UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CÉSAR SANTOS BEZERRA

OS NÚMEROS REPUNIDADES NA BASE b

Arraias, TO
2022

César Santos Bezerra

Os Números Repunidades na Base b

Monografia apresentada à UFT − Universidade Federal do Tocantins − Câmpus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor para obtenção de título de Licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Dr.Eudes Antonio da Costa .

Orientador: Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa.

Arraias, TO
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

B574n Bezerra, César Santos.
Os Números Repunidades na base b. / César Santos Bezerra. – Arraias, TO, 2022.
48 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2022.
Orientador: Eudes Antonio da Costa

1. Números Repunidades . 2. Resolução de Problemas. 3. Método de Resolução de Problemas de Polya. 4. Base Nacional Comum Curricular. I. Título

CDD 510

César Santos Bezerra

Os Números Repunidades na base b

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário de Arraias, Curso de Licenciatura em Matemática, foi avaliado para a obtenção do título de Licenciado em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Data de aprovação: 14 /12 /2022

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
EUDES ANTONIO DA COSTA
Data: 15/12/2022 19:46:11-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa, UFT, Arraias

Documento assinado digitalmente
KARLA CAROLINA VICENTE DE SOUSA
Data: 15/12/2022 13:18:30-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Profa. Dra. Karla Carolina Vicente de Sousa, UFT, Arraias

Documento assinado digitalmente
MIGUEL ANTONIO DE CAMARGO
Data: 15/12/2022 12:53:35-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. ... :G, Jussara

Dedico esta monografia aos meus pais em nome de toda minha família, pelo apoio e todo incentivo recebido.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, pela minha vida, e por me ajudar a superar os percalços encontrados ao longo da graduação.

Ao Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa, por ter me orientado na execução deste trabalho de forma exímia.

Aos meus pais, minha avó e meus familiares de uma maneira geral que me apoiaram durante esse percurso.

A Universidade Federal do Tocantins, e a todos os professores que tive durante o curso, que contribuíram para que esse sonho fosse realizado.

"Aqueles que semeiam com lágrimas, com cantos de alegria colherão. "

Salmo 126:5.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo acerca dos números *repunidades* (repetição de unidades) em uma base $b > 1$, expomos uma proposta para o ensino de Matemática tendo como objeto de estudo este conjunto numérico. Ademais das *repunidades* generalizadas logradas, também apresentamos resultados na base nonária e base decimal. Todos os resultados alcançados acerca das *repunidades* são fundamentados por resultados clássicos ou resultados elementares da Aritmética, tal que dentre estes, damos ênfase para o Sistema de Representação Posicional ou Base. Tendo em vista a Metodologia de Resolução de Problemas como uma alternativa ao ensino de Matemática, propomos cinco problemas elaborados com intento de abarcar alguns resultados obtidos, pautando-os por esta metodologia, e com uma proposta de resolução por meio do Método de Resolução de Problemas de Polya (1995). O propósito dessas atividades é que os estudantes da Educação Básica adquiram habilidades ou competências apregoadas na Base Nacional Comum Curricular (BNNC, BRASIL, 2018).

Palavras-chave: Números *Repunidades*; Método de Resolução de Problemas de Polya; Sistema de Representação Posicional (Base).

ABSTRACT

This paper aims to present a study about the repunits numbers (repetition of units) in a base $b > 1$, we expose a proposal for the teaching of Mathematics having as object of study this numerical set. In addition to the generalized repunitis achieved, we also present results in the nonary and decimal base. All the results obtained from the repunits are based on classical results or elementary results of Arithmetic, such that among these, we emphasize the the System of Positional Representation (Base). In view of the Problem Solving Methodology as an alternative to the teaching of mathematics, we propose five problems with the intention of covering some of the results obtained, based on this methodology, and with with a resolution proposal using Polya's Problem Solving Method (1995). The purpose of these activities is for students of Basic Education acquire abilities or competences proclaimed in the Common National Curricular Base (BNNC, BRASIL, 2018).

Keywords: Repunit Numbers; Polya's Problem Solving Method; Positional Representation System (Base).

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentamos um estudo inicial aos números *repunidades* em uma base numérica $b > 1$ e algumas condições de divisibilidade. De modo mais específico, temos como objetivo geral estudar os números *repunidades* em qualquer base b, e enquanto objetivos específicos, pretendemos obter generalizações de propriedades existentes das *repunidades* na base decimal para outra base numérica, e verificar a existência de propriedades relacionadas aos números *repunidades* generalizados.

Na base decimal, ou seja, quando $b = 10$, os números *repunidades* representam um subconjunto dos inteiros não negativos, denotados por $\mathbf{R1} = \{1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ \ldots,\ R_n, \ldots\}$, para todo $n > 0$. Esses números estão inseridos no campo matemático da Teoria dos Números, sendo este reservado aos estudos das propriedades dos números em geral, e em especial os números inteiros. O conjunto de números em questão é carregado de mistérios e curiosidades. Parte dessa curiosidade vem diretamente do fato em que este conjunto possui relações com outros subconjuntos de números, como por exemplo os números de *Ball* (*Ball* generalizados). É possível encontrar resultados que confirmam essa relação, tendo como exemplo o fato abordado em Costa e Santos (2022, p.77): "Todo número mágico B_b é múltiplo de $(11)_b$", resultado este válido para toda base $b > 2$. Ora, mas se $(11)_b = (R_2)_b$, então podemos reescrever este resultado no escopo dos *repunidades* como sendo: "Todo número mágico B_b é múltiplo de $(R_2)_b$", sempre que $b > 2$.

Com o advento da computação, que se vale muito do sistema de numeração binário para seu funcionamento, mostrou-se maior necessidade e interesse sobre estudos em outras bases numéricas que não apenas a decimal. Em Costa e Santos (2020) é possível verificar a existência de resultados sobre os números *repunidades* na base decimal, enquanto Synder (1982) define os números *repunidades* generalizados em qualquer base $b > 1$, de modo que tais fatos nos levam a crer que exista interesse e estudos em outras bases numéricas, diferentes da decimal. Diante destas informações, achamos pertinente ampliar nosso conhecimento existente sobre números *repunidades* em outras bases numéricas, e tivemos como problema de pesquisa: "É possível determinar propriedades relacionadas aos números *repunidades* em uma base numérica qualquer b ?".

Enquanto procedimentos metodológicos, o primeiro passo realizado na pesquisa foi delimitar o tema da mesma, e consequentemente a delimitação do material teórico a ser explorado. Com a temática da pesquisa definida, temos que o tipo de pesquisa à ser utilizado no trabalho é de natureza qualitativa, tendo como procedimento de coleta o método bibliográfico. Nesta pesquisa focamos em investigar propriedades existentes acerca dos números *repunidades* na base decimal, afim de generalizar essas propriedades para qualquer base numérica quando possível, além de determinar algumas novas proposições generalizadas e algumas em bases específicas. Foram utilizados como fonte de pesquisa os seguintes meios: livros, artigos e sites. Por meio do processo de coleta de dados, foi possível encontrar materiais condizentes com o tema determinado. A análise desses dados foram feitas de modo crítico, sempre observando a real possibilidade de determinados elementos serem enquadrados na proposta apresentada para esta pesquisa.

Neste primeiro capítulo trazemos a introdução do trabalho, situando o leitor ao exposto no mesmo. No segundo capítulo apresentamos a Resolução de Problemas enquanto uma das Tendências Metodológicas na Educação Matemática e a disposição da mesma nos Parâmetros Curriculares Nacionais na Área de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, PCN, 1998) e Parâmetros Curriculares Nacionais na Área de Matemática no Ensino Médio (BRASIL, PCN, 2000). De maneira mais enfática, apresentamos o Método de Resolução de Problemas de Polya (1995), a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, BNCC, 2018) e sua relação com o tema do capítulo.

No terceiro capítulo apontamos alguns resultados clássicos e conceitos elementares da Matemática que são utilizados como passos intermediários para a demonstração dos resultados obtidos no quarto capítulo. No quarto capítulo apresentamos o conceito sobre os números *repunidades*, bem como trazemos os resultados matemáticos obtidos sobre esse conjunto numérico. Entre os resultados apresentados, temos resultados na base 9, base 10, além dos resultados generalizados para toda base $b > 1$. Em relação a apresentação dos novos resultados pensamos estar estruturada em forma sequenciada.

No quinto capítulo exploramos cinco problemas sobre os números *repunidades*, tal que sua estrutura de resolução está pautada pelo Método de Resolução de Problemas de Polya (1995). Prezando pelo incentivo ao aprendizado em matemática na educação básica, adaptamos esses problemas com o intuito de que os estudantes adquiram habilidades ou competências estabelecidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC, BRASIL, 2018). As unidades temáticas, bem como as habilidades e competências estão descritas no segundo capítulo do trabalho. Por último trazemos as considerações descrevendo algumas conclusões obtidas do trabalho.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Os problemas propostos no quinto capítulo deste Trabalho de Conclusão de Curso estão no escopo da Metodologia de Resolução de Problemas, e pautados pelo Método de Resolução de Problemas de Polya (1995) enquanto estrutura de formulação e resposta dos problemas, e pela Base Nacional Comum Curricular (Brasil, BNCC, 2018) enquanto objetivos e competências a serem alcançados na resolução dos problemas.

Para fundamentar nossa pesquisa, apresentaremos a Metodologia de Resolução de Problema, bem como o Método de Resolução de Problemas de Polya (1995) e a BNCC (BRASIL, 2018). Em relação a última, mostramos de que maneira a resolução de problemas é descrita no ensino fundamental e ensino médio na Área de Matemática desse documento governamental que rege o conteúdo a ser ensinado na educação básica brasileira. De modo mais específico, trazemos as unidades temáticas, habilidades e competências da Área de Matemática da BNCC (BRASIL, 2018), em que as duas primeiras referem-se ao ensino fundamental e a última ao ensino médio, abordamo-as pelo fato de serem utilizadas na elaboração dos problemas propostos no quinto capítulo do trabalho.

2.1 Metodologia de Resolução de Problemas

A Metodologia de Resolução de Problemas assume-se como uma das Tendências Metodológicas na Educação Matemática, juntamente com a Modelagem Matemática, Tecnologias na Educação Matemática, Etnomatemática e a Filosofia - História da Matemática. Podemos confirmar o exposto acima através de Zorzan (2007):

> O surgimento de propostas alternativas para a ação pedagógica do ensino matemático constitui o movimento da educação matemática, ou, ainda, as tendências em educação matemática. Nesse sentido, é significativo destacar as tendências em Educação Matemática que estão sendo alvo de discussões e produções teóricas e práticas, as quais são: a etnomatemática, a modelagem, **a resolução de problemas**, a tecnologia e a Educação Matemática, a filosofia da Educação Matemática. (ZORZAN, 2007, p.79, grifo nosso).

Tal fato é relevante, pois indica que a Resolução de Problemas é vista como uma metodologia atual e de eficiência para o ensino de matemática.

O surgimento da resolução de problemas enquanto metodologia de ensino e aprendizagem está ligada a psicologia sociocultural, tendo Vygotsky como o principal referencial teórico, e podemos encontrar essa relação em Onuchic e Allevato (2011):

> Inicia-se, então, a fase da Resolução de Problemas, cujas ideias apoiavam-se, especialmente, nos fundamentos do construtivismo e na teoria sociocultural, que tem Vygotsky como principal teórico.

> O foco, nessa fase, foi colocado sobre os processos de pensamento matemático e de aprendizagem por descoberta, no contexto da resolução de problemas. Nessa fase, muitos recursos foram desenvolvidos na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividade e orientações para avaliar o desempenho dos alunos nessa área, sempre visando ao trabalho em sala de aula. Muito desse material contribuiu para que os professores fizessem da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho. (ONUCHIC E ALLEVATO, 2011, p.78).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais na Área de Matemática (BRASIL, PCN, 1998), no terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, indicam que a resolução de problemas deve ser o ponto de partida da atividade matemática desenvolvida em sala de aula. Sobre a resolução de problemas prevista no PCN (BRASIL, 1998), podemos destacar:

> Em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. (BRASIL, 1998, p. 39-40).

