



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

JAIROMAR DE ARAÚJO SOBRINHO

A GEOMETRIA FRACTAL NA CONSTRUÇÃO DE FIGURAS PLANAS
ENVOLVENDO PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

PALMAS (TO)

2024

JAIROMAR DE ARAÚJO SOBRINHO

**A GEOMETRIA FRACTAL NA CONSTRUÇÃO DE FIGURAS PLANAS
ENVOLVENDO PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário.

PALMAS (TO)

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S677g Sobrinho, Jaiomar de Araújo.
A Geometria Fractal na Construção de Figuras Planas envolvendo
Progressões Geométricas. / Jaiomar de Araújo Sobrinho. – Palmas, TO, 2024.
137 f.
Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins
– Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado)
Profissional em Matemática, 2024.
Orientadora : Hellena Christina Fernandes Apolinário
1. Geometria Fractal. 2. Progressões Geométricas. 3. Ensino de
Matemática. 4. Geogebra. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer
forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte.
A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184
do Código Penal.

**Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da
UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).**


JAIROMAR DE ARAÚJO SOBRINHO

A GEOMETRIA FRACTAL NA CONSTRUÇÃO DE FIGURAS PLANAS ENVOLVENDO
PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS


Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, foi avaliada para obtenção do título de Mestre e aprovada em sua forma final pela Orientadora e Banca Examinadora.

Data de Aprovação: 26/08/2024


Banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
 HELLENA CHRISTINA FERNANDES APOLINÁRIO
Data: 28/08/2024 13:09:57-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. Dra. Hellen Christina Fernandes Apolinário
Orientadora - UFT/PALMAS

Documento assinado digitalmente
 ROGERIO AZEVEDO ROCHA
Data: 28/08/2024 14:18:44-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha
Membro Interno - UFT/PALMAS

Documento assinado digitalmente
 JOSE ELIAS DOS SANTOS FILHO
Data: 28/08/2024 16:50:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Elias dos Santos Filho
Membro Externo - UFPB/CCAE - Campus IV

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por mais esta conquista, pela proteção e amor. Sou grato pela Tua presença constante que me conduz firme, iluminando e protegendo os caminhos da vida.

Agradeço à minha família. Em especial, à minha amada esposa Isabela, aos meus filhos Kauany, Withor Emanuel, Arthur e Brayan, e aos meus pais Jairo e Margarida. Vocês são pessoas essenciais na minha vida e sempre me apoiaram desde o início. Amo vocês!

Agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela coordenação deste importante programa de mestrado e aos professores desse programa que trabalham na Universidade Federal do Tocantins (UFT). Em especial, agradeço à minha orientadora, Prof^a. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário, por ter dedicado seu tempo para contribuir na elaboração desta dissertação e, conseqüentemente, no meu crescimento pessoal e profissional.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro concedido através da bolsa durante o período do mestrado, o que foi essencial para a realização deste trabalho e para o meu desenvolvimento acadêmico. Agradeço pelo investimento que me permitiu focar na pesquisa e concluir essa importante etapa da minha formação.

Aos meus colegas de turma, especialmente Henrique Lobato, Letícia Meneses e Rogério Lira, agradeço por compartilharem horas de estudos, viagens cansativas, conversas sérias e descontraídas. A amizade e união desta turma foram essenciais nesta jornada.

A todas as pessoas que, de uma forma ou de outra, me ajudaram a chegar onde cheguei. Em especial Meire Barbosa, Luciana Patricia, Helves Belmiro e Joel Machado, minha sincera gratidão!

Por fim, agradeço a você, leitor. Espero que sua leitura seja agradável e que esta dissertação possa contribuir de alguma forma com a sua busca.

Um fractal é uma maneira de ver o infinito.
(Benoit Mandelbrot)

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo demonstrar a eficácia da geometria fractal na construção de figuras planas com progressões geométricas, buscando melhorar a compreensão e o ensino desses conceitos matemáticos em estudantes da 2ª série do Ensino Médio. Para alcançar esse objetivo, foram desenvolvidos e aplicados métodos pedagógicos que integram a geometria fractal, apresentando conceitos de maneira visual e intuitiva. A pesquisa também analisa o impacto dessa abordagem no desempenho acadêmico dos alunos em matemática, com foco especial na compreensão de progressões geométricas. A eficácia da sequência didática foi avaliada por meio da coleta de dados empíricos sobre o desempenho e a percepção dos estudantes. Os resultados indicam que a utilização da geometria fractal facilita a visualização de conceitos matemáticos, aumenta o engajamento dos alunos e aprimora a compreensão das progressões geométricas. A sequência didática demonstrou potencial para contribuir significativamente com o desenvolvimento de conceitos matemáticos básicos e para estimular a curiosidade e o interesse dos estudantes pela disciplina de Matemática. Por fim, a pesquisa evidenciou que conteúdos matemáticos, mesmo os considerados básicos, possuem grande relevância no cotidiano e podem ser ensinados de maneira visual e interativa.

Palavras-chave: Geometria Fractal; Progressões Geométricas; Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This research aims to demonstrate the effectiveness of fractal geometry in constructing planar figures with geometric progressions, seeking to enhance the understanding and teaching of these mathematical concepts to 2nd-year high school students. To achieve this objective, pedagogical methods integrating fractal geometry were developed and implemented, presenting concepts in a visual and intuitive manner. The study also analyzes the impact of this approach on students' academic performance in Mathematics, with a special focus on understanding geometric progressions. The effectiveness of the instructional sequence was assessed through empirical data collection on student performance and perception. Results indicate that using fractal geometry facilitates the visualization of mathematical concepts, increases student engagement, and improves understanding of geometric progressions. The instructional sequence demonstrated significant potential to contribute to the development of fundamental mathematical concepts and to stimulate students' curiosity and interest in Mathematics. Ultimately, the research highlighted that even basic mathematical content holds substantial relevance in everyday life and can be taught in a visual and interactive way.

Keywords: Fractal Geometry; Geometric Progressions; Mathematics Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Visão geométrica dos termos de uma P.G. infinita	33
Figura 2 – Visão geométrica da soma dos termos de uma P.G. infinita	38
Figura 3 – Autossimilaridade exata do Triângulo de Sierpinski	49
Figura 4 – Curva de Koch	50
Figura 5 – A primeira molécula fractal natural que se conhece	51
Figura 6 – Poeira de Cantor	52
Figura 7 – Curva de Peano	53
Figura 8 – Evolução da Curva de Hilbert	55
Figura 9 – Evolução da Curva de Koch	56
Figura 10 – Evolução do Floco de Neve de Koch	57
Figura 11 – Perímetro do Floco de Neve de Koch - Nível 0	58
Figura 12 – Perímetro do Floco de Neve de Koch - Nível 1	59
Figura 13 – Perímetro do Floco de Neve de Koch - Nível 2	59
Figura 14 – Perímetro do Floco de Neve de Koch - Nível 3	60
Figura 15 – Área do Floco de Neve de Koch - Nível 0	61
Figura 16 – Área do Floco de Neve de Koch - Nível 1	62
Figura 17 – Área do Floco de Neve de Koch - Nível 2	63
Figura 18 – Perímetro do Triângulo de Sierpinski - Nível 0	67
Figura 19 – Perímetro do Triângulo de Sierpinski - Nível 1	68
Figura 20 – Perímetro do Triângulo de Sierpinski - Nível 2	68
Figura 21 – Área do Triângulo de Sierpinski - Nível 0	69
Figura 22 – Área do Triângulo de Sierpinski - Nível 1	70
Figura 23 – Área do Triângulo de Sierpinski - Nível 2	71
Figura 24 – Evolução do Triângulo de Sierpinski	72
Figura 25 – Evolução do Tapete de Sierpinski	73
Figura 26 – O Conjunto de Mandelbrot	74
Figura 27 – O Conjunto de Julia	75
Figura 28 – Foto do Cálculo apresentado por aluno	79
Figura 29 – Print de um dos slides apresentado para os alunos	80

Figura 30 – Apresentação do matemático Benoît Mandelbrot para os alunos	80
Figura 31 – Aluno executando a construção do Triângulo de Sierpinski	82
Figura 32 – Construção do Triângulo de Sierpinski	83
Figura 33 – Construção do Triângulo de Sierpinski com destaque para os triângulos retirados	84
Figura 34 – Alunos durante o processo de construção do triângulo de Sierpinski tridimen- sional	85
Figura 35 – Construção do Triângulo de Sierpinski tridimensional por um aluno	85
Figura 36 – Construção do Triângulo de Sierpinski tridimensional por um aluno	86
Figura 37 – Aula sobre construção de fractais com Geogebra	87
Figura 38 – Construção de fractais com Geogebra por alunos	88
Figura 39 – Resposta de um aluno referente aos itens “a” e “b” da questão 1 do Questio- nário 01	90
Figura 40 – Cálculo do perímetro total do Triângulo de Sierpinski após a segunda iteração por um aluno	90
Figura 41 – Cálculo da área total do Triângulo de Sierpinski após a terceira iteração por um aluno	91
Figura 42 – Explicação de um aluno de como o perímetro do Triângulo de Sierpinski se comporta após infinitas iterações	91
Figura 43 – Resposta de um aluno para os itens “a” e “b” questão 1 do Questionário 02 .	93
Figura 44 – Resposta de um aluno para o item “c” da questão 1 do Questionário 02 . . .	93
Figura 45 – Resposta de um aluno para o item “d” da questão 1 do Questionário 02 . . .	94
Figura 46 – Resposta de um aluno para o item “a” da questão 2 do Questionário 02 . . .	95
Figura 47 – Resposta de um aluno para o item “b” da questão 2 do Questionário 02 . . .	95
Figura 48 – Resposta de um aluno para o item “c” da questão 2 do Questionário 02 . . .	96

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Percepção dos alunos quanto à sequência didática (questão 3 do Questionário 02)	97
Gráfico 2 – Percepção dos alunos quanto uso da geometria fractal no aprendizado de progressões geométricas (questão 4 do Questionário 02)	97

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Referências e resultado global da busca da RSL	20
---	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultado global da busca da RSL	19
Tabela 2 – Quantidade de segmentos obtidos pela iteração da Curva de Koch.	56
Tabela 3 – Progressões Geométricas na construção do Floco de Neve de Koch	65
Tabela 4 – Área e perímetro do Triângulo de Sierpinski	72

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAFe	Comunidade Acadêmica Federada
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
P.G.	Progressão Geométrica
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
RSL	Revisão Sistemática de Literatura

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
\mathbb{N}^*	Conjunto dos números naturais positivos
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
$=$	Igual a
\forall	Para todo
\geq	Maior ou igual que
$>$	Maior que
\in	Pertencente a
∞	Infinito
$+\infty$	Infinito positivo
\Leftrightarrow	Se e somente se
$<$	Menor que
$\lim_{x \rightarrow}$	Limite de x tendendo a
\neq	Diferente de
q	Razão da progressão geométrica
\square	Como queríamos demonstrar
Seg_n	Número de segmentos no n -ésimo nível de um fractal
L_n	Medida do n -ésimo segmento de um fractal
N_n	Quantidade de triângulos adicionados ao Floco de Neve de Koch na n -ésima iteração
$2P$	Perímetro de uma curva
A	Área de uma superfície plana

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA	19
3	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS	27
3.1	Sequências Numéricas	27
3.2	Progressão Geométrica	31
3.2.1	Termo Geral de uma Progressão Geométrica	34
3.2.2	Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica Finita	35
3.2.3	Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica Infinita	37
3.3	Aplicações das Progressões Geométricas no cotidiano	40
3.3.1	Aplicações de P.G.	41
3.3.1.1	Progressões Geométricas e a invenção do xadrez	41
3.3.1.2	Modelo Geométrico para Crescimento Populacional	42
3.3.1.3	Processos de Decaimento Radioativo	43
3.3.1.4	Matemática financeira (Juro Composto)	44
3.3.1.5	Sistemas digitais (tempo de bloqueio da tela do telefone)	45
3.3.2	Agricultura (proliferação de fungos e bactérias)	46
4	A BELEZA DOS FRACTAIS	47
4.1	História da Geometria Fractal	47
4.2	Aplicações dos Fractais e Suas Potencialidades para o ensino de Matemática	47
4.3	Características dos Fractais	49
4.4	Fractais Clássicos	52
4.4.1	A Poeira de Cantor	52
4.4.2	A Curva de Peano	53
4.4.3	Evolução da Curva de Hilbert	54
4.4.4	A Curva e o Floco de Neve de Koch	56
4.4.4.1	Perímetro do Floco de Neve de Koch	58
4.4.4.2	Área do Floco de Neve de Koch	61
4.4.5	O Triângulo e o Tapete de Sierpinski	67
4.4.5.1	Perímetro do Triângulo de Sierpinski	67

4.4.5.2	Área do Triângulo de Sierpinski	69
4.4.6	O Conjunto de Mandelbrot	73
4.4.7	O Conjunto de Julia	74
5	PROPOSTA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	76
5.1	Sequência Didática	76
5.2	Análise da Intervenção	77
5.2.1	Primeira Intervenção	78
5.2.2	Segunda Intervenção	80
5.2.3	Terceira Intervenção	82
5.2.4	Quarta Intervenção	84
5.2.5	Quinta intervenção	87
5.2.5.1	Primeira parte: construção de fractais com GeoGebra	87
5.2.5.2	Segunda parte: Recapitulação e preenchimento do questionário 01	89
5.2.6	Sexta intervenção	92
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	99
	REFERÊNCIAS	101
	APÊNDICE A – PLANOS DE AULA	105
	APÊNDICE B – APRESENTAÇÕES DE SLIDES	120
	APÊNDICE C – QUESTIONÁRIOS APLICADOS	134

1 INTRODUÇÃO

A geometria é uma parte fundamental do currículo escolar de matemática no Ensino Médio, contribuindo significativamente para o desenvolvimento acadêmico e pessoal dos estudantes. Ela aprimora o raciocínio lógico, a capacidade de abstração e a visualização espacial dos alunos. No entanto, muitos estudantes enfrentam dificuldades com a geometria tradicional, que se baseia em figuras geométricas regulares e abstratas. Nesse contexto, a geometria fractal pode ser uma abordagem inovadora e eficaz para superar esses desafios.

A geometria fractal possui várias características únicas que a diferenciam da geometria euclidiana tradicional. Uma dessas características é a auto-similaridade, que consiste na repetição de um padrão em diferentes escalas. Essa propriedade permite aos alunos explorarem formas complexas e detalhadas, que se assemelham a objetos encontrados na natureza, como árvores, nuvens e montanhas. Além disso, a complexidade dos fractais desafia os estudantes a pensarem de forma não linear e a perceberem a matemática como algo vivo e dinâmico.

A aplicação da geometria fractal em diversas áreas pode motivar os estudantes a se envolverem mais com o assunto. Na natureza, os fractais aparecem em estruturas biológicas como vasos sanguíneos e folhas de plantas. Na arquitetura, são utilizados para projetar edifícios inovadores e eficientes, enquanto na arte, artistas empregam fractais para criar obras visuais impressionantes. Conhecendo esses exemplos práticos, os estudantes percebem a relevância e a utilidade da geometria fractal em suas vidas. Este campo interdisciplinar ajuda a descrever fenômenos naturais complexos e padrões de crescimento, além de adicionar uma dimensão única à criatividade humana através da sua estética explorada em arte e *design*.

Este estudo justifica-se pela relevância da geometria fractal, que oferece uma abordagem inovadora para a construção de figuras planas. Ao integrá-la com progressões geométricas, é possível explorar novas maneiras de visualizar e entender padrões matemáticos que vão além da geometria euclidiana tradicional.

O objetivo desse estudo é analisar a eficácia da geometria fractal na construção de figuras planas envolvendo progressões geométricas, visando melhorar a compreensão e o ensino desses conceitos matemáticos. Para alcançar esse objetivo geral, serão aplicados e analisados métodos pedagógicos que utilizem a geometria fractal, seja de maneira visual ou intuitiva, como meio para desenvolver os conceitos matemáticos do ensino de progressões geométricas, visando melhorar a

compreensão dos alunos em tais conceitos, despertando assim o maior interesse pelo tema. Além disso, será investigado o impacto dessa integração no desempenho acadêmico dos alunos em matemática, especialmente na compreensão de progressões geométricas, avaliando a eficácia dessa abordagem através da coleta de dados empíricos sobre o desempenho e a percepção dos estudantes.

A sequência didática deste estudo começa com a apresentação dos conceitos e propriedades dos fractais, incluindo exemplos clássicos, aos alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola da rede pública municipal de Couto Magalhães - TO. Em seguida, são realizadas duas atividades lúdicas: na primeira, os alunos constroem o Triângulo de Sierpinski no plano usando régua, transferidor e lápis; na segunda, eles constroem o Triângulo de Sierpinski tridimensionalmente, utilizando papel e tesoura. Posteriormente, propomos a construção de fractais utilizando o software Geogebra. Após essa etapa, é feita uma apresentação que aborda os conceitos de sequência numérica e progressão geométrica. Finalmente, os alunos realizam um questionário que conecta fractais e progressões geométricas.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, foi apresentada uma Revisão Sistemática de Literatura (RSL) sobre Geometria Fractal, baseada em estudos de pós-graduação *stricto sensu* catalogados na CAPES e no Repositório do PROFMAT. No Capítulo 3 deste trabalho, foram explorados os fundamentos matemáticos relacionados a sequências numéricas e progressões geométricas, com ênfase nas suas definições e aplicações no cotidiano. Além disso, apresentamos diversas aplicações práticas das progressões geométricas em situações do dia-a-dia, ilustrando como esses conceitos matemáticos são úteis para modelar e entender fenômenos variados. Já no Capítulo 4, abordamos “A Beleza dos Fractais”, explorando sua história, definição e propriedades únicas de auto-similaridade em diferentes escalas. Apresentamos exemplos clássicos de fractais, como o Floco de Neve de Koch e o Triângulo de Sierpinski, destacando sua estrutura complexa e estética matemática. Além disso, foi estabelecida conexões entre fractais e progressões geométricas, demonstrando como esses conceitos se complementam e se aplicam em diversas áreas do conhecimento. Por fim, a principal contribuição dessa pesquisa, que é a sequência didática que integra os conceitos de geometria fractal e progressões geométricas. Esta sequência visou facilitar o aprendizado dos alunos de maneira gradual e acessível, utilizando atividades práticas para explorar a construção e os padrões dos fractais.

2 REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA

Nesta seção, é apresentada uma Revisão Sistemática de Literatura (RSL) a respeito da Geometria Fractal. A pesquisa foi realizada no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e no Repositório do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Trata-se, portanto, de um mapeamento que levou em consideração trabalhos desenvolvidos no nível de pós-graduação *stricto sensu* devidamente defendidos e aprovados.

Para elaboração desta RSL, levamos em consideração produções acadêmicas publicadas entre os anos 2019 e 2024 disponíveis nos meios digitais supramencionados. Os descritores utilizados na busca foram: “geometria fractal” e “ensino e aprendizagem” .

O ponto de partida da investigação teve lugar no Portal de Periódicos da CAPES, mediante o acesso por meio do CAFe, culminando na identificação de um conjunto de 80 estudos. Dentre estes, apenas as dissertações foram consideradas como sendo de pertinência para o propósito deste trabalho, visto que o referido portal não propiciou resultados quanto aos estudos do período temporal em análise. Em relação ao domínio do ensino e aprendizagem da Geometria Fractal, pôde-se constatar a disponibilidade de somente quatro estudos na plataforma de periódicos da CAPES.

Por outro lado, no PROFMAT, uma busca preliminar resultou na identificação de 21 trabalhos correlacionados ao tema. Todavia, somente 9 dentre esses foram julgados como sendo adequados aos propósitos da presente pesquisa.

A Tabela 1 mostra o resultado global da busca da RSL.

Tabela 1 – Resultado global da busca da RSL

Plataformas	Trabalhos encontrados sobre todos os temas	Trabalhos incluídos, analisados na íntegra
CAPES	80	0
PROFMAT	21	9
Total	101	9

Fonte: Autor (2024).

Para fazer a triagem dos trabalhos encontrados e obter o valor total de 9 pesquisas, foram utilizados os seguintes critérios de inclusão: i) trabalhos completos sobre o tema desta pesquisa; ii) dissertações; iii) Geometria Fractal; iv) Geometria fractal – ensino e aprendizagem; e v)

trabalhos escritos em Língua Portuguesa.

Já os critérios de exclusão utilizados na seleção dos dados foram: i) trabalhos duplicados; ii) trabalhos escritos em outros idiomas; iii) trabalhos resumidos; e iv) trabalhos excluídos por não indicar, no título, resumo ou palavras-chave, a relação com a abordagem de fractais na educação básica.

Com isso, a referida RSL apontou um número baixo de pesquisas acadêmicas semelhantes à proposta neste trabalho, o que reforça a relevância desta investigação. No Quadro 1, foram listadas todas as pesquisas que constituem o resultado final desta busca. São apresentados detalhes, como título, assunto e tipo de trabalho (“D” para dissertação, “T” para tese e “A” para artigo), nomes dos autores, ano de publicação e o repositório de origem.

Quadro 1 – Referências e resultado global da busca da RSL

ID	Título	Tipo	Ano	Autores	Repositório
E1	A Geometria Fractal para o Ensino de diversos tópicos de matemática no ensino médio	D	2022	Soraia Perez De Souza	PROFMAT UNESP
E2	A geometria fractal no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de probabilidade geométrica	D	2021	Sandro Luiz Rosa Able	PROFMAT UTFPR
E3	Modelagem matemática, geometria fractal e geogebra: proposta de atividades para ensinar conteúdos matemáticos do ensino médio	D	2021	Marcio Andre Santa Brigida Lima	PROFMAT UFPA
E4	Geometria Fractal e atividades para o ensino de matemática: degraus fractais e esponja de menger	D	2020	Marcus Vinícius Oliveira Lopes Da Silva	PROFMAT UFBA

Continua na próxima página

ID	Título	Tipo	Ano	Autores	Repositório
E5	A mobilização da Geometria Fractal como ferramenta para o estudo de probabilidade no ensino médio	D	2020	Diego De Oliveira Cosim	PROFMAT UEMS
E6	Uma proposta de abordagem da Geometria Fractal na educação básica	D	2019	Marcelo Correia Lisboa	PROFMAT UFT
E7	A Geometria Fractal e a contextualização de conteúdos no ensino fundamental: uma experiência em sala de aula	D	2019	Daniel Possetti	PROFMAT UFMS
E8	A Geometria Fractal no ensino médio: teoria e prática da geometria fractal no ensino médio	D	2019	Sérgio Nóbrega De Oliveira	PROFMAT UNIRIO
E9	Conhecendo a Geometria Fractal a partir de conceitos básicos da geometria euclidiana plana	D	2019	Marcos Antonio Lima	PROFMAT UFSC

Fonte: Autor (2024).

Dentre os 9 estudos submetidos à análise, todos se caracterizavam como dissertações disponibilizadas no repositório do PROFMAT, uma vez que não foi possível identificar dissertações correspondentes ao período estudado no Portal de Periódicos da CAPES.

O estudo E1, de autoria de Souza (2022), buscou utilizar a Geometria Fractal para tornar o ensino de áreas e perímetros de figuras geométricas euclidianas mais atrativo, dinâmico e tecnológico. A proposta envolve a criação de atividades utilizando o software GeoGebra para explorar conceitos matemáticos como Progressão Geométrica, Geometria, Trigonometria, Logaritmo e noções de limites. São apresentados diversos fractais clássicos, como o Tapete de Cantor, o Tapete de Sierpinski, a Ilha de Koch, a Esponja de Menger, além de fractais de Dürer (hexagonal e octogonal), e fractais circulares, como o Fractal Circuntexto, o Fractal Tetracírculo, o Fractal Antena Circular, o Fractal Peneira de Apolônio e o Fractal Flor da Vida. Conclui-se que a Geometria Fractal permite aos alunos apreciar a beleza e a harmonia dessas figuras, ao

mesmo tempo em que consolidam seu conhecimento matemático.

No estudo E2, intitulado “A Integração da Geometria Fractal no Processo de Ensino, Aprendizagem e Avaliação da Probabilidade Geométrica” (Able, 2021), foi realizada uma revisão da literatura em portais acadêmicos, como o da CAPES, e em outros sites de programas de pós-graduação, focando na interseção entre Probabilidade Geométrica e Fractais. Identificou-se uma escassez de material didático nessa área e a necessidade de alinhamento com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). O estudo propôs uma sequência de ensino de Probabilidade Geométrica para o Ensino Médio, utilizando conceitos da Geometria Fractal, com base na teoria dos Três Momentos Pedagógicos de Delizoicov e Angotti (1990). A proposta inclui a construção do Triângulo de Sierpinski e da Esponja de Menger para explorar conceitos bidimensionais e tridimensionais, respectivamente. Embora a sequência não tenha sido testada, recomenda-se sua implementação em estudos futuros para avaliar sua eficácia no processo de ensino-aprendizagem.

