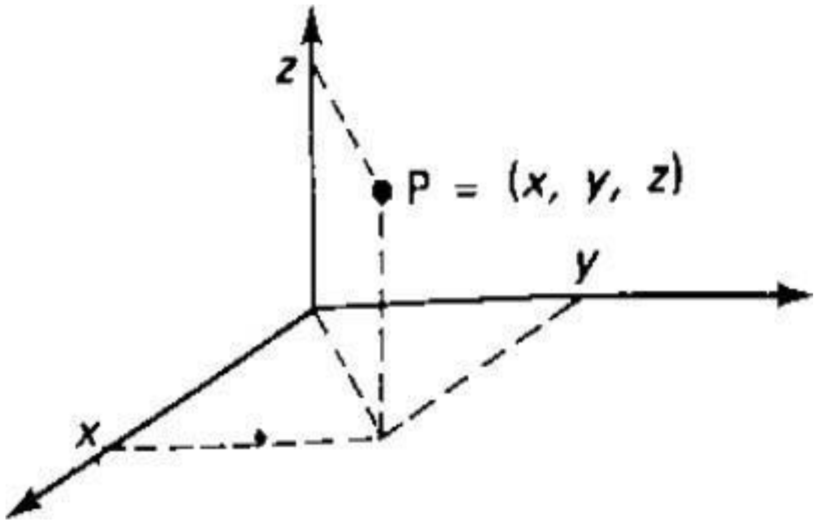


Fonte: BOLDRINI (1980, pg. 101 – recortada)

2.1.3 Vetores no Espaço

Da mesma forma que fizemos no plano, podemos considerar vetores no espaço. Teremos então um sistema de coordenadas dado por três retas orientadas, perpendiculares duas a duas, e, uma vez fixada uma unidade de comprimento, cada ponto *P* do espaço estará identificado com a terna de numeros reais (x, y, z), que dá suas coordenadas.

Figura 9 – vetor no plano

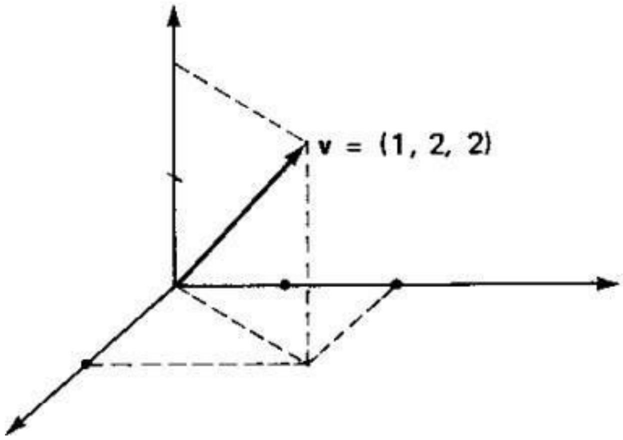


Fonte: BOLDRINI (1980, pg. 101 – recortada)

Também aqui os vetores são dados por segmentos orientados, com ponto inicial na origem, e existe uma correspondência biunívoca entre vetores e pontos do espaço que a cada vetor *OP* associa o seu ponto final *P* = (a, b, c). Deste modo, o vetor **v** = OP costuma ser denotado pelas coordendas de *P*.

Figura 10 – Exemplo vetores no plano

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{v} = (a,\ b,\ c)$$



Fonte: BOLDRINI (1980, pg. 102 – recortada)

A origem fixada para o espaço representará o vetor nulo (0, 0, 0).

Assim, se chamarmos de V o conjunto de vetores no espaço, podemos identificar

$$V = \{(x_1, x_2, x_3)\ x_j \in \mathbf{R}\}$$
$$= \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$$

2.1.4 Operações com Vetores no Espaço

A soma de dois vetores e o produto de um vetor por um número (escalar) também são definidas da mesma forma que no plano. Se u = (x_1, x_2, x_3) e v = (y_1, y_2, y_3),

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$
$$\text{e } k\mathbf{u} = (kx_1, kx_2, kx_3).$$

Por exemplo se **u** = (2, -3, 5) e **v** = (1, 2, 0), **u + v** = (3, -1, 5) e 2**u** = (4, -6, 10).

Como já observamos no caso do plano, estas operações correspondem exatamente às respectivas operações das matrizes-linha que representam os vetores e gozam de uma série de propriedade decorrentes daquelas relativas as operações com números reis.

Propriedades:

i) (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**)

ii) **u + v = v + u**

iii) Existe **0** ϵ V tal que **u** + **0** = **v**. (**0** é chamado vetor nulo)

iv) Existe **-u** ϵ V tal que **u** + (**-u**) = **0**

v) a (u + v) = a**u** + a**v**

vi) (a + b) **v** = a**v** + b**v**

vii) (ab)**v** = a(b**v**)

viii) 1**u** = **u**

Estas propriedades servirão para caracterizar certos conjuntos que, apesar de terem natureza diferente dos vetores no espaço, "comportam-se" como eles. Estes conjuntos receberão o nome *de **espaços vetoriais***.