Ainda no terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, os PCN (BRASIL, 1998) destacam o que o aluno pode adquirir aprendendo matemática por meio da resolução de problemas. Segue o exposto:

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança. (BRASIL, 1998, p.40).

Já os PCN do Ensino Médio da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, PCN, 2000) destaca o quão estratégico é a metodologia de resolução de problemas no ensino de matemática, como vemos em:

> Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 2000, p.52).

Visto o que determina o PCN (BRASIL, 1998) da Área de Matemática no terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental e o PCN (BRASIL, 2000) da Área de Matemática do Ensino Médio, temos que a resolução de problemas é tomada como ponto de partida para o ensino de matemática, pois a mesma está presente nas vidas das pessoas, seja no contexto da matemática ou não, e podemos ver isso em Rodrigues e Magalhães (2011):

> A atividade de resolver problemas está presente na vida das pessoas, exigindo soluções que muitas vezes requerem estratégias de enfrentamento. O aprendizado de estratégias auxilia o aluno a enfrentar novas situações em outras áreas do conhecimento. (RODRIGUES e MAGALHÃES, 2011, p.2).

2.2 Método de Resolução de Problemas de Polya

George Polya foi um matemático húngaro, que contribuiu muito para os métodos de resolução de problemas. Como visto anteriormente, uma das metodologias de ensino e aprendizagem existentes é a resolução de problemas, que se baseia na criação de problemas matemáticos que instigam o pensamento criativo dos estudantes.

Pesquisadores da área como Pontes (2019) e Quadros-Flores, Mascarenhas e Machado (2020) elucidam que o método de resolução de problemas de Polya é uma alternativa para o ensino e aprendizagem de Matemática na resolução de problemas, como vemos:

> O tema resolução de problemas através do método de Polya, como prática educacional no processo de ensino e aprendizagem de matemática possibilita ao professor facilitador e ao aluno aprendiz desenvolver novas habilidades no intuito de fortalecer o pensamento crítico e o raciocínio lógico. (PONTES, 2019, p.8).

> [...] um dos métodos mais conhecidos e valorizados no ensino da Matemática, é o método apresentado por George Polya (1973) que estabeleceu quatro etapas fulcrais para a RP: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e verificação. (QUADROS-FLORES, MASCARENHAS e MACHADO, 2020, p.51).

Conforme Polya (1995), podemos entender um pouco das motivações que um professor tem ao decidir ensinar matemática por meio da resolução de problemas:

> O professor que deseja desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar. Quando o professor tenciona desenvolver nos seus alunos as operações mentais correspondentes às indagações e sugestões da nossa lista, ele as apresenta tantas vezes quanto puder fazer com naturalidade. (POLYA, 1995, p.3).

Uma vez escolhida pelo professor a resolução de problemas como metodologia de ensino em suas aulas, um erro que ele não pode cometer é não correlacionar os problemas matemáticos, como vemos abaixo:

> Um dos primeiros deveres do professor é não dar aos seus alunos a impressão de que os problemas matemáticos têm pouca relação uns com os outros, de que nenhuma relação têm com qualquer outra coisa. Surge uma oportunidade natural de investigar as relações de um problema quando fazemos o retrospecto de sua resolução. Os estudantes acharão realmente interessante o retrospecto se eles houverem feito um esforço honesto e ficarem conscientes de terem resolvido bem o problema. Neste caso, ficarão ansiosos para ver o que mais poderão conseguir com aquele esforço e como poderão, da próxima vez , fazer tão bem quanto desta. O professor deve encorajar os alunos a imaginar casos em que eles poderão outra vez utilizar o procedimento usado ou o resultado obtido. (POLYA, 1995, p.11).

Polya elaborou um roteiro de resolução de problemas, dividido em quatro etapas. São etapas encontradas em Polya (1995, p.12):

Quadro 1 - Etapas da Resolução de Problemas segundo Polya.

ETAPAS	**DESCRIÇÕES ABREVIADAS**
1ª Etapa - Compreensão do Problema	Processo de identificação da incógnita do problema, e quais são os dados disponibilizados.
2ª Etapa - Estabelecimento de um Plano	Desenvolver uma estratégia de resolução para o problema determinado, embasada na correlação entre os dados disponibilizados e a incógnita.
3ª Etapa - Execução do Plano	Esse é o momento em que o problema é solucionado.
4ª Etapa - Retrospecto	Revisão da solução, verificar se os resultados obtidos são verdadeiros.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Fundamentado em Polya (1995), temos consciência de que os professores devem procurar maneiras de fazer com que os aprendentes raciocinem e saibam quando aplicar o conhecimento teórico que aprendem. Para tal empreitada, no capítulo 5 deste trabalho, iremos desenvolver problemas correlacionados com a temática desse trabalho.

2.3 Base Nacional Comum Curricular

A BNCC (BRASIL, 2018) é um documento regimental, imposto para as elaborações de currículos escolares e propostas pedagógicas nas três etapas da educação básica, sendo elas: educação infantil, ensino fundamental e ensino médio. Todas as instituições de ensino das esferas pública e privada, devem seguir aquelas normativas.

A BNCC (BRASIL, 2018) possui como objetivos gerais:

> Nesse sentido, espera-se que a BNCC ajude a superar a fragmentação das políticas educacionais, enseje o fortalecimento do regime de colaboração entre as três esferas de governo e seja balizadora da qualidade da educação. Assim, para além da garantia de acesso e permanência na escola, é necessário que sistemas, redes e escolas garantam um patamar comum de aprendizagens a todos os estudantes, tarefa para a qual a BNCC é instrumento fundamental. (BRASIL, 2018, p.8).

A BNCC (BRASIL, 2018) destaca a resolução de problemas como sendo um importante processo de aprendizagem, como podemos ver em:

> Os **processos matemáticos** de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional. (BRASIL, 2018, p.266, grifo do autor).

Visto os objetivos gerais da BNCC (BRASIL, 2018) e o destaque dado a resolução de problemas, vemos a sua importância no processo de aprendizagem dos estudantes da educação básica, e espera-se que todos os estudantes brasileiros da educação básica, nos níveis fundamental e médio, consigam resolver os problemas propostos no capítulo 5 deste trabalho.

Enquanto licenciando em Matemática, com habilitação para atuar nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, me aterei a explorar a área de Matemática dessas duas etapas de ensino, relacionando-as com os problemas propostos neste trabalho. Os problemas propostos possuem viés com as unidades temáticas de Números e Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental, e as três últimas competências do Ensino Médio, todas descritas pela BNCC (BRASIL, 2018), e por isso colocaremos os objetivos dessas unidades temáticas e a descrição dessas competências em seus subcapítulos pertinentes.

2.3.1 BNCC da Matemática - Ensino Fundamental Anos Finais

A área de Matemática nos anos finais da BNCC (BRASIL, 2018) é dividida em cinco unidades temáticas, em que cada unidade temática é subdividida em objetos do conhecimento, que por sua vez possuem habilidades a serem alcançadas. Como mencionado, os problemas elaborados neste, foram embasados nas unidades temáticas de Números e Álgebra, por tanto nos ocuparemos de abordar apenas as mesmas. Ainda elencamos as habilidades das referidas unidades temáticas que foram utilizadas na elaboração dos problemas propostos.

A área de Matemática na BNCC (BRASIL, 2018) nos anos finais do ensino fundamental, destaca que nessa etapa de ensino a resolução de problemas deve fazer com que o estudante tenha capacidade de abstrair o contexto de algum problema proposto, e podemos verificar isso em:

> Para favorecer essa abstração, é importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido. Por esse motivo, nas diversas habilidades relativas à resolução de problemas, consta também a elaboração de problemas. Assim, pretende-se que os alunos formulem novos problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento sobre o que ocorreria se alguma condição fosse modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto. (BRASIL, 2018, p.299).

Dentre as unidades temáticas que nos embasamos para a elaboração dos problemas que tem como público alvo estudantes do ensino fundamental, podemos destacar as unidades temáticas de Números e Álgebra, bem como suas respectivas habilidades. Atemo-nos nestas escolhas devido ao fato de que a unidade temática de números permite aos estudantes desenvolverem habilidades de cálculo, estimativa, comparação, sequências e reconhecimento de padrões, bem como a compreensão das operações matemáticas. Já a unidade temática de álgebra é permissora para que os alunos modelizem situações reais e resolvam problemas de forma mais geral e eficiente, além de proporcionar o desenvolvimento de habilidades de argumentação, justificação e generalização.

Ao resolverem os problemas propostos fundamentados nas unidades temáticas de Números e Álgebra da BNCC (BRASIL, 2018), os estudantes têm a oportunidade de desenvolver uma base sólida nesta ciência exata abordada, possibilitando a progressão para conceitos mais avançados em etapas escolares subsequentes. Além disso, a BNCC (BRASIL, 2018), também enfatiza a interdisciplinaridade, mostrando como os conceitos matemáticos estão relacionados com outras áreas do conhecimento e como podem ser aplicados em diferentes contextos da vida real.

Nosso objetivo nesta etapa do trabalho é apresentar a riqueza das informações presentes na BNCC (BRASIL, 2018), e para tal recorremos a quadros informativos, que apresentarão os objetivos gerais e seus objetivos específicos, bem como as habilidades na etapa de ensino dos anos finais do ensino fundamental das unidades temáticas supracitadas.

Nas próximas três páginas estão dispostos os quadros informativos, contendo todas as informações necessárias para fundamentar os problemas matemáticos propostos na quinta seção deste trabalho.

Quadro 2 - Unidade Temática de Números, da Matemática, no Ensino Fundamental Anos Finais da BNCC.

Unidade Temática	**Objetivos Gerais**	**Objetivos Específicos - Anos Finais**
NÚMEROS	A unidade temática Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações.	Com referência ao Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais. Os alunos devem dominar também o cálculo de porcentagem, porcentagem de porcentagem, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais. No tocante a esse tema, espera-se que saibam reconhecer, comparar e ordenar números reais, com apoio da relação desses números com pontos na reta numérica. Cabe ainda destacar que o desenvolvimento do pensamento numérico não se completa, evidentemente, apenas com objetos de estudos descritos na unidade Números. Esse pensamento é ampliado e aprofundado quando se discutem situações que envolvem conteúdos das demais unidades temáticas: Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística.

Fonte: (BRASIL, 2018, p.268-269).

Quadro 3 - Unidade Temática de Álgebra, da Matemática, no Ensino Fundamental Anos Finais da BNCC.

Unidade Temática	**Objetivos Gerais**	**Objetivos Específicos - Anos Finais**
ÁLGEBRA	A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações.	No Ensino Fundamental – Anos Finais, os estudos de Álgebra retomam, aprofundam e ampliam o que foi trabalhado no Ensino Fundamental – Anos Iniciais. Nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos.

Fonte: (BRASIL,2018,p.270-271).

Quadro 4 - Habilidades Utilizadas da Unidade Temática de Números, no Ensino Fundamental Anos Finais da BNCC.

(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais [. . .] cuja representação decimal é finita, [. . .].
(EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal,[. . .], e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais [. . .] em sua representação decimal.
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
(EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).
(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.
(EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum,[. . .].
(EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, [. . .] e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.
(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.
(EF08MA01) Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros [. . .].

Fonte: (BRASIL,2018).

Quadro 5 - Habilidades Utilizadas da Unidade Temática de Álgebra, no Ensino Fundamental Anos Finais da BNCC.

(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.
(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, [. . .].
(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, [. . .].

Fonte: (BRASIL,2018).