No trabalho E3, “Modelagem Matemática, Geometria Fractal e GeoGebra: Proposta de Atividades para o Ensino de Matemática no Ensino Médio”, foram elaboradas e apresentadas cinco atividades de Modelagem Matemática baseadas em problemas relacionados a fractais, utilizando o software GeoGebra para o ensino de conceitos matemáticos no Ensino Médio. As atividades foram desenvolvidas para facilitar a visualização e a experimentação, auxiliando na compreensão de vários conhecimentos matemáticos observados na geometria dos fractais. O objetivo do trabalho foi estimular a curiosidade e a motivação dos alunos por meio de atividades práticas apoiadas pela tecnologia. A pesquisa demonstrou que o ensino de tópicos do currículo matemático, como triângulos equiláteros, sequências, ponto médio, potenciação, área e perímetro, pode se tornar mais atraente e eficaz quando integrado à Modelagem Matemática, Geometria Fractal e GeoGebra (Lima, 2021).

No estudo E4, Silva (2020) propôs o desenvolvimento de atividades didáticas destinadas às aulas de matemática na educação básica. O trabalho começou com uma análise dos aspectos históricos e conceituais da Geometria Fractal, explorando suas aplicações em diversas áreas, incluindo outras disciplinas científicas e o próprio ensino de Matemática. Foi dado destaque às características geométricas fundamentais, como comprimento, área, volume, autossimilaridade e dimensão fractal. A dissertação culminou na apresentação de duas oficinas práticas: a Oficina de Degraus Fractais, que utiliza dobraduras e cortes para criar degraus tridimensionais com várias formas geométricas, e a Oficina da Esponja de Menger, que emprega a técnica de origami para construir a estrutura cúbica da famosa esponja de Menger, concebida pelo matemático Karl

Menger em 1926.

Em E5, Cosim (2020) buscou explorar os conceitos da Geometria Fractal, com foco nos principais fractais regulares e suas implicações, com o intuito de investigar sua aplicabilidade no estudo de probabilidades durante o Ensino Médio. O estudo foi dividido em duas etapas: uma revisão bibliográfica e uma pesquisa de campo. Durante a pesquisa de campo, atividades relacionadas à geometria fractal foram aplicadas a uma turma de 23 alunos do terceiro ano do Ensino Médio, com o objetivo de calcular probabilidades geométricas. Foram analisadas estratégias de resolução de problemas de probabilidade baseadas nos princípios da geometria fractal. O estudo foi motivado pelo crescente interesse e pelas aplicações práticas da geometria fractal em áreas como física, arquitetura e medicina, sugerindo a inclusão desses conceitos no currículo escolar para facilitar a compreensão e despertar o interesse dos alunos.

Em E6, Lisboa (2019) propôs em seu estudo “Uma Abordagem da Geometria Fractal na Educação Básica” a introdução da Geometria Fractal no contexto da Educação Básica, enfatizando a importância dos fractais, identificados por Benoît Mandelbrot em diversas manifestações da natureza, no corpo humano, em figuras geométricas e em construções computacionais. A proposta visava integrar elementos da Geometria Fractal nos conteúdos matemáticos do Ensino Médio para facilitar a compreensão e a retenção de conceitos, enriquecendo o processo de aprendizagem e tornando-o mais significativo para os alunos. A abordagem incluiu uma revisão histórica da Geometria, do ensino de Geometria no Brasil e da Geometria Fractal. Concluiu-se que a Geometria Fractal oferece amplas possibilidades de aplicação na Educação Básica, destacando-se pelo seu apelo visual e pela formação de padrões, essenciais para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Possetti (2019), no estudo E7, investigou a Geometria Fractal, um campo emergente da Matemática descoberto por Benoit Mandelbrot nos anos 60, e sua possível introdução no currículo do Ensino Fundamental e Médio. Para avaliar a eficácia de atividades didáticas envolvendo Geometria Fractal, foi conduzida uma pesquisa com alunos do nono ano de uma escola em Birigui-SP, no ano de 2018. A pesquisa, intitulada “A Geometria Fractal e a Contextualização de Conteúdos no Ensino Fundamental: Uma Experiência em Sala de Aula”, incluiu uma fase introdutória para familiarizar os alunos com o tema antes das atividades práticas. O estudo concluiu que a Geometria Fractal pode fortalecer a conexão entre conhecimentos do cotidiano e acadêmicos, além de apresentar a Matemática como uma ciência dinâmica. Relatos das experiências em sala de aula e das dificuldades enfrentadas também foram incluídos.

Em E8, Oliveira (2019) abordou o tema “A Geometria Fractal no Ensino Médio”, com o objetivo de contribuir para a análise dos fractais no contexto educacional, utilizando métodos de ensino matemático que empregam abordagens lúdicas para estimular o interesse dos alunos, com base nos princípios de interdisciplinaridade e contextualização. O estudo centrou-se no desenvolvimento das características dos fractais, como autossimilaridade, complexidade infinita e dimensões não inteiras. Diversas fontes de pesquisa foram consultadas ao longo do trabalho, com destaque para o livro “Descobrimos a Geometria Fractal”, do professor Ruy Madsen Barbosa.

No estudo E9, Lima (2019) explorou os fundamentos da Geometria Fractal a partir de conceitos básicos da Geometria Euclidiana Plana. A abordagem direta desses conceitos e alguns de seus axiomas tinha como objetivo proporcionar uma compreensão mais clara para os alunos, especialmente do Ensino Médio, na construção e compreensão de fractais.

A partir dos desdobramentos apresentados nas pesquisas, evidencia-se a eficácia da utilização da geometria fractal em sua função, promovendo a exploração de sua relação com a geometria euclidiana e outros elementos matemáticos. Conforme delineado por Mossulin e Medeiros (2023), a investigação dos fractais capacita os estudantes a alcançarem uma esfera superior de motivação, além de apurar a percepção estética.

É possível notar também que a utilização de uma ampla gama de conteúdos matemáticos pode desempenhar um papel facilitador no processo de instrução-aprendizagem em relação à Geometria Fractal, notadamente por sua consonância com as competências e habilidades matemáticas preconizadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Tal perspectiva poderia ser mais amplamente explorada no contexto da formação docente, como argumentado por Pereira e Borges (2017). Os autores examinados demonstraram um zelo particular na integração de teorias pedagógicas em suas abordagens, englobando correntes como o construtivismo e o interacionismo, bem como a teoria de Rogers, que enfatiza a aprendizagem centrada no estudante, e a teoria dos registros de representação semiótica, desenvolvida por Duval.

Devido à facilidade intrínseca à abordagem da Geometria Fractal, é possível verificar uma preferência notável por fractais como o conjunto de Cantor e o Triângulo de Sierpinski, além da curva de Peano e a curva de Hilbert, entre outros. Vale ressaltar a crescente utilização de recursos tecnológicos, notadamente o software GeoGebra, em conjunto com materiais manipulativos e elementos relacionados à montagem criativa. Entretanto, persiste um vasto leque de possibilidades a ser explorado no contexto deste tema, incluindo a aplicação de aplicativos e jogos, bem como a programação mediante ferramentas como o Scratch e a construção de fractais

em ambientes destinados ao processo de ensino e aprendizagem.

Em busca de um levantamento que compreenda as dissertações produzidas de 2019 a 2024, a presente RSL assumiu a tarefa de elencar investigações que respaldam a aplicação de conteúdos da Geometria Fractal no âmbito da Educação Básica. As estratégias pedagógicas suscitadas no presente estudo abraçaram abordagens dinâmicas em ambiente escolar, incorporando a utilização de aplicativos e programas computacionais para a exploração das formas fractais. A realização desta empreitada possibilitou a análise minuciosa de nove estudos, os quais, de modo consistente, harmonizaram-se com as doutrinas pedagógicas e os conteúdos matemáticos abordados na temática, perpetuando uma sólida conexão entre a teoria e a prática.

A partir dessas constatações, é viável inferir que há múltiplas abordagens para a inserção da geometria fractal no domínio da educação matemática, todas elas revestidas do propósito de ampliar o envolvimento e a motivação dos discentes durante a atividade de aprendizado. Destaque-se, ainda, o emprego de softwares desenvolvidos para a análise das formas fractais, erigindo-se como recursos didáticos tangíveis no contexto da sala de aula.

A pesquisa seguiu uma trilha temática voltada para a utilização da geometria fractal como componente integral de intervenções pedagógicas no seio do ambiente escolar, englobando até mesmo a incorporação do ensino de programação, tema este aprofundadamente explorado. Finalmente, fundamentada em um acervo de estudos diversificado, a revisão em apreço encara uma problemática de natureza complexa, suscetível de estimular a curiosidade dos educandos ao trazer à tona conhecimentos matemáticos de elevada relevância para a vivência acadêmica, exemplificada, no caso, pela complexa esfera da geometria fractal.

Em suma, esta RSL destaca a perspectiva inovadora oferecida pela ligação entre geometria fractal e progressões geométricas na educação básica. Ao introduzir conceitos avançados de geometria fractal em níveis de ensino mais baixos, esta abordagem pedagógica promove uma compreensão mais profunda da matemática desde as primeiras etapas do aprendizado. Além disso, ao contextualizar o currículo com exemplos do mundo real, como padrões naturais e artísticos, os alunos são incentivados a desenvolver habilidades de resolução de problemas, pensamento crítico e criatividade, preparando-os para desafios acadêmicos mais complexos no futuro.

O diferencial deste estudo reside na sua abordagem lúdica ao integrar a geometria fractal na construção de figuras planas com progressões geométricas. Esta combinação não apenas une conceitos teóricos complexos de maneira tangível e visualmente estimulante, mas também

estimula o pensamento criativo e crítico dos alunos ao explorar padrões complexos e irregulares. Além de ampliar a compreensão matemática, o estudo avalia empiricamente o impacto dessa metodologia no desempenho acadêmico e na percepção dos estudantes, contribuindo para práticas educacionais mais eficazes e baseadas em evidências. Ao demonstrar a aplicabilidade desses conceitos em diversos contextos além da matemática pura, como ciências naturais e tecnologia, o estudo não só promove uma aprendizagem mais profunda e significativa, mas também oferece *insights* valiosos para o avanço do conhecimento educacional e pedagógico.

Ao explorar a intrigante conexão entre conceitos matemáticos abstratos e o mundo tangível dos fractais, esta pesquisa estimula um ambiente de aprendizado dinâmico e engajador, em que os alunos são incentivados a questionar, investigar e descobrir por si mesmos. Logo, a ligação entre geometria fractal e progressões aritméticas e geométricas na educação básica representa um passo significativo em direção a uma educação matemática mais inclusiva, inovadora e eficaz.

3 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Durante o período do Ensino Médio, o estudo das sequências numéricas concentra-se primordialmente nas progressões geométricas, exigindo que os estudantes identifiquem padrões específicos e estabeleçam conexões com situações do cotidiano, com o intuito de promover uma compreensão mais profunda do tema. Contudo, é responsabilidade do educador, atuando como mediador entre o conhecimento e os alunos, aprofundar o estudo das sequências numéricas e de suas propriedades, a fim de enriquecer ainda mais o conteúdo abordado em sala de aula.

Este capítulo destina-se a uma análise detalhada de sequências numéricas com ênfase nas progressões geométricas. Para aqueles interessados em uma exploração mais aprofundada deste tema, recomenda-se a leitura dos materiais mencionados nos referenciais Iezzi e Hazzan (2013) e Morgado e Carvalho (2015).

A conexão entre progressões geométricas e a geometria fractal é um exemplo fascinante de como conceitos matemáticos aparentemente distintos se inter-relacionam. Fractais, que são estruturas complexas e auto-similares encontradas na natureza e em muitos fenômenos matemáticos, muitas vezes podem ser descritos por progressões geométricas. Por exemplo, ao analisar a construção do Conjunto de Cantor ou a Curva de Koch, observamos que cada iteração do processo fractal envolve uma divisão repetitiva em escalas menores que seguem uma razão geométrica. Assim, ao calcular o número de segmentos ou elementos em cada nível de um fractal, aplicamos diretamente os princípios das progressões geométricas, evidenciando uma rica interseção entre essas áreas da matemática.

3.1 Sequências Numéricas

A introdução do conceito de sequência numérica no ensino médio é de extrema importância, pois permite aos alunos compreenderem a organização e ordenação dos elementos em uma determinada ordem. Além disso, a sequência está diretamente relacionada com a geometria fractal, uma vez que as figuras fractais são construídas através de repetições sucessivas de um padrão básico. Dessa forma, ao compreenderem o conceito de sequência, os alunos podem visualizar e construir figuras fractais de maneira mais eficiente (Sousa; Montelo; Saraiva; Leite, 2018).

Definição 3.1. Define-se uma *sequência finita* ou *n-upla* como a aplicação f do conjunto $\mathbb{N}_n^* = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ em \mathbb{R} . Dessa forma, em toda sequência finita, a cada número natural i ($1 \leq i \leq n$) está associado um número real a_i .

$$f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots, (n, a_n)\}$$

Definição 3.2. Define-se uma *sequência infinita* como a aplicação f de \mathbb{N}^* (os números naturais excluindo o zero) em \mathbb{R} . Em cada sequência infinita, para todo $i \in \mathbb{N}^*$ está associado um $a_i \in \mathbb{R}$.

$$f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots, (i, a_i), \dots\}$$

A partir desse ponto, representaremos uma sequência f indicando apenas a imagem de f :

$$f = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots)$$

onde, ordenadamente entre parênteses da esquerda para direita, estão as imagens dos naturais $1, 2, 3, \dots, i, \dots$

Para denotar qualquer sequência f , escrevemos:

$$f = (a_i)_{i \in I}$$

Lê-se como “sequência f dos termos a_i em que o conjunto de índices é I ”, sendo I um subconjunto dos números naturais.

É importante ressaltar que duas aplicações, f e g , são consideradas iguais quando possuem domínios idênticos e $f(x) = g(x)$ para todo x no domínio. Desse modo, duas sequências infinitas, $f = (a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ e $g = (b_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, são consideradas iguais quando $f(i) = g(i)$, ou seja, $a_i = b_i$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$. Em notação simbólica, isso pode ser expresso como:

$$f = g \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in \mathbb{N}^*$$

Lei de Formação

A Matemática se volta para as sequências nas quais os termos se sucedem de acordo com uma determinada norma, ou seja, aquelas que possuem uma forma de serem geradas. Essa forma pode ser exposta de três maneiras distintas:

i. Por Fórmula de Recorrência

São fornecidas duas diretrizes: uma para determinar o primeiro termo (a_1) e outra para calcular cada termo subsequente (a_n) com base no termo anterior (a_{n-1}).

Exemplo 3.1: Podemos escrever a sequência finita f cujos termos obedecem à fórmula de recorrência fornecida da seguinte forma: $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 3, \forall n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Desta forma, podemos calcular os cinco primeiros termos da forma:

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$$

$$n = 5 \Rightarrow a_5 = a_4 + 3 = 11 + 3 = 14$$

$$n = 6 \Rightarrow a_6 = a_5 + 3 = 14 + 3 = 17$$

Então,

$$f = (2, 5, 8, 11, 14, 17).$$

Exemplo 3.2: Podemos escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g conforme a recorrência dada: $b_1 = 1$ e $b_n = 3 \cdot b_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$. Desta forma, podemos calcular os cinco termos iniciais da forma:

$$n = 2 \Rightarrow b_2 = 3 \cdot b_1 = 3 \cdot 1 = 3$$

$$n = 3 \Rightarrow b_3 = 3 \cdot b_2 = 3 \cdot 3 = 9$$

$$n = 4 \Rightarrow b_4 = 3 \cdot b_3 = 3 \cdot 9 = 27$$

$$n = 5 \Rightarrow b_5 = 3 \cdot b_4 = 3 \cdot 27 = 81$$

Desta forma, seguindo o processo recorrente teremos a sequência infinita

$$g = (1, 3, 9, 27, 81, \dots)$$

ii. Expressando cada termo em função de sua posição

É dada uma fórmula que expressa a_n em função de n .

Exemplo 3.3: Dada a relação $b_n = 3n + 1$ para a sequência g , podemos calcular os cinco primeiros termos da sequência substituindo os valores de n :

$$b_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4, b_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 7, b_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 10, b_4 = 3 \cdot 4 + 1 = 13, b_5 = 3 \cdot 5 + 1 = 16$$

Então, $g = (4, 7, 10, 13, 16, \dots)$.

Observe que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre constante e igual a 3:

$$b_2 - b_1 = 7 - 4 = 3$$

$$b_3 - b_2 = 10 - 7 = 3$$

$$b_4 - b_3 = 13 - 10 = 3$$

$$b_5 - b_4 = 16 - 13 = 3$$

Sequências como essa recebem o nome de Progressão Aritméticas e são bastante estudadas no Ensino Médio.

Exemplo 3.4: Escrever a sequência finita f cujos termos obedecem à lei $a_n = 2^n$, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Temos:

$$a_1 = 2^1 = 2$$

$$a_2 = 2^2 = 2 \cdot 2^1 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$a_3 = 2^3 = 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 4 = 8$$

$$a_4 = 2^4 = 2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 8 = 16$$

Então, $f = (2, 4, 8, 16, \dots)$. Observe que, para todo termo a_i da sequência, com $i = 2, \dots$, $a_i = a_{i-1} \cdot q$, onde $q = 2$ pode ser entendida como uma “razão de crescimento” da sequência. Sequências como essa recebem o nome de Progressão Geométrica (P. G.) e serão mais detalhadas na Seção 3.2.

iii. Por Propriedade dos Termos

É dada uma propriedade que os termos da sequência devem apresentar.

Exemplo 3.5: Com base na definição da sequência f de seis termos, onde cada termo é igual ao número de divisores inteiros do respectivo índice, e utilizando os conjuntos de divisores $D(n)$.

Temos:

$$D(1) = \{1, -1\} \Rightarrow a_1 = 2$$

$$D(2) = \{1, -1, 2, -2\} \Rightarrow a_2 = 4$$

$$D(3) = \{1, -1, 3, -3\} \Rightarrow a_3 = 4$$

$$D(4) = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\} \Rightarrow a_4 = 6$$

$$D(5) = \{1, -1, 5, -5\} \Rightarrow a_5 = 4$$

$$D(6) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\} \Rightarrow a_6 = 8$$

Portanto, a sequência f de seis termos é: $f = (2, 4, 4, 6, 4, 8)$.

Exemplo 3.6: A sequência infinita g consiste nos números primos positivos colocados em ordem crescente, e como mencionado, não pode ser expressa por uma fórmula de recorrência ou por uma fórmula fechada para calcular o n -ésimo número primo positivo diretamente a partir de n . Os cinco primeiros termos dessa sequência são: $g = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$.

Esta sequência é conhecida como a sequência dos números primos, e sua geração geralmente envolve o uso de propriedades específicas dos números primos, como a propriedade de não terem divisores além de 1 e do próprio número.

No âmbito das sequências numéricas, podemos destacar dois tipos especiais de sequências estudadas no ensino médio: a Progressão Aritmética e a Progressão Geométrica. Neste trabalho, vamos dar destaque, na Seção 3.2, às Progressões Geométricas, por estarem intimamente ligadas aos fractais.

3.2 Progressão Geométrica

A progressão geométrica nada mais é do que uma sequência de termos, onde cada elemento é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante denominada razão (Camilato *et al.*, 2024). Essa característica fundamental possibilita o crescimento ou decréscimo exponencial dos elementos da sequência, dependendo do valor da razão. No caso ilustrado no Exemplo 3.4, dado que a razão era positiva, a sequência crescia exponencialmente.

Definição 3.3. A *progressão geométrica (P.G.)* é definida por meio da seguinte fórmula de recorrência:

$$f(n) = \begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot q, \forall n \in \mathbb{N} \geq 2 \end{cases}$$

Portanto, em uma P.G. cada termo subsequente (a_n), a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior (a_{n-1}) por uma constante q , denominada razão da P.G.

Exemplo 3.7: A sequência (4, 8, 16, 32, 64) é uma progressão geométrica finita onde $a_1 = 4$ e $a_2 = 8$. Dessa forma, pela definição acima, temos que $a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow 8 = 4 \cdot q$, ou seja, $q = 2$. Observe que essa sequência é uma subsequência daquela mostrada no Exemplo 3.4.

Propriedades: As P.G. podem ser categorizadas com base em características específicas. Aqui vamos considerar a classificação através do valor que é atribuído à constante q e ao seu primeiro termo a_1 . Assim temos:

- (a) Uma P.G. é considerada **crescente** quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou quando $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.
- (b) uma P.G. é designada **constante** quando todos os seus termos são iguais e não nulos. Nesse cenário, $q = 1$.
- (c) A caracterização de uma P.G. como **decrecente** ocorre quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou quando $a_1 < 0$ e $q > 1$.
- (d) Uma P.G. é denominada **oscilante** se cada termo apresentar sinal contrário ao termo anterior. Nesse caso, $q < 0$.
- (e) Uma P.G. é denominada **estacionária** se $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = a_4 = \dots = 0$. Isso ocorre quando $q = 0$.

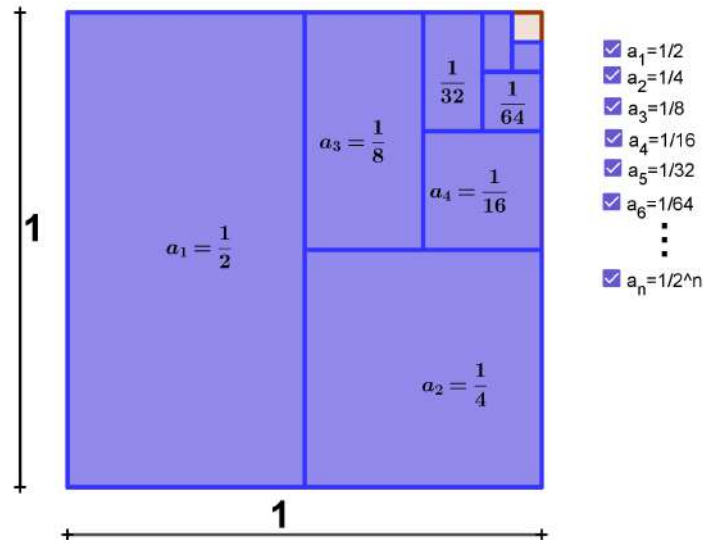
Exemplo 3.8:

- (a) (4, 8, 16, 32, 64) é uma P.G. finita crescente, em que $a_1 = 4$ e $q = 2$.
- (b) (1, 1, 1, 1, 1, ...) é uma P.G. infinita constante, em que $a_1 = 1$ e $q = 1$.
- (c) (-2, -4, -8, -16, ...) é uma P.G. infinita decrescente, em que $a_1 = -2$ e $q = 2$.
- (d) (1, -5, 25, -125, 625) é uma P.G. finita oscilante, em que $a_1 = 1$ e $q = -5$.
- (e) (3, 0, 0, 0, 0, ...) é uma P.G. infinita estacionária, em que $a_1 = 3$ e $q = 0$.

- (f) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$ é uma P.G. infinita, em que $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$.

Essa P.G. possui uma interpretação geométrica relacionada ao quadrado de lado igual a 1, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Visão geométrica dos termos de uma P.G. infinita



Fonte: Autor (2024).

Para a construção da Figura 1, consideremos os seguintes passos:

1. Iniciamos com um quadrado de lado 1 e consideramos a base desse quadrado. Traçamos uma reta vertical que passa pelo ponto médio da base, obtendo dois retângulos congruentes e cada um com área igual a $1/2$. O primeiro desses retângulos corresponderá ao primeiro termo da progressão geométrica (P.G.), que chamaremos de $a_1 = \frac{1}{2}$;
2. Em seguida, tomamos o outro retângulo, pegamos sua lateral e, novamente, dividimos ao meio, encontrando o ponto médio. A partir disso, dividimos o retângulo em dois quadrados. O segundo termo da P.G., a_2 , corresponderá à área de um desses quadrados, que será $1/4$ da área original do quadrado inicial, ou seja, $a_2 = \frac{1}{4}$.
3. Agora, repetimos o processo: tomamos o quadrado superior (de área $1/4$), dividimos sua base ao meio, e traçamos uma linha que o divide em dois novos retângulos. Continuamos essa construção de forma sistemática, alternando entre a criação de retângulos e quadrados.

Em cada etapa da construção, a área das figuras geradas (retângulos ou quadrados) forma os termos de uma progressão geométrica. Cada termo da P.G. corresponde à área de uma

nova figura, e o padrão se repete à medida que continuamos dividindo e construindo novas formas.