2.2 ESPAÇOS VETORIAIS

2.2.1 Definição

Um espaço vetorial real é um conjunto V, não vazio, com duas operações:
soma, V x V $\rightarrow$ V, e multiplicação por escalar, **R** x V $\rightarrow$ V, tais que, para quaisquer **u, v**, w ϵ V e a, b ϵ **R**, as propriedades *i)* e *viii)* sejam satisfeitas.

Se na definição acima, ao invés de termos como escalares, números reais, tivermos números complexos, V será um *espaço vetorial complexo*.

A palavra vetor será usada para designar um elemento de um espaço vetorial. Assim por exemplo de considerarmos o espaço vetorial V = (2, 2), os vetores serão matrizes. Vamos mostrar alguns exemplos de espaços vetoriais.

2.2.2 Exemplos

Exemplos 1: O conjunto $M_{m\times n}$ de todas as matrizes de ordem $m\times n$ é um espaço vetorial, com as operações naturais que já utilizamos anteriormente.

Figura 11 – Exemplo de espaço vetorial

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

Fonte: FARIAS, KONZEM, SOUZA (2020, pg. 40 – recortada)

Figura 12 – operações com espaço vetorial

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad k\cdot A = \begin{bmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & \cdots & k\cdot a_{1n} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & \cdots & k\cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k\cdot a_{m1} & k\cdot a_{m2} & \cdots & k\cdot a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Fonte: FARIAS, KONZEM, SOUZA (2020, pg. 41 – recortada)

Exemplo 2: O conjunto dos vetores do espaço

$V = \mathbf{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3);\ x_j \in \mathbf{R}\}$

é evidentemente um espaço vetorial real. (veja 2.1.3)

Exemplo 3: V = P_n, o conjunto dos polinômios com coeficientes reais, de grau menor ou igual a *n* (incluindo o 0). As operações são soma de polinômios e multiplicações destes por números reais.

Subexemplo: $n = 2$

$P_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_i \in \mathbf{R}\}$.

Exemplo 4: conjunto $P(\mathbb{R})$ das funções polinomiais com coeficientes reais é um subespaço do espaço das funções contínuas. De fato, o polinômio nulo está neste espaço. Além disso, dados dois polinômios

$$p(x)= a_n x^n + \cdots a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ e } q(x)= b_m x^m + \cdots b_2 x^2 + b_1 x + b_0,$$

sabemos que $a \cdot p+b \cdot q$ vai ser um polinômio cujo grau é no máximo o maior dos valores m ou n.

Exemplo 5: O conjunto de todas as funções de um intervalo I em $\mathbb{R}$

$$\mathscr{F}(I; \mathbb{R}) =f: I\rightarrow\mathbb{R} \text{ funções.}$$

forma um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com as operações:

- Dadas duas funções f e g, a função $f + g : I\rightarrow\mathbb{R}$ é definida por

$$(f + g) (x)=f(x) + g(x).$$

- Dada uma função f e um número real k, a função $k \cdot f: I\rightarrow\mathbb{R}$ é definida por

$$(k \cdot f) (x)= k \cdot f(x).$$

2.3 BASES DE UM ESPAÇO VETORIAL

Como vimos anteriormente um espaço vetorial é um conjunto não vazio, cujos os elementos são vetores, e com eles são realizadas importantes operações. Base de um espaço vetorial é um conjutno de vetores lineramente indepentende, de modo que qualquer vetor desse espaço vetorial possa ser gerado a partir de uma combinação linear deles. Logo, nessa parte do trabalho estamos interessados em encontrar, dentro de um espaço vetorial *V*, um connjunto finito de vetores, tais que qualquer outro vetor de *V* seja uma combinação linear deles. Em outras palavras, queremos determinar um conjunto de vetores que gere *V* e tal que todos os elementos sejam realmente necessários para gerar *V*. Se pudermos encontrar tais vetores, temos os alicerces de nosso espaço, com estes vetores fazendo o mesmo papel que **i, j, k** na Geometria Analítica no espaço. Denominaremos um conjunto de vetores desse tipo de base.

2.3.1 Definição: um conjunto $\{v_1, ... v_n\}$ de vetores de *V* será uma base de *V* se:

i) $\{v_1, ... v_n\}$ é LI (linearmente independente)

ii) $\{v_1, ... v_n\}$ é *V*

2.3.2 Exemplos

Exemplo 1: $\boldsymbol{V} = \mathbf{R}^2$, $e_1 = (1, 0)$ e $e_2= (0, 1)$

$\{e_1, e_2\}$ é base de *V*, conhecida como base canônica de $\mathbf{R}^2$.

O conjunto {(1, 1), (0, 1)} tambem è uma base de V = $\mathbf{R}^2$. De fato: Se (0, 0) = a(1,1) + b(0, 1) = (a, a+b), então a = b = 0. Isto é, {(1, 1), (0,1)} é LI.