2.3.2 BNCC da Matemática - Ensino médio

A área de Matemática no Ensino Médio é dividida em cinco competências, na qual cada competência abarca uma série de habilidades. Assim como nos anos finais do ensino fundamental, neste subcapítulo iremos nos ater apenas as competências utilizadas na elaboração dos problemas.

No tocante a importância da resolução de problemas para o aprendizado em Matemática, de maneira especial no ensino médio, a BNCC (BRASIL, 2018) destaca que:

> Diante dessas considerações, a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos **processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas**. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2018, p.528-529, grifo nosso).

No quadro abaixo, temos as competências da Matemática do ensino médio e suas descrições, que fundamentam os problemas propostos no capítulo 5.

Quadro 6 - Competências Utilizadas do Ensino Médio da Área de Matemática da BNCC.

COMPETÊNCIA 3	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
COMPETÊNCIA 4	Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
COMPETÊNCIA 5	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: (BRASIL, 2018, p. 531).

3 RESULTADOS CLÁSSICOS

Neste capítulo apresentamos alguns resultados clássicos que servirão para o embasamento e desenvolvimento de resultados dos números *repunidades*, ainda traremos alguns resultados elementares da matemática, tais como: paridade e quadrado perfeito. Para a fundamentação deste, os resultados apresentados neste capítulo são encontrados em: Carvalho e Costa (2022); Domingues (1991); Domingues, Bento e Silva (2016); Hefez (2009); Hefez (2016); Iezzi, Dolce, e Mukarami (2013); Leite (2015); Maier (2005) e Oler (2012).

Um número inteiro n é par se existe um inteiro k tal que $n = 2k$. São exemplos de números pares: $0, 2, 4, 6, \dots, 2k, \dots$. Um número inteiro n, se não é par, é dito ímpar se existe um inteiro k tal que $n = 2k+1$. São exemplos de números ímpares: $1, 3, 5, 7, \dots, 2k+1, \dots$. Um número inteiro positivo n é dito quadrado perfeito se existe $a \in \mathbb{N}$, tal que $n = a^2$. São exemplos de quadrados perfeitos: $0, 4, 9, 16, \dots, a^2, \dots$.

De acordo com Domingues (1991), todo número inteiro pode ser expresso na forma polinomial, sendo representado da seguinte maneira:

Proposição 3.0.1. Dados os números inteiros a e b, com $a > 0$ e $b > 1$. Existem números inteiros $n \geqslant 0$ e $0 \leqslant r_0, r_1, \dots, r_n \leqslant b-1$, com $r_n \neq 0$, univocamente determinados, tais que:

$$a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \cdots + r_n b^n. \tag{1}$$

Exemplo 3.0.1. *O número 2022 na base decimal tem a representação polinomial do tipo* $2022 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$. *O número* $(2022)_3$ *na base três tem representação polinomial do tipo* $(2022)_3 = 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$.

Maier (2005, p.19) e Domingues, Bento e Silva (2016, p.93) descrevem a diferença de dois quadrados e diferença de dois cubos da seguinte forma: "Dados dois números inteiros a e b, a diferença de quadrados é dada por $a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$, enquanto a diferença de cubos é dada por $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$."

Exemplo 3.0.2. *Dados os números 2022 e 2021, suas representações da diferença de quadrados e a diferença de cubos entre eles são respectivamente:* $(2022)^2 - (2021)^2 = (2022-2021) \cdot (2022+2021) = 1 \cdot 4043 = 4043$, $(2022)^3 - (2021)^3 = (2022-2021) \cdot (2022^2 + 2022 \cdot 2021 + 2021^2) = 1 \cdot 12\ 259\ 387 = 12\ 259\ 387$.

Em Iezzi, Dolce, Mukarami (2013, p.3) temos que: "*Dado* $a \in \mathbb{R}$ $, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$, *com* $a \neq 0$ *ou* $n \neq 0$, $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ e $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$", que são duas das propriedades de potência, mais especificamente potência de potência e potência de produto, respectivamente.

Exemplo 3.0.3. *Seja* $a = 2019$, $b = 2022$, $n = 2$ *e* $m = 3$, *temos* $(2019^2)^3 = (2019)^{2\cdot 3} = (2019)^6$ *e* $(2019 \cdot 2022)^2 = 2019^2 \cdot 2022^2$, *em que são casos específicos de potência de potência e potência de produto respectivamente.*

Domingues (1991, p.43) apresenta a definição de Máximo Divisor Comum (MDC) como sendo:

Definição 3.0.1. *Dados* $a,b \in \mathbb{N}$. *Um número* $d \in \mathbb{N}$ *se diz máximo divisor comum de* a,b *se: i)* $d|a$ *e* $d|b$*; ii) se* c *é um número natural tal que* $c|a$ *e* $c|b$*, então* $c|d$.

Exemplo 3.0.4. $mdc(2022,2000) = 2$, *pois os divisores de* $2022 = \{1, \boldsymbol{2}, 3, 6, 337, 674, 1011, 2022\}$ *e* $2000 = \{1, \boldsymbol{2}, 4, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 125, 200, 250, 400, 500, 1000, 2000\}$ *em que o maior divisor em comum aos dois é o número 2.*

Hefez (2009) diz que dois números a e b são números coprimos se o único divisor comum aos números a e b é 1, isto é, $mdc(a,b) = 1$.

Exemplo 3.0.5. *Os números 2021 e 2022 são coprimos, pois os divisores de* $2021 = \{\boldsymbol{1}, 43, 37, 2021\}$ *e* $2022 = \{\boldsymbol{1}, 2, 3, 6, 337, 674, 1011, 2022\}$*, em que o único divisor em comum a ambos é o número 1, portanto* $mdc(2022,2021) = 1$. *Em geral, se a e b são números sucessivos então* $mdc(a,b) = 1$.

Hefez (2016, p.43) apresenta o seguinte resultado:

Proposição 3.0.2. Sejam $a,b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, $a-b$ *divide* $a^n - b^n$.

Exemplo 3.0.6. *A demonstração da proposição acima pode ser encontrada em Hefez (2016). A diferença de dois quadrados é determinada por* $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$*, veja que o fator* $(a-b)$ *divide essa diferença sempre que* $a \neq b$. *A diferença de dois cubos é determinada por* $a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$*, em que o fator* $(a-b)$ *também divide essa diferença, sempre que* $a \neq b$.

Leite (2015) traz que para todo $n \in \mathbb{N}$ indicamos por $F_n = 2^{2^n} + 1$, em que F_n chama-se um número de Fermat na base decimal.

Exemplo 3.0.7. *Os primeiros três números de Fermat na base decimal são:* $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$, $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$ *e* $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$.

Em Maier (2005) temos que para todo $m \in \mathbb{N}^*$ indicamos por $T_m = \frac{m\cdot(m+1)}{2}$, em que T_m chama-se o m-ésimo número triangular.

Exemplo 3.0.8. *São exemplos de números triangulares na base decimal:* $T_1 = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}, T_2 = 3 = \frac{2\cdot(2+1)}{2}, T_3 = 6 = \frac{3\cdot(3+1)}{2}$*, tais que 1,3 e 6 são os três primeiros números triangulares na base decimal.*

Carvalho e Costa (2022) definem um número natural, com $n > 2$ algarismos como suavemente ondulante quando,

$$N = \underbrace{aba \cdots ab}_{n\ par} \ ou \ N = \underbrace{aba \cdots ba}_{n\ ímpar}, \ com \ a, b \in D, a \neq b \ e \ a \neq 0, \tag{2}$$

sendo $D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ o conjunto de dígitos ou algarismos no sistema posicional decimal.

Exemplo 3.0.9. *1212 e 15151 são exemplos de números suavemente ondulante.*

Domingues (1991, p.33) apresenta o algoritmo de Euclides do MDC da seguinte maneira:

Proposição 3.0.3. (Algoritmo de Euclides do MDC)

$$\text{Dado a, b números inteiros, se } a = bq + r \ e \ d = mdc(a,b), \text{ então } d \ = \ mdc(b,r). \tag{3}$$

Exemplo 3.0.10. *Vejamos o cálculo do* $mdc(57,13)$ *pelo processo do algoritmo de Euclides do MDC:*

$$57 = 13 \cdot 4 + 5 \tag{4}$$

$$13 = 5 \cdot 2 + 3 \tag{5}$$

$$5 = 3 \cdot 1 + 2 \tag{6}$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1 \tag{7}$$

$$2 = 1 \cdot 2 \tag{8}$$

logo, $1 = mdc(57,13)$.

Ao longo do trabalho utilizei o princípio da indução matemática e este resultado pode ser consultado em Domingues (1991, p.22).

Proposição 3.0.4. Princípio da Indução Matemática
Seja $a \in \mathbb{N}$ e suponhamos que a cada número natural $n \geq a$ esteja associada uma afirmação $P_{(n)}$. Admitamos ainda que seja possível provar o seguinte:
(i) $P_{(a)}$ é verdadeira .
(ii) Para todo $r \geq a$, se $P_{(r)}$ é verdadeira, então $P_{(r+1)}$ também é verdadeira.
Então $P_{(n)}$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Hefez (2016) traz como definição de congruência o seguinte:

Proposição 3.0.5. Seja m um número natural. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escreve-se

$$a \equiv b \ mod \ m. \tag{9}$$

Hefez (2016) ressalta que para determinar se dois números são congruentes módulo m, não é necessário comparar seus restos pela divisão euclidiana, basta verificar pela seguinte proposição:

Proposição 3.0.6. Suponha que $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Tem-se que $a \equiv b \ mod \ m$ se, e somente se, m divide $b - a$.

Exemplo 3.0.11. $2021 \equiv 19 \ mod \ 22$*, pois* $19 - 2021 = 22 \cdot (-91)$ *e* $2022 \equiv 2 \ mod \ 20$*, pois* $2 - 2022 = 20 \cdot (-101)$.

Oler (2012, p.29-30) apresenta os critérios de divisibilidade por 2, 3 e 5 da seguinte maneira: "Um número é divisível por 2 se o algarismo da unidade é divisível por 2. Um número é divisível por 3 se a soma de seus algarismos é divisível por 3 e por fim, um número é divisível por 5 se o algarismo da unidade é 0 (zero) ou 5."

Exemplo 3.0.12. *2010 é divisível por 2, 3 e 5. É divisível por 2 pois seu último algarismo é divisível por 2, é divisível por 3 pois* $2 + 0 + 1 + 0 = 3$ *que é múltiplo de 3, e é divisível por 5 pois seu último algarismo é o 0 (zero).*

4 NÚMEROS REPUNIDADES

Os números *repunidades* representam um subconjunto próprio dos números inteiros não negativos, denotado por **R1**, que apresenta um padrão e algumas propriedades bem definidas as quais despertam o interesse de matemáticos no decorrer do tempo. De acordo Carvalho e Costa (2015) o termo *repunidade*, em inglês *repunit*, foi utilizado primeiramente por Beiler em seu trabalho *Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains* em 1964, referindo-se aos números naturais R_n que são escritos de maneira única, no sistema de numeração decimal pela repetição da unidade, ou seja, a justaposição do algarismo 1, n vezes. Assim, para todo $n > 0$, $\mathbf{R1} = \{1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ \ldots,\ R_n, \ldots\}$ representa o conjunto dos números *repunidades*. Vista sua definição, podemos afirmar que todos os números *repunidades* são monodígitos, uma vez que segundo Costa e Santos (2022, p.47): "Um número natural não nulo formado pela repetição do mesmo dígito (algarismo) é denominado monodígito, num sistema numérico posicional e numa base $b \geq 1$ fixada ". Santos (2019) mostra que um número *repunidade* na base decimal e seu sucessor podem ser representados das seguintes maneiras: para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos que $R_n = \frac{10^n - 1}{9}$ e $R_{n+1} = 10^n + R_n$.