Dessa maneira, a sequência de áreas segue a lógica de uma P.G., onde o primeiro termo é $1/2$, o segundo termo é $1/4$, e assim por diante.

3.2.1 Termo Geral de uma Progressão Geométrica

O termo geral da progressão geométrica é definido como a fórmula que permite calcular qualquer termo da sequência a partir do primeiro termo (a_1) e da razão (q). Essa fórmula é obtida multiplicando-se o primeiro termo pela razão elevada à potência correspondente à posição do termo desejado na sequência. Dessa forma, o termo geral pode ser demonstrado pelo teorema a seguir:

Teorema 3.1. *Para uma P.G. com razão q e primeiro termo a_1 , o n -ésimo termo dessa sequência é expresso por*

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

A igualdade acima é referida como o termo geral de uma P.G.

Demonstração. Demonstra-se pelo princípio da indução finita. Para $n = 1$, a sentença é verdadeira, pois $a_1 = a_1 \cdot q^{(1-1)} = a_1 \cdot q^0 = a_1$. Em seguida, por hipótese, afirmamos a validade da sentença para n , ou seja, vale $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$, e provaremos a validade da mesma sentença para $n + 1$, ou seja, $a_{n+1} = a_1 \cdot q^{(n+1)-1} = a_1 \cdot q^n$, daí, vamos provar que $a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$.

De fato, como temos que $a_n = a_{n-1} \cdot q$, então $a_{n+1} = a_n \cdot q$ e pela Hipótese de Indução, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, assim obtemos:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (a_1 \cdot q^{n-1}) \cdot q \\ a_{n+1} &= a_1 \cdot q^n \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dessa forma, prova-se a sentença do Termo Geral da P.G., $\forall n \in \mathbb{N}^*$. □

Exemplo 3.9: Considere a P.G. (2, 6, 18, ...). Para encontrar o 6º termo, dado que $a_1 = 2$ e $q = \frac{6}{2} = 3$, utilizamos a fórmula do termo geral da P.G.:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)} \Rightarrow a_6 = a_1 \cdot q^{(6-1)} \Rightarrow a_6 = 2 \cdot 3^5 \Rightarrow a_6 = 2 \cdot 243 \Rightarrow a_6 = 486.$$

3.2.2 Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica Finita

Definição 3.4. A sequência das somas parciais S_n de uma sequência $\{a_n\}$ é definida como a soma dos n primeiros termos dessa sequência. Ou seja, para uma sequência $\{a_n\}$, a soma parcial S_n é dada por:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

O teorema apresentado a seguir fornece uma fórmula para calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica. Ele é expresso da seguinte forma:

Teorema 3.2. A soma dos n termos iniciais de uma P.G. é dada por:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \quad q \neq 1$$

Demonstração. Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ uma P.G.. Queremos encontrar uma expressão para a soma de seus n primeiros termos, isto é,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \quad (3.2)$$

Multiplicando por q ($q \neq 0$) os dois membros da igualdade acima e lembrando a formação dos elementos de uma P.G., temos:

$$\begin{aligned} q \cdot S_n &= q(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n) \\ q \cdot S_n &= a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_2 \cdot q + \cdots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \\ q \cdot S_n &= a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Subtraindo a equação (3.2) da equação (3.3), temos:

$$q \cdot S_n - S_n = (a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n)$$

Daí,

$$S_n \cdot (q - 1) = a_{n+1} - a_1$$

Como $a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$, temos:

$$S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot q^n - a_1$$

Então,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q - 1} \\ S_n &= \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \\ S_n &= \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \end{aligned} \quad (3.4)$$

□

Corolário 3.2.1. A soma dos n primeiros termos de uma P.G. também pode ser dada por:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

Demonstração. Podemos verificar que $q^n = q^{n-1} \cdot q$, desta forma reescrevemos a equação (3.4) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1} \\ &= \frac{a_1(q^{n-1} \cdot q) - a_1}{q - 1} \\ &= \frac{(a_1 q^{n-1}) \cdot q - a_1}{q - 1} \end{aligned}$$

Sabemos que $a_1 q^{n-1} = a_n$, portanto

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

□

Exemplo 3.10:

(a) Considere a P.G. (1,3,9,27,...). Vamos calcular a soma dos 10 primeiros termos:

$$S_{10} = \frac{a_1 q^{10} - a_1}{q - 1} = \frac{1 \cdot 3^{10} - 1}{3 - 1} = \frac{59049 - 1}{2} = 29524.$$

(b) Agora, calculemos a soma das potências de 5 com expoentes inteiros consecutivos, desde 5^2 até 5^{26} :

Para a P.G. $(5^2, 5^3, 5^4, \dots, 5^{26})$, a soma é dada por:

$$S_{25} = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{5^{26} \cdot 5 - 5^2}{5 - 1} = \frac{5^{27} - 5^2}{4}.$$

Esses exemplos ilustram o uso da fórmula da soma dos termos de uma P.G. para calcular as somas de seqüências geométricas específicas.

3.2.3 Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica Infinita

A progressão geométrica infinita é um tema de extrema importância a ser abordado no ensino médio, especialmente por sua relação direta com a geometria fractal. A progressão geométrica infinita é caracterizada por possuir uma infinidade de elementos $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

Exemplo 3.11: Consideremos a P.G. infinita $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$. Formemos a seqüência $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots)$ onde:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\ &\vdots \\ S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Esta última seqüência converge para 1, pois:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - 0 = 1$$

Isso significa que, à medida que somamos mais termos na P.G. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$, nos aproximamos cada vez mais de 1. Portanto, afirmamos que a soma dos infinitos termos dessa P.G. é 1.

Note que essa P.G. é a mesma apresentada do Exemplo 3.8(f). O raciocínio geométrico desenvolvido no referido exemplo para a determinação dos termos da P.G. também pode ser aplicado para mostrar de maneira intuitiva que a soma dos termos dessa P.G. é igual a 1.

De fato, tomemos o quadrado de lado 1. Sabemos que a área desse quadrado é igual a 1. Em seguida, traçando uma reta vertical que passa pelo ponto médio da base, obtemos dois retângulos congruentes, cada um com área igual a $1/2$. Tomamos um desses como primeiro termo da seqüência $a_1 = \frac{1}{2}$. A soma parcial da seqüência será:

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$$

Tomamos o segundo retângulo e vamos dividi-lo em dois quadrados, traçando uma reta horizontal que passa pelo ponto médio do lado maior. Cada um desses quadrados possui área igual a $1/4$. Seja $a_2 = \frac{1}{4}$ o segundo termo da sequência. A soma parcial da sequência será:

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

Repetindo o processo descrito acima, obtemos um conjunto de retângulos e quadrados cujas áreas decrescentes formam a sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$. Já a soma dos termos dessa sequência será:

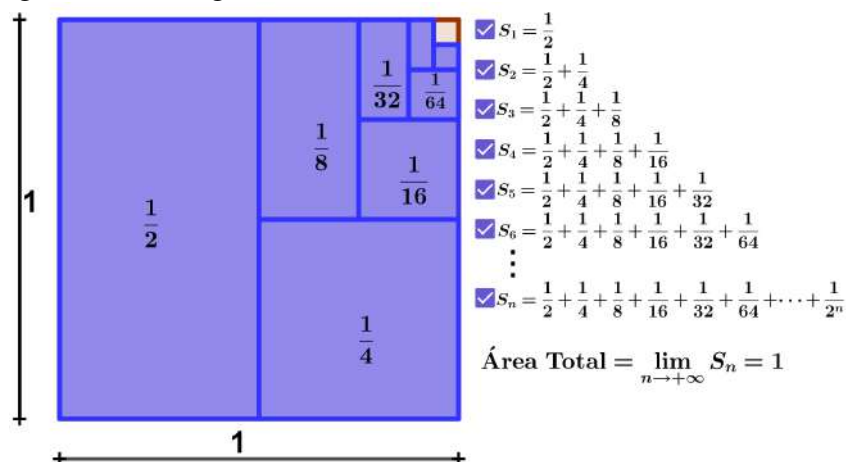
$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

deve corresponder à área do quadrado original, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1,$$

conforme mostrado na Figura 2.

Figura 2 – Visão geométrica da soma dos termos de uma P.G. infinita



Fonte: Autor (2024).

Definição 3.5. Dada uma P.G. infinita $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$, dizemos que $a_1 + a_2 + \dots = S$ se, a sequência $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots)$ formada pelas somas parciais da sequência a_n converge para S , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S.$$

Teorema 3.3. Se $(a_1, a_2, a_3, a_n, \dots)$ é uma P.G. com razão q tal que $-1 < q < 1$, então:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \frac{a_1}{1-q}.$$

Demonstração. Vamos demonstrar que o limite da sequência $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots)$ das somas parciais dos termos da P.G. é $\frac{a_1}{1-q}$.

Pelo Teorema 3.2, $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ e, desta forma, teremos

$$S_n - \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1 - a_1q^n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} = -\frac{a_1}{1-q} \cdot q^n.$$

Lembrando que, para $-1 < q < 1$, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_n - \frac{a_1}{1-q} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{a_1}{1-q} \right) \cdot q^n = -\frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = -\frac{a_1}{1-q} \cdot 0 = 0$$

Portanto,

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

□

Observações:

- (a) Se $a_1 = 0$, a condição $-1 < q < 1$ é desnecessária para a convergência da sequência (S_1, S_2, S_3, \dots) . Nesse caso, é evidente que a P.G. é $(0, 0, 0, \dots)$ e a soma de todos os seus termos é 0, independentemente do valor de q .
- (b) Se $a_1 \neq 0$ e $q < -1$ ou $q > 1$, a sequência (S_1, S_2, S_3, \dots) não converge. Nesse caso, é impossível calcular a soma dos termos da P.G.

Exemplo 3.12:

- (a) Calcular a soma dos termos da P.G. $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots\right)$.

$$\text{Como } q = \frac{1}{3} \text{ e } -1 < \frac{1}{3} < 1, \text{ temos } S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

(b) Calcular a soma dos termos da P.G. $\left(2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots\right)$.

Como $q = -\frac{1}{2}$ e $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, temos:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

(c) Calcular $S = 3 + \frac{6}{5} + \frac{12}{25} + \frac{24}{125} + \dots$

Como as parcelas formam uma P.G. infinita com razão $q = \frac{2}{5}$ e $-1 < \frac{2}{5} < 1$, temos:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{3}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{3}{\frac{3}{5}} = 5.$$

3.3 Aplicações das Progressões Geométricas no cotidiano

As P.G. têm um papel significativo em diversas áreas do conhecimento e aplicações práticas cotidianas, refletindo sua relevância tanto no ensino quanto na vida real. Na teoria dos números, as P.G. são empregadas para investigar números primos e compostos, bem como para compreender a natureza de números irracionais e transcendentais. Elas também são cruciais na análise de funções exponenciais e logarítmicas, sendo fundamentais para a derivação e integração dessas funções no cálculo. Além disso, P.G. são amplamente utilizadas em disciplinas como física, biologia, economia e demografia, onde servem como ferramentas essenciais para modelar fenômenos naturais e processos complexos.

No dia a dia, as P.G. surgem em diversas situações práticas, desde cálculos simples em calculadoras até a aplicação de juros compostos em contas bancárias e o crescimento populacional ordenado. Um exemplo clássico é o cálculo de juros compostos, onde uma quantia emprestada a uma taxa de juros fixa cresce de acordo com uma progressão geométrica (Moreno-García *et al.*, 2023). Outro exemplo importante é a reprodução de micro-organismos, onde cada célula se divide em duas a cada ciclo, resultando em um crescimento geométrico do número de organismos (Mancera, 2002). Na ciência da computação, as P.G. são utilizadas na análise da complexidade de algoritmos, onde a quantidade de tempo ou espaço necessário para resolver um problema frequentemente aumenta geometricamente com o tamanho do problema (Cormen; Leiserson; Rivest; Stein, 2012). Assim, o estudo das progressões geométricas não só aprimora as habilidades matemáticas, mas também é crucial para a compreensão e solução de problemas reais.

Apresentaremos agora exemplos de aplicações de P.G.

3.3.1 Aplicações de P.G.

3.3.1.1 Progressões Geométricas e a invenção do xadrez

Exemplo 3.13: Uma lenda conta que um rei perguntou ao inventor do jogo de xadrez o que ele queria como recompensa pela invenção. E o inventor respondeu: “1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira, 8 pela quarta, 16 pela quinta, e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa”. Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, o número de grãos pedidos pelo inventor do jogo é a soma dos 64 primeiros termos da progressão geométrica $1, 2, 4, \dots$. Qual o valor dessa soma?

Solução:

Para calcular o número total de grãos de trigo pedidos pelo inventor do jogo de xadrez, devemos somar os 64 primeiros termos de uma progressão geométrica (P.G.) onde o primeiro termo $a_1 = 1$ e a razão $q = 2$.

A soma dos primeiros n termos de uma progressão geométrica é dada pela fórmula:

$$S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

Neste caso, temos:

- $a_1 = 1$
- $q = 2$
- $n = 64$

Substituindo esses valores na fórmula, temos:

$$S_{64} = \frac{1 \cdot 2^{64} - 1}{2 - 1}$$

$$S_{64} = 2^{64} - 1$$

$$S_{64} = 18.446.744.073.709.551.615$$

□

Assim, o número total de grãos de trigo pedidos pelo inventor é 18.446.744.073.709.551.615. Supondo que 1 grão de trigo tem massa de 50 miligramas ou 0,000050 kg, o inventor receberia:

$$18.446.744.073.709.551.615 \times 0,000050 \text{ kg} = 922.337.203.685.477.75 \text{ kg}$$

$$\approx 922 \text{ bilhões de toneladas!!}$$

Esse valor é bem superior a produção mundial de trigo em 2023, que foi de “apenas” 785 milhões de toneladas¹.

3.3.1.2 Modelo Geométrico para Crescimento Populacional

Exemplo 3.14: Uma cidade tem uma população inicial de 10.000 habitantes. A população cresce a uma taxa de 5% ao ano. Qual será a população da cidade após 10 anos?

Solução:

Identificamos que este é um problema de crescimento exponencial, que pode ser modelado por uma progressão geométrica². A população inicial P_1 é 10.000 habitantes.

A taxa de crescimento anual é 5%, ou seja, cada ano a população é multiplicada por $1 + 0,05 = 1,05$. Observemos que:

- População Inicial: $P_1 = 10.000 \text{ hab.}$
- Pop. após 1 ano: $P_2 = P_1 \cdot 1,05 = 10.000 \cdot 1,05 = 10.500 \text{ hab.}$
- Pop. após 2 anos: $P_3 = P_2 \cdot 1,05 = P_1 \cdot 1,05 \cdot 1,05 = P_1 \cdot (1,05)^2 = 11.025 \text{ hab.}$
- Pop. após 3 anos: $P_4 = P_3 \cdot 1,05 = P_1 \cdot (1,05)^2 \cdot 1,05 = P_1 \cdot (1,05)^3 \approx 11.576 \text{ hab.}$

O raciocínio acima mostra que a população após n anos, que podemos chamar de P_n , é obtida multiplicando-se a população no ano anterior pelo fator constante 1,05. Podemos utilizar a Definição 3.1 para expressar P_n na forma de uma P.G. de razão $q = 1,05$ e termo inicial $P_1 = 10.000 \text{ hab.}$, ou seja,

$$P_n = P_1 \cdot q^{n-1}$$

onde:

¹ <https://www.statista.com/statistics/267268/production-of-wheat-worldwide-since-1990/>

² Conforme Mancera (2002, p. 84-85), uma forma mais simples de estudar dinâmica populacional é aquela em que a população em um dado período é igual à população no período anterior multiplicada por um fator constante r , tal que, quando $r > 1$, a população cresce geometricamente, e quando $r < 1$, a população decresce geometricamente.

- P_1 é a população inicial (10.000 habitantes);
- q é a razão da P.G. (1,05);
- n é o número de termos.

Queremos encontrar a população após 10 anos ($n = 10$). Substituindo os valores na fórmula, temos:

$$P_{10} = 10.000 \times (1,05)^{10}$$

$$P_{10} = 10.000 \times 1,628894626$$

$$P_{10} \approx 16.289 \text{ hab.}$$

□

Portanto, a população da cidade após 10 anos será aproximadamente 16.289 habitantes.

3.3.1.3 Processos de Decaimento Radioativo

Exemplo 3.15: Um certo isótopo radioativo tem uma meia-vida de 3 anos. Se inicialmente há 1.000 gramas desse isótopo, quanto restará após 9 anos?

Solução:

Seja A_1 a quantidade inicial do isótopo. Observemos que:

- Após $N = 1$ (uma) meia-vida, temos a quantidade $A_2 = A_1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{A_1}{2}$;
- Após $N = 2$ meias-vidas, temos a quantidade $A_3 = \frac{A_2}{2} = A_2 \cdot \frac{1}{2} = A_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = A_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$;
- Após $N = 3$ meias-vidas, temos a quantidade

$$A_4 = \frac{A_3}{2} = A_3 \cdot \frac{1}{2} = A_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = A_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Os exemplos acima sugerem que o decaimento radioativo pode ser modelado pela progressão geométrica de razão $q = \frac{1}{2}$:

$$A_n = A_1 q^{n-1}$$

em que o n -ésimo termo A_n ocorre após uma quantidade de meias-vidas $N = n - 1$.

Primeiramente, vamos determinar o número de meias-vidas equivalente ao período de tempo $t = 9$ anos:

$$N = \frac{t}{\text{meia-vida}} = \frac{9}{3} = 3 \text{ meias-vidas}$$

Logo, o número de meia-vidas é 3, o que equivale a dizer que desejamos determinar o elemento na posição $n = N + 1 = 3 + 1 = 4$. Substituindo os valores na fórmula, temos:

$$\begin{aligned} A_n &= A_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow A_4 = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} \\ A_4 &= 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ A_4 &= 1000 \cdot \frac{1}{8} \\ A_4 &= 125 \end{aligned}$$

□

Portanto, após 9 anos, restarão 125 gramas do isótopo radioativo.

3.3.1.4 Matemática financeira (Juro Composto)

Exemplo 3.16: Um investidor aplica R\$ 5.000,00 em uma conta de investimento que oferece uma taxa de juros compostos de 6% ao ano. Quanto dinheiro ele terá na conta após 5 anos?

Solução:

A fórmula para o valor futuro M em juros compostos é:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

onde:

- C (capital inicial) = R\$ 5.000,00
- i (taxa de juros) = 6% a.a. = 0,06
- t (tempo) = 5 anos

Substituindo os valores na fórmula, temos:

$$M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow M = 5.000 \cdot (1 + 1,06)^5$$

$$M = 5.000 \cdot (1,06)^5$$

$$M = 5.000 \cdot 1,338225$$

$$M \approx 6.691,125$$

□

Portanto, após 5 anos, o investidor terá aproximadamente R\$ 6.691,13 na conta.

3.3.1.5 Sistemas digitais (tempo de bloqueio da tela do telefone)

Exemplo 3.17: Um sistema de segurança de um telefone aumenta o tempo de bloqueio da tela após cada tentativa de desbloqueio falhada. Se o tempo de bloqueio inicial é de 30 segundos e a cada tentativa falhada o tempo de bloqueio dobra, qual será o tempo de bloqueio após a sexta tentativa falhada?

Solução:

A fórmula para o n -ésimo termo de uma P.G. é:

$$T_n = T_0 \cdot q^n$$

onde

- T_0 (tempo de bloqueio inicial) = 30 segundos
- q (razão) = 2, já que o tempo de bloqueio dobra a cada tentativa falhada.
- n (quantidade de tentativas falhadas) = 6

Substituindo os valores na fórmula, temos:

$$T_n = T_0 \cdot q^n \Rightarrow T_6 = 30 \cdot 2^6$$

$$T_6 = 30 \cdot 64$$

$$T_6 = 1.920$$

□

Portanto, após a sexta tentativa falhada, o tempo de bloqueio da tela do telefone será de 1.920 segundos, ou 32 minutos.

3.3.2 Agricultura (proliferação de fungos e bactérias)

Exemplo 3.18: Em uma fazenda, uma colônia de fungos cresce exponencialmente. Inicialmente, há 200 esporos de fungos. Se a população de esporos triplica a cada dia, quantos esporos haverá após 7 dias?

Solução:

A fórmula para o n -ésimo termo de uma P.G. é:

$$P_n = P_0 \cdot q^n$$

onde:

- P_0 (população inicial de esporos) = 200
- q (razão) = 3, á que a população de esporos triplica a cada dia.
- n (quantidade de dias) = 7

Substituindo os valores na fórmula, temos:

$$P_n = P_0 \cdot q^n \Rightarrow P_7 = 200 \cdot 3^7$$

$$P_7 = 200 \cdot 2.187$$

$$P_7 = 437.400$$

□

Portanto, após 7 dias, haverá 437.400 esporos de fungos na fazenda.

4 A BELEZA DOS FRACTAIS

4.1 História da Geometria Fractal

A história da geometria fractal remonta ao final do século XIX, quando matemáticos como Georg Cantor e Felix Hausdorff começaram a explorar as propriedades de conjuntos não diferenciáveis. Cantor foi o primeiro a introduzir o conceito de dimensão fractal, que desafia a noção tradicional de dimensão euclidiana. Ele mostrou que conjuntos como o conjunto de Cantor possuem uma dimensão maior do que zero, porém menor do que um. Hausdorff, por sua vez, desenvolveu uma teoria mais abrangente da medida e da dimensão fractal, estabelecendo as bases para a geometria fractal moderna (Sousa; Montelo; Saraiva; Leite, 2018).

O conceito de geometria fractal teve sua origem no século XX, com os trabalhos pioneiros de matemáticos como Benoit Mandelbrot e Gaston Julia. Mandelbrot, em seu livro “The Fractal Geometry of Nature”, publicado em 1982, introduziu o termo “fractal” para descrever formas geométricas complexas e irregulares encontradas na natureza. Julia, por sua vez, desenvolveu a teoria dos conjuntos de Julia, que são conjuntos fractais gerados a partir de equações polinomiais iterativas (Barbosa, 2005, p. 18).

4.2 Aplicações dos Fractais e Suas Potencialidades para o ensino de Matemática

A geometria fractal desempenha um papel fundamental no desenvolvimento de modelos matemáticos para fenômenos naturais complexos. Por exemplo, ela tem sido amplamente na modelagem de fenômenos naturais complexos, como o crescimento de plantas, o padrão das ondas do mar e o comportamento do clima. Através da aplicação de princípios fractais nessas áreas, os cientistas podem obter uma compreensão mais profunda dos processos subjacentes e criar modelos mais precisos. Por exemplo, os fractais são empregados na compressão de imagens digitais, permitindo reduzir o tamanho dos arquivos sem perda significativa de qualidade visual. Também são utilizados na geração de paisagens virtuais realistas em jogos e filmes, proporcionando um ambiente visualmente impressionante e imersivo (Sousa; Montelo; Saraiva; Leite, 2018).

Além de suas aplicações na natureza, a geometria fractal também possui diversas aplicações práticas em áreas como medicina, engenharia e computação gráfica. Na medicina, por exemplo, os fractais são usados para analisar imagens médicas e identificar padrões irregulares

que podem indicar doenças. Na engenharia, a geometria fractal é aplicada no projeto de estruturas resistentes e eficientes. Já na computação gráfica, os fractais são utilizados para criar paisagens virtuais realistas.

No entanto, o ensino da geometria fractal no Ensino Médio enfrenta algumas dificuldades. Uma delas é a falta de recursos didáticos adequados, já que muitos livros e materiais educacionais não abordam adequadamente esse tema complexo. Além disso, a compreensão dos conceitos fractais requer uma abstração maior do que em outros tópicos matemáticos tradicionais, o que pode dificultar o aprendizado dos alunos.

Para facilitar o ensino da geometria fractal no Ensino Médio, é possível utilizar estratégias pedagógicas específicas. Por exemplo, o uso de exemplos concretos e atividades práticas pode ajudar os alunos a visualizarem e compreenderem melhor os conceitos fractais. Além disso, é importante incentivar a exploração e a experimentação por parte dos estudantes, permitindo que eles descubram as propriedades dos objetos fractais por si mesmos.

O ensino da geometria fractal no Ensino Médio traz diversos benefícios para os alunos. Além de estimular o pensamento crítico ao desafiar as noções tradicionais de geometria, a geometria fractal também promove a criatividade ao permitir que os alunos explorem padrões e formas complexas. Além disso, o estudo da geometria fractal desenvolve a capacidade dos alunos de resolver problemas complexos, uma habilidade essencial para o mundo atual. Portanto, é fundamental incluir a geometria fractal no currículo do Ensino Médio, proporcionando aos estudantes uma base sólida nesse campo fascinante da matemática.