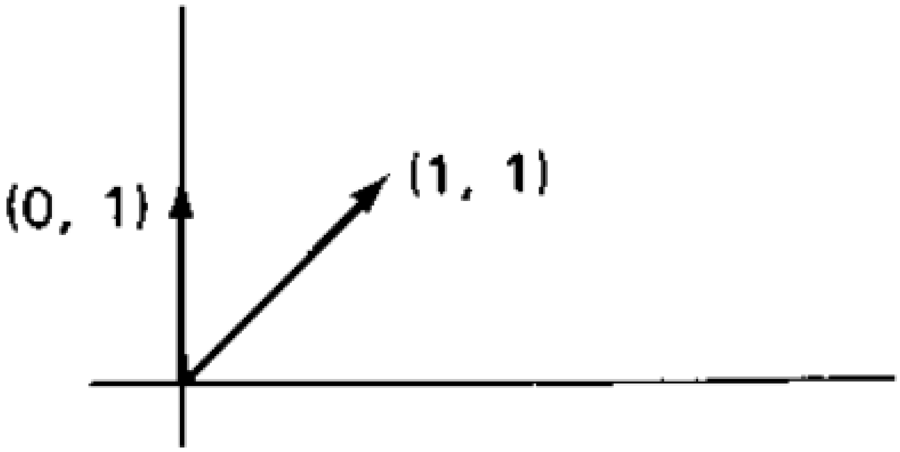
Ainda [(1, 1), (0, 1)] = V pois dado v = (x, y) ϵ V, temos

$$(x, y) = x(1, 1) + (y-x)(0, 1)$$

Ou seja, todo vetor de $\mathbf{R}^2$ é uma combinação linear dos vetores (1, 1) e (0, 1).

Observando a figura abaixo:

Figura 13 – base de um espaço vetorial



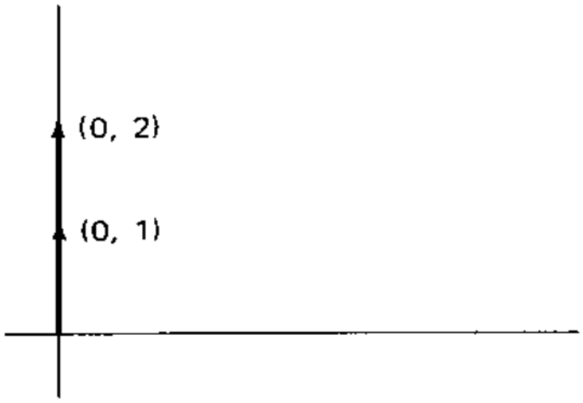
Fonte: BOLDRINI (1980, pg. 97 – recortada)

Exemplo 2:

{(0, 1), (0, 2)} não é base de $\mathbf{R}^2$, pois é um conjunto de LD.

Se (0, 0) = a(0, 1) + b(0, 2), temos a = -2b e a e b não são necessariamente zero.

Figura 14 – Exemplo de não base de um espaço vetorial



Fonte: BOLDRINI (1980, pg. 97 – recortada)

Exemplo 3: $V = R^3$

{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} è uma base de **R^3.** Esta é a base canônica de **R^3.** Podemos mostrar que,

i) (e_1, e_2, e_3) é LI e

ii) $(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$

Exemplo 4: O conjunto de todos os polinômios de grau 3 é um espaço vetorial.

$P_3(R) = \{p(x) = a_3x^3 + a_2 x^2 + a_1x + a_0$ tais que $a_0, a_1, a_2, a_3 \in R\}$

Uma base para nosso espaço vetorial é $\{x^3, x^2, x\}$, pois este gera todo o espaço $P_3(R)$. Para mostrarmos que é LI, verificamos o seguinte que, $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ para todo $x \in (R)$. Então todo os coeficientes devem ser nulos, pois partindo do teorema fundamental da álgebra, que diz que todo polinômio não nulo de grau 3 possui exatamente 3 raízes complexas, o que leva a ter no máximo 3 raízes reais. Portanto, já que no nosso caso todos os valores de x reais são raízes, nosso polinômio deve ser o constante igual a zero, de modo que todo os coeficientes são zero.

Concluimos desta maneira que $X = \{x^3, x^2, x, 1\}$ é uma base de P3(R).

Exemplo 5: O conjunto de todos os polinômios de grau inferior ou igual a n, é um espaço vetorial.