Sobre o sistema de numeração posicional na base decimal, temos que segundo Domingues (1991, p.34): "Todo número n é um polinômio, $n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_r \cdot 10^r$, onde $r \geq 0$ e os $a_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}\,(i = 1,2,\ldots,r)$ estão univocamente determinados."Além do sistema de numeração decimal, existem outros sistemas de numeração ou base, dentre eles o sistema de numeração binário ou base 2, que é de importância para as áreas abarcadas pela engenharia da computação e ciência da computação. No sistema de numeração binário, existem apenas dois algarismos, que são 0 e 1, e qualquer número número inteiro nessa base é escrito com uma intercalação entre esses dois algarismos. A característica comum entre qualquer sistema de numeração de base $b > 1$, é que todos são sistemas posicionais.

Mediante o estudo de Beiler na temática, surgiram muitos resultados sobre os números *repunidades*, após estudos sobre esses números, Snyder (1982) propôs a generalização das propriedades aritméticas existentes dos números R_n para qualquer base numérica inteira $b > 1$, em que $(R_n)_b = \frac{b^n - 1}{b - 1}$, que ficaram conhecidos como *repunidades generalizados* ou *repunidades* para uma base b, dessa forma os conceitos aritméticos determinados aos números *repunidades* no sistema de numeração decimal foram ampliados para qualquer base numérica inteira, em que $b > 1$. Veja que $(R_3)_2 = (111)_2 = 2^2 + 2^1 + 2^0$, enquanto que $(R_3)_5 = (111)_5 = 5^2 + 5^1 + 5^0$.

As proposições dispostas neste capítulo sobre os números *repunidades* são divididas em alguns dos resultados já conhecidos anteriormente à realização dessa pesquisa, bem como proposições inéditas no tocante a sua demonstração generalizada em uma base numérica $b > 1$.

4.1 Alguns Resultados na Base Decimal

A próxima proposição é encontrada em Yates (1978, p.24):

Proposição 4.1.1. Não existe *repunidade* na base decimal, que seja múltiplo de 2 e 5.

Demonstração: Para todo $n > 0$, $R_n = \underbrace{11...11}_{n\ vezes} = (2q+1)$ ímpar, implica que $R_n \equiv 1 \ mod\ 2$. Do mesmo modo R_n não pode ser múltiplo de 5, pois seu último algarismo sempre é 1, e apenas números terminados em 0 e 5 são múltiplos de 5.

Proposição 4.1.2. Se $n > 1$ é ímpar, então $10^n + R_{n-1} - R_n$ é um quadrado perfeito.

Demonstração: Veja que $R_{n-1} - R_n = -10^{n-1}$, logo:

$$\begin{aligned} 10^n + R_{n-1} - R_n &= 10^n - 10^{n-1} && (10)\\ &= 10^{n-1} \cdot (-1+10) && (11)\\ &= 10^{n-1} \cdot (3^2). && (12) \end{aligned}$$

Por hipótese n é ímpar, isto é, $n = 2x+1$ para algum $x \in \mathbb{N}^*$, assim:

$$10^{(2x+1)-1} \cdot 3^2 = 10^{2x} \cdot 3^2 = (10^x)^2 \cdot 3^2 = (10^x \cdot 3)^2. \tag{13}$$

Exemplo 4.1.1. *Vejamos para $n = 3$, $n = 5$ e $n = 7$ respectivamente:* $10^3 + R_2 - R_3 = 10^3 + 11 - 111 = 30^2$, $10^5 + R_4 - R_5 = 10^5 + 1111 - 11111 = 300^2$ *e* $10^7 + R_6 - R_7 = 10^7 + 111111 - 1111111 = 3000^2$.

4.2 Alguns Resultados Generalizados

A próxima proposição é descrita em Snyder (1982, p.462):

Proposição 4.2.1. Seja uma base numérica $b > 1$, então $(R_n)_b = b^{n-1} + b^{n-2} + \cdots + b + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstração: Vamos provar por indução em n. A proposição é válida para $n = 1$, pois $(R_1)_b = \frac{b-1}{b-1} = b^0 = (1)_b$.

Suponhamos agora que $(R_n)_b = \frac{b^n-1}{b-1} = b^{n-1} + b^{n-2} + \cdots + b + 1$ seja válida para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Devemos mostrar a validade da sentença para $(R_{n+1})_b$. Pela hipótese de indução $(R_{n+1})_b = b^n + \frac{b^n-1}{b-1}$, sendo assim,

$$(R_{n+1})_b = b^n + \frac{b^n - 1}{b-1} = \tfrac{b^{n+1}-b^n+b^n-1}{b-1} = \frac{b^{n+1}-1}{b-1}. \tag{14}$$

fato este que mostra a validade da proposição.

Proposição 4.2.2. Para toda base $b > 1$ e $n > 0$, $(R_{n+1})_b$ é dado por: $(R_{n+1})_b = (b \cdot R_n + 1)_b$.

Demonstração: Como $(R_n)_b = \frac{b^n - 1}{b-1}$, então:

$$
\begin{aligned}
b \cdot (R_n)_b + 1 &= b \cdot \frac{(b^n - 1)}{b-1} + \frac{b-1}{b-1} &(15)\\
&= \frac{b^{n+1} - b + b - 1}{b-1} &(16)\\
&= \frac{b^{n+1} - 1}{b-1} &(17)\\
&= (R_{n+1})_b. &(18)
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.2.1. *Na base 2 temos:* $2 \cdot (R_1)_2 + 1 = 2 \cdot \frac{(2^1-1)}{2-1} + \frac{2-1}{2-1} = 2 \cdot 1 + 1 = (11)_2 = (R_2)_2$ *e* $2 \cdot (R_2)_2 + 1 = 2 \cdot \frac{2^2-1}{2-1} + \frac{2-1}{2-1} = 2 \cdot 3 + 1 = (111)_2 = (R_3)_2$.

Proposição 4.2.3. Para toda base $b > 1$, duas *repunidades* consecutivas são coprimos.

Demonstração: Sejam $(R_n)_b = \frac{b^n-1}{b-1}$ e $(R_{n+1})_b = \frac{b^{n+1}-1}{b-1}$, portanto pela proposição anterior, $(R_{n+1})_b = (b \cdot R_n + 1)_b$ para todo $n > 0$.

Sabemos que dois números a,b são coprimos se $(a,b) = 1$, vejamos: $(R_n, R_{n+1})_b = (R_n, 1)_b = (1)_b$. Sendo assim, duas *repunidades* consecutivas sempre são coprimos.

Exemplo 4.2.2. *Verificando para duas repunidades da base* 3*,* $(R_{2022})_3$ *e* $(R_{2023})_3$*, o mdc entre eles é:* $(R_{2023}, R_{2022})_3 = (3 \cdot R_{2022} + 1, 1)_3 = (1)_3$.

Proposição 4.2.4. Para toda base $b > 1$, e para quaisquer $k > 0$ e $n > 0$, se n é múltiplo de k , então $(R_n)_b$ é múltiplo de $(R_k)_b$.

Demonstração: Sendo $n = kq$, temos :

$$(R_{kq})_b = \frac{b^{kq} - 1}{b-1} = \frac{(b-1) \cdot (b^{kq-1} + b^{kq-2} + ... + 1)}{(b-1)} \tag{19}$$

$$= b^{kq-1} + b^{kq-2} + ... + 1. \tag{20}$$

O que implica que é válido para qualquer base b.

Exemplo 4.2.3. *Vejamos para* $n = 3$ *e* $n = 3 \cdot 2 = 6$ *na base 5 respectivamente:* $(R_3)_5 = \frac{5^3-1}{5-1} = \frac{(5-1)\cdot(5^2+5^1+5^0)}{5-1} = 5^2 + 5^1 + 5^0$ *e* $(R_6)_5 = \frac{5^6-1}{5-1} = \frac{(5-1)\cdot(5^5+5^4+5^3+5^2+5^1+5^0)}{5-1} = 5^5 + 5^4 + 5^3 + 5^2 + 5^1 + 5^0 = 5^2 + 5^1 + 5^0 \cdot (125+1) = (R_3)_5 \cdot (1001)_5$.

Proposição 4.2.5. Para toda base $b > 1$, $(R_3)_b + b = \left[(R_2)_b\right]^2$.

Demonstração: Reescrevendo a relação em termos da base b, temos:

$$
\begin{aligned}
(R_3)_b + b &= (b^2 + b + 1) + b &(21)\\
&= b^2 + 2b + 1 &(22)\\
&= (b+1)^2. &(23)
\end{aligned}
$$

Observemos que $(R_2)_b = b+1$, então realizando a substituição na equação obtemos $(R_3)_b + b = [(R_2)_b]^2$.

Exemplo 4.2.4. *Vejamos para $b=3$ e $b=5$ respectivamente:* $(R_3)_3 + 3 = (111)_3 + 3 = (3^2+3+1)+3 = 3^2+2\cdot 3+1^2 = (3+1)^2 = (121)_3 = (11^2)_3 = [(R_2)_3]^2$ *e* $(R_3)_5+5 = (111)_5 + 5 = (5^2+5+1)+5 = 5^2+2\cdot 5+1^2 = (5+1)^2 = (121)_5 = (11^2)_5 = [(R_2)_5]^2$.

Proposição 4.2.6. Para toda base $b>1$, $(R_4)_b + 2b\cdot(R_2)_b = \Big[(R_2)_b\Big]^3$.

Demonstração: Reescrevendo a relação em termos da base b, temos:

$$\begin{aligned}
(R_4)_b + 2b\cdot(R_2)_b &= b^3+b^2+b+1+2\cdot(b+1)\cdot b && (24)\\
&= b^3+b^2+b+1+2\cdot(b^2+b) && (25)\\
&= b^3+b^2+b+1+2b^2+2b && (26)\\
&= b^3+3b^2+3b+1 && (27)\\
&= (b+1)^3. && (28)
\end{aligned}$$

Observemos que $(R_2)_b = b+1$, então realizando a substituição na equação obtemos $(R_4)_b + 2b\cdot(R_2)_b = [(R_2)_b]^3$.

Exemplo 4.2.5. *Vejamos para $b=3$ e $b=5$ respectivamente:* $(R_4)_3 + 2\cdot 3\cdot(R2)_3 = (1111)_3 + 6\cdot(11)_3 = 3^3+3^2+3+1+6\cdot(3+1) = 3^3+3\cdot 3^2+3\cdot 3+1 = (3+1)^3 = [(R_2)_3]^3$ *e* $(R_4)_5 + 2\cdot 5\cdot(R2)_5 = (1111)_5 + 10\cdot(11)_5 = 5^3+5^2+5+1+10\cdot(5+1) = 5^3+3\cdot 5^2+3\cdot 5+1 = (5+1)^3 = [(R_2)_5]^3$.

Proposição 4.2.7. Para todo $b>1$ e $n>0$, b^n+1 divide $(R_{2n})_b$.

Demonstração: Reescrevendo $(R_{2n})_b$ como produto de dois fatores, temos que:

$$\begin{aligned}
(R_{2n})_b &= \frac{b^{2n}-1}{b-1} = \frac{b^{2n}-1^{2n}}{b-1} = \frac{(b^n)^2-(1^n)^2}{b-1} && (29)\\
&= \frac{(b^n-1)\cdot(b^n+1)}{b-1} = (R_n)_b\cdot(b^n+1). && (30)
\end{aligned}$$

Exemplo 4.2.6. *Vejamos para $n=1$ e $n=2$ na base 7 respectivamente:* $(R_{2\cdot 1})_7 = (R_2)_7 = (R_1)_7\cdot(7^1+1) = (1)_7\cdot(11)_7 = (11)_7$, *se* $(11)_7$ *é fator de* $(R_2)_7$, *então ele divide* $(R_2)_7$. $(R_{2\cdot 2})_7 = (R_4)_7 = (R_2)_7\cdot(7^2+1) = (11)_7\cdot(101)_7 = (1111)_7$, *se* $(101)_7$ *é fator de* $(R_4)_7$, *então ele divide* $(R_4)_7$.