A introdução da geometria fractal no ensino médio é de extrema importância, uma vez que essa abordagem pode despertar o interesse dos alunos pela matemática e estimular o pensamento crítico. Os fractais são objetos geométricos complexos e fascinantes, que apresentam propriedades únicas e desafiadoras. Ao introduzir os fractais no currículo escolar, os estudantes têm a oportunidade de explorar conceitos matemáticos de forma mais concreta e visualmente atrativa, o que pode tornar o aprendizado mais significativo e motivador.

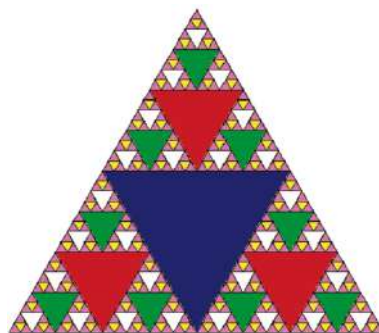
Ensinar geometria fractal no ensino médio apresenta desafios e possibilidades. Devido à complexidade dos conceitos envolvidos, é necessário utilizar estratégias pedagógicas que facilitem a compreensão dos alunos. Uma abordagem possível é iniciar com exemplos concretos de fractais encontrados na natureza, como as formas das nuvens ou os padrões das folhas. Em seguida, pode-se introduzir os conceitos matemáticos necessários para entender a estrutura e as propriedades dos fractais. Além disso, o uso de recursos visuais, como imagens e animações,

pode auxiliar na visualização dos fractais e na compreensão de suas características únicas.

4.3 Características dos Fractais

As características principais da geometria fractal são a autossimilaridade, a complexidade infinita e a dimensão fracionária. A autossimilaridade refere-se à propriedade das formas fractais se repetirem em diferentes escalas. Ou seja, ao ampliar ou reduzir uma parte do fractal, é possível encontrar uma cópia semelhante do todo. A Figura 3 ilustra a propriedade de autossimilaridade para o fractal conhecido como Triângulo de Sierpinski.

Figura 3 – Autossimilaridade exata do Triângulo de Sierpinski



Fonte: Miller e Ranum (2014).

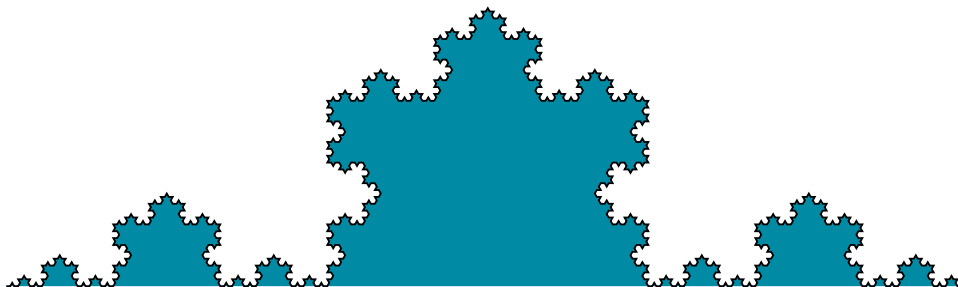
A complexidade infinita diz respeito à capacidade dos fractais de apresentarem detalhes infinitos. Já a dimensão fracionária é uma medida que permite descrever a complexidade dos fractais, sendo um valor não inteiro que indica que essas formas ocupam um espaço maior do que as figuras geométricas tradicionais (Janos, 2018, p. 41).

A geometria fractal possui grande importância no ensino médio devido às suas aplicações em diversas áreas do conhecimento. Na biologia, por exemplo, os fractais podem ser utilizados para modelar estruturas complexas como árvores e vasos sanguíneos. Na física, os fractais têm sido aplicados no estudo de fenômenos como o comportamento de fluido sem meios porosos. Já na economia, os fractais têm sido utilizados para modelar séries temporais financeiras e prever tendências de mercado.

Para ilustrar os conceitos da geometria fractal, é possível utilizar exemplos práticos de objetos fractais famosos. A curva de Koch, mostrada na Figura 4, por exemplo, é um objeto formado por segmentos retos que se subdividem infinitamente em triângulos equiláteros menores. O conjunto de Mandelbrot é outro exemplo importante, sendo uma figura complexa gerada através de uma fórmula matemática iterativa. Além disso, a esponja de Menger é um objeto

tridimensional formado por cubos menores que são removidos de forma recursiva. Esses exemplos permitem aos alunos visualizarem as propriedades fractais e compreenderem como elas se manifestam em diferentes contextos.

Figura 4 – Curva de Koch



Fonte: Autor (2014).

Uma das principais propriedades dos fractais é a autossimilaridade, que se refere à presença de padrões semelhantes em diferentes escalas. Isso significa que um fractal pode ser dividido em partes menores, cada uma delas sendo uma cópia reduzida do todo. Essa característica confere aos fractais uma aparência intrincada e detalhada, mesmo quando observados em ampliações sucessivas. A autossimilaridade é um conceito fundamental para compreender a estrutura dos fractais e sua relação com a geometria tradicional (Janos, 2018, p. 45).

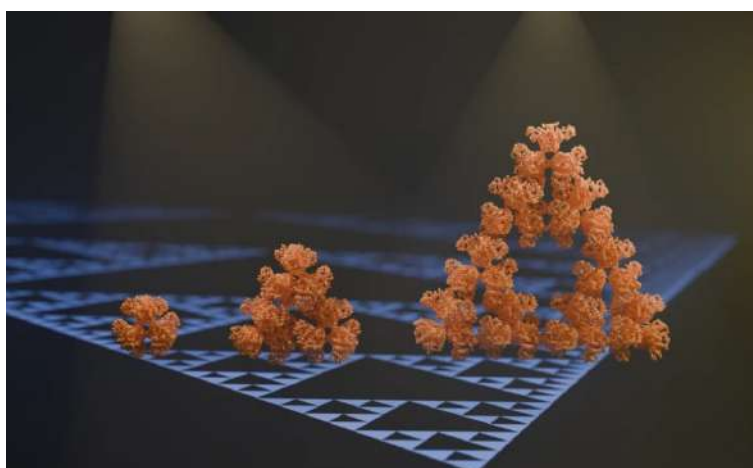
A dimensão fractal difere da dimensão euclidiana e pode ser calculada utilizando o conceito de autossimilaridade. Enquanto a dimensão euclidiana é um número inteiro que representa a extensão ocupada por um objeto no espaço tridimensional, a dimensão fractal é um número real que mede a complexidade ou rugosidade de um objeto. Através da análise da autossimilaridade de um fractal, é possível determinar sua dimensão fractal utilizando técnicas matemáticas específicas, como a contagem de caixa ou a dimensão de Hausdorff-Besicovitch (Janos, 2018, p. 63).

A recursividade é uma característica fundamental dos fractais, pois eles podem ser construídos através de processos repetitivos e iterativos. Essa propriedade permite que os fractais sejam gerados a partir de um conjunto inicial de regras simples, que são aplicadas repetidamente para criar estruturas cada vez mais complexas. Através da recursividade, os fractais podem adquirir formas intrincadas e detalhadas, que se assemelham a fenômenos naturais como nuvens, montanhas e árvores.

Como exemplificação das características e propriedades dos fractais, recentemente, uma equipe internacional de pesquisadores anunciou a descoberta do primeiro fractal molecular

regular na natureza. A citrato sintase de uma cianobactéria forma espontaneamente o padrão conhecido como triângulo de Sierpinski, um arranjo de triângulos menores que se repete ao infinito. Este padrão é uma das formas mais elementares da geometria fractal, descrita pelo matemático polonês Waclaw Franciszek Sierpinski em 1915. Embora estruturas fractais, como flocos de neve e folhas de samambaia, sejam comuns na natureza, um fractal regular e autossemelhante como o triângulo de Sierpinski nunca havia sido documentado naturalmente. A descoberta é surpreendente porque essas estruturas moleculares geralmente seguem padrões simétricos. No entanto, a citrato sintase se organiza de forma assimétrica, violando as regras de simetria e criando um fractal com grandes vazios triangulares, como podemos observar na Figura 5.

Figura 5 – A primeira molécula fractal natural que se conhece



Fonte: Descoberta [...] (2024).

Curiosamente, essa formação fractal não parece ter uma função específica para a cianobactéria, sugerindo que a beleza e complexidade dos fractais moleculares podem surgir espontaneamente na evolução, sem necessariamente ter um propósito adaptativo imediato.

A natureza caótica dos fractais é outra propriedade importante a ser destacada. Pequenas variações nos parâmetros de um fractal podem levar a grandes mudanças em sua aparência e comportamento. Isso significa que pequenas alterações nas regras de construção de um fractal podem resultar em estruturas completamente diferentes. Essa característica caótica dos fractais reflete a sensibilidade do sistema às condições iniciais e torna seu estudo ainda mais desafiador e fascinante (Barbosa, 2005, p. 09).

4.4 Fractais Clássicos

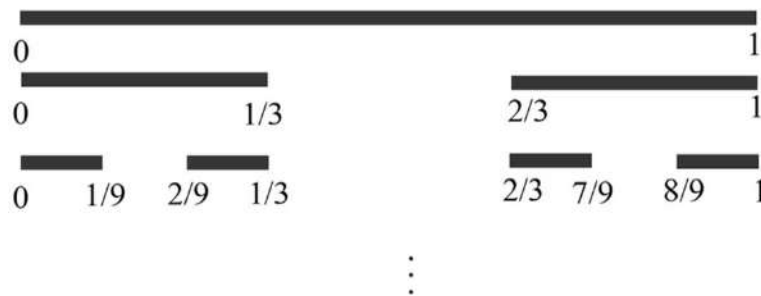
4.4.1 A Poeira de Cantor

A Poeira de Cantor também conhecido como o Conjunto de Cantor, é um exemplo clássico na teoria dos conjuntos e na teoria da medida, destacando conceitos fundamentais na matemática. Esse conjunto peculiar é caracterizado por ser não contável, composto por números reais, e paradoxalmente, possui comprimento zero. A construção desse conjunto envolve um processo iterativo de remoção de intervalos.

O procedimento para criar a Poeira de Cantor é o seguinte: inicialmente, considera-se um intervalo fechado de $[0, 1]$. Posteriormente, remove-se o intervalo aberto correspondente ao terço central do intervalo inicial, resultando em dois intervalos menores: $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$. Repetido um número infinito de vezes, o processo gera um conjunto infinito de comprimento nulo.

A Poeira de Cantor é composto pelos números que resistem a todas essas remoções. Cada ponto neste conjunto não é removido em nenhum passo do processo iterativo, conforme mostrado na Figura 6. Esta construção desafia as intuições comuns sobre conjuntos e fornece uma perspectiva intrigante sobre a teoria da medida e topologia na matemática.

Figura 6 – Poeira de Cantor



Fonte: Almeida e Santos (2017).

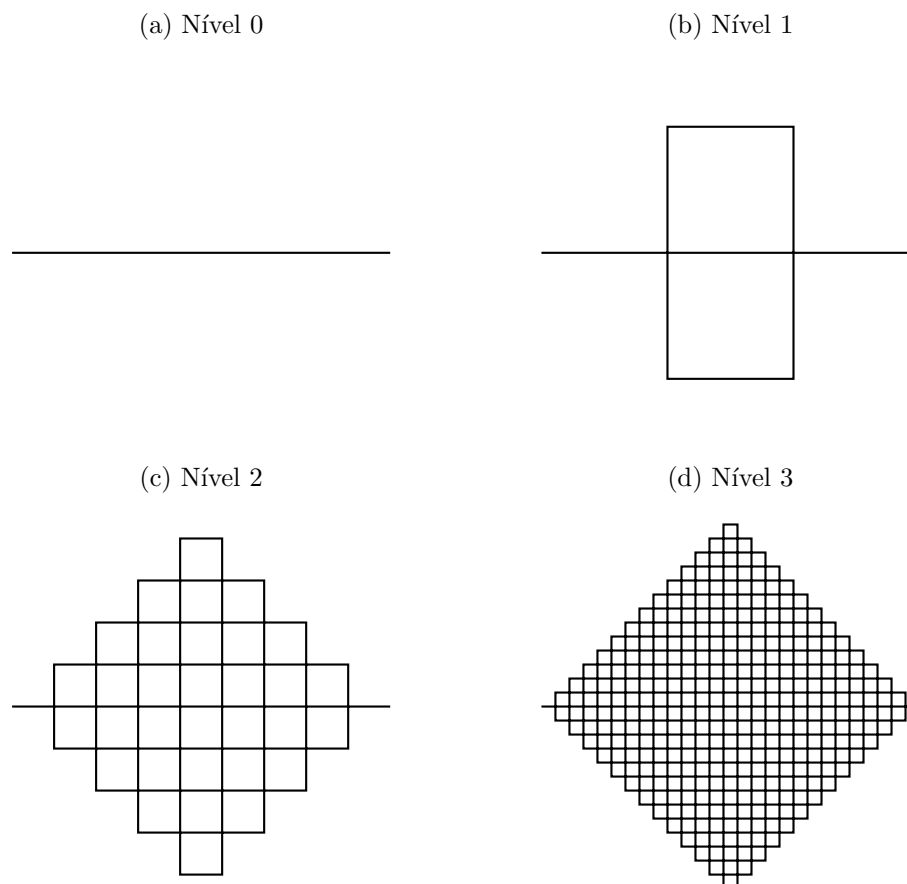
Desse modo, denominaremos por K , onde ele é caracterizado por $K = \bigcap_{N=0}^{\infty} I_N$. Desta maneira, K representa o conjunto de pontos resultantes ao repetir infinitamente os passos de remoção de intervalos. Em especial, K possui comprimento inferior a qualquer I_N cujo comprimento é $\frac{2^N}{3^N} = \left(\frac{2}{3}\right)^N$.

Dado que $\left(\frac{2}{3}\right)^N$ tende a zero à medida que N se aproxima do infinito, concluímos que o comprimento da Poeira de Cantor é nulo, implicando que K não contém nenhum intervalo.

4.4.2 A Curva de Peano

A Curva de Peano, também conhecida como curva de preenchimento de espaço, é uma curva contínua que foi apresentada pelo matemático italiano Giuseppe Peano em 1890. Esta curva tem a notável propriedade de preencher completamente um quadrado bidimensional, ou seja, ela passa por cada ponto dentro de um quadrado unitário sem nunca se desconectar. A construção de Peano desafiou a intuição matemática da época, pois demonstrou que uma linha unidimensional pode, de maneira contínua e sem saltos, preencher uma área bidimensional. A curva é definida de forma recursiva, começando com uma subdivisão do quadrado em nove partes iguais e conectando-as em uma ordem específica; essa subdivisão e reconexão são repetidas infinitamente, resultando na curva final que cobre todo o quadrado. Para iniciar a construção da Curva de Peano, começamos criando um segmento de reta. Posteriormente, substituímos esse segmento por uma curva composta por nove segmentos, como ilustrado na primeira interação, sendo cada um deles em escala $\frac{1}{3}$. Esse processo é reiterado, substituindo cada segmento anterior pela curva formada por nove segmentos como podemos observar na Figura 7.

Figura 7 – Curva de Peano



Fonte: Adaptado de Barbosa (2005).

Ao observar a Figura 7(b), notamos a presença de dois quadrados na primeira iteração. Na iteração de Nível 2, mostrada na Figura 7(c), existem 32 quadrados. Continuando, ao substituir cada segmento desta segunda iteração pela curva composta por nove segmentos, alcançamos a iteração de Nível 3, que possui 338 pequenos quadrados, como ilustrado na Figura 7(d).

A progressiva ocupação de uma área quadrada pela curva torna-se clara, com a diagonal dessa região sendo definida pelo segmento inicial. Assim, a área dessa região quadrada (com o segmento inicial medindo 1) é calculada como $A = L^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Quanto ao comprimento da Curva de Peano, começamos com o próprio segmento, que é igual a 1. Na primeira iteração, o comprimento é obtido pela soma das medidas dos nove segmentos, ou seja, $9 \times \frac{1}{3} = 3$. Já na segunda iteração, cada um dos nove segmentos se divide em outros nove, resultando em $81 \times \frac{1}{9} = 9 = 3^2$. Na terceira iteração, teremos $81 \times 9 = 729$ segmentos, cada um com medida $1/27$, logo o comprimento é $729 \times \frac{1}{27} = 27 = 3^3$.

Resumidamente, os comprimentos sucessivos da curva de Peano são expressos por potências de 3, com expoentes correspondentes à ordem n da iteração. Ou seja, o comprimento, denotado por c_n , é dado por:

$$c_n = 3^n$$

À medida que a ordem da iteração n aumenta, o comprimento da curva cresce indefinidamente, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty.$$

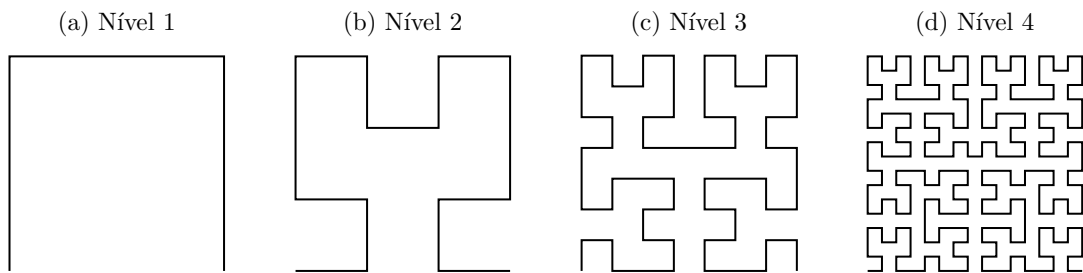
4.4.3 Evolução da Curva de Hilbert

A Curva de Hilbert, uma variação notável da Curva de Peano, destaca-se no conjunto de curvas espaço-filling, conhecidas por sua capacidade de preencher de maneira contínua uma área específica. Este fractal é um exemplar clássico de estruturas geométricas com padrões autossimilares, evidenciando semelhanças em diferentes escalas.

A definição matemática da Curva de Hilbert fundamenta-se na concepção de uma curva paramétrica em um espaço métrico. A parametrização desempenha um papel crucial na descrição do percurso da curva no plano, enquanto o espaço métrico fornece a estrutura matemática necessária para mensurar distâncias e estabelecer conceitos de continuidade.

A construção da Curva de Hilbert é marcada por transformações geométricas iterativas, especialmente rotações e reflexões. Essas transformações são aplicadas de maneira iterativa, com cada etapa contribuindo para a formação da intrincada e autossimilar Curva de Hilbert, como mostrado na Figura 8.

Figura 8 – Evolução da Curva de Hilbert



Fonte: Adaptado de Kilhian (2010).

Dessa forma, a Curva de Hilbert representa um exemplo fascinante de como conceitos matemáticos, como parametrização e transformações geométricas iterativas, convergem para criar uma estrutura fractal única. Suas aplicações são vastas, estendendo-se a campos como ciência da computação e modelagem matemática.

O desenvolvimento da Curva de Hilbert é um procedimento iterativo que implica em sucessivas transformações geométricas. Inicialmente, parte-se de um segmento (que pode assumir a forma de uma linha reta ou outra configuração inicial). Posteriormente, são aplicadas rotações e reflexões para originar novos segmentos, seguindo o padrão autossimilar característico da Curva de Hilbert. O ciclo iterativo é repetido conforme necessário, ajustando o nível de detalhe desejado.

Ao adotar esses passos, a Curva de Hilbert é gradativamente delineada, revelando sua intrincada complexidade fractal e características geométricas únicas.

As equações paramétricas da Curva de Hilbert para a n -ésima iteração são expressas da seguinte forma:

$$x_n(t) = \frac{1}{2}(x_{n-1}(t) + y_{n-1}(t))$$

$$y_n(t) = \frac{1}{2}(y_{n-1}(t) - x_{n-1}(t))$$

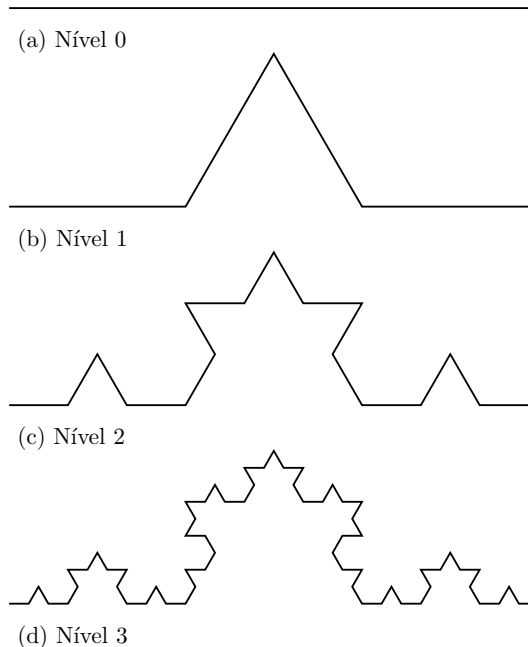
onde $x_{n-1}(t)$ e $y_{n-1}(t)$ representam as coordenadas da curva na $(n - 1)$ -ésima iteração. Essas equações paramétricas descrevem as coordenadas x e y da Curva de Hilbert em termos de um parâmetro t , fornecendo a evolução contínua da curva à medida que o parâmetro varia. Essa

formulação paramétrica é fundamental para compreender a construção iterativa e autossimilar da Curva de Hilbert.

4.4.4 A Curva e o Floco de Neve de Koch

A Curva de Koch é um objeto matemático que consiste em um segmento de reta sobre o qual é aplicada uma transformação. A transformação é feita dividindo esse segmento em três pedaços congruentes, criando um triângulo equilátero sobre o segmento central e removendo sua base, conforme ilustra a Figura 9. A regra é repetida infinitas vezes, gerando uma figura de comprimento infinito.

Figura 9 – Evolução da Curva de Koch



Fonte: Adaptado de Jelinek e Fernandez (1998).

A criação da Tabela 2 resulta da iteração da Curva de Koch.

Tabela 2 – Quantidade de segmentos obtidos pela iteração da Curva de Koch.

Iteração (n)	Quantidade de segmentos (a_n)
Nível 0	$a_0 = 1$
Nível 1	$a_1 = 4$
Nível 2	$a_2 = 16$
Nível 3	$a_3 = 64$
⋮	⋮

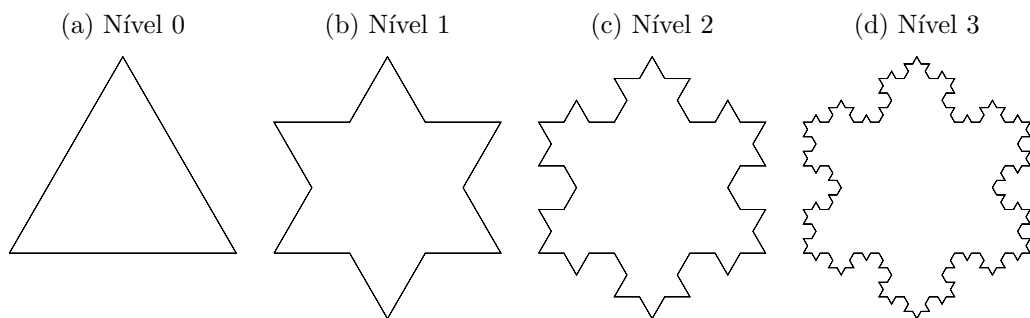
Fonte: Autor (2024).

A sequência $a_n = a_0 \cdot q^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ forma uma Progressão Geométrica (P.G.) com razão $q = 4$. Para determinar o número de segmentos que o fractal Curva de Koch terá na n -ésima iteração (nível n), basta aplicar a fórmula do termo geral da P.G.

No estágio inicial, observamos um segmento de reta, e no nível subsequente, surgem 4 segmentos, cada um com comprimento equivalente a $\frac{1}{3}$ do segmento inicial. Conseqüentemente, em cada nível, cada segmento é dividido em quatro partes, e o fator de aumento igual a três¹.

A Figura 10 mostra o fractal conhecido como Floco de Neve de Koch. Trata-se de uma variante da Curva de Koch, no qual, em vez de iniciar com um segmento de reta, utilizamos um triângulo equilátero.

Figura 10 – Evolução do Floco de Neve de Koch



Fonte: Adaptado de Fernanda (2011).

Para obter a primeira iteração, procedemos dividindo os segmentos de um triângulo equilátero em três partes congruentes, substituindo o segmento central por um triângulo equilátero sem a base. Dessa forma, cada lado do triângulo equilátero inicial passa a conter quatro segmentos congruentes, resultando em $3 \times 4 = 12$ segmentos ao final da primeira iteração.

Na segunda iteração, o processo é repetido nos 12 segmentos congruentes. Ao retirar a parte central e substituí-la por um triângulo equilátero sem a base, semelhante ao passo inicial, obtemos $(3 \times 4) \times 4 = 48$ segmentos.