$Pn(R) = \{ p(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + ... + a_{n+1}x^n\}$

De fato o conjunto $\{1, x, x^2, ... , x^n \}$ é LI, uma vez que :

$$a_1 + a_2x + a_3x^2 + ... + a_{n+1}x^n = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0_{n+1}x^n.$$

Alem disso, o conjunto $\{1, x, x^2, ... , x^n\}$ gera todo o espaço de polinomios de grau menor ou igual a n, uma vez que qualquer $p(x) \in Pn(R)$ pode ser escrito como:

$$\beta_1 + \beta_2x + \beta_3x^2 + ... + \beta_nx^n.$$

Exemplo 6: o conjunto das funções continuas de R em R é um espaço vetorial sobre R se definirmos:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1x + f_2x$$

$$(cf_1)(x) = cf_1(x)$$

para todo $c \in R$ e $f_1, f_2 \in V$.

No entanto, não é possível mostrar desta forma construtiva uma base para o espaço das funções contínuas. A existência de uma base para este espaço é um conceito abstrato não construtivo.

3. PRELIMINARES PARA O LEMA DE ZORN

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos para que o leitor possa de fato compreender o objetivo do trabalho. Definiremos a noção de ordem de um conjunto, como podemos ordenar o conjunto, encontrar um elemento maximal nesse conjunto e, consequentemente, um supremo, se existir. Todos esses conceitos serão repassados daqui em diante.

No Ano de 1908 Ernst Zermelo estudava a axiomatização da Teoria dos Conjuntos e foi durante esse estudo que surgiu o Axioma de Escolha, por não ser construtivo, o Axioma foi alvo de muita polêmica e discussão entre os matemáticos da época, pois nos traz a ideia de que temos muitas possibilidades de fazer infinitas escolhas arbitrarias, o que não se pode demonstrar por processos construtivos

3.1 Conjunto Parcialmente Ordenado

Em decorrência do conjunto parcialmente ordenado, que definiremos por esse símbolo ($\leq$), podemos ordenar os elementos de um conjunto.

Uma ordem parcial de um conjunto *E* é uma relação de *R* em *E* que cumpri as seguintes relações:

- Reflexiva, isto é, $(a, a) \in R$ para cada $a \in E$.
- Anti-simétrica, isto é, $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, implica que $a = b$.
- Transitiva, insto é, $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ e $(a, c) \in R$ (Tricotomia).

Exemplo 1: o conjunto N nos números naturais, munido da relação de divisibilidade, é um conjunto parcialmente ordenado.

Exemplo 2: sejam P1 e P2 conjuntos ordenados. Considerando o produto cartesiano P1 x P2, vamos definir a relação:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \text{ se } x_1 \leq x_2 \text{ e } y_1 \leq y_2$$

Assim P1 e P2 munido desta relação é um conjunto parcialmente ordenado chamado de produto direto de P1 e P2.

3.2 Subconjunto de conjuntos ordenados

Da ideia de conjuntos ordenados pode-se aplicar para seus subconjuntos. Seja B um subconjunto de A. A ordem parcial R em A induz assim uma ordem parcial R’ em B do modo natural, como segue:

Se $a, b \in B$ então $(a, b) \in R'$, isto é, $a \leq b$

Como a, b $\in$ B se, e somente se, (a, b) $\in$ R, isto é, (a $\leq$ b) também são elementos de A, sendo assim, o par ordenado (B, R') é chamado um subconjunto parcialmente ordenado de um conjunto ordenado (A, R).
Exemplo : o conjunto dos números inteiros Z, é um subconjunto de um conjunto ordenado R, ou seja é um subconjunto dos números Reais.

3.3 Conjuntos totalmente ordenados

De tal forma, uma ordem parcial em um conjunto, não diz necessariamente que este conjunto é totalmente ordenado, a seguir o conceito de quando um conjunto é totalmente ordenado

Definição. *Uma ordem total num conjunto A é uma ordem parcial em A com a propriedade adicional que*

$a < b$, $a = n$, ou $a > b$

para quaisquer elementos a e b pertencentes a A. um conjunto A com uma ordem total especifica é chamado de um conjunto totalmente ordenado.

É possível afirmar em outras palavras que um conjunto é totalmente ordenado quando podemos fazer uma "comparação" com todos seus elementos.

3.4 Elemento Maximal

Quando tratamos de elemento maximal, já possuímos o conhecimento de ordem, então temos a seguinte definição:

Definição. *Consideremos um conjunto ordenado A. um elemento $a \in A$ é chamado de elemento maximal se* $a \leq x_n \rightarrow a = x_n$, para todo $x_n \in A$.

Exemplo : Considere o conjunto dos números inteiros negativos Z* = {-1, -2, -3, -4...}. O elemento maximal de um conjunto é um elemento que não é menor que nenhum outro elemento desse conjunto. No conjunto citado no exemplo temos que o elemento maximal é -1 pois não a nenhum outro elemento maior que do que ele.

3.5 Elemento Minimal

Acompanhado de elemento máximo de um conjunto, também temos o mínimo desse conjunto, que é definido como:

Definição. Seja A um conjunto ordenado, um elemento b ∈ A é chamado de minimal se $x_0 \leq b \Rightarrow x_0 = b$, para todo $x_0 \in A$

Exemplo : Considere o conjunto N = {1, 2, 3, 4, 5}. O elemento minimal de um conjunto é um elemento que não é maior que nenhum outro elemento desse conjunto. Segue do conjunto acima que o elemento minimal é 1 pois não a nenhum outro elemento no conjunto menor que ele.