Proposição 4.2.8. Para toda base $b>1$ e $n>0$, $b^{2n}+b^n+1$ divide $(R_{3n})_b$.

Demonstração: Reescrevendo $(R_{3n})_b$ como produto de dois fatores, temos que:

$$\begin{aligned}
(R_{3n})_b &= \frac{b^{3n}-1}{b-1} = \frac{b^{3n}-1^{3n}}{b-1} && (31)\\
&= \frac{(b^n)^3-(1^n)^3}{b-1} = \frac{(b^n-1)\cdot(b^{2n}+b^n+1)}{b-1} && (32)\\
&= (R_n)_b\cdot(b^{2n}+b^n+1). && (33)
\end{aligned}$$

Exemplo 4.2.7. *Vejamos para $n = 1$ e $n = 2$ na base 7 respectivamente:* $(R_{3\cdot 1})_7 = (R_3)_7 = (R_1)_7 \cdot (7^2+7+1) = (1)_7 \cdot (57) = (1)_7 \cdot (111)_7 = (111)_7 = (R_3)_7$ *e* $(R_{3\cdot 2})_7 = (R_6)_7 = (R_2)_7 \cdot (7^4+7^2+1) = (11)_7 \cdot (10101)_7 = (1111111)_7$.

Proposição 4.2.9. Para todo $n \geq 0$, $(R_2)_{2^{2^n}}$ é um Número de Fermat na base 10.

Demonstração: Em geral $(R_2)_b = \frac{b^2-1}{b-1}$, assim:

$$(R_2)_{2^{2^n}} = \frac{(2^{2^n})^2-1}{2^{2^n}-1} = \frac{(2^{2^n})^2-1^2}{2^{2^n}-1} \tag{34}$$

$$= \frac{(2^{2^n}-1)(2^{2^n}+1)}{2^{2^n}-1} = 2^{2^n}+1. \tag{35}$$

Exemplo 4.2.8. *Vejamos para $n = 0$ e $n = 1$ respectivamente:* $(R_2)_{2^{2^0}} = (R_2)_2 = 2^1+2^0 = 2^{2^0}+1 = 3$, *3 é o primeiro número de Fermat na base decimal, e denotamos por $F_0 = 3$.* $(R_2)_{2^{2^1}} = (R_2)_4 = 4^1+4^0 = 2^{2^1}+1 = 5$, *5 é o segundo número de Fermat na base decimal, e denotamos por $F_1 = 5$.*

Proposição 4.2.10. Seja $(R_n)_{x^q}$, com $x > 1$ e $q > 0$, $(R_n)_{x^q}$ é a soma de n potências de x.

Demonstração: Pelas propriedades de potência, temos:

$$(R_n)_{x^q} = \underbrace{(x^q)^{n-1}+(x^q)^{n-2}+...+x^q+1}_{n \text{ potências}} \tag{36}$$

$$= \underbrace{(x^{n-1})^q+(x^{n-2})^q+...+x^q+1^q}_{n \text{ potências}}. \tag{37}$$

Exemplo 4.2.9. *Vejamos para $n = 2$, $n = 3$, $x^q = 2^1$ e $x^q = 3^2$ respectivamente:* $(R_2)_2 = \underbrace{2^1+2^0}_{2 \text{ potências de } x}$ *e* $(R_3)_9 = \underbrace{9^2+9^1+9^0}_{3 \text{ potências de } x}$.

Proposição 4.2.11. Para toda base $b > 1$ e $n > 0$, a diferença de $(R_{n+1})_b - (R_n)_b$ é a potência enésima de b.

Demonstração: Em geral $(R_n)_b = \frac{b^n-1}{b-1}$ e $(R_{n+1})_b = \frac{b^{n+1}-1}{b-1}$, assim:

$$(R_{n+1})_b - (R_n)_b = \frac{b^{n+1}-1}{b-1} - \frac{b^n-1}{b-1} \tag{38}$$

$$= \frac{b^{n+1}-1-b^n+1}{b-1} = \frac{b^{n+1}-b^n}{b-1} \tag{39}$$

$$= \frac{b^n \cdot (b-1)}{b-1} = b^n. \tag{40}$$

Exemplo 4.2.10. *Vejamos para $n = 1$ e $n = 2$ na base 5 respectivamente:* $(R_{1+1})_5 - (R_1)_5 = (R_2)_5 - (R_1)_5 = \frac{5^1\cdot(5-1)}{(5-1)} = 5^1$ *e* $(R_{2+1})_5 - (R_2)_5 = (R_3)_5 - (R_2)_5 = \frac{5^2\cdot(5-1)}{(5-1)} = 5^2$.

Proposição 4.2.12. Para toda base $b > 1$ e $n > 0$, a raiz enésima da diferença $(R_{n+1})_b - (R_n)_b$ é a própria base b.

Demonstração: Segue da proposição anterior que $(R_{n+1})_b - (R_n)_b = b^n$, logo:

$$\sqrt[n]{(R_{n+1})_b - (R_n)_b} = \sqrt[n]{b^n} = b. \tag{41}$$

Proposição 4.2.13. Para toda base $b > 1$ e $n > 0$, a diferença $(R_{2n+1})_b - (R_{2n})_b$ é um quadrado perfeito.

Demonstração: Em geral $(R_{2n})_b = \frac{b^{2n}-1}{b-1}$ e $(R_{2n+1})_b = \frac{b^{2n+1}-1}{b-1}$, assim:

$$\begin{aligned}
(R_{2n+1})_b - (R_{2n})_b &= \frac{b^{2n+1}-1}{b-1} - \frac{b^{2n}-1}{b-1} && (42)\\
&= \frac{b^{2n+1}-b^{2n}-1+1}{b-1} && (43)\\
&= \frac{b^{2n+1}-b^{2n}}{b-1} = \frac{b^{2n}\cdot(b-1)}{(b-1)} && (44)\\
&= b^{2n} = (b^n)^2. && (45)
\end{aligned}$$

Exemplo 4.2.11. *Vejamos para $n = 1$ e $n = 2$ na base 4 respectivamente:* $(R_{2\cdot 1+1})_4 - (R_{2\cdot 1})_4 = (R_3)_4 - (R_2)_4 = \frac{4^{2\cdot 1}\cdot(4-1)}{4-1} = 4^{2\cdot 1} = 4^2$ *e* $(R_{2\cdot 2+1})_4 - (R_{2\cdot 2})_4 = (R_5)_4 - (R_4)_4 = \frac{4^{2\cdot 2}\cdot(4-1)}{4-1} = 4^{2\cdot 2} = (4^2)^2$.

Proposição 4.2.14. Para toda base $b > 1$ e $n > 0$ um número inteiro, $b^n + b^{n-1}$ é um múltiplo de $(R_2)_b$.

Demonstração: Para $n = 1$, temos $b^1 + b^0 = b + 1 = (11)_b = (R_2)_b$. Agora admita que o resultado é válido para algum inteiro $k > 1$, ou seja, $b^k + b^{k-1} = (R_2)_b \cdot t$, com t inteiro. Vamos mostrar que o resultado é válido para $k+1$, vejamos:

$$\begin{aligned}
b^{k+1} + b^k &= b^{k+1} - b^{k-1} + b^k + b^{k-1} && (46)\\
&= b^{k-1}(b^2-1) + (R_2)_b \cdot q && (47)\\
&= (b+1)b^{k-1}(b-1) + (R_2)_b \cdot t && (48)\\
&= (R_2)_b(b^{k-1}(b-1)+t) && (49)
\end{aligned}$$

portanto $b^{k+1} + b^k = (R_2)_b \cdot q$, fazendo $q = b^{k-1}(b-1) + t$.

Exemplo 4.2.12. *Vejamos para $n = 1$ e $n = 2$ na base 6 respectivamente:* $6^1 + 6^{1-1} = 6 + 6^0 = (11)_6 = (11)_6 \cdot (1)_6 = (R_2)_6 \cdot (1)_6$ *e* $6^2 + 6^{2-1} = 6^2 + 6^1 = (110)_6 = (11)_6 \cdot (10)_6 = (R_2)_6 \cdot (10)_6$.

Proposição 4.2.15. Para toda base $b > 1$ e $n > 0$ um número inteiro, $b^{n+1} + b^n + b^{n-1}$ é um múltiplo de $(R_3)_b$.

Demonstração: Vamos provar por indução em n. A proposição é válida para $n = 1$, pois $b^2 + b^1 + b^0 = (R_3)_b$. Agora admita que o resultado é válido para algum inteiro $k > 1$, ou seja : $b^{k+1}+b^k+b^{k-1}=(R_3)_b\cdot t$, com t inteiro.Vamos mostrar que é válido para $k+1$, vejamos:

$$\begin{aligned} b^{k+2}+b^{k+1}+b^k &= b^{k+2}+b^{k+1}-b^{k-1}+b^k+b^{k-1} && (50)\\ &= b^{k-1}\cdot(b^3-1)+b^{k+1}+b^k+b^{k-1} && (51)\\ &= (b-1)b^{k-1}(b^2+b+1)+(R_3)_b\cdot t && (52)\\ &= (R_3)_b(b^{k-1}(b-1)+q). && (53) \end{aligned}$$

portanto $b^{k+2}+b^{k+1}+b^k=(R_3)_b\cdot t$, sendo $t=b^{k-1}(b-1)+q$.

Exemplo 4.2.13. *Vejamos para $n=2$ e $n=3$ na base 2 respectivamente:* $2^{2+1}+2^2+2^{2-1}=2^3+2^2+2=(1110)_2=(111)_2\cdot(10)_2=(R_3)_2\cdot(10)_2$ *e* $2^{3+1}+2^3+2^{3-1}=2^4+2^3+2^2=(11100)_2=(111)_2\cdot(100)_2=(R_3)_2\cdot(100)_2$.

Proposição 4.2.16. Para toda base $b>1$ e $n>0$, b^n divide $\left(\left(R_{n+1}\right)^n-\left(R_n\right)^n\right)_b$.

Demonstração: Reescrevendo a diferença pela divisão polinomial, temos:

$$\left(\left(R_{n+1}\right)^n-\left(R_n\right)^n\right)_b = \left(R_{n+1}-R_n\right)_b\cdot \tag{54}$$

$$\left((R_{n+1})^{n-1}+(R_{n+1})^{n-2}\cdot R_n+\cdots+R_{n+1}\cdot(R_n)^{n-2}+(R_n)^{n-1}\right)_b \tag{55}$$

O primeiro fator $\left(R_{n+1}-R_n\right)_b=b^n$, logo:

$$\left(\left(R_{n+1}\right)^n-\left(R_n\right)^n\right)_b=b^n\cdot\left((R_{n+1})^{n-1}+(R_{n+1})^{n-2}\cdot R_n+\ldots+R_{n+1}\cdot(R_n)^{n-2}+(R_n)^{n-1}\right)_b \tag{56}$$

Sendo b^n um dos fatores do produto da diferença descrita na proposição, então o mesmo é divisor de tal diferença.

Exemplo 4.2.14. *Vejamos para $n=1$, $n=2$ e $n=3$ na base decimal respectivamente:* $(R_{1+1})^1-(R_1)^1=(R_2)^1-(R1)^1=10^1\cdot(11^0\cdot1^0)$, *logo* 10^1 *é divisor da diferença* R_2-R_1. $(R_{2+1})^2-(R_2)^2=(R_3)^2-(R_2)^2=10^2\cdot(111^1+11^1)$, *logo* 10^2 *é divisor da diferença* $(R_3)^2-(R_2)^2$.$(R_{3+1})^3-(R_3)^3=(R_4)^3-(R_3)^3=10^3\cdot[1111^2+(1111\cdot111)+111^2]$, *logo* 10^3 *é divisor da diferença* $(R_4)^3$ - $(R_3)^3$.