Se aplicarmos o mesmo procedimento na terceira iteração, teremos $[(3 \times 4) \times 4] \times 4 = 3 \times 4^3 = 192$ segmentos. Ao repetir infinitamente o processo, seja Seg_n o número de segmentos do fractal para o nível n . Então, o raciocínio desenvolvido acima permite concluir que $Seg_n = 3 \times 4^n$.

¹ Conforme Barbosa (2005), a relação entre o número de partes (n) em que se divide cada segmento e o fator de aumento (m) permite determinar a dimensão d do fractal (dimensão de Hausdorff). No caso da curva de Koch,

$$d = \frac{\log n}{\log m} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,2619.$$

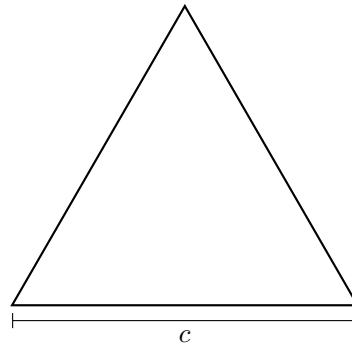
Para calcular o perímetro do Floco de Neve de Koch, assumimos c como o comprimento do lado do triângulo equilátero inicial. Na segunda iteração, cada lado do triângulo é dividido em três segmentos congruentes, resultando em 4 segmentos totais. No segmento intermediário, é construído um triângulo equilátero sem uma das partes. Portanto, cada segmento tem um comprimento de $\frac{1}{3} \cdot c$.

4.4.4.1 Perímetro do Floco de Neve de Koch

- Nível 0

Consideremos um triângulo equilátero de lado c , conforme mostrado na Figura 11.

Figura 11 – Perímetro do Floco de Neve de Koch - Nível 0



Fonte: Autor (2024).

Seja $2P_0$ o perímetro² do Floco de Neve de Koch no Nível 0. Assim, tem-se

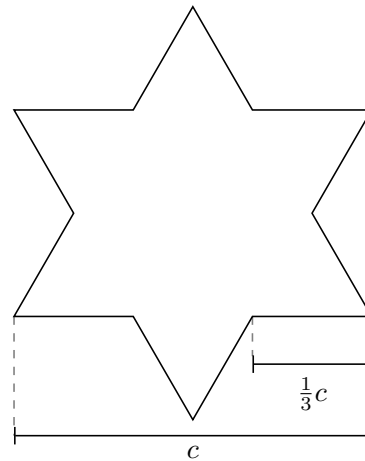
$$2P_0 = 3c$$

- Nível 1

Para construir a iteração de Nível 1, divide-se cada lado de comprimento c em três partes iguais. Substituindo o segmento central por um triângulo equilátero sem a base, obtém-se 12 segmentos de comprimento $\frac{1}{3}c$, como mostrado na Figura 12.

² O uso da expressão $2P$ para o perímetro de uma figura plana é comum nos manual de geometria, especialmente em contextos específicos, como fórmulas para áreas de polígonos ou cálculos relacionados a semiperímetros. É o caso da formula de Heron para o cálculo da área de um triângulo (Morgado; Wagner; Jorge, 19990).

Figura 12 – Perímetro do Floco de Neve de Koch - Nível 1



Fonte: Autor (2024).

O perímetro $2P_1$ Floco de Neve de Koch no Nível 1 é dado por:

$$2P_1 = 12 \cdot \frac{1}{3}c$$

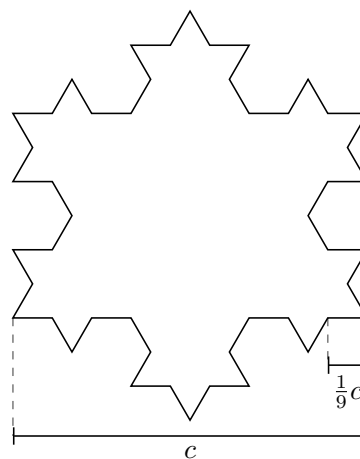
$$2P_1 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3}c$$

$$2P_1 = 3c \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^1$$

- Nível 2

Como ilustra a Figura 13, divide-se cada um dos segmentos de comprimento $\frac{1}{3}c$ do Nível 1 em três partes iguais. Obteremos 48 segmentos, cada uma medindo $\frac{1}{9}c$.

Figura 13 – Perímetro do Floco de Neve de Koch - Nível 2



Fonte: Autor (2024).

Então, o perímetro $2P_2$ do Floco de Neve de Nível 2 será:

$$2P_2 = 48 \cdot \frac{1}{9}c$$

$$2P_2 = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9}c$$

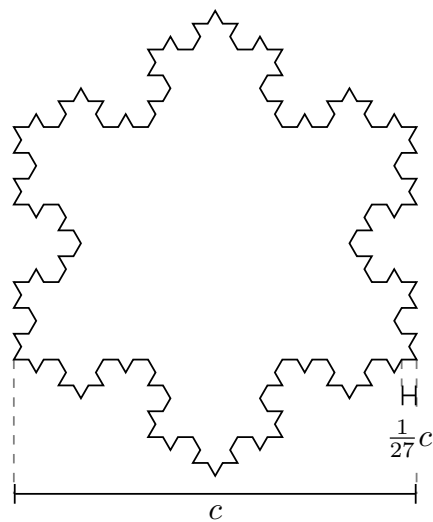
$$2P_2 = 3 \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{3^2}c$$

$$2P_2 = 3c \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

- Nível 3

Vamos aplicar a transformação a cada um dos 48 segmentos do Nível 2. Assim obteremos 192 segmentos, cada um de comprimento $\frac{1}{27}c$, como ilustrado na Figura 14.

Figura 14 – Perímetro do Floco de Neve de Koch - Nível 3



Fonte: Autor (2024).

O perímetro $2P_3$ do Floco de Neve de Nível 3 será:

$$2P_3 = 192 \cdot \frac{1}{27}c$$

$$2P_3 = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{27}c$$

$$2P_3 = 3 \cdot 4^3 \cdot \frac{1}{3^3}c$$

$$2P_3 = 3c \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

- Nível n

O raciocínio desenvolvido acima sugere a seguinte *lei de formação* para o cálculo do perímetro $2P_n$ do Floco de Neve de Koch de Nível n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$):

$$2P_n = 3 \cdot c \cdot \underbrace{4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 4}_{n \text{ vezes}} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{3}}_{n \text{ vezes}}$$

$$2P_n = 3 \cdot c \cdot 4^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$2P_n = 3c \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

□

4.4.4.2 Área do Floco de Neve de Koch

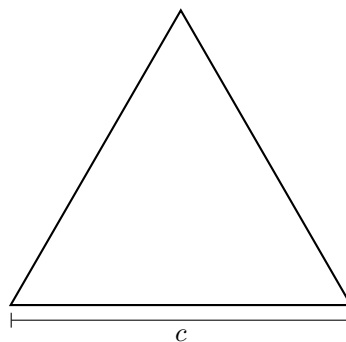
A medida de cada segmento diminui enquanto o processo iterativo avança, uma vez que $\frac{1}{3} < 1$, o comprimento de cada segmento se aproxima de zero. Durante o processo de construção do floco de neve de Koch, triângulos equiláteros são adicionados em cada iteração, sendo suas arestas proporcionais ao comprimento c da aresta do triângulo original. A fórmula para a área A do triângulo equilátero inicial é expressa como:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2$$

- Nível 0

Considere o triângulo equilátero de lado c da Figura 15.

Figura 15 – Área do Floco de Neve de Koch - Nível 0



Fonte: Autor (2024).

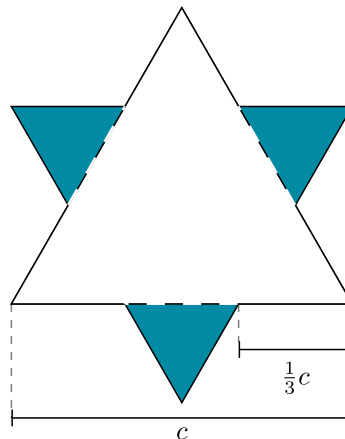
Sabemos que a área A de um triângulo equilátero é dado por $A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2$. Sendo c a medida do lado do triângulo equilátero, temos:

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot c^2$$

- Nível 1

Considere o floco de neve e Koch para a iteração de Nível 1 mostrado na Figura 16. Em comparação com o Nível 0, surgem os três triângulos pequenos que estão destacados na referida figura.

Figura 16 – Área do Floco de Neve de Koch - Nível 1



Fonte: Autor (2024).

A área A_1 de cada triângulo pequeno destacado na Figura 16:

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}c\right)^2$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9}c^2$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}c^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^1$$

Percebe-se que a área total do floco da Figura 16 é dada por $A_{T_1} = A_0 + 3A_1$. Assim,

$$A_{T_1} = A_0 + 3A_1$$

$$A_{T_1} = \frac{\sqrt{3}c^2}{4} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}c^2}{4} \cdot \frac{1}{9}$$

$$A_{T_1} = \frac{\sqrt{3}c^2}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}c^2}{4}$$

$$A_{T_1} = \frac{\sqrt{3}c^2}{4} \left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

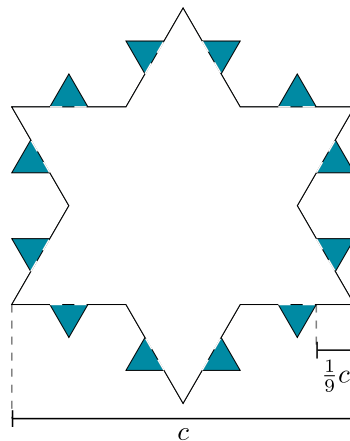
$$A_{T_1} = \frac{\sqrt{3}c^2}{4} \cdot \frac{4}{3}$$

$$A_{T_1} = \frac{\sqrt{3}c^2}{3}$$

- Nível 2

O lado do triângulo pequeno é dividido por 3 novamente, surgindo $12 = 3 \cdot 4$ novos triângulos. Assim, temos que o novo lado mede $\frac{1}{9}c$, conforme ilustrado na Figura 17.

Figura 17 – Área do Floco de Neve de Koch - Nível 2



Fonte: Autor (2024).

Deste modo, calculamos a área do triângulo pequeno adicionado:

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}c\right)^2$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 c^2$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}c^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2$$

Desta maneira, a área total do floco é:

$$\begin{aligned}
 A_{T_2} &= A_{T_1} + 12A_2 \\
 A_{T_2} &= \frac{\sqrt{3}c^2}{3} + 12 \cdot \frac{\sqrt{3}c^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \\
 A_{T_2} &= \frac{\sqrt{3}c^2}{3} + 3\sqrt{3}c^2 \cdot \frac{1}{81} \\
 A_{T_2} &= \frac{\sqrt{3}c^2}{3} + \sqrt{3}c^2 \cdot \frac{1}{27} \\
 A_{T_2} &= \frac{9\sqrt{3}c^2 + \sqrt{3}c^2}{27} \\
 A_{T_2} &= \frac{10\sqrt{3}c^2}{27}
 \end{aligned}$$

- Nível n

O lado do triângulo pequeno é dado por $\frac{1}{3^n}c$. Assim, calculamos a área do triângulo pequeno:

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 \\
 A_n &= \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 \cdot \frac{1}{3^{2n}} \\
 A_n &= \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n
 \end{aligned}$$

E portanto, a área do floco de nível n é:

$$A_{T_n} = A_{T_{n-1}} + A_n$$

A Tabela 3 resume os cálculos apresentados e mostra as progressões geométricas que surgem durante a construção do Floco de Neve de Koch para cada nível da iteração.

Tabela 3 – Progressões Geométricas na construção do Floco de Neve de Koch

Iterações (n)	Quantidade de segmentos (Seg_n)	Medida de cada segmento (L_n)	Perímetro total do Floco de Neve de Koch ($2P_n$)	Quantidade de triângulos adicionados (N_n)	Área de cada triângulo adicionado (A_n)
Nível 0	3	c	$3c$	–	–
Nível 1	$3 \cdot 4^1$	$c \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1$	$3c \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^1$	3	$\frac{\sqrt{3}c^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^1$
Nível 2	$3 \cdot 4^2$	$c \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$	$3c \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$	$3 \cdot 4^1$	$\frac{\sqrt{3}c^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2$
Nível 3	$3 \cdot 4^3$	$c \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$	$3c \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3$	$3 \cdot 4^2$	$\frac{\sqrt{3}c^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
Nível n	$3 \cdot 4^n$	$c \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$3c \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$	$3 \cdot 4^{n-1}$	$\frac{\sqrt{3}c^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n$

Fonte: Autor (2024).

A partir da Tabela 3, fica evidente a conexão entre Progressões Geométricas com Fractais. Por exemplo, a quantidade de segmentos em um determinado nível é dada por uma P.G. cujo primeiro termo é igual a 3 e de razão 4, ou seja:

$$Seg_n = 3 \cdot 4^n$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ é o nível da iteração, conforme Tabela 3. Se quisermos calcular a quantidade de segmentos no nível 5 ($n = 5$), temos:

$$\begin{aligned} Seg_n = 3 \cdot 4^n &\Rightarrow Seg_5 = 3 \cdot 4^5 \\ &= 3 \cdot 1.024 \\ &= 3.072 \text{ segmentos.} \end{aligned}$$

Portanto, o Floco de Neve de Koch no nível 5 possui 3.072 segmentos.

Já para calcularmos a medida de cada segmento, utiliza-se uma P.G. cujo primeiro termo é dado pelo comprimento inicial c e com razão $\frac{1}{3} < 1$. A fórmula do termo geral dessa P.G. será:

$$L_n = c \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

em que $n = 0, 1, 2, \dots$ é o nível da iteração. Assim, no nível 5 ($n = 5$), temos:

$$\begin{aligned} L_n &= c \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow L_5 = c \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \\ &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \\ &= c \cdot \frac{1}{243} \approx 0,0041c \end{aligned}$$

Para o perímetro total $2P_n$ do Floco de Neve de Koch tem-se uma P.G. cujo primeiro termo é igual a $3c$ e razão igual a $\frac{4}{3}$, ou seja,

$$2P_n = 3c \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ representando o nível da iteração. Se quisermos calcular o perímetro total do Floco de Neve de Koch no nível 5 ($n = 5$), temos:

$$\begin{aligned} 2P_n &= 3c \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \Rightarrow 2P_5 = 3c \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 \\ &= 3c \cdot \frac{1024}{243} \\ &= \frac{1024}{81}c \end{aligned}$$

Então, o perímetro total do Floco de Neve de Koch no nível $n = 5$ é $\frac{1024}{81}c$.

E a área de cada triângulo adicionado a partir do nível 1 é dada por uma P.G. cujo primeiro termo é igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$ e de razão $\frac{1}{9}$, ou seja, uma P.G. com termo geral dado por:

$$A_n = \frac{\sqrt{3}c^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$

Se quisermos calcular a área de cada triângulo adicionado no nível 5 ($n = 5$), temos:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\sqrt{3}c^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n \Rightarrow A_5 = \frac{\sqrt{3}c^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^5 \\ &= \frac{\sqrt{3}c^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{59049}\right) \\ &\approx 0,0000073c^2 \end{aligned}$$

Portanto, a área de cada triângulo adicionado para o nível $n = 5$ é aproximadamente igual a $0,0000073c^2$.

Assim, podemos concluir que durante a construção iterativa do Floco de Neve de Koch surgem inúmeras Progressões Geométricas que podem ser aplicadas em sala de aula.

4.4.5 O Triângulo e o Tapete de Sierpinski

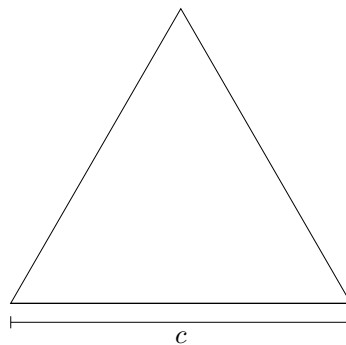
O Triângulo de Sierpinski é um fractal gerado a partir de um triângulo por meio de uma regra simples. Inicialmente, partimos de um triângulo equilátero e conectamos os pontos médios de cada lado com segmentos de reta, resultando em quatro triângulos semelhantes ao original. Em seguida, retiramos a figura central e aplicamos novamente a mesma regra aos três triângulos restantes. Este processo é repetido de forma infinita, convergindo para a configuração final do Triângulo de Sierpinski.

4.4.5.1 Perímetro do Triângulo de Sierpinski

- Nível 0

Considere-se o triângulo equilátero de lado c mostrado na Figura 18.

Figura 18 – Perímetro do Triângulo de Sierpinski - Nível 0



Fonte: Autor (2024).

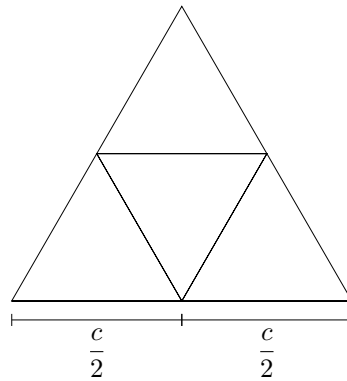
Sabemos que o perímetro $2P_0$ do triângulo equilátero é dado por

$$2P_0 = 3c$$

- Nível 1

Dado o triângulo equilátero do Nível 0, considere-se o triângulo de lado $c/2$, conforme mostrado na Figura 19.

Figura 19 – Perímetro do Triângulo de Sierpinski - Nível 1



Fonte: Autor (2024).

Deste modo, sendo cada lado dividido em dois:

$$2P_1 = 9 \cdot \frac{c}{2}$$

$$2P_1 = \frac{3 \cdot 3 \cdot c}{2}$$

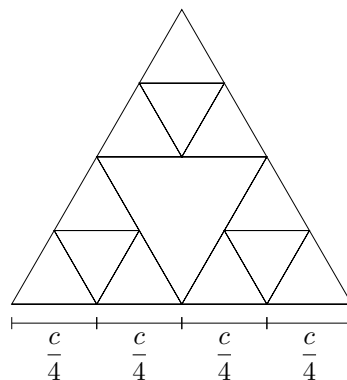
$$2P_1 = 3c \cdot \frac{3}{2}$$

$$2P_1 = 2P_0 \cdot \frac{3}{2}$$

- Nível 2

A Figura 20 mostra o segundo nível de construção do Triângulo de Sierpinski por meio da inclusão de três triângulos de lado $c/4$ cada um.

Figura 20 – Perímetro do Triângulo de Sierpinski - Nível 2



Fonte: Autor (2024).

Obtendo a metade dos lados novamente, a quantidade de lados dos triângulos é elevada

ao quadrado. Assim:

$$2P_2 = 27 \cdot \frac{c}{4}$$

$$2P_2 = \frac{3 \cdot 9 \cdot c}{4}$$

$$2P_2 = 3c \cdot \frac{9}{4}$$

$$2P_2 = 2P_0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

- Nível n

Deste modo, concluímos que

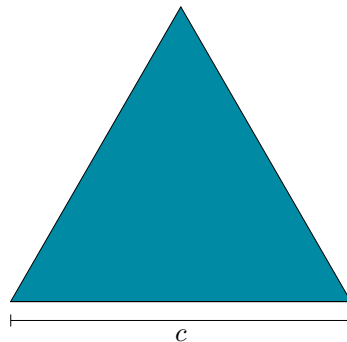
$$2P_n = 2P_0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

4.4.5.2 Área do Triângulo de Sierpinski

- Nível 0

Sabemos que a área A de um triângulo equilátero é dada por $A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2$. Seja c a medida do lado do triângulo equilátero conforme Figura 21.

Figura 21 – Área do Triângulo de Sierpinski - Nível 0



Fonte: Autor (2024).

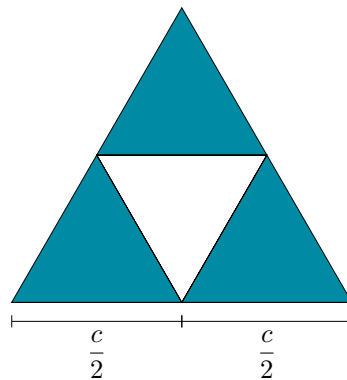
Para o Nível 0, a área do Triângulo de Sierpinski é dada por:

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}c^2}{4}$$

- Nível 1

Dado o triângulo equilátero do Nível 0, considere-se o triângulo de lado $c/2$, conforme mostrado na Figura 22.

Figura 22 – Área do Triângulo de Sierpinski - Nível 1



Fonte: Autor (2024).

Deste modo, considera-se o ponto médio do lado do triângulo, sendo cada lado dividido em dois, como ilustrado na Figura 22:

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3 \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3 \cdot \frac{c^2}{4}$$

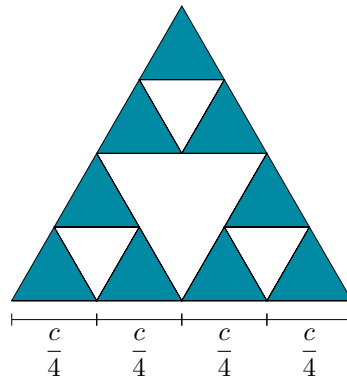
$$A_1 = \frac{\sqrt{3}c^2}{4} \cdot \frac{3}{4}$$

$$A_1 = A_0 \cdot \frac{3}{4}$$

- Nível 2

Da figura no nível 1, retiram-se três triângulos de lado $c/4$, conforme mostra a Figura 23.

Figura 23 – Área do Triângulo de Sierpinski - Nível 2



Fonte: Autor (2024).

Obtendo a metade dos lados novamente, a quantidade de lados dos triângulos é elevada ao quadrado. Assim:

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 9 \cdot \left(\frac{c}{4}\right)^2 \\
 A_2 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 9 \cdot \frac{c^2}{16} \\
 A_2 &= \frac{\sqrt{3}c^2}{4} \cdot \frac{9}{16} \\
 A_2 &= A_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2
 \end{aligned}$$

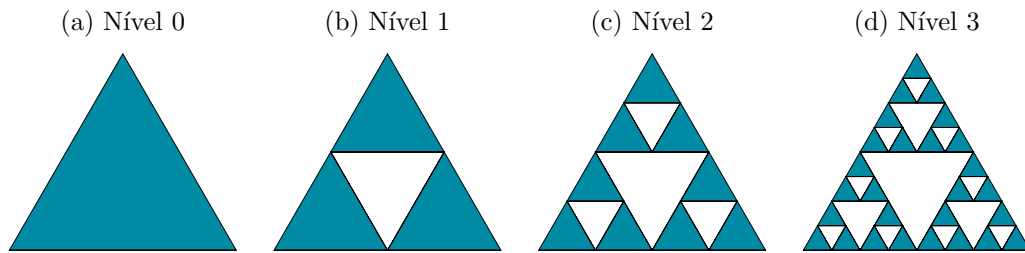
- Nível n

Deste modo, concluímos que:

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3^n \cdot \left(\frac{c}{4^{\frac{n}{2}}}\right)^2 \Rightarrow A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3^n \cdot \frac{c^2}{4^n} \\
 A_n &= \frac{\sqrt{3}c^2}{4} \cdot \frac{3^n}{4^n} \\
 A_n &= A_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n
 \end{aligned}$$

A Figura 24 ilustra o processo de construção do Triângulo de Sierpinski para os primeiros níveis:

Figura 24 – Evolução do Triângulo de Sierpinski



Fonte: Adaptado de Li, Jr, Khim e Kau (2024).

A partir da iteração do Triângulo de Sierpinski podemos construir a seguinte Tabela 4.

Tabela 4 – Área e perímetro do Triângulo de Sierpinski

Iterações	Perímetro	Área
Nível 0	$2P_0$	A_0
Nível 1	$2P_1 = 2P_0 \times \left(\frac{3}{2}\right)^1$	$A_1 = A_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1$
Nível 2	$2P_2 = 2P_0 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2$	$A_2 = A_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$
Nível 3	$2P_3 = 2P_0 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$	$A_3 = A_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3$
⋮	⋮	⋮
Nível n	$2P_n = 2P_0 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$	$A_n = A_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

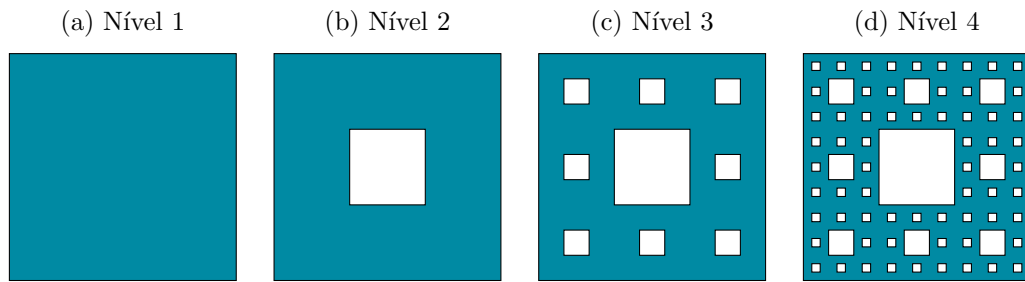
Fonte: Autor (2024).