3.6 Elemento Supremo

Quando falamos em supremo, isso da a ideia de ser o maior elemento entre todos os elementos do conjunto a ser tratado. Na definição e no exemplo a seguir será possível observar que não é bem assim.

Definição. Um número $b \in R$ chama-se supremo do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X. Isto é, b é o supremo de X quando cumpre as seguintes condições:

1. Para qualquer $x \in X$, tem-se $x \leq b$;
2. Se $c \in R$, tal que $x \leq c$ para qualquer $x \in X$, então $b \leq c$.

Observação: Isso nos diz que nenhum número real menor do que b pode ser cota superior de X. Isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $b - \varepsilon < x$, e escrevemos b = SupX.

Exemplo : Seja o conjunto $A = \{ 1/n \mid n \in N \} = \{1, ½, 1/3, 1/4...\}$, podemos notar que o maior número na sequência é 1/1 que é 1, então 1 é a menor das cotas superiores, logo é o supremo do conjunto.

3.7 Axioma da Escolha

O **axioma da escolha** é um axioma da teoria de conjuntos equivalente a afirmação "o produto de uma coleção não vazia de conjuntos é não vazio". Ele afirma a possibilidade de construir conjuntos pela repetição de uma ação não explicitamente especificada.

Foi formulado a primeira vez por Ernest Zermelo em 1904 para a prova do teorema de Zermelo. O axioma da escolha pode ser aceito ou rejeitado, dependendo da teoria dos conjuntos axiomática escolhida. Por não ser construtivo, o axioma da escolha é muito questionado por muitos na época, devido as consequências importantes de qual ele derivava e de sua importância na Matemática, estando presente não somente na teoria dos conjuntos, mas também na topologia, na álgebra e na análise funcional. A partir disto, em 1930 o axioma da escolha passou a se tornar uma forma padrão matemática que por muitos era considerado o **Lema de Zorn** que conhecemos hoje e que será trazido no próximo capítulo.

Observação. Seja R {x, y} uma relação entre um elemento genérico x de um conjunto A e um elemento genérico y de um conjunto B. As relações "Qualquer que seja $x \in A$ existe $y \in B$ tal que R {x, y}" e "existe uma aplicação f de A em B tal que qualquer que seja $x \in A$, R {x, f(x)}". Essa observação é para a melhor compreensão do Axioma da Escolha.

4. LEMA DE ZORN

O Lema de Zorn foi enunciado por Max Zorn (1906-1993), onde na época houve discussões acerca da enunciação onde primeiramente feita pelo matemático polonês Kazimierz Kuratowski. Zorn destinou praticamente toda sua vida em pesquisas sobre a teoria dos conjuntos nos Estados Unidos, onde na mesma localidade se naturalizou pois ele era de origem alemã. Kuratowski enunciou uma versão menos genérica que Zorn, ele aproveitou apenas conjuntos parcialmente ordenados pela relação de inclusão e fechados relativamente. No entanto em 1935 Zorn propôs o mesmo lema, mas fazendo o uso de qualquer forma de relação ordinária e em qualquer cadeia totalmente ordenada. Além disso, Zorn afirmou que esse lema substituiria o Teorema da Boa Ordenação e mostrou alguns exemplos na álgebra.

Lema de Zorn afirma que:

4.1 LEMA

Seja, $(A, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado, em que cada subconjunto totalmente ordenado tem um limite superior. Então A possui um elemento máximo.

A partir da equivalência do Axioma da Escolha e do Lema de Zorn vamos mostrar um exemplo de umas das suas aplicações e alguns resultados importantes, vamos provar que todo espaço vetorial possui uma base.

4.2 Equivalência entre o Lema de Zorn com o Axioma da Escolha

Muito do que mostrado anteriormente no decorrer do trabalho, são equivalentes entre sim, e por sua vez o lema de Zorn também tem sua equivalência com o axioma da escolha, isso se dá pelo fato do axioma da escolha admitir um certo número de axioma da teoria de conjuntos, como por exemplo o de Zermelo. Logo, é possível considerar o Lema de Zorn como um axioma, e o axioma da escolha como um teorema que seria sua consequência. O teorema de Zermelo por exemplo é equivalente ao axioma da escolha que foi usado para demonstrar as primeiras versões do Lema de Zorn, e essas demonstrações já se aproximavam muito do que temos hoje.

Por outro lado, um matemático conhecido como Jerry Bona, disse que o axioma da escolha é obviamente verdadeiro, o princípio da boa ordem (teorema de zermelo) é obviamente falso, e que o lema de zorn ninguém sabia de nada, e não achava satisfatório toma o lema de zorn como um axioma. Acontece que o axioma da escolha e o Teorema de Zermelo são consequência direta do Lema de Zorn.