Proposição 4.2.17. Para toda base $b>1$ ímpar e $n>0$, $(R_{2n})_b$ é par na base 10.

Demonstração: Vamos provar por indução sobre n. Seja $b=2q+1$, com $q>0$, temos então que b é ímpar e maior que 1.

Primeiro Passo - Para n = 1

$$(R_{(2\cdot 1)})_{2q+1} = (R_2)_{2q+1} = \frac{(2q+1)^2-1^2}{(2q+1)-1} \tag{57}$$

$$= \frac{\Big((2q+1)+1\Big)\cdot\Big((2q+1)-1\Big)}{2q} = \frac{(2q+2)\cdot(2q)}{2q} \tag{58}$$

$$= 2q+2 = 2\cdot(q+1). \tag{59}$$

Segundo Passo - Hipótese De Indução - Para n = k

$$(R_{2k})_{2q+1} = (2x)_{10},\ para\ x\ inteiro.$$

Devemos mostrar que é verdadeiro:

$$(R_{2(k+1)})_{2q+1} = 2x \tag{60}$$

$$(R_{2(k+1)})_{2q+1} = \frac{(2q+1)^{2(k+1)}-1}{(2q+1)-1} \tag{61}$$

$$= \frac{(2q+1)^{2k}\cdot(2q+1)^2-1}{2q} - (2q+1)^2+(2q+1)^2 \tag{62}$$

$$= \frac{(2q+1)^2\cdot\Big((2q+1)^{2k}-1\Big)}{2q} + \frac{(2q+1)^2-1}{2q} \tag{63}$$

$$= (2q+1)^2\cdot 2x + 2\cdot(q+1) \tag{64}$$

$$= 2\cdot\Big((2q+1)^2\cdot x+(q+1)\Big). \tag{65}$$

Fato este que demonstra o que queríamos.

Exemplo 4.2.15. *Vejamos para $b=3$ e $b=5$, ambos para $n=2$ respectivamente: $(R_4)_3 = 3^3+3^2+3+1 = 40 = 2\cdot 20$, logo é par. $(R_4)_5 = 5^3+5^2+5+1 = 156 = 2\cdot 78$, logo é par.*

Proposição 4.2.18. Se b é par, então qualquer *repunidade* pode ser escrita como a soma de dois inteiros consecutivos.

Demonstração: Queremos provar que $(R_n)_{2k} = a+c$, tal que $c-a=1$, com $n>0$, $k>0$ e $a,c \in Z$. Seja a $= \frac{b}{2}\cdot\frac{b^n-1}{b-1}$ *e* $c = \frac{b}{2}\cdot\frac{b^n-1}{b-1}+1$

1 - Primeiro vamos mostrar que a e c são inteiros:

$$Seja\ a = \frac{b}{2}\cdot\frac{b^n-1}{b-1} \tag{66}$$

Sendo $b=2k$, com $k>0$, temos que:

$$a = \frac{2k}{2}\cdot\frac{b^n-1}{b-1} = k\cdot(R_n)_b. \tag{67}$$

Sendo $k>0$ *e* $(R_n)_b$ um inteiro não negativo, e sabendo que a multiplicação é fechada nos inteiros , temos que:

$$a = k\cdot(R_n)_b = t \tag{68}$$

tal que t é um inteiro não negativo.

De maneira análoga, temos que:

$$Seja\ c = \frac{2k}{2} \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} + 1 = k \cdot (R_n)_b + 1 = t + 1 \tag{69}$$

Sendo c a soma de dois inteiros não negativos, temos que c é um inteiro não negativo, pois a soma é fechada nos inteiros.

2 - Vamos mostrar que a e c são consecutivos.

Se $a = t\ e\ c = t + 1$, então $c - a = (t + 1) - t = 1$, como queríamos mostrar.

3 - Vamos mostrar que sua soma é uma *repunidade*.

$$\begin{aligned} a + c &= \frac{b}{2} \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} + \frac{b}{2} \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} + 1 && (70) \\ &= \frac{2b}{2} \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1 + 1} && (71) \\ &= b \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} + 1 && (72) \\ &= (R_{n+1})_b. && (73) \end{aligned}$$

Exemplo 4.2.16. *Vejamos para* $b = 2$, $n = 1$, $n = 2$ *e* $n = 3$ *respectivamente:* $(R_1)_2 = (1)_2 = (0)_2 + (1)_2$, $(R_2)_2 = (11)_2 = (1)_2 + (10)_2$ *e* $(R_3)_2 = (111)_2 = (11)_2 + (100)_2$.

Para finalizar esse subcapítulo, apresentamos um resultado que estabelece uma relação entre os números *repunidades* e os números suavemente ondulante.

Proposição 4.2.19. (DOMINGUES,1991, Problema 53) Mostre que $(111)_b \mid (10101)_b$ para todo $b > 1$. Escreva o quociente da divisão em termos da base b.

Demonstração: Reescrevendo os dois números em termos da base b, temos que:

$$(10101)_b = b^4 + b^2 + 1\ e\ (111)_b = b^2 + b + 1,\ assim: \tag{74}$$

$$(b^4 + b^2 + 1) = (b^2 + b + 1) \cdot (b^2 - b + 1) + 0 \tag{75}$$

$$(111)_b\ divide\ (10101)_b. \tag{76}$$

4.3 Um Resultado na Base Nonária

Proposição 4.3.1. Toda *repunidade* na base 9 é um número triangular.

Demonstração: De maneira geral, uma *repunidade* na base 9, com $n > 0$, pode ser escrita da forma:

$$(R_n)_9 = \frac{9^n - 1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{2n} - 1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3^n)^2 - 1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^n - 1}{2} \cdot \frac{3^n + 1}{2} = \frac{\frac{3^n - 1}{2} \cdot \frac{3^n + 1}{2}}{2}. \tag{77}$$

Seja $a = \frac{3^n-1}{2}$ e $b = \frac{3^n+1}{2}$.

1 - Vamos mostrar que a e b são inteiros.

$$a = \frac{3^n-1}{2} = \frac{2 \cdot q}{2} = q, \tag{78}$$

tal que q = a é um inteiro.

$$b = \frac{3^n+1}{2} = \frac{3^n-1}{2} + \frac{2}{2} = q+1, \tag{79}$$

tal que b é um inteiro, pois a a soma de dois inteiros é um inteiro, mostrando o que queríamos.

2 - Vamos mostrar que a e b são consecutivos.

$$b-a = \frac{3^n+1}{2} - \frac{3^n-1}{2} = \frac{3^n-3^n+1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1, \tag{80}$$

portanto são consecutivos como queríamos mostrar.

3 - Vamos mostrar que qualquer *repunidade* na base 9 é um número triangular.

Sabendo que $b-a=1$, então $b=a+1$, logo substituindo a em $(R_n)_9$, temos:

$$(R_n)_9 = \frac{\frac{3^n-1}{2} \cdot \frac{3^n+1}{2}}{2} = \frac{a \cdot (a+1)}{2} \; com \; a \in N. \tag{81}$$

Provando que qualquer *repunidade* na base 9 é um número triangular.

Exemplo 4.3.1. *Vejamos os dois primeiros casos de repunidade na base 9, para* $n=1$ *e* $n=2$ *respectivamente:* $(R_1)_9 = \frac{\frac{3^1-1}{2} \cdot \frac{3^1+1}{2}}{2} = \frac{\frac{2}{2} \cdot \frac{4}{2}}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2}$ *e* $(R_2)_9 = \frac{\frac{3^2-1}{2} \cdot \frac{3^2+1}{2}}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2}$*, que de fato são números triangulares por definição.*

5 PROPOSTA DE ATIVIDADES

Neste capítulo apresentamos cinco propostas de atividades sobre as *repunidades*, motivados pelo trabalho de Toumasis (1994). Como já descrito no segundo capítulo, a estrutura de formulação e respostas dos problemas propostos é pautada pelo Método de Resolução de Problemas de Polya (1995), e pela BNCC (BRASIL, 2018) enquanto objetivos e competências a serem alcançados por meio da resolução dos problemas apresentados neste. Nos problemas de nível fundamental, citamos as unidades temáticas e as habilidades relacionadas, já nos problemas de nível médio citamos apenas as competências relacionadas. As unidades temáticas, habilidades e competências da BNCC (BRASIL, 2018) utilizadas estão descritas no capítulo 2.

5.1 Problema 1

Nível: Ensino Fundamental e Ensino Médio;

Unidades Temáticas do Ensino Fundamental Relacionadas: Números e Álgebra;

Habilidades do Ensino Fundamental Relacionadas: (EF06MA01), (EF06MA02), (EF06MA03), (EF06MA04), (EF07MA01), (EF07MA03), (EF08MA01), (EF07MA13), (EF07MA14), (EF07MA16), (EF08MA06) e (EF08MA11).

Competências do Ensino Médio Relacionadas: Competência 3 e Competência 4.

1 - Considere o número $(R_n)_b = \underbrace{(11..11)_b}_{n\ algarismos} = \frac{b^n-1}{b-1}$, para todo $b > 1$ e $n \geq 1$.

(a) Mostre que $R_{n+1} - R_n = 10^n$, para todo $n \geq 1$.

Uma proposta de resolução:

1ª Etapa - Compreensão do Problema

* O que se procura? Qual é a incógnita?

-Devemos mostrar que $R_{n+1} - R_n = 10^n$, para todo $n > 0$.

* Quais são os dados?

$$R_{n+1} = \underbrace{11..11}_{n+1\ algarismos} \text{ e } R_n = \underbrace{11..11}_{n\ algarismos}.$$

* Qual é a condicionante ? O que pode influenciar a incógnita?

- As potências de dez obtidas pela diferença.

2ª - Etapa - Estabelecimento de um Plano

Um primeiro passo interessante seria verificar alguns casos particulares, para $n = 1, 2, 3...$

$$R_2 - R_1 = 11 - 1 = 10^1; \tag{82}$$

$$R_3 - R_2 = 111 - 11 = 10^2; \tag{83}$$

$$R_4 - R_3 = 1111 - 11 = 10^3. \tag{84}$$

$$R_{n+1} - R_n = 10^n, \text{é possível?} \tag{85}$$

3ª Etapa - Execução do Plano

Sabemos que $R_n = \frac{10^n - 1}{9}$, assim:

$$\begin{aligned} R_{n+1} - R_n &= \frac{10^{n+1} - 1}{9} - \frac{10^n - 1}{9} && (86) \\ &= \frac{10^{n+1} - 1 - 10^n + 1}{9} = \frac{10^{n+1} - 10^n}{9} && (87) \\ &= \frac{10^n \cdot (10 - 1)}{9} = 10^n = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 ... 10 \cdot 10}_{n \ vezes}. && (88) \end{aligned}$$

4ª Etapa - Retrospecto

A definição de potência de expoente natural é o resultado da multiplicação de um número por si mesmo uma certa quantidade de vezes, e é justamente isso que vimos na 3ª Etapa.

(b) Mostre que $(R_{n+1})_b - (R_n)_b = b^n$, para todo $b > 1$ e $n \geq 1$.

Uma proposta de resolução:

1ª Etapa - Compreensão do Problema

* O que se procura? Qual é a incógnita?

- Devemos mostrar que $(R_{n+1})_b - (R_n)_b = b^n$, para todo $n \geq 1$.

* Quais são os dados?

$$(R_{n+1})_b = \underbrace{(11..11)_b}_{n+1 \ algarismos} \text{ e } (R_n)_b = \underbrace{(11..11)_b}_{n \ algarismos}.$$

* Qual é a condicionante? O que pode influenciar a incógnita?

- A enésima potência de b obtida pela diferença.