Estamos diante de duas seqüências geométricas com razões $\frac{3}{4}$ (< 1) e $\frac{3}{2}$ (> 1), respectivamente. Isso indica que à medida que n se aproxima do infinito, a área do Triângulo de Sierpinski tende a zero, enquanto o perímetro tende para infinito.

Outra figura que assemelha-se, pela sua construção, ao triângulo de Sierpinski é o Tapete de Sierpinski.

Para criar o Tapete de Sierpinski, a abordagem consiste em subdividir um quadrado em nove quadrados menores e remover o quadrado central. Esse processo é então repetido em cada um dos oito quadrados restantes. A Figura 25 proporciona uma visualização dos três primeiros estágios dessa construção fractal. As propriedades observadas na área e no perímetro do Triângulo de Sierpinski são igualmente evidentes no Tapete de Sierpinski.

Figura 25 – Evolução do Tapete de Sierpinski



Fonte: Adaptado de UCB (2018).

A iteração envolve a repetição consecutiva de um procedimento. Inicialmente, começamos com um quadrado preenchido, que é então dividido em 9 quadrados iguais, com a remoção do quadrado do meio. Isso resulta na figura geradora. A primeira iteração é derivada ao aplicar a figura geradora a cada um dos quadrados preenchidos que a compõem. O resultado dessa iteração é a figura que servirá como base para a construção da próxima iteração (segunda iteração), mais uma vez aplicando a figura geradora. Esse processo iterativo é repetido indefinidamente, aplicando a mesma regra a cada um dos quadrados preenchidos resultantes da iteração anterior, conforme ilustrado na Figura 25. Essa repetição é continuada, gerando assim a figura limite conhecida como Tapete de Sierpinski.

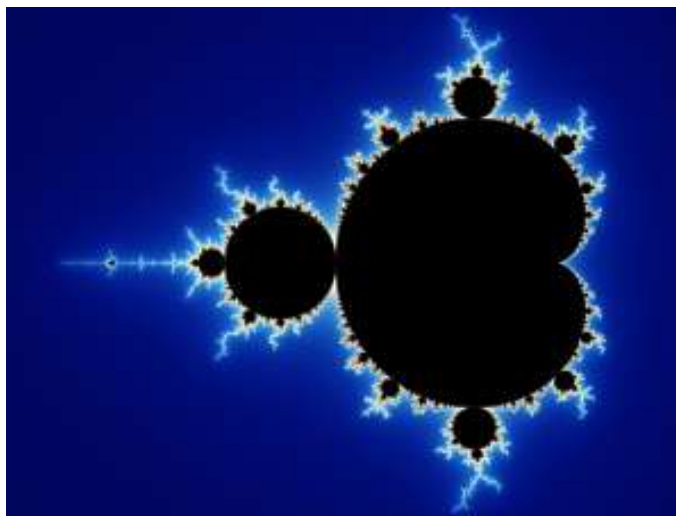
4.4.6 O Conjunto de Mandelbrot

A visualização do Conjunto de Mandelbrot é genuinamente fascinante, destacando-se como uma das imagens mais extraordinárias geradas computacionalmente. O autor concebeu uma representação gráfica notável, desdobrando-se em um conjunto infinito de figuras, sendo a principal delas uma curva cardióide centralizada no plano complexo, conforme mostrado na Figura 26. Essa representação emerge por meio da iteração de fórmulas quadráticas,

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

onde c é uma constante.

Figura 26 – O Conjunto de Mandelbrot



Fonte: Beyer (2013).

Considere o número complexo c , representado por $c = a + bi$, onde a e b denotam as partes real e imaginária, respectivamente. O Conjunto de Mandelbrot é composto pelos números complexos c para os quais a sequência definida por $z_0 = 0$ e $z_{n+1} = z_n^2 + c$ permanece limitada, ou seja, não diverge à medida que n aumenta indefinidamente.

De forma matemática, um número complexo c pertence ao Conjunto de Mandelbrot se a sequência $|z_0| \leq R, |z_1| \leq R, |z_2| \leq R, \dots$ permanecer limitada.

Aqui, R é um valor predefinido que estabelece o limite da sequência. Se a sequência permanecer limitada para um determinado c , então c é considerado parte do Conjunto de Mandelbrot; caso contrário, se a sequência divergir, c não pertence ao conjunto.

A região no plano complexo que abriga os números c associados ao Conjunto de Mandelbrot é frequentemente visualizada por meio de gráficos coloridos e intrincados, resultando na famosa imagem fractal relacionada ao Conjunto de Mandelbrot.

4.4.7 O Conjunto de Julia

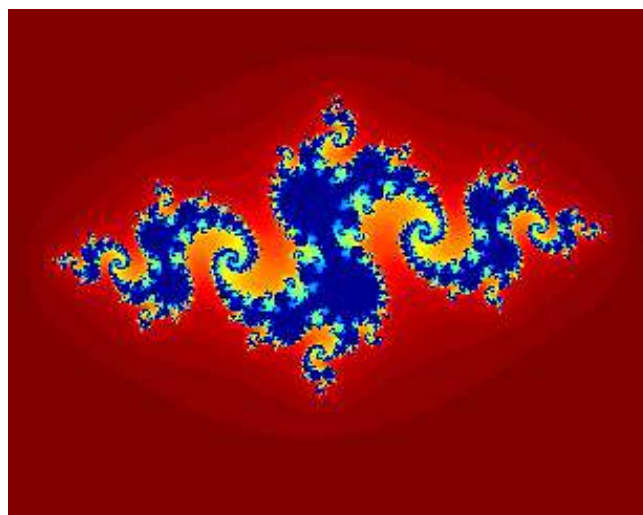
O Conjunto de Julia está intimamente relacionado ao Conjunto de Mandelbrot na teoria dos conjuntos complexos e fractais. Ambos estão associados a processos iterativos que envolvem funções quadráticas específicas. A relação entre eles pode ser compreendida considerando a função iterativa $f(z) = z^2 + c$, onde z é um número complexo e c é uma constante complexa.

A relação entre os dois conjuntos surge quando se considera um ponto específico c no plano complexo e examina-se o comportamento da sequência $z_{n+1} = z_n^2 + c$ para diferentes valores iniciais de z . Cada ponto no Conjunto de Julia está associado a um c específico, e a

classificação desse ponto depende de como a sequência associada se comporta. Se a sequência permanecer limitada, o ponto pertence ao Conjunto de Julia associado a c .

A Figura 27 apresenta a iteração utilizando um programa computacional para visualizar a expressão de um conjunto criado por Julia com a seguinte lei de formação $P(z) = z^2 - 0.8 + 0.156i$.

Figura 27 – O Conjunto de Julia



Fonte: Fabra (1999).

Portanto, o Conjunto de Julia pode ser visto como uma exploração mais detalhada das propriedades iterativas associadas a pontos individuais no plano complexo, enquanto o Conjunto de Mandelbrot fornece uma visão global das regiões no plano complexo para as quais essas sequências são limitadas. A beleza e complexidade fractal desses conjuntos estão interligadas e oferecem uma compreensão rica e visualmente intrigante da teoria dos conjuntos complexos.

5 PROPOSTA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Este capítulo aborda uma breve discussão sobre Geometria Fractal, focando na construção de figuras planas por meio de progressões geométricas. Apresentamos também a análise da nossa intervenção didática, que tem como tema a integração da Geometria Fractal no ensino de progressões geométricas, com o intuito de aprimorar a compreensão desses conceitos matemáticos.

Assim como discutido nos capítulos anteriores, desenvolvemos uma abordagem pedagógica para explorar a eficácia da Geometria Fractal na construção de figuras planas através de progressões geométricas. Nosso objetivo principal é facilitar a compreensão e o ensino desses conceitos, utilizando métodos inovadores que envolvem a Geometria Fractal. Esperamos aumentar o engajamento dos alunos ao apresentar visualmente e de maneira intuitiva os conceitos matemáticos relacionados.

Além disso, analisaremos o impacto dessa abordagem no desempenho acadêmico dos alunos em matemática, especialmente na compreensão das progressões geométricas. Pretendemos avaliar a eficácia dessa metodologia através da coleta de dados empíricos sobre o desempenho e a percepção dos estudantes. O público-alvo desta intervenção são os alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola pública Escola Estadual Último de Carvalho, pertencente à rede estadual de ensino do município de Couto Magalhães - TO. No entanto, consideramos que essa abordagem também pode ser aplicada a partir da 1ª série do Ensino Médio, adaptando-se à progressão do aprendizado matemático dos estudantes.

Para elaborar a sequência, optou-se por seguir os fundamentos e orientações descritas na proposta dos Três Momentos Pedagógicos de Delizoicov e Angotti (1990), que consistem em: *Problematização Inicial*, *Organização do Conhecimento* e *Aplicação do Conhecimento*.

5.1 Sequência Didática

Na vida escolar de um professor, um dos desafios na docência está presente no processo de planejamento das atividades diárias, de modo que os objetivos pedagógicos sejam alcançados. Neste trabalho, vamos elaborar uma proposta de ensino denominada Sequência Didática.

Concordamos com Delizoicov e Angotti (1990) quando afirmam que a etapa da *Problematização Inicial* contém questões introdutórias ao conteúdo, que o professor pode utilizar para

incentivar a discussão e motivar o interesse dos estudantes em relação ao tema.

Segundo Delizoicov (2002), neste momento, o educador verifica os conhecimentos prévios dos estudantes e promove discussões com o objetivo de identificar possíveis contradições e limitações nos conhecimentos que vão sendo revelados pelos alunos.

Na *Organização do Conhecimento*, são apresentados conceitos relacionados à Geometria Fractal, com foco na construção de figuras planas que envolvem progressões geométricas. Em particular, esta sequência de ensino abordará a obtenção de fractais por construção, seguida de diversas questões relacionadas aos fractais construídos.

De acordo com Abreu, Ferreira e Freitas (2017), neste momento, o professor assume um papel mais ativo, mediando novos conhecimentos e não oferecendo respostas prontas, mas sim, indicando caminhos e possibilidades. Junto com os estudantes, o professor organiza o conhecimento.

Para a terceira etapa, que Delizoicov e Angotti (1990) definem como a *Aplicação do Conhecimento*, são propostas outras atividades que o professor pode utilizar para verificar o conhecimento adquirido pelos estudantes, podendo ser usadas no processo avaliativo.

Para a construção dos fractais a serem utilizados na elaboração da sequência, optou-se pela utilização de Materiais Didáticos Manipuláveis, ou simplesmente Materiais Manipuláveis, buscando proporcionar maior ludicidade nos processos e uma aprendizagem mais prazerosa. Em um segundo momento da construção dos fractais, trabalhou-se com a Modelagem Matemática em contato com um software de geometria dinâmica, o GeoGebra, observando todos os conteúdos matemáticos do Ensino Médio que cada um poderia mobilizar (GeoGebra, 2024).

5.2 Análise da Intervenção

Nesta seção, abordaremos o desenvolvimento da Sequência Didática aplicada a uma turma da 2ª Série do Ensino Médio. A turma, composta por 20 alunos, participou ativamente do desenvolvimento da Sequência Didática. A execução teve início em 11 de junho e foi concluída em 26 de junho de 2024. Durante esse período, foram realizadas seis intervenções didáticas, cuja Sequência Didática é descrita a seguir.

As duas primeiras intervenções foram dedicadas a apresentações teóricas, e foram executadas em duas aulas de 50 minutos cada. A 3ª intervenção, uma aula de 50 minutos, foi dedicada à construção do Triângulo de Sierpinski no plano pelos alunos. Em seguida, na 4ª intervenção os alunos foram orientados a construir Triângulo de Sierpinski tridimensional em uma aula de 50

minutos. A 5ª intervenção, dividida em duas aulas de 50 minutos cada, focou na Modelagem Matemática com o software GeoGebra. A 6ª intervenção foi destinada à recapitulação das atividades e coleta da opinião dos alunos sobre a eficácia da sequência didática e suas percepções sobre o aprendizado. Os planos detalhados dessas intervenções em sala de aula estão disponíveis no Apêndice A.

5.2.1 Primeira Intervenção

Este é o primeiro momento de apresentação teórica. Essa aula foi planejada com a utilização de notebook e projetor para a exibição de slides, quadro branco e pincéis, presentes no Apêndice B, que abordam Sequências Numéricas e Progressões Geométricas. Foi apresentado um vídeo de 6 minutos e 15 segundos que discorre a respeito de Sequências Numéricas (Sequência [...], 2023) e *slides* que detalharam fundamentos matemáticos relacionados a Progressões Geométricas, introduzindo os conceitos e métodos discutidos no Capítulo 3.

Após assistirem o vídeo proposto, quando questionados sobre o que caracteriza uma sequência numérica, ele responderam que o que caracteriza é a ordem em que os números seguem uma determinada regra ou padrão. Nesta aula houve boa participação da grande maioria dos educandos ao serem indagados e no decorrer de cada um dos slides. Ao serem perguntados como podemos identificar se uma sequência é uma progressão geométrica? Eles responderam, que podemos identificar se é uma progressão geométrica se nessa sequência cada termo é igual ao produto de seu antecessor pela razão, que é obtida dividindo o segundo termo pelo primeiro termo.

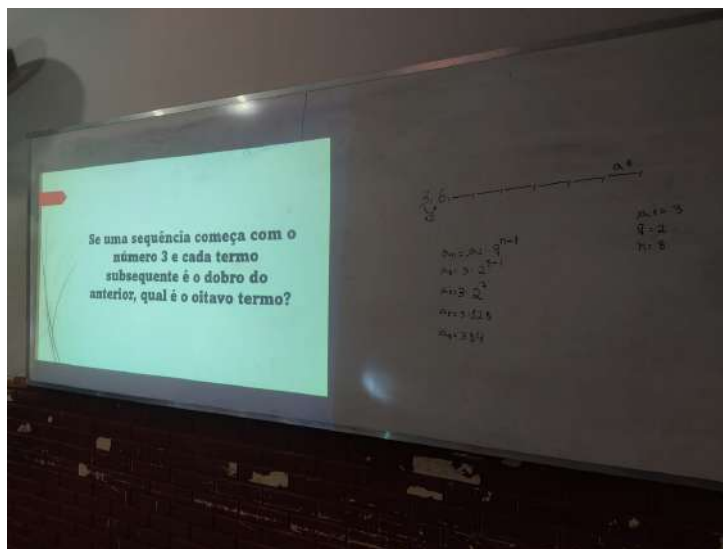
Ao prosseguir na apresentação dos slides, os educandos se mostraram curiosos a respeito da temática, pois eles sabem que esse é um objeto de conhecimento que é cobrado de forma recorrente no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e muitos desses alunos da 2ª série onde está sendo aplicada a sequência didática farão esse exame esse ano como treineiros¹.

Foram exibidas nos slides a demonstração da fórmula para se calcular o termo geral de uma progressão geométrica e em seguida dirigimos a eles o seguinte questionamento: se uma sequência começa com o número 3 e cada termo subsequente é o dobro do anterior, qual é o oitavo termo? Nesse momento os alunos tiveram um pouco de dificuldade em responder, mas aos poucos ele de forma conjunta foram criando uma resposta e depois de alguns minutos chegaram à conclusão dizendo assim: como o primeiro termo é 3 e a razão é 2, pois o termo subsequente é o

¹ Treineiros são os participantes do Enem que ainda não concluíram o ensino médio ou que irão concluí-lo após o ano letivo da edição vigente (Treineiros [...], 2024).

dobro do anterior, temos que o segundo termo dessa sequência é 6, pois $3 \times 2 = 6$. Porém eles perceberam que se continuassem usando essa estratégia seria muito trabalhoso e um dos alunos sugeriu usar a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica, convidei esse aluno para vir ao quadro e efetuar esse cálculo usando a fórmula sugerida por ele, depois de algum tempo ele resolveu ir ao quadro e efetuar o cálculo. A Figura 28 traz o cálculo efetuado pelo aluno.

Figura 28 – Foto do Cálculo apresentado por aluno



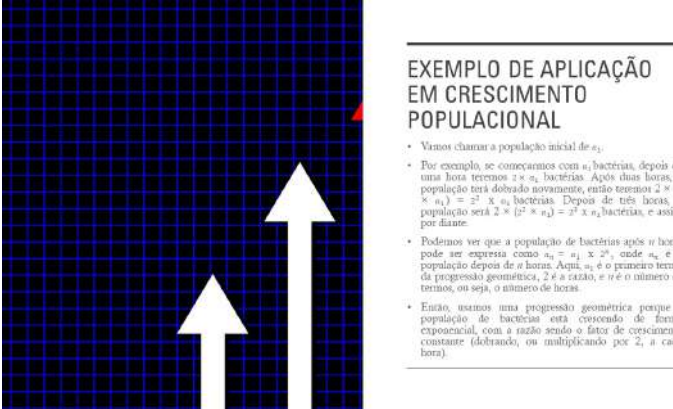
Fonte: Autor (2024).

Como podemos perceber, o aluno fez corretamente a aplicação da fórmula no problema proposto e conseqüentemente encontrou o 8º termo da sequência que é 384.

Em seguida, ao chegar à parte dos slides que tratam a respeito da soma dos termos de uma progressão geométrica finita e infinita, após fazer as demonstrações das duas fórmulas os alunos foram questionados como podemos encontrar a soma dos primeiros n termos de uma progressão geométrica? Prontamente eles responderam que para encontrar a soma dos primeiros n termos de uma progressão geométrica, podemos utilizar a fórmula da soma S_n , nesse momento perguntei para eles se eles já haviam estudado esse objeto de conhecimento e eles disseram que sim, no início do ano letivo de 2024. E para finalizar essa primeira aula, expliquei que o uso das progressões geométricas tem diversas aplicações em diferentes áreas do conhecimento, incluindo matemática, finanças, ciências naturais e tecnologia. Usei como exemplo a seguinte situação-problema: se a população de uma bactéria dobra a cada hora, como podemos modelar essa situação usando uma progressão geométrica? Expliquei que se a população de uma bactéria dobra a cada hora, podemos modelar essa situação usando uma progressão geométrica porque a cada hora a população está multiplicando por um valor constante, que é 2, como podemos

observar na Figura 29.

Figura 29 – Print de um dos slides apresentado para os alunos



EXEMPLO DE APLICAÇÃO EM CRESCIMENTO POPULACIONAL

- Vamos chamar a população inicial de a_1 .
- Por exemplo, se começarmos com a_1 bactérias, depois de uma hora teremos $2 \times a_1$ bactérias. Após duas horas, a população terá dobrado novamente, então teremos $2 \times (2 \times a_1) = 2^2 \times a_1$ bactérias. Depois de três horas, a população será $2 \times (2^2 \times a_1) = 2^3 \times a_1$ bactérias, e assim por diante.
- Podemos ver que a população de bactérias após n horas pode ser expressa como $a_n = a_1 \times 2^n$, onde a_1 é a população depois de n horas. Aqui, a_1 é o primeiro termo da progressão geométrica, 2 é a razão, e n é o número de termos, ou seja, o número de horas.
- Então, usamos uma progressão geométrica porque a população de bactérias está crescendo de forma exponencial, com a razão sendo o fator de crescimento constante (dobrando) ou multiplicando por 2 , a cada hora.

Fonte: Autor (2024).

Isso ajuda a mostrar como a progressão geométrica representa o crescimento exponencial da população de bactérias.

5.2.2 Segunda Intervenção

Foi o segundo momento de apresentação teórica. Nessa aula, foram utilizados notebook e data show para a exposição de slides, presentes no Apêndice B, que abordam a história da geometria fractal, a definição, as propriedades e alguns fractais clássicos, bem como a conexão entre fractais e a progressão geométrica apresentados no Capítulo 4.

Figura 30 – Apresentação do matemático Benoît Mandelbrot para os alunos



Fonte: Autor (2024).

Inicialmente, conforme demonstrado na Figura 30, foi exposto um slide retratando que o conceito foi formalizado e popularizado pelo matemático Benoît Mandelbrot na década de 1970, quando ele introduziu o termo “fractal” para descrever estruturas geométricas complexas e auto-semelhantes em diferentes escalas. Explicou-se que Mandelbrot mostrou que esses padrões ocorrem frequentemente na natureza, como nas formas das montanhas, costas, flocos de neve e até no comportamento dos mercados financeiros, revolucionando assim a compreensão da geometria e abrindo novas áreas de pesquisa em várias disciplinas.

No slide seguinte, apresentamos as propriedades dos fractais e foi explicado que os fractais são estruturas matemáticas complexas que exibem padrões repetitivos em diferentes escalas, um fenômeno conhecido como autossimilaridade. Eles possuem dimensões fracionárias que podem exceder suas dimensões topológicas, revelando níveis de detalhe infinitamente intrincados à medida que são ampliados. Fractais são criados por processos iterativos e podem ser observados tanto em formas matemáticas abstratas quanto na natureza, como nas ramificações das árvores, na formação das montanhas e na estrutura dos vasos sanguíneos.

Essas características tornam os fractais valiosos em várias áreas, incluindo gráficos de computador, modelagem de sistemas naturais e análise de mercados financeiros.

Nos próximos slides foram apresentados alguns fractais clássicos. Exemplos famosos incluem o Conjunto de Mandelbrot, o Conjunto de Julia, o Floco de Neve de Koch e o Triângulo de Sierpinski.

Nas aulas subsequentes, foram dados ênfase ao clássico fractal de Sierpinski. Utilizaremos materiais manipuláveis para entender sua forma plana e tridimensional, além de nos aventurarmos na modelagem matemática com o auxílio do software Geogebra. A construção inicial parte de um triângulo equilátero, que é subdividido repetidamente em quatro triângulos menores, removendo-se o triângulo central em cada iteração. Esse processo é infinitamente iterativo, resultando em uma estrutura de complexidade infinita, embora sua área total se converja a zero. O Triângulo de Sierpinski é amplamente utilizado em diversas disciplinas da matemática e ciências para ilustrar conceitos como fractais e progressões geométricas. Por exemplo, em teoria dos conjuntos, ele é empregado para explicar a ideia de subconjuntos infinitamente aninhados. Na física, é utilizado para modelar sistemas com propriedades fractais, como a estrutura de certos materiais porosos. Além disso, na ciência da computação, o Triângulo de Sierpinski serve para demonstrar algoritmos de recursão e otimização.

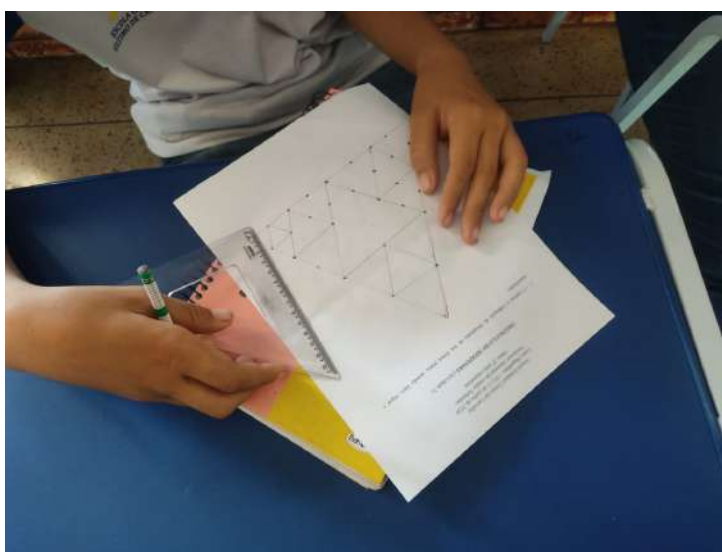
5.2.3 Terceira Intervenção

A construção do Triângulo de Sierpinski no plano utilizando papel, lápis, régua e transferidor envolveu uma série de conceitos matemáticos fundamentais, além de proporcionar uma visualização concreta de estruturas fractais. Para iniciar, desenhamos um triângulo equilátero como base. Este triângulo é subdividido em quatro triângulos menores de tamanho idêntico, removendo o triângulo central em cada etapa subsequente.

Durante o processo, aplicamos conceitos de geometria, como as propriedades dos triângulos equiláteros e a divisão proporcional de segmentos. Cada nova geração de triângulos menores é desenhada com precisão utilizando a régua e o transferidor para garantir ângulos corretos e proporções exatas. À medida que avançamos nas iterações, os triângulos diminuem de tamanho de maneira consistente, seguindo um padrão geométrico que exemplifica uma progressão decrescente.