Na matemática, o axioma da escolha é um axioma da teoria de conjuntos que tem suas peculiaridades de afirmar que determinado conjunto existe ou, (não existe), mais não dá nenhuma informação sobre como este conjunto pode ser construído, e justamente por isso alguns matemáticos que apresentam resultados e formas equivalentes aparentemente de mais fácil manuseio, o rejeitaram. Um desses resultados é o Lema de Zorn. Essa equivalência entre os dois é de suma importância para matemática e principalmente para a teoria de conjuntos, e mostraremos a seguir mais sobre ela. Em primeira definiremos os conjuntos LD e LI para depois mostrarmos o axioma da escolha o que facilitara a compreensão do leitor.

Um conjunto de vetores se diz Linearmente Dependente (LD) se houver um vetor neste conjunto que pode ser escrito como combinação linear dos demais. Caso contrário, o conjunto é chamado Linearmente Independente (LI).

Em V^2, geometricamente, dois vetores LD é sinônimo de vetores colineares (paralelos). Em V^3, três vetores LD é sinônimo de vetores coplanares.

Se um conjunto conter o vetor nulo, então ele é LD, uma vez que o vetor nulo pode ser escrito como combinação linear de qualquer conjunto de vetores.

Exemplo: os vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LI se e somente se $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$, o que equivale a $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, isto é todos os escalares nulos.

Definidos então os conjuntos LD e LI, vamos partir para o axioma da escolha.

(axioma da escolha)

Se I é um conjunto qualquer de índices e $(x_i)_{i\in I}$ *é uma família de subconjuntos de um conjunto C tal que* $x_i = \emptyset$ *, para qualquer que seja* $i \in I$*, o produto* $\prod_{i\in I} xi$ *não é vazio.*

Para mostrarmos essa equivalência vamos considerar um conjunto qualquer, onde o mesmo tenha um conjunto de funções escolhas.

Seja X um e F um conjunto de funções de subconjuntos P(X) em X, sendo F = (f : D→X), tal que o domínio de f = D ∈ P(X). Consideremos agora A um subconjunto de D, onde todo A ∈ D → f(A) ∈ A, assim a imagem de f ⊂ X e como P(X) ⊂ X e o domínio de f ⊂ P(X), temos que a imagem de f pertence ao conjunto do domínio D, isto é, a imagem de f ∈ D.

Agora vamos supor que F e D sejam parcialmente ordenados (≤), assim $\{f_1 \leq f_2 \leq f_3 \cdots \leq f_n\} \in F$ e $\{d_1 \subseteq d_2 \subseteq d_3 \cdots \subseteq d_n\} \in D$, a partir daí tomando d1 como o domínio de f1 e assim sucessivamente, se e somente se, $\{f_1 \leq f_2 \leq f_3 \cdots \leq f_n\}$ e $\{d_1 \subseteq d_2 \subseteq d_3 \ldots \subseteq d_n\}$, sendo assim, temos $\{\frac{f2}{d_1} = f_1, \cdots, \frac{fn}{d_{n-1}} = f_{n-1}\}$. Agora ordenado por extensão F, temos $f_3 \subseteq f_2$ e assim por diante, como F e D são parcialmente ordenados ($\leq$), fica claro que $f_1 \leq f_1$ e $d_1 \subseteq d_1$ o que implica $\{\frac{f2}{d_1} = f_1, \cdots, \frac{fn}{d_{n-1}} = f_{n-1}\}$, pois essa é a propriedade reflexiva, sendo assim F e D possuem também a anti-simétrica $f_3 \leq f_4 \rightarrow f_4 \leq f_3$ e $d_3 \leq d_4 \rightarrow d_4 \leq d_3$, o que nos garante que $d_3 = d_4$ e $f_3 = f_4$, e podemos perceber ainda que as funções de F podem ter o mesmo domínio, pela transitividade, ou seja, $f_3 \leq f_4 \rightarrow f_4 \leq f_5$ e $d_3 \subseteq d_4 \rightarrow d_4 \subseteq d_5$, logo $\{\frac{f3}{d_1} = d1, \cdots, \frac{f_n}{d_1} = f1\}$, e assim F e D, são ordenados.

Agora vamos mostrar que a validade do Lema de Zorn implica no Axioma da Escolha.