2ª Etapa - Estabelecimento de um Plano

Um passo interessante é verificar alguns casos particulares, para $n = 1,2,3,...$

$$(R2)_b - (R1)_b = (11)_b - (1)_b = (10)_b = b^1 \cdot 1 + b^0 \cdot 0 = b; \tag{89}$$

$$(R3)_b - (R2)_b = (111)_b - (11)_b = (100)_b = b^2 \cdot 1 + b^1 \cdot 0 + b^0 \cdot 0 = b^2; \tag{90}$$

$$(R4)_b - (R3)_b = (1111)_b - (111)_b = (1000)_b = b^3 \cdot 1 + b^2 \cdot 0 + b^1 \cdot 0 + b^0 \cdot 0 = b^3. \tag{91}$$

$$(R_{n+1})_b - (R_n)_b = b^n, \text{é possível?} \tag{92}$$

3ª Etapa - Execução do Plano

Sabemos que $(R_n)_b = \frac{b^n-1}{b-1}$, assim:

$$\begin{aligned}
(R_{n+1})_b - (R_n)_b &= \frac{b^{n+1}-1}{b-1} - \frac{b^n-1}{b-1} && (93)\\
&= \frac{b^n-1-b^n+1}{b-1} = \frac{b^{n+1}-b^n}{b-1} && (94)\\
&= \frac{b^n \cdot (b-1)}{b-1} = b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b....b \cdot b}_{n\ vezes}. && (95)
\end{aligned}$$

4ª Etapa - Retrospecto

Assim como na letra a, temos que a definição de potência de expoente natural é o resultado da multiplicação de um número por si mesmo uma certa quantidade de vezes, e é justamente isso que vimos na 3ª Etapa.

5.2 Problema 2

Nível : Ensino Fundamental e Ensino Médio;

Unidade Temáticas do Ensino Fundamental Relacionadas: Números e Álgebra;

Habilidades do Ensino Fundamental Relacionadas: (EF06MA01), (EF06MA02), (EF06MA04), (EF06MA05), (EF07MA03), (EF07MA04), (EF08MA01), (EF07MA13), (EF07MA15), (EF08MA06) e (EF09MA09).

Competências do Ensino Médio Relacionadas: Competência 3 e Competência 5.

2 - Considere os números $(R_{2n+1})_b = \underbrace{(11..11)_b}_{2n+1\ algarismos} = \frac{b^{2n+1}-1}{b-1}$ e $(R_{2n})_b = \underbrace{(11..11)_b}_{2n\ algarismos} = \frac{b^{2n}-1}{b-1}$, para todo $b > 1$ e $n \geq 1$.

(a) Mostre que $R_{2n+1} - R_{2n}$ é um quadrado perfeito, para todo $n \geq 1$.

Uma proposta de resolução:

1ª Etapa - Compreensão do Problema

∗ O que se procura? Qual é a incógnita?

− Devemos mostrar que $R_{2n+1} - R_{2n} = x^2$, para algum x natural.

∗ Quais são os dados?

$$R_{2n+1} = \underbrace{11..11}_{2n+1\ algarismos} \quad \text{e } R_{2n} = \underbrace{11..11}_{2n\ algarismos}.$$

∗ Qual é a condicionante? O que pode influenciar a incógnita?

− O quadrado perfeito obtido pela diferença.

2ª Etapa - Estabelecimento de um Plano

Observemos que:

$$R_{2n+1} = \underbrace{11..11}_{2n+1\ algarismos} \quad e\ R_{2n} = \underbrace{11..11}_{2n\ algarismos}.$$

Uma boa estratégia é testar alguns casos particulares, para $n = 1,2,3,...$

$$R_3 - R_2 = 111 - 11 = 100 = 10^2; \tag{96}$$

$$R_5 - R_4 = 11111 - 1111 = 1000 = 10^4; \tag{97}$$

$$R_7 - R_6 = 1111111 - 111111 = 1000000 = 10^6. \tag{98}$$

$$R_{2n+1} - R_{2n} = 10^{2n}.\text{Como determinar essa relação?} \tag{99}$$

3ª Etapa - Execução do Plano

Sabemos que $R_n = \frac{10^n - 1}{9}$, assim:

$$\begin{aligned} R_{2n+1} - R_{2n} &= \frac{10^{2n+1} - 1}{9} - \frac{10^{2n} - 1}{9} && (100)\\ &= \frac{10^{2n+1} - 1 - 10^{2n} + 1}{9} = \frac{10^{2n+1} - 10^{2n}}{9} && (101)\\ &= \frac{10^{2n} \cdot (10-1)}{9} = 10^{2n} = (10^n)^2. && (102) \end{aligned}$$

4ª Etapa - Retrospecto

Note que a definição de quadrado perfeito afirma que um número natural y é quadrado perfeito, se existe x, tal que $x^2 = y$. Veja que, se o expoente de um número for par, então ele é um quadrado perfeito, pois $x^{2k} = (x^k)^2$.

(b) Mostre que $(R_{2n+1})_b - (R_{2n})_b$ é um quadrado perfeito, para todo $b > 1$ e $n \geq 1$.

Uma proposta de resolução:

1ª Etapa - Compreensão do Problema

∗ O que se procura? Qual é a incógnita?

− Devemos mostrar que $(R_{2n+1})_b - (R_{2n})_b = (x^2)_b$, para algum x natural.

$*$ Quais são os dados?

$$(R_{2n+1})_b = \underbrace{(11..11)_b}_{2n+1\ algarismos} \quad e\ (R_{2n})_b = \underbrace{(11..11)_b}_{2n\ algarismos}.$$

$*$ Qual é a condicionante? O que pode influenciar a incógnita?

$-$ Os quadrados perfeitos obtidos pela diferença.

2ª Etapa - Estabelecimento de um Plano

Observemos que:

$$(R_{2n+1})_b = \underbrace{(11..11)_b}_{2n+1\ algarismos} \quad e\ (R_{2n})_b = \underbrace{(11..11)_b}_{2n\ algarismos}.$$

Uma boa estratégia, será realizar alguns testes em casos particulares, para $n = 1, 2, 3...$ Vejamos alguns casos:

$$(R_3)_b - (R_2)_b = (111)_b - (11)_b = (100)_b = (10^2)_b; \tag{103}$$

$$(R_5)_b - (R_4)_b = (11111)_b - (1111)_b = (1000)_b = (100^2)_b = (10^4)_b; \tag{104}$$

$$(R_7)_b - (R_6)_b = (1111111)_b - (111111)_b = (1000000)_b = (1000^2)_b = (10^6)_b. \tag{105}$$

$$(R_{2n+1})_b - (R_{2n})_b = (10^{2n})_b.\text{Como determinar essa relação?} \tag{106}$$

3ª Etapa - Execução do Plano

Sabemos que $(R_n)_b = \frac{b^n-1}{b-1}$, assim:

$$(R_{2n+1})_b - (R_{2n})_b = \frac{b^{2n+1}-1}{b-1} - \frac{b^{2n}-1}{b-1} \tag{107}$$

$$= \frac{b^{2n+1}-1-b^{2n}+1}{b-1} = \frac{b^{2n+1}-b^{2n}}{b-1} \tag{108}$$

$$= \frac{b^{2n}\cdot(b-1)}{b-1} = b^{2n} = (b^n)^2. \tag{109}$$

4ª Etapa - Retrospecto

Note que a definição de quadrado perfeito aplicado em $b > 1$, nos diz que um número natural $(y)_b$ é quadrado perfeito, se existe $(x)_b$, tal que $(x^2)_b = (y)_b$. Veja que, se o expoente de um número for par, então ele é um quadrado perfeito, pois $(x^{2k})_b = [(x^k)^2]_b$, como visto na 3ª etapa.

5.3 Problema 3

Nível: Ensino Médio;

Competências do Ensino Médio Utilizadas: Competência 3 e Competência 5.

3 - Mostre que qualquer *repunidade* pode ser escrita como a soma de dois inteiros consecutivos, se sua base é par.

1ª Etapa - Compreensão do Problema

* O que devemos mostrar? Qual é a incógnita?

- Devemos mostrar que $(R_k)_{2n} = x + y$, tal que $y - x = 1$, com $(k, n) > 0$ e (x, y) pertencente aos inteiros.

* Quais são os dados?

$$(R_k)_{2n} = x + y,\ tal\ que\ y - x = 1.$$

* Qual é a condicionante? O que pode influenciar a incógnita?

- Os números inteiros consecutivos x e y, tal que $(R_k)_{2n} = x + y$.

2ª Etapa - Estabelecimento de um Plano

Vamos testar alguns casos particulares

$$(R_1)_{2\cdot 1} = (0+1)_2 = (1)_2; \tag{110}$$

$$(R_2)_{2\cdot 2} = (2+3)_4 = (11)_4; \tag{111}$$

$$(R_3)_{2\cdot 3} = (33+34)_6 = (111)_6; \tag{112}$$

$$(R_5)_{2\cdot 4} = (4444+4445)_8 = (11111)_8. \tag{113}$$

$$\text{Portanto}, (R_k)_{2n} = x + y, \text{tal que } y - x = 1, \text{é verdade?} \tag{114}$$

3ª Etapa - Execução do Plano

Seja $x = \frac{b}{2} \cdot \frac{b^k - 1}{b - 1}$ e $y = \frac{b}{2} \cdot \frac{b^k - 1}{b - 1} + 1$.

Primeiro iremos mostrar que x e y são inteiros.

Por hipótese $b = 2n$, com $n > 0$, logo:

$x = \frac{2 \cdot n}{2} \cdot (R_k)_{2n} = n \cdot (R_k)_{2n}$. n é um número natural e $(R_k)_{2n}$ também é, como a multiplicação é fechada nos naturais, então $x = n \cdot (R_k)_{2n}$ é natural, logo x é inteiro.

Seguindo o mesmo raciocínio, temos que y é igual à:

$$y = n \cdot (R_k)_{2n} + 1. \tag{115}$$

Como $n \cdot (R_k)_{2n}$ é natural e 1 também é natural, logo $n \cdot (R_k)_{2n} + 1$ é natural, visto que a adição nos naturais é fechada, e por fim temos então que se $y = n \cdot (R_k)_{2n} + 1$ é natural, então y é inteiro. Portanto provamos que x e y são inteiros. Agora iremos mostrar que x e

y são números consecutivos.

$$y-x = \frac{b}{2}\cdot\frac{b^k-1}{b-1}+1-\frac{b}{2}\cdot\frac{b^k-1}{b-1} \quad (116)$$
$$= \frac{b}{2}\cdot\frac{b^k-1}{b-1}-\frac{b}{2}\cdot\frac{b^k-1}{b-1}+1=1. \quad (117)$$

Se a diferença entre dois números é 1, então esses números são consecutivos.

Por fim iremos mostrar que a soma de $x+y$ é uma *repunidade*.

$$x+y = \frac{b}{2}\cdot\frac{b^k-1}{b-1}+(\frac{b}{2}\cdot\frac{b^k-1}{b-1}+1) \quad (118)$$
$$= 2\cdot(\frac{b}{2}\cdot\frac{b^k-1}{b-1})+1=b\cdot\frac{b^k-1}{b-1}+1 \quad (119)$$
$$= \frac{b^{k+1}-b}{b-1}+1=\frac{b^{k+1}-b+b-1}{b-1} \quad (120)$$
$$= \frac{b^{k+1}-1}{b-1}=(R_{k+1})_b. \quad (121)$$

4ª Etapa - Retrospecto

Observe que queríamos mostrar que qualquer *repunidade* em uma base par pode ser escrita como a soma de dois inteiros consecutivos, e foi isso que mostramos na 3ª etapa.

5.4 Problema 4

Nível: Ensino Médio;

Competências do Ensino Médio Relacionadas: Competência 3 e Competência 4.

4 - Considere os números $(R_n)_b = \underbrace{(11..11)_b}_{n\ algarismos} = \frac{b^n-1}{b-1}$ e $(R_{n+1})_b = \underbrace{(11..11)_b}_{n+1\ algarismos} = \frac{b^{n+1}-1}{b-1}$, para todo $b>1$ e $n>0$.

(a) Mostre que $log(R_{n+1}-R_n)=n$, para todo $n>0$.