Na Figura 31, podemos notar que a construção do Triângulo de Sierpinski também ilustra conceitos de recursividade e auto-semelhança, fundamentais na teoria dos fractais. Cada nível de subdivisão revela uma estrutura que se assemelha à forma original, mas em escala reduzida. Esse padrão repetitivo cria uma figura de complexidade infinita, demonstrando como um simples processo geométrico pode gerar uma estrutura matematicamente intrigante e visualmente impressionante.

Figura 31 – Aluno executando a construção do Triângulo de Sierpinski



Fonte: Autor (2024).

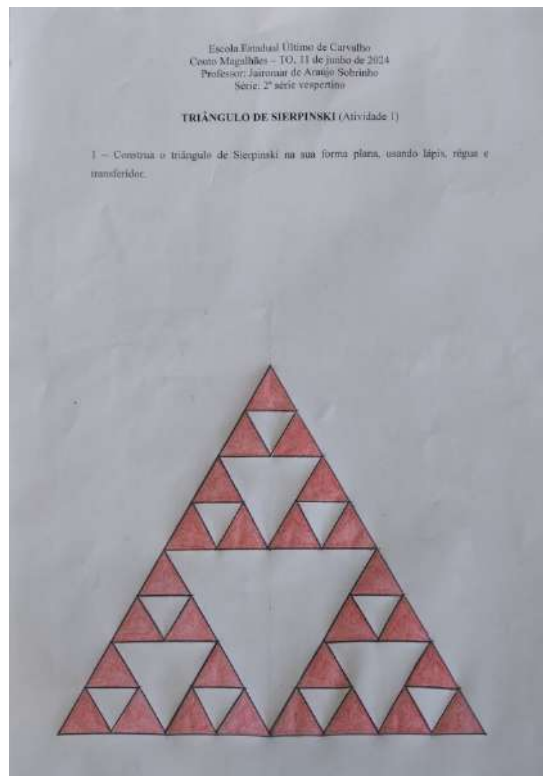
Além disso, a modelagem matemática envolvida na construção do Triângulo de Sierpinski no plano permite não apenas demonstrar a beleza dos fractais, mas também incentivar uma

compreensão mais profunda dos princípios matemáticos subjacentes à construção e à análise de estruturas complexas.

Nas Figuras 32 e 33, apresentamos o resultado da construção do Triângulo de Sierpinski no plano realizada por dois alunos. Para tanto, eles seguiram os passos meticulosos de subdivisão de um triângulo equilátero em triângulos menores, a cada iteração. O trabalho detalhado dos alunos evidencia a compreensão e aplicação prática dos conceitos de geometria e fractais, resultando em estruturas precisas e visualmente impressionantes que exemplificam a auto-similaridade característica do Triângulo de Sierpinski.

A Figura 32 mostra a construção de um educando que conseguiu construir o Triângulo de Sierpinski, deixando em branco os triângulos que devem ser retirados.

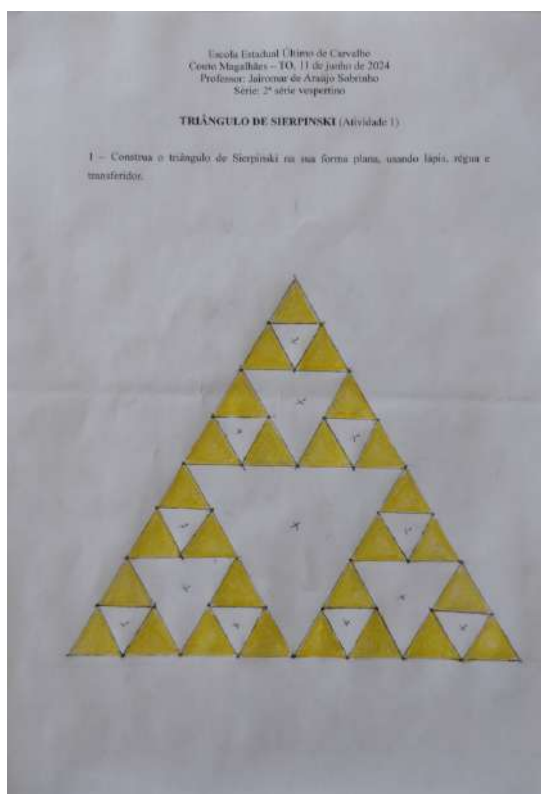
Figura 32 – Construção do Triângulo de Sierpinski



Fonte: Autor (2024).

Já na Figura 33, percebemos que o educando além de pintar os triângulos remanescentes ainda marcou com um “x” os triângulos que deverão ser retirados.

Figura 33 – Construção do Triângulo de Sierpinski com destaque para os triângulos retirados



Fonte: Autor (2024).

A figura também destaca uma das características mais notáveis do Triângulo de Sierpinski: sua auto-semelhança. Isso significa que cada parte do triângulo é uma réplica reduzida do todo. Em outras palavras, se ampliar uma parte do triângulo, verá um padrão idêntico ao original.

5.2.4 Quarta Intervenção

Na quarta intervenção da sequência didática, nos dedicamos à construção tridimensional do Triângulo de Sierpinski. Essa atividade foi cuidadosamente escolhida por ser uma forma descontraída e interessante de sintetizar o que foi visto sobre fractais. Ao construir o Triângulo de Sierpinski em três dimensões, os alunos têm a oportunidade de aplicar conceitos matemáticos de uma maneira prática e divertida, o que facilita a compreensão e o engajamento com o conteúdo.

Durante a atividade, utilizamos papel sulfite e tesoura para a construção do Triângulo de Sierpinski. Além disso, um notebook e um projetor foram utilizados para exibir um vídeo de 8 minutos e 51 segundos, que demonstra passo a passo a construção do Triângulo de Sierpinski em sua forma tridimensional (How [...], 2015). Esse vídeo não apenas orienta os alunos no processo de construção, mas também reforça os conceitos teóricos discutidos anteriormente. A visualização do processo ajuda os alunos a compreenderem melhor as propriedades auto-similares

dos fractais e a lógica recursiva envolvida na sua criação.

A Figura 34 mostra os educandos segundo o passo a passo do vídeo e construindo o Triângulo de Sierpinski.

Figura 34 – Alunos durante o processo de construção do triângulo de Sierpinski tridimensional



Fonte: Autor (2024).

É importante destacar que, ao contrário da construção do triângulo no plano, realizada anteriormente, muitos alunos apresentaram dificuldades significativas ao trabalhar com a versão tridimensional. Essas dificuldades surgiram principalmente devido à complexidade adicional do modelo tridimensional, que exigiu maior habilidade manual e compreensão espacial. A seguir trazemos a Figura 35 que mostra uma aluna que já estava em sua segunda tentativa de construir o Triângulo de Sierpinski.

Figura 35 – Construção do Triângulo de Sierpinski tridimensional por um aluno



Fonte: Autor (2024).

Apesar das dificuldades apresentadas, os alunos conseguiram construir o Triângulo de Sierpinski proposto. Eles demonstraram persistência e dedicação ao longo do processo, superando os desafios de visualização e precisão. A seguir, a Figura 36 mostra a beleza de um cartão fractal construído por um dos alunos, evidenciando a aplicação prática e estética do conceito aprendido.

Figura 36 – Construção do Triângulo de Sierpinski tridimensional por um aluno



Fonte: Autor (2024).

Ao final da atividade, os alunos não apenas constroem um modelo físico do Triângulo de Sierpinski, mas também desenvolvem uma compreensão mais profunda das propriedades dos fractais e de como essas estruturas complexas podem ser criadas a partir de regras simples. Essa experiência prática é fundamental para consolidar o conhecimento teórico e demonstrar a aplicação concreta dos conceitos matemáticos.

Ao serem questionados se conseguiam perceber o Triângulo de Sierpinski no material produzido, um aluno respondeu afirmativamente: “Sim, consigo ver claramente os padrões repetitivos que formam o Triângulo de Sierpinski. É interessante como cada pequena parte se assemelha ao todo, mesmo em escalas menores.”

Essa abordagem didática demonstra que a matemática pode ser explorada de maneiras criativas e envolventes, estimulando o interesse dos alunos e promovendo um aprendizado significativo. A construção tridimensional do Triângulo de Sierpinski é, portanto, uma estratégia eficaz para ensinar fractais, combinando teoria e prática de uma forma que torna o aprendizado prazeroso e memorável.

5.2.5 Quinta intervenção

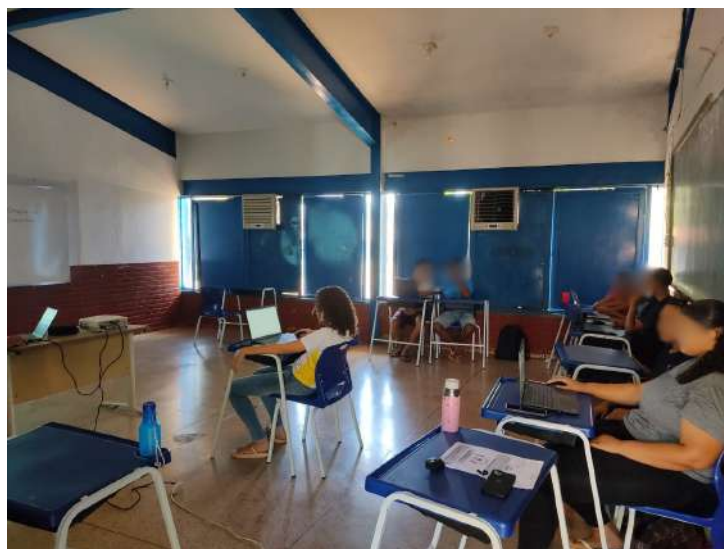
5.2.5.1 Primeira parte: construção de fractais com GeoGebra

Inicialmente, discutimos com os alunos que realizar mais iterações da construção do Triângulo de Sierpinski na sua forma tridimensional (usando tesoura e papel) tornaria o trabalho mais difícil devido aos recortes de triângulos muito pequenos. Sugerimos, então, continuar a construção do triângulo utilizando o notebook com o software Geogebra.

O Geogebra permite a construção de objetos geométricos como pontos, retas, segmentos de retas, circunferências, ponto médio de segmentos, retas paralelas e perpendiculares. Esses objetos podem ser movimentados livremente pela tela e editados com diferentes cores e traçados contínuos ou tracejados. Além disso, o software permite calcular distâncias entre pontos, medir ângulos, áreas de polígonos e circunferências, e determinar lugares geométricos de pontos e retas. Além dessas funcionalidades aplicáveis no estudo da Geometria Euclidiana, o Geogebra oferece recursos para introdução ao estudo da Geometria Fractal, permitindo definir elementos sobre os quais são aplicadas transformações que, por meio de processos repetitivos, geram fractais.

A Figura 37 mostra os alunos atentos as explicações para construção dos fractais propostos usando o software Geogebra.

Figura 37 – Aula sobre construção de fractais com Geogebra



Fonte: Autor (2024).

O uso da tecnologia na sala de aula, especialmente nas aulas de matemática, é essencial para potencializar o ensino e a aprendizagem. Ferramentas tecnológicas interativas, como softwares de geometria dinâmica, tornam as aulas mais envolventes e motivadoras. Elas permitem

a visualização concreta de conceitos abstratos, oferecem atividades personalizadas e *feedback* imediato, além de tornar o aprendizado mais dinâmico e interativo, capturando a atenção dos alunos e mantendo-os engajados.

A Geração Z, nascida em um mundo digital, mostra-se altamente competente em atividades que envolvem o uso de tecnologia, uma vez que já estão acostumados com dispositivos eletrônicos e ferramentas digitais desde cedo. Na Figura 38, podemos observar como esses educandos ficam concentrados na execução das atividades tecnológicas, demonstrando um engajamento notável. Em sala de aula, a aplicação prática de construir o Triângulo de Sierpinski utilizando o GeoGebra evidenciou essa familiaridade tecnológica.

Figura 38 – Construção de fractais com Geogebra por alunos



Fonte: Autor (2024).

Os alunos rapidamente se adaptaram ao software, mostrando entusiasmo e criatividade ao explorar os conceitos matemáticos de forma interativa. Entre as vantagens, destacam-se a facilidade de visualização de padrões complexos, o aumento do interesse e a promoção de um aprendizado mais dinâmico e colaborativo. Contudo, alguns desafios incluem a necessidade de

garantir que todos os alunos tenham acesso a dispositivos adequados e a dependência excessiva da tecnologia, que pode limitar o desenvolvimento de habilidades manuais e a compreensão intuitiva dos conceitos.

5.2.5.2 Segunda parte: Recapitulação e preenchimento do questionário 01

Na segunda parte da quinta intervenção, contamos com a participação de 16 alunos, todos engajados e dispostos a contribuir para a pesquisa. Todos os alunos responderam ao questionário, fornecendo dados valiosos para a análise. A participação ativa e a cooperação dos alunos foram essenciais para o sucesso desta etapa do estudo.

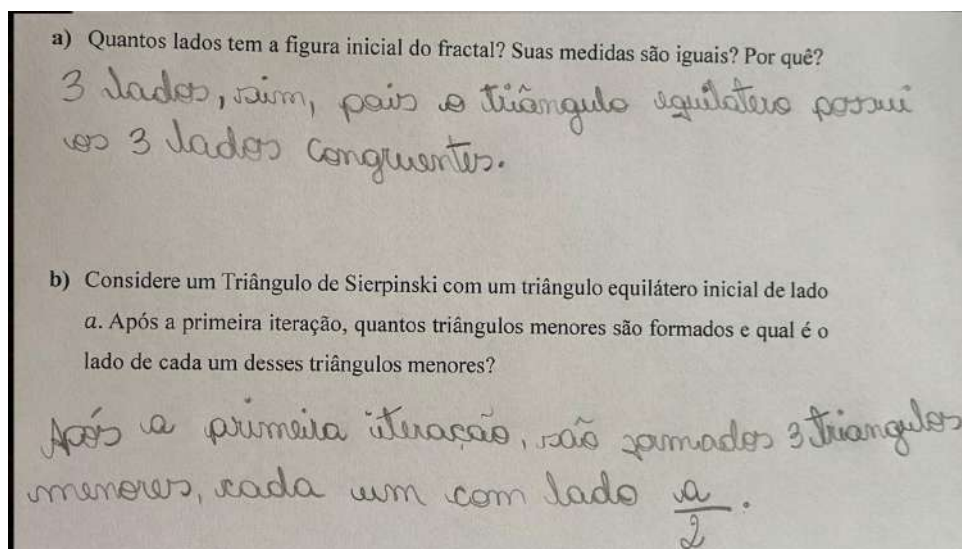
A aula iniciou com uma breve recapitulação da construção do Triângulo de Sierpinski realizada na aula anterior. Os alunos revisitaram o uso do software GeoGebra e os conceitos de auto-semelhança e progressões geométricas que foram explorados.

Após essa revisão prática, os alunos foram convidados a participar de uma avaliação por meio de um questionário detalhado (Questionário 01 do Apêndice C).

Este questionário tinha como objetivo consolidar os conceitos discutidos anteriormente e avaliar a compreensão dos alunos sobre a construção e as propriedades matemáticas do Triângulo de Sierpinski. Foi explicado aos alunos que o questionário consistia em cinco questões, cada uma focando em diferentes aspectos do Triângulo de Sierpinski e das propriedades dos fractais.

Quando questionados no primeiro item, “quantos lados tem a figura inicial do fractal? Suas medidas são iguais? Por quê?” e no segundo item “Considere um Triângulo de Sierpinski com um triângulo equilátero inicial de lado a . Após a primeira iteração, quantos triângulos menores são formados e qual é o lado de cada um desses triângulos menores?” a maioria dos alunos compreendeu corretamente que a figura inicial é um triângulo equilátero com lados iguais, demonstrando entendimento dos conceitos básicos de geometria. E que após a primeira iteração, são formados três triângulos menores, cada um com lado igual a $a/2$. A Figura 39 mostra a resposta de um dos estudantes quando a medida do Triângulo de Sierpinski após a primeira iteração.

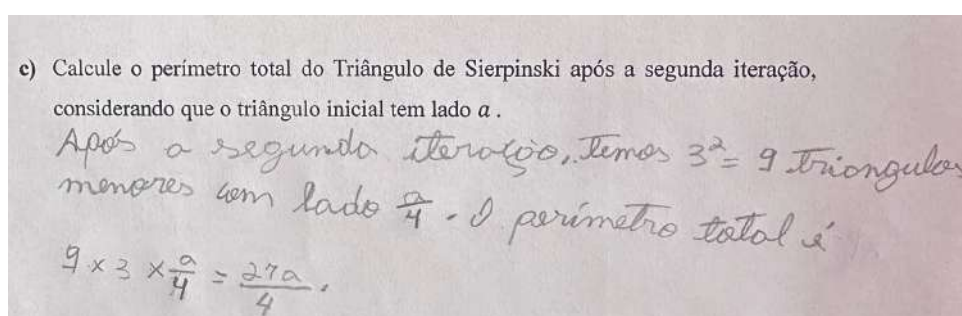
Figura 39 – Resposta de um aluno referente aos itens “a” e “b” da questão 1 do Questionário 01



Fonte: Autor (2024).

No terceiro item, os educandos tiveram que responder o seguinte questionamento “Calcule o perímetro total do Triângulo de Sierpinski após a segunda iteração, considerando que o triângulo inicial tem lado a ”. Esta questão visava avaliar a capacidade dos alunos de aplicar fórmulas geométricas e entender como o perímetro evolui em um fractal. A maioria dos alunos conseguiu calcular corretamente o perímetro do Triângulo de Sierpinski após as iterações iniciais como mostra a Figura 40.

Figura 40 – Cálculo do perímetro total do Triângulo de Sierpinski após a segunda iteração por um aluno



Fonte: Autor (2024).

Já no quarto item, quando questionados “Calcule a área total do Triângulo de Sierpinski após a terceira iteração, considerando que o triângulo inicial tem lado a ”, muitos alunos encontraram dificuldades com os cálculos de área, especialmente na aplicação das progressões geométricas. Isso indicou a necessidade de revisar e reforçar esses conceitos. Como podemos observar na Figura 41.

Figura 41 – Cálculo da área total do Triângulo de Sierpinski após a terceira iteração por um aluno

d) Calcule a área total do Triângulo de Sierpinski após a terceira iteração, considerando que o triângulo inicial tem lado a .

A área de um triângulo equilátero é dada por $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$. Após a terceira iteração, a área é:

$$\text{Área total} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{27}{64} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{27\sqrt{3}}{256} a^2$$

Fonte: Autor (2024).

No quinto e último item ao serem questionados “explique como o perímetro do Triângulo de Sierpinski se comporta após um número infinito de iterações. Ele é finito ou infinito? Justifique sua resposta”, alguns alunos tiveram dificuldades em justificar matematicamente a resposta, indicando a necessidade de reforçar no letramento matemático, porém a maioria dos alunos compreenderam que o perímetro se torna infinito, demonstrando entendimento sobre a natureza dos fractais. Conforme Figura 42 a seguir.

Figura 42 – Explicação de um aluno de como o perímetro do Triângulo de Sierpinski se comporta após infinitas iterações

e) Explique como o perímetro do Triângulo de Sierpinski se comporta após um número infinito de iterações. Ele é finito ou infinito? Justifique sua resposta.

O perímetro do triângulo de Sierpinski se torna infinito após um número infinito de iterações. A cada iteração, o número de triângulos aumenta exponencialmente e o comprimento de cada lado diminui, mas a soma dos comprimentos de todos os lados aumenta sem limite. Portanto, o perímetro total do triângulo de Sierpinski é infinito.

Fonte: Autor (2024).

A aula foi concluída com uma discussão sobre as respostas dos alunos e as dificuldades encontradas. Foi enfatizado o comportamento dos fractais e a aplicação das progressões geométricas no cálculo de perímetro e área.

Os resultados do questionário mostraram que a maioria dos alunos conseguiu aplicar corretamente os conceitos de progressões geométricas e fractais, embora algumas dificuldades tenham surgido em cálculos específicos. A aula proporcionou uma oportunidade valiosa para consolidar o aprendizado e ajustar futuras abordagens pedagógicas para melhorar a compreensão dos alunos.

5.2.6 Sexta intervenção

Na sexta intervenção da sequência didática, os alunos foram desafiados a aplicar e consolidar os conceitos matemáticos abordados nas aulas anteriores. Iniciamos a aula revisando brevemente a construção de fractais e como eles se relacionam com os princípios das progressões geométricas. Os alunos então foram convidados a responder um questionário que visava avaliar tanto o seu entendimento técnico quanto a sua satisfação com a metodologia aplicada. Todos os 20 alunos participaram e responderam a um questionário sobre os temas tratados (Questionário 02 do Apêndice C).

O questionário aplicado continha quatro questões. As duas primeiras eram discursivas e exigiam que os alunos calculassem o perímetro e a área de figuras fractais após certas iterações, reforçando os conceitos de progressões geométricas e a aplicação prática desses cálculos em contextos de geometria fractal. As duas últimas questões eram objetivas e focavam na percepção dos alunos sobre a eficácia da sequência didática, perguntando sobre suas impressões e a utilidade da geometria fractal na assimilação do conteúdo.

Durante a atividade, foi observado que os alunos demonstraram uma compreensão sólida dos conceitos ao resolverem os problemas propostos com pouca ou nenhuma assistência do professor. A maioria dos alunos conseguiu completar as questões discursivas, demonstrando habilidades práticas em calcular áreas e perímetros de fractais.

No item “a” da questão 1, os alunos foram desafiados a calcular o perímetro da Figura 3 mostrada no Questionário 02 do Apêndice C. Esta tarefa exigiu a aplicação direta dos conceitos de geometria plana para determinar o perímetro da figura. Praticamente todos os alunos conseguiram calcular corretamente o perímetro, o que indica uma compreensão robusta dos conceitos envolvidos e a capacidade de aplicá-los em problemas específicos. Já no item “b” da mesma questão, os alunos deveriam determinar a soma dos perímetros das três primeiras figuras. Mais uma vez, eles demonstraram conhecimentos básicos sólidos ao calcular essa soma utilizando as informações obtidas no item “a”. Este exercício reforçou a compreensão da relação entre as

iterações sucessivas e a progressão dos perímetros, conforme ilustrado na Figura 43.

Figura 43 – Resposta de um aluno para os itens “a” e “b” questão 1 do Questionário 02

a) Qual o perímetro da figura 3?

$$P_1 = 4 \cdot 2$$

$$P_2 = P_1 + 3 \cdot 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3$$

$$P_3 = P_2 + 3 \cdot 2 \cdot 0,5 - 4 \cdot 0,5$$

$$P_1 = 8$$

$$P_2 = 8 + 3 \cdot 2 - 4$$

$$P_3 = 3 \cdot 6 + 6 - 2$$

$$P_2 = 36$$

$$P_3 = 20$$

b) Qual a soma dos perímetros das 3 primeiras figuras?

$$\text{Soma} = P_1 + P_2 + P_3$$

$$\text{Soma} = 8 + 36 + 20$$

$$\text{Soma} = 44$$

Fonte: Autor (2024).

O cálculo preciso do perímetro da figura após a terceira iteração, como ilustrado na Figura 43, demonstra que os alunos não apenas entenderam os conceitos teóricos, mas também conseguiram aplicá-los de forma prática, refletindo positivamente na eficácia da sequência didática empregada. A precisão na soma dos perímetros das três primeiras figuras, que se baseou nas informações obtidas anteriormente, revela que os alunos não apenas memorizaram fórmulas, mas também desenvolveram a habilidade de ampliar o raciocínio matemático subjacente. Esta capacidade de conectar diferentes partes do problema e utilizar informações previamente obtidas para resolver novas questões é um forte indicativo de um aprendizado profundo e significativo, evidenciando tanto a compreensão dos conceitos matemáticos quanto a eficácia da metodologia aplicada.

Quando questionados sobre “Qual a área da figura 3” no item “c”, os alunos também não apresentaram grandes dificuldades, assim como nos itens anteriores. A Figura 44 mostra a resposta de um dos estudantes, evidenciando a compreensão sólida dos conceitos envolvidos.

Figura 44 – Resposta de um aluno para o item “c” da questão 1 do Questionário 02

c) Qual a área da figura 3?

$$A_1 = 2^2$$

$$A_2 = A_1 + 4 \cdot 1^2$$

$$A_3 = A_2 + 4 \cdot (0,5)^2$$

$$A_1 = 4 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 4 + 4$$

$$A_3 = 8 + 4 \cdot 0,25$$

$$A_2 = 8 \text{ m}^2$$

$$A_3 = 8 + 1$$

$$A_3 = 9 \text{ m}^2$$

Fonte: Autor (2024).