Tomando uma cadeia Z, tal que $Z = \{fi\}_{i \in \delta}$, daí como Z é uma cadeia em F, temos $fi : Di \rightarrow X$ e $Di \in P(X)$ como vimos no início dessa demonstração, e para qualquer que seja $A \in Di$, $f(A) \in A$, pela ordem parcial $D_j = \bigcup_{i \in \delta} Di$, podemos definir uma função f tal que $f_j : D_j \rightarrow X$, pois $Di \subseteq Dj$ para todo i, como $A \in Di$ logo $A \in Dj = S\ i \in \delta\ Di$, daí deve existir um i_0 em δ em que $A \in Di_0$ e pela ($\leq$) $fj(A) = fi_0(A) \in A$ e $fi0 \leq fj$ para qualquer $i \in \delta$, logo fj é uma limitante superior em Z e pelo lema de Zorn, existe f_m em F que é o elemento maximal e o domínio de $f_m \subset P(X)$. Sendo assim, suponhamos uma função escolha onde $D_m \neq P(X) - \{\emptyset\}$, assim A_m deve pertencer a P(X) tal que $A_m \notin D_m$, logo temos a função

$$f_\alpha(A) = \begin{cases} f_m, & \text{se} \quad A_m \in D_m \\ \lambda, \quad \text{se} \quad \lambda \in A_m & e \quad A \in A_m - D_m \end{cases}$$

Definimos $D\alpha = D_m \cup \{Am\}$ e $D_m \subset D\alpha$, a função escolha estende A, a um único elemento se f_m não for maximal, e se f_m for maximal, então $A_m \in D_m$, como $D_\alpha = D_m \cup \{Am\}$, teríamos que $f_m < f_\alpha$, o que contradiz o lema de Zorn, sendo assim $D_m = P(X) - \{\emptyset\}$ e F é o conjunto de funções $\{f : P(X) - \{\emptyset\} \rightarrow X\}$, tal que para todo $A \in P(X) - \{\emptyset\}$, teremos $f(A) \in A$. Portanto, o Axioma de escolha e o Lema de Zorn são equivalentes.

O lema de Zorn possui diversas aplicações, tanto na topologia, como no teorema de Tychonov, ou na álgebra , como o teorema de Krull. Um dos resultados mais conhecidos é o Paradoxo de Banach-Tarski, que diz que é possível num espaço euclidiano dividir uma bola em infinitas partes e depois através de movimentos rígidos construir duas bolas iguais a original. Existem outros, como o Teorema de Zermelo, que por sua vez também é equivalente ao Lema de Zorn, e o nosso objetivo principal aqui nesse trabalho que é Base de Hamel.

A princípio, em um curso de álgebra linear, estudamos sobre o processo de encontrar base para um espaço de dimensão finita. É possível encontrar uma demonstração que se refere a todo espaço vetorial de dimensão finita possuir uma base. No nosso trabalho, enfatizamos a Base de Hamel pelo fato de que com ela podemos estender esse conceito para dimensão infinita, pois o lema de zorn garante um maximal com determinada propriedade sobre uma parte finita.

Uma base de Hamel para E é uma coleção de elementos de E L.I. C = $\{B_\theta\}_{\theta \in J}$ tal que todo elemento x de E pode ser escrito como uma soma finita de combinações lineares de L, isto é, existe I ⊂ J finito e Ki ∈ K tais que x = $\sum_{i \in I} k_i e_i$. Vamos agora então mostrar o teorema principal do nosso trabalho.

4.4 Teorema Principal

Em primeira mão vamos mostrar que todo espaço vetorial tem um conjunto de vetores linearmente independentes, e que todo conjunto linearmente independente é um subconjunto de uma base.

Seja L um conjunto linearmente independente de vetores de um espaço vetorial V. vamos a partir deste construir um conjunto e definir uma relação de ordem parcial. Como queremos aumentar de certa forma aumentar um conjunto linearmente independente, então devemos definir o conjunto:

$$\mathbf{X} = \{x \in P(V) \mid L \subseteq x \wedge x \text{ linearmente independente } \}$$

Sendo **X** um conjunto de conjuntos, a ordem parcial em **X** é a relação x ⊆ y.

Logo **X** não é vazio por que **L** ∈ **X**.

Agora vamos mostrar que todo conjunto totalmente ordenado de **X** tem uma cota superior.

Seja **T** ⊆ **X**, **T** ≠ **Ø** é totalmente ordenado pela relação de ⊆.

Seja Q = $\bigcup_{x \in T}$ x obviamente, satisfaz x ∈ T → x ⊆ Q

Como **L** é um subconjunto de todo elemento de **X**, então **L** é um subconjunto de todo elemento de **T**.

Segue agora a prova de que Q é linearmente independente:

Seja $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$ uma combinação linear de elementos distintos de Q.

Como Q é uma união de conjuntos, temos que para todo *i*, $1 \leq i \leq n$ existe $x_i \in T$, $v_i \in x_i$.

T é totalmente ordenado, dentre os x_i existe um deles x_{max} que é subconjunto de todos os outros. Então temos que para todo *i*, $v_i \in x_{max}$, portanto $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$ é uma combinação linear de vetores de x_{max}.

Por construção x_{max}, é um conjunto linearmente independente, temos que para *i*, $\alpha i = 0$, ou seja provamos que Q é linearmente independente.

Agora sabendo que Q é linearmente independente e é um subconjunto de L, temos que Q $\in$ X. Por sua vez sabemos que Q é a união dos elementos de T, para todo x $\in$ T, então o x $\subseteq$Q. Logo Q é uma cota superior de T.