Uma proposta de resolução:

1ª Etapa - Compreensão do Problema

* O que devemos mostrar? Qual é a incógnita?

- Devemos mostrar que $log(R_{n+1}-R_n)=n$, para todo $n>0$.

* Quais são os dados?

$$R_{n+1} = \underbrace{11..11}_{n+1\ algarismos} \quad e R_n = \underbrace{11.11}_{n\ algarismos}.$$

* Qual é a condicionante? O que pode influenciar a incógnita?

- O logaritmo natural obtido dessa relação.

2ª Etapa - Estabelecimento de um problema

Observemos que o logaritmo de um número b, na base a, é o expoente c ao qual é potência de a para resultar no valor b. Podemos representar um logaritmo simbolicamente como sendo:

$log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$, em que a = base , b = logaritmando ou argumento e c = logaritmo.

Sabendo a definição de logaritmo, um possível caminho para a solução é testar alguns casos particulares, para $n = 1, 2, 3, ...$

$$log(R_2 - R_1) = log(11 - 1) = log(10) = 1; \tag{122}$$

$$log(R_3 - R_2) = log(111 - 11) = log(100) = 2; \tag{123}$$

$$log(R_4 - R_3) = log(1111 - 111) = log(1000) = 3. \tag{124}$$

$$log(R_{n+1} - R_n) = n, \text{ é possível?} \tag{125}$$

3ª Etapa - Execução do Plano

Sabemos que $R_n = \frac{10^n - 1}{9}$, assim:

$$R_{n+1} - R_n = \frac{10^{n+1} - 1}{9} - \frac{10^n - 1}{9} \tag{126}$$

$$= \frac{10^{n+1} - 10^n}{9} = \frac{10^n \cdot (10 - 1)}{9} = 10^n. \tag{127}$$

Portanto, chegamos a conclusão de que $log(R_{n+1} - R_n) = log(10^n) = n$, por definição.

4ª Etapa - Retrospecto

Observemos que $R_{n+1} - R_n = 10^n$ e $log(10^n) = n$, por definição, portanto nosso problema está provado como queríamos.

(b) Mostre que $log_b\Big((R_{n+1})_b - (R_n)_b\Big) = n$, para todo $b > 1$ e $n > 0$.

Uma proposta de resolução:

1ª Etapa - Compreensão do Problema

* O que devemos mostrar? Qual é a incógnita?

- Devemos mostrar que $log_b\Big((R_{n+1})_b - (R_n)_b\Big) = n$, para todo $n > 0$.

* Quais são os dados?

$$(R_{n+1})_b = \underbrace{(11..11)_b}_{n+1\ algarismos} \quad e \ (R_n)_b = \underbrace{(11..11)_b}_{n\ algarismos}.$$

* Qual é a condicionante? O que pode influenciar a incógnita?

- O logaritmo natural obtido dessa relação.

2ª Etapa - Estabelecimento de um Plano.

Observemos que o logaritmo de um número b, na base a, é o expoente c ao qual é potência de a para resultar no valor b. Podemos representar um logaritmo simbolicamente como sendo:

$log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$, em que a = base , b = logaritmando ou argumento e c = logaritmo.

Sabendo a definição de logaritmo, outro passo interessante é testar alguns casos particulares, para $n = 1,2,3,...$

$$log_b([R_2]_b - [R_1]_b) = log_b([b+1]-1) = log_b(b) = 1; \tag{128}$$

$$log_b([R_3]_b - [R_2]_b) = log_b([b^2+b+1]-[b+1]) = log_b(b^2) = 2; \tag{129}$$

$$log_b([R_4]_b - [R_3]_b) = log_b([b^3+b^2+b+1]-[b^2+b+1]) = log_b(b^3) = 3. \tag{130}$$

$$log_b([R_{n+1}]_b - [R_n)_b] = n, \text{é possível determinar?} \tag{131}$$

3ª Etapa - Execução do Plano

Sabemos que $(R_n)_b = \frac{b^n-1}{b-1}$, assim:

$$(R_{n+1})_b - (R_n)_b = \frac{b^{n+1}-1}{b-1} - \frac{b^n-1}{b-1} \tag{132}$$

$$= \frac{b^{n+1}-b^n}{b-1} = \frac{b^n \cdot (b-1)}{b-1} = b^n. \tag{133}$$

Portanto, chegamos a conclusão de que $log_b\Big([R_{n+1}]_b - [R_n]_b\Big) = log_b(b^n) = n$, por definição.

4ª Etapa - Retrospecto

Observemos que $[R_{n+1}]_b - [R_n]_b = b^n$ e $log(b^n) = n$, por definição, portanto nosso problema está provado como queríamos.

5.5 Problema 5

Nível: Ensino Médio;

Competências do Ensino Médio Relacionadas: Competência 3 e Competência 5.

Na base decimal um número de Fermat é um número da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$, para $n \geq 0$. Os três primeiro números Fermat, são: $3, 5, 17$, respectivamente para $n = 0, 1, 2$.

5 - Seja $(R_2)_b$, determinar b, tal que $(R_2)_b$ seja um número de Fermat na base decimal.

Uma proposta de resolução:

1ª Etapa - Compreensão do Problema

* O que devemos mostrar? Qual é a incógnita?

- Devemos mostrar que $(R_2)_b$ é um número de Fermat na base decimal.

* Quais são os dados?

- $F_n = 2^{2^n} + 1$ e $(R_2)_b$, para $b > 1$ e $n \geq 0$.

* Qual é a condicionante?

- Os número de Fermat obtidos da relação com $(R_2)_b$.

2ª e 3ª Etapas - Estabelecimento e Execução do Plano.

Como $(R_2)_b = 1 \cdot b + 1$. Queremos determinar b , tal que $1 \cdot b + 1 = 1 \cdot 2^{2^n} + 1$.

4ª Etapa - Retrospecto

Portanto, concluímos que a única solução possível é a base $b = 2^{2^n}$, para todo $n \geq 0$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos nosso estudo acerca dos números *repunidades* em uma base $b > 1$, atentos para possíveis aplicações dos resultados obtidos, seja no contexto de ensino ou em outras áreas de conhecimento. Para além dos resultados obtidos, buscamos elaborar cinco propostas de atividades para a educação básica abrangendo os números *repunidades*, pautando-as pelo Método de Resolução de Problemas de Polya (1992) e pela BNCC (BRASIL, 2018).

Quanto aos objetivos estabelecidos para nosso estudo-pesquisa, generalizamos algumas propriedades existentes das *repunidades* na base decimal para uma base $b > 1$. Com o resultado dos nossos estudos na temática, elucidamos que é provável a existência de novos resultados das *repunidades* que possam vir a ser determinados no futuro.

Os problemas propostos tem como objetivo apresentar e incentivar os estudantes da educação básica a estudarem Matemática por meio da resolução de problemas, tendo como objeto de estudo as *repunidades*. Uma vez que os mesmos consigam resolvê-los, espera-se que também sejam capazes de resolver problemas fora do escopo das *repunidades*. Desta maneira, buscamos mostrar uma estratégia para o ensino de Matemática por meio da resolução de problemas na educação básica, com enfoque nos níveis de escolaridade dos anos finais do ensino fundamental e ensino médio.

Esse estudo é justificado por dois fatores, sendo o primeiro o incentivo ao estudo da Matemática por meio da Resolução de Problemas dos números *repunidades*, além do fato que essa pesquisa possui aplicabilidade que pode ser de interesse em outras áreas de pesquisas, uma vez que os resultados fazem parte do espectro da Teoria dos Números, que por sua vez possui aplicabilidade em outras áreas de conhecimento.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quartos ciclos: Matemática. Brasília: MEC/SEF,1998.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEM, 2000.

CARVALHO, Fernando Soares.; COSTA, Eudes Antonio. Um Passeio pelos Números Ondulantes. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v.8, n. 2, p. e3001, 2022. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/6043. Acesso em : 15 outubro 2022.

CARVALHO, Fernando Soares; COSTA, Eudes Antonio. Escrever o Número $111\cdots111$ como Produto de Dois Números. **Revista do Professor de Matemática**, 87, 2015. Disponível em : https://rpm.org.br/cdrpm/87/36.html. Acesso em : 05 maio 2022.

COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas Catulio. Números Repunidades: algumas propriedades e resolução de problemas. **Professor de Matemática on-line**, Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática, v.8, n.4, p.495-503, 2020.

COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas Catulio. Algumas Propriedades dos Números Monodígitos e Repunidades. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.2, p.47-58, 2022.

COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Ronaldo Antonio. Número de Ball Generalizados. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v.7, p. 61-85, 2022.

DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de Aritmética**. 1. ed. São Paulo: Atual Editora LTDA, 1991. 297 p.

DOMINGUES, José Sérgio; BENTO, Francielly Dos Santos; SILVA, Tabatha Helena. **Introdução à Álgebra Elementar**. 1. ed. Formiga: IFMG Campus Formiga, 2016. 170 p.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. 286 p.

HEFEZ, Abramo. **Iniciação à Aritmética**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009. 127 p.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MUKARAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar, 2: Logaritmos**. 10. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013. 218 p.

LEITE, Paulo Ferreira. Números de Fermat. **Revista Professor de Matemática 07**, São Paulo - SP, 2015. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/7/5.htm. Acesso em : 10 novembro de 2022.

MAIER, Rudolf Richard. **Teoria dos Números**. 1. ed. Brasília: Universidade de Brasília-Departamento de Matemática-IE, 2005. 135 p.

OLER, Juliano Gonçalves. **Matemática Elementar**. 1. ed. Uberlândia, MG: UFU, 2012. 173 p.

ONUCHIC, Lourdes De La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema-Mathematics Education Bulletin**, p. 73-98, 2011.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência Ltda, 1995, 196p. Título original : "How to Solve It"A New Aspect of Mathematical Method.

PONTES, Edel Alexandre Silva. Método de Polya para Resolução de Problemas Matemáticos: Uma Proposta Metodológica para o Ensino e Aprendizagem de Matemática na Educação Básica. **HOLOS**, v. 3, p. 1-9, 2019.

QUADROS-FLORES, Paula Maria; MASCARENHAS, Daniela; MACHADO, Manuela. O Método de Polya e a Gamificação como Estratégias na Resolução de Problemas. **Revista Practicum**, v. 5, n. 2, p. 47-64, 2020.

RODRIGUES, Adriano; MAGALHÃES, Shirlei Cristina. A Resolução de Problemas nas Aulas de Matemática: diagnosticando a prática pedagógica THE TROUBLESHOOTING IN THE LESSONS OF MATHEMATICS: diagnosing the pedagogical practice. **Dia a Dia Educação, Secretaria Estadual de Educação do Paraná**, Curitiba, v.1, n.1. Setembro, 2012. Disponível em: `http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_rodrigues_magalhaes.pdf`. Acesso em : 05 abril 2022.

SANTOS, Douglas Catulio dos. **Números Repunits: uma abordagem a partir da resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Tocantins, Mestrado Profissional em Matemática - ProfMat, Arraias, 2019. Disponível em : `http://repositorio.uft.edu.br/handle/11612/2033`. Acesso em : 11 março 2021.

SNYDER, William M. Factoring Repunits. **The American Mathematical Monthly**, v. 89, n. 7, p. 462-466, 1982.

TOUMASIS, Charalampos. Exploring Repunits. **School Science and Mathematics**, v.94, n.3, p.142-145, 1994.

YATES, Samuel. The Mystique of Repunits. **Mathematics Magazine**, v.51, pg.22-28, 1978. Disponível em: `https://doi.org/10.1080/0025570X.1978.11976671`. Acesso em: 22 de junho 2022.

ZORZAN, Adriana Sales Loss. Ensino - Aprendizagem: Algumas tendências na educação matemática. **Revista de Ciências Humanas**, v.8, n.10, p.77-94, 2007.