Em resumo, os resultados obtidos com as respostas dos alunos demonstram um bom nível de compreensão dos conceitos de geometria plana. Essa sólida base de conhecimento fornecerá suporte para abordagens matemáticas mais avançadas no futuro.

A Figura 45 apresenta a resposta de um aluno para a pergunta “Qual é a área da última figura (infinita)?” no item “d” da questão. O aluno demonstrou um entendimento profundo ao calcular a área de cada iteração sucessiva até alcançar a área da terceira iteração. Observou-se que a área da n -ésima figura seguia uma Progressão Geométrica Infinita a partir do segundo termo da sequência. Utilizando a fórmula para a Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica Infinita, o aluno calculou a soma total e, em seguida, adicionou a área da figura inicial. A Figura 45 ilustra esse processo detalhadamente.

Figura 45 – Resposta de um aluno para o item “d” da questão 1 do Questionário 02

d) Sabendo que cada quadrado apresenta o lado a metade do quadrado adjacente, qual a área da última figura (infinita)?

$$A_1 = 2^2 = 4$$

$$A_2 = 4 + 4 \cdot 1^2 = 4 + 4$$

$$A_3 = 4 + 4 + 4 \cdot (0,5)^2 = 4 + 4 + 1$$

$$A_4 = 4 + 4 + 1 + 4 \cdot (0,25)^2 = 4 + 4 + 1 + 0,25$$

$$A_n = 4 + \boxed{4 + 1 + 0,25 + \dots} \text{ P.G Infinita}$$

Razão

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{\frac{3}{4}} = 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\text{Área} = 4 + \frac{16}{3} = \boxed{\frac{28}{3}}$$

Fonte: Autor (2024).

O detalhamento fornecido pelo aluno na resposta ao item “d” revela não apenas a aplicação correta das fórmulas matemáticas, mas também uma compreensão sólida da relação entre progressões geométricas e a área de fractais. A capacidade do aluno de identificar a

Progressão Geométrica Infinita e aplicar a fórmula para a soma dos termos demonstra um domínio avançado dos conceitos abordados. Este resultado confirma a eficácia da abordagem didática, evidenciando que os alunos foram capazes de integrar e aplicar o conhecimento matemático de forma prática e eficaz. Na questão 2 deste questionário, os alunos foram desafiados a determinar o perímetro e a área do fractal na terceira e quarta etapa, respectivamente, além de calcular a área da região fractal F .

No item “a”, eles precisavam responder à pergunta “Qual o perímetro da etapa 3?”. Assim como na questão anterior, a maioria dos alunos conseguiu resolver este item corretamente, conforme podemos observar na Figura 46.

Figura 46 – Resposta de um aluno para o item “a” da questão 2 do Questionário 02

a) Qual o perímetro da etapa 3?

$$P_1 = 1 \cdot 4 \quad P_2 = P_1 + 9 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{3} \quad P_3 = P_2 + 27 \cdot \frac{1}{9} - 9 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\underline{P_1 = 4} \quad P_2 = 4 + 3 - 1 \quad P_3 = 6 + 3 - 1$$

$$\underline{P_2 = 6} \quad \underline{P_3 = 8}$$

Fonte: Autor (2024).

No item “b”, os alunos precisaram responder à questão “Qual a área da etapa 4?”. Embora alguns alunos tenham encontrado dificuldades iniciais, eles conseguiram resolver corretamente o problema ao final. Para calcular a área, os alunos somaram a área da etapa anterior com a área adicional gerada na nova etapa. A Figura 47 ilustra a resolução de um aluno.

Figura 47 – Resposta de um aluno para o item “b” da questão 2 do Questionário 02

b) Qual a área da etapa 4?

$$A_1 = 1^2 \quad A_2 = A_1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad A_3 = A_2 + 9 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \quad A_4 = A_3 + 27 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2$$

$$\underline{A_1 = 1 \text{ cm}^2} \quad A_2 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{9} \quad A_3 = \frac{4}{3} + 9 \cdot \frac{1}{81} \quad A_4 = \frac{13}{9} + 27 \cdot \frac{1}{27^2}$$

$$A_2 = 1 + \frac{1}{3} \quad A_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{9}{81}\right)^2 = 9 \quad A_4 = \frac{13}{9} + \frac{1}{27}$$

$$\underline{A_2 = \frac{4}{3} \text{ cm}^2} \quad A_3 = \frac{12}{9} + \frac{1}{9} \quad A_4 = \left(\frac{13}{9}\right)^2 + \frac{1}{27}$$

$$A_3 = \frac{13}{9} \text{ cm}^2 \quad A_4 = \frac{39}{27} + \frac{1}{27}$$

$$A_4 = \frac{40}{27} \text{ cm}^2$$

Fonte: Autor (2024).

No item “c”, os alunos foram desafiados a calcular a área da região fractal F , cuja construção começa com um quadrado de lado 1 cm e inclui uma infinidade de quadrados

construídos em uma infinidade de etapas. A cada nova etapa, são considerados os quadrados de menor lado (L) acrescentados na etapa anterior, e para cada um destes, são acrescentados três novos quadrados de lado $L/3$.

Embora alguns alunos tenham apresentado dificuldades em resolver esse item, a maioria conseguiu responder corretamente. A Figura 48 demonstra que, de certa forma, o aluno apresentou rigor matemático, dialogando com a questão de maneira correta.

Figura 48 – Resposta de um aluno para o item “c” da questão 2 do Questionário 02

c) Calcule a área da região fractal F?

Inicialmente iremos calcular a área da etapa 1.

$$A_1 = 1^2$$

$$A = 1 \text{ cm}^2$$

Agora, vamos calcular a área que será acrescentada na etapa 2.

$$A_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$A_n = 3 \cdot \frac{1}{9}$$

$$A_n = \frac{1}{3} \text{ cm}^2$$

Somando A_1 com A_n na etapa 2, temos: a área da etapa 2.

$$A_2 = A_1 + A_n$$

$$A_2 = 1 + \frac{1}{3}$$

Em seguida, vamos calcular a área que será acrescentada na etapa 3.

$$A_n = 9 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2$$

$$A_n = 9 \cdot \frac{1}{81}$$

$$A_n = \frac{1}{9}$$

$$A_3 = A_2 + A_n$$

$$A_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \text{ P.G.}$$

$$q = \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

Por fim, vamos calcular a área da região fractal F, usando a fórmula para a soma dos termos de uma PG infinita.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$S_\infty = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$S_\infty = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right) \text{ área da região Fractal F.}$$

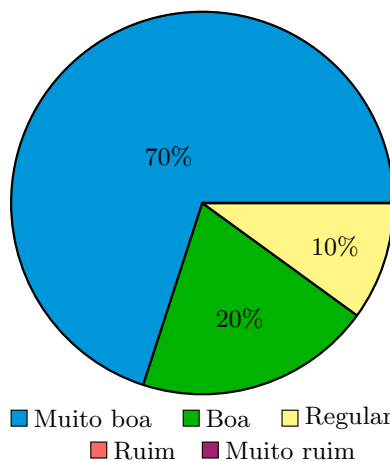
Fonte: Autor (2024).

Esse aluno aplicou corretamente o conceito e a fórmula para o cálculo da Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica Infinita, evidenciando uma sólida compreensão dos princípios matemáticos envolvidos na construção da região fractal, bem como demonstra o sucesso da aplicação da sequência didática proposta.

Na questão 3, os alunos foram indagados sobre suas opiniões a respeito da sequência

didática aplicada em sala de aula. A maioria dos alunos expressou que consideraram a sequência didática muito boa, conforme demonstrado no Gráfico 1.

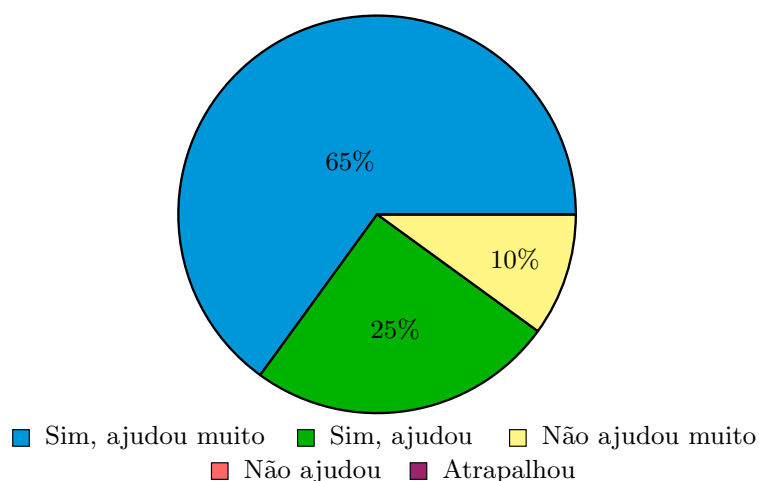
Gráfico 1 – Percepção dos alunos quanto à sequência didática (questão 3 do Questionário 02)



Fonte: Autor (2024).

Na questão 4, os alunos foram questionados: “Você acha que a utilização da geometria fractal ajudou na assimilação do conteúdo de progressões geométricas?” A grande maioria dos alunos respondeu afirmativamente, indicando que a utilização da geometria fractal foi muito útil para a compreensão do conteúdo. Esta resposta positiva destaca a eficácia da abordagem didática empregada, demonstrando que o uso de figuras fractais facilitou a assimilação dos conceitos de progressões geométricas. O Gráfico 2 apresenta o resultado obtido.

Gráfico 2 – Percepção dos alunos quanto uso da geometria fractal no aprendizado de progressões geométricas (questão 4 do Questionário 02)



Fonte: Autor (2024).

Concluimos a aula discutindo as respostas dos questionários e destacando a importância de compreender a geometria fractal como uma ferramenta para explorar e aprender conceitos matemáticos mais amplos. Essa discussão final permitiu aos alunos refletirem sobre o que aprenderam e como podem aplicar esses conhecimentos em outras áreas da matemática e da ciência, consolidando assim a eficácia da sequência didática proposta.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse capítulo serão apresentadas as considerações a respeito da criação e do desenvolvimento da Sequência Didática, voltada para os educandos da 2ª Série do Ensino Médio, tendo como tema central a Geometria Fractal na construção de figuras planas envolvendo progressões geométricas.

Este trabalho teve como objetivo principal demonstrar a eficácia da geometria fractal na construção de figuras planas envolvendo progressões geométricas, visando melhorar a compreensão e o ensino desses conceitos matemáticos. Para isso, optamos pelo uso da Geometria Fractal como uma ferramenta para viabilizar aos educandos uma melhor compreensão e fixação de conceitos matemáticos importantes e presentes nas matrizes curriculares.

O tema da Geometria Fractal, além de contribuir para a fixação de conteúdos básicos da matemática, possibilitou o desenvolvimento de importantes competências nos educandos, tais como: autonomia nas resoluções, raciocínio lógico, e cooperativismo em trabalhos em grupo.

No planejamento da Sequência Didática, nos deparamos com o desafio de garantir tempo suficiente para que os alunos pudessem construir e entender os fractais, tanto em suas formas planas quanto tridimensionais, e ainda aplicar esses conhecimentos no software Geogebra. Percebemos que a construção manual de fractais, como o Triângulo de Sierpinski, exigia tempo e atenção aos detalhes, o que poderia ser desafiador para manter o engajamento dos alunos.

Decidimos, então, dividir a aplicação em três momentos: um momento inicial com a construção manual dos fractais, um segundo momento utilizando o software Geogebra para aprofundar a compreensão e visualização dos fractais, e um terceiro momento para demonstrar e aplicar teoremas relacionados a progressões geométricas. Este planejamento buscou equilibrar atividades manuais e digitais, promovendo uma abordagem híbrida que favoreceu o engajamento e a compreensão dos alunos.

O planejamento da Sequência Didática visou assessorar os educandos na compreensão e execução dos conceitos de progressões geométricas através da construção de fractais, potencializando o ensino dos conceitos matemáticos envolvidos. Além da contribuição no ensino dos educandos, essa sequência didática conseguiu instigar e estimular os educandos no desenvolvimento da aula de Matemática.

O que nos dá força para chegarmos a esse entendimento é a análise das atividades

desenvolvidas pelos educandos e suas falas e atitudes durante as aulas. Assim pudemos observar que a grande maioria dos educandos se interessou pelo tema e sentiram-se desafiados a construir e compreender os fractais, aplicando os conceitos de progressões geométricas de maneira prática e visual. Com essa Sequência Didática, conseguimos instigar a curiosidade e o interesse dos educandos em estudar Matemática.

Durante o desenvolvimento das atividades propostas em sala de aula, pudemos notar o aprendizado progressivo dos alunos a respeito dos conteúdos matemáticos abordados, especialmente nas atividades que integravam a construção de fractais com as progressões geométricas. Embora alguns alunos apresentassem dificuldades iniciais, essas foram sendo sanadas ao longo das aulas, resultando em uma melhor compreensão e aplicação dos conceitos matemáticos.

Assim sendo, a Sequência Didática elaborada demonstrou ter potencial para contribuir com o desenvolvimento de conceitos matemáticos básicos, como progressões geométricas, e estimular a curiosidade e o interesse dos educandos pela disciplina de Matemática. Conseguimos mostrar a eles que os conteúdos matemáticos, mesmo considerados básicos, são de extrema importância no cotidiano e podem ser aprendidos de maneira visual e interativa.

REFERÊNCIAS

- ABLE, S. L. R. **A geometria fractal no processo de ensino-aprendizagem - avaliação de probabilidade geométrica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2021. Disponível em: <https://sca.profmatsbm.org.br/profmatsbm_tcc.php?id1=6353&id2=171054167>. Acesso em: 22 fev. 2024.
- ABREU, J. B.; FERREIRA, D. T.; FREITAS, N. d. S. Os três momentos pedagógicos como possibilidade para inovação didática. **XI Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências**, p. 1–9, 2017.
- ALMEIDA, E. C. de; SANTOS, T. F. Uma breve introdução ao conjunto de cantor. **RMAT - Revista de Matemática**, 2017. ISSN 22378103. Disponível em: <<https://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/10461>>. Acesso em: 24 fev. 2024.
- BARBOSA, R. M. **Descobrimos a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- BEYER, W. **Outra vista do conjunto de Mandelbrot**. Wikipedia, 2013. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal#/media/Ficheiro:Mandel_zoom_00_mandelbrot_set.jpg>. Acesso em: 25 fev. 2024.
- CAMILATO, D. K.; SOLZA, V. B. E. de; FUNDO, A. C. A.; FARIA, C. O. de; MARTINO, L. S. da S. Expandindo os horizontes no ensino médio através da geometria fractal. 2024. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2019/06/EBMM2019_DaniellaKCamilato.pdf>. Acesso em: 06 jun. 2024.
- CORMEN, T.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. **Algoritmos: Teoria e prática**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.
- COSIM, D. de O. **A mobilização da Geometria Fractal como ferramenta para o estudo de probabilidade no ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2020. Disponível em: <https://sca.profmatsbm.org.br/profmatsbm_tcc.php?id1=5353&id2=170340443>. Acesso em: 22 fev. 2024.
- DELIZOICOV, D. Problemas e problematizações. **Ensino de Física: conteúdo, metodologia e epistemologia numa concepção integradora**. Florianópolis: Ed. da UFSC, p. 125–150, 2002.
- DELIZOICOV, D.; ANGOTTI, J. A. **Metodologia do ensino de ciências**. [S.l.: s.n.], 1990.
- DESCOBERTA primeira molécula fractal da natureza. **Inovação Tecnológica**, 2024. Disponível em: <<https://www.inovacaotecnologica.com.br/noticias/noticia.php?artigo=descoberta-primeira-molecula-fractal-natureza&id=010125240412>>. Acesso em: 01 jun. 2024.
- FABRA, J. L. L. **Conjunto de Julia Llano**. Matesfacil, 1999. Disponível em: <<https://www.matesfacil.com/fractales/Julia/llano/conjunto-de-Julia-llano-imagenes-funcion-definicion-teorema-disco-fractal-iteraciones-ejemplos.html>>. Acesso em: 25 fev. 2024.

FERNANDA. **Construção da curva e do floco de neve de Koch utilizando o software GeoGebra**. Matemática para todos, 2011. Disponível em: <<https://matematicaparatodos-fernanda.blogspot.com/2011/11/construcao-da-curva-e-do-floco-de-neve.html>>. Acesso em: 23 fev. 2024.

GEOGEBRA. **GeoGebra: Dynamic Mathematics for Everyone**. Linz, Áustria: International GeoGebra Institute, 2024. Software.

HOW to make a Sierpinski triangle 3D fractal pop out card. Mathycathy, 2015. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=4YDHsMUQbVg>>. Acesso em: 01 jun. 2024.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. ISBN 978-85-357-1749-5.

JANOS, M. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2018.

JELINEK, H. F.; FERNANDEZ, E. Neurons and fractals: how reliable and useful are calculations of fractal dimensions? **Journal of Neuroscience Methods**, 1998. Disponível em: <http://ucua.ujaen.es/jnavas/web_modelos/lfractales/articulos/herbert%20jelinek.pdf>. Acesso em: 24 fev. 2024.

KILHIAN, K. **As Curvas Contínuas sem Derivadas**. O Baricentro da Mente, 2010. Disponível em: <<https://www.obaricentrodamente.com/2010/09/as-curvas-continuas-sem-derivadas.html>>. Acesso em: 25 fev. 2024.

LI, M.; JR, L. S.; KHIM, J.; KAU, A. **Fractals**. Brilliant, 2024. Disponível em: <<https://brilliant.org/wiki/fractals/>>. Acesso em: 23 fev. 2024.

LIMA, M. A. **Conhecendo a Geometria Fractal a partir de conceitos básicos da Geometria Plana**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2019. Disponível em: <https://sca.profmatsbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4572&id2=170660073>. Acesso em: 22 fev. 2024.

LIMA, M. A. S. B. **Modelagem Matemática, Geometria Fractal e Geogebra: Proposta de Atividades para Ensinar Conteúdos Matemáticos do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal do Pará, 2021. Disponível em: <https://sca.profmatsbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6018&id2=171052184>. Acesso em: 22 fev. 2024.

LISBOA, M. C. **Uma proposta de abordagem da Geometria Fractal na Educação Básica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal do Tocantins, 2019. Disponível em: <https://sca.profmatsbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5091&id2=171052386>. Acesso em: 22 fev. 2024.

MANCERA, P. F. d. A. **Matemática para ciências biológicas: Um estudo introdutório através de programas de álgebra computacional**. São Paulo: USP, 2002. Disponível em: <<https://www.esalq.usp.br/departamentos/leb/aulas/lce164/MODMAT.pdf>>. Acesso em: 27 ago. 2024.

- MILLER, B.; RANUM, D. **Sierpinski Triangle**. Runestone Academy, 2014. Disponível em: <<https://runestone.academy/ns/books/published/pythonds/Recursion/pythondsSierpinskiTriangle.html>>. Acesso em: 26 fev. 2024.
- MORENO-GARCÍA, E. *et al.* Math calculation and financial literacy: The incidence of geometric progressions in the calculation of financial interest. **Journal of Risk and Financial Management**, v. 16, n. 2, p. 78, 2023. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2227-7390/16/2/78>>.
- MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015. ISBN 978-85-8337-034-5.
- MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. **Geometria I**. 5. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 19990.
- MOSSULIN, Â. V. L.; MEDEIROS, L. F. de. O ensino de geometria fractal na educação básica: uma revisão sistemática de literatura. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, 2023. Disponível em: <<https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/6397>>. Acesso em: 14 jan. 2024.
- OLIVEIRA, S. N. de. **A Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática da Geometria Fractal no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — UNIRIO, 2019. Disponível em: <https://sca.profmatt-sbm.org.br/profmatt_tcc.php?id1=5022&id2=170480466>. Acesso em: 22 fev. 2024.
- PEREIRA, T.; BORGES, F. A. A geometria dos fractais no ensino de matemática: uma revisão bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos. **Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), v. 19, n. 4, p. 563–581, 2017.
- POSSETTI, D. **A Geometria Fractal e a contextualização de conteúdos no Ensino Fundamental: uma experiência em sala de aula**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2019. Disponível em: <https://sca.profmatt-sbm.org.br/profmatt_tcc.php?id1=5007&id2=171052019>. Acesso em: 22 fev. 2024.
- SEQUÊNCIA recursiva e não recursiva. Matemática mais fácil, 2023. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=Hc37hEUjSQU>>. Acesso em: 01 jun. 2024.
- SILVA, M. V. O. L. d. **Geometria fractal e atividades para o ensino de matemática: degraus fractais e esponja de Menger**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal da Bahia, 2020. Disponível em: <https://sca.profmatt-sbm.org.br/profmatt_tcc.php?id1=5716&id2=170132417>. Acesso em: 22 fev. 2024.
- SOUSA, C. V. de; MONTELO, A. L. B.; SARAIVA, W. P.; LEITE, L. da S. Importância de trabalhar a geometria fractal na formação dos docentes de matemática. **CONEDU**, 2018. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2018/TRABALHO_EV117_MD4_SA13_ID2668_31082018233444.pdf>. Acesso em: 02 out. 2023.
- SOUZA, S. P. de. **A geometria fractal para o ensino de diversos tópicos de matemática no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em

Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Estadual Paulista, 2022. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=6465&id2=171055607>. Acesso em: 22 fev. 2024.

TREINEIROS no Enem. **Brasil Escola**, 2024. Disponível em: <<https://vestibular.brasilecola.uol.com.br/enem/treineiros-no-enem.htm#:~:text=Treineiros%20s%C3%A3o%20os%20participantes%20do,%3A%20Sisu%2C%20Prouni%20e%20Fies.>> Acesso em: 01 jun. 2024.

UCB. **O tapete de Sierpinski**. UCB, 2018. Disponível em: <<https://www.indagacao.com.br/2018/08/ucb-2018-o-tapete-de-sierpinski-e-construido-removendo-se-sucessivamente-o-quadrado-central.html>>. Acesso em: 24 fev. 2024.

APÊNDICE A – PLANOS DE AULA

1ª Intervenção

Turma: 2ª série do Ensino Médio.

Duração: uma aula de 50 minutos

Conteúdo

- Sequência Numérica;
- Progressão Geométrica.

Objetivos

Levar o educando a:

- Ensinar os alunos a identificar e diferenciar sequências aritméticas e geométricas, calculando o termo geral e a soma dos termos de cada tipo;
- Capacitar os alunos a resolver problemas práticos que utilizem progressões geométricas, demonstrando sua relevância em contextos cotidianos e em diversas disciplinas.

Procedimentos

A aula inicia com a apresentação de slides (Apêndice B1) a respeito do conteúdo abordado. Abordamos os conceitos de "Sequências Numéricas" e "Progressões Geométricas", destacando suas definições, cálculos e aplicações práticas. Começamos explicando o que é uma sequência numérica, discutimos a importância das sequências numéricas em diversas áreas, como matemática, ciência e engenharia. Exemplificaremos a aplicação dessas sequências no cálculo de juros compostos, previsão de tendências de dados e modelagem de sistemas dinâmicos. Em seguida, introduziremos a Progressão Geométrica, definindo-a como uma sequência de números onde cada termo subsequente é obtido multiplicando-se o termo anterior por uma constante, chamada de razão q . Explicaremos a fórmula geral para o termo n de uma progressão geométrica: $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$, onde a_1 é o primeiro termo. Também abordaremos a fórmula para calcular a soma dos primeiros n termos: $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$. Destacaremos várias aplicações práticas das sequências numéricas e progressões geométricas, incluindo:

- Juros Compostos: Utilização da fórmula da soma de termos para calcular retornos futuros em investimentos financeiros;
- Crescimento Populacional: Modelagem do crescimento exponencial, como exemplificado com a população de bactérias dobrando a cada hora;
- Modelagem de Fenômenos Naturais: Aplicações em ciência e tecnologia para prever e analisar comportamentos de sistemas dinâmicos.

Concluiremos expondo que as sequências numéricas e as progressões geométricas são conceitos fundamentais em matemática, com diversas aplicações práticas que ajudam a entender e resolver problemas em várias áreas.

Recursos

- Notebook;
- Data Show;
- Quadro branco e pincel.

Avaliação

Será avaliada a participação e o interesse dos educandos durante as discussões a respeito do tema.

Referências Bibliográficas

Iezzi, G.; Hazzan, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. ISBN 978-85-357-1749-5.

Morgado, A. C.; Carvalho, P. C. P. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015. ISBN 978-85-8337-034-5.

Sequência recursiva e não recursiva. Matemática mais fácil, 2023. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=Hc37hEUjSQU>>. Acesso em: 01 jun. 2024.

2ª Intervenção

Turma: 2ª série do Ensino Médio.

Duração: uma aula de 50 minutos

Conteúdo

- Geometria Fractal.

Objetivos

Levar o educando a:

- Introduzir e explicar o conceito de