Agora **vamos aplicar o lema de zorn** ao conjunto X.

Seja B um elemento maximal. Vamos agora provar que B é uma base. Temos que :

L $\subseteq$ B,

B é linearmente independente.

Agora vamos provar que B gera V.

Seja x $\in$ V, tal que x não pertence a B, e x $\neq$ 0.

Como B é maximal, o subconjunto próprio de B definido por B U {x} é linearmente independente, ou seja existe uma combinação linear $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n + \beta x = 0$ onde nem todos os coeficientes são iguais a 0. Logo temos que $\beta \neq 0$, pois caso o contrário B não seria linearmente independente .

Portanto, temos que:

$$x = \frac{-\alpha_1}{\beta} v_1 + \ldots + \frac{-\alpha_n}{\beta} v_n$$

ou seja, B gera V.

Logo isso nos leva a concluir que todo conjunto linearmente independente de V é um subconjunto de uma base de V.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática abriga mistérios inimagináveis. Alguns teoremas ou lemas levam os nomes de seus supostos autores, mas nem sempre esses nomes refletem o verdadeiro criador. Por exemplo, o Teorema de Pitágoras, que muitos acreditam não ter sido elaborado por Pitágoras. Temos também o Lema de Zorn, uma peça fundamental na área matemática.

É notável a aplicabilidade do Lema de Zorn em diversas áreas da Matemática. O processo de demonstração usando Zorn é geralmente o mesmo: utilizamos uma propriedade P para subconjuntos totalmente ordenados e mostramos que existe um elemento maximal para o qual toda parte finita faz uso dessa propriedade.

Além disso, destacamos a importância do Lema de Zorn e sua equivalência com o Axioma da Escolha, mencionado no quarto capítulo deste trabalho. Uma questão importante é a base de Hamel. Todo conjunto linearmente independente A em um espaço vetorial V pode ser estendido a uma base de V, e todo subconjunto $A \subset V$ que gera um espaço vetorial V contém um subconjunto B que é uma base de V.

Não apenas destacamos a importância da aplicação desse lema em diversos campos da Matemática, mas também a sua construção intuitiva, usando apenas conceitos básicos como ordem parcial e total. Neste trabalho, optamos por não discorrer muito sobre a equivalência dele com outros axiomas, focando na Base de Hamel, a fim de exaltar o tema e proporcionar uma leitura agradável. Esperamos que outros estudantes do curso possam usar esses resultados no futuro, aprofundando-se no assunto e discutindo outras teorias, pois o Lema de Zorn se mostrou rico em informações, juntamente com suas equivalências e resultados.

O objetivo deste trabalho é dar ênfase ao Lema de Zorn, trazendo consigo o Axioma da Escolha e o Princípio da Boa Ordenação. As equivalências não nos permitem ignorar essa conexão. Tratando-se de tópicos não comumente abordados em uma graduação em Matemática, surgem questionamentos sobre a sua inclusão no currículo: Por que não são abordados na graduação? Seria benéfico estudá-los nesse nível? Embora esses temas sejam tratados de forma implícita na graduação, durante o estudo de enumerabilidade em análise, anéis, topologia e álgebra, eles não são explorados explicitamente, o que seria de grande valor para os alunos. Contudo, são temas mais aprofundados em cursos de mestrado e doutorado.

REFERÊNCIAS

HINCKEL, Francielle. **INTRODUÇÃO AOS ESPAÇOS VETORAIS DEDIMENSÃO INFINITA**. Florianópolis: UFSC, 2009.

LANG, Serge. Álgebra Linear. São Paulo: Edgard Blucher, 1971. SHOKRANIAN, Salahoddin**. INTRODUÇÃO Á ÁLGEBRA LINEAR**.
Brasília: UnB, 2004.

FARIAS, Diego; KONZEM, Pedro ; SOUZA, Rafael . **ÁLGEBRA LINEAR**.
Rio Grande Do Sul: UFRGS, 2020.

BOLDRINI, José; FIGUEIREDO, Wetzler. **ÁLGEBRA LINEAR**. 3. ed. São
paulo: Harbra ltda, 1980.

ROSARIO , Eduardo . **LEMA DE ZORN, SUAS EQUIVALENCIAS EAPLICAÇÕES**. MACAPÁ: UNIFAP, 2016.

SILVA, Luciano . **Lema de Zorn e Aplicações**. ARAPIRACA: UFAL, 2014.

IEZZI, Gelson ; MURAKAMI, Carlos . **FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR**: CONJUNTOS FUNÇÕES. 3. ed. SÃO PAULO: ATUAL EDITORA, 1977. v. 1.

ROSARIO , Eduardo ; BALIEIRO , Cassio ; DIAS , Neylan ; LEAL, Simone . **O lema Kuratowski-Zorn na matemática do Ensino Médio**. ARAPIRACA:UFAL, 2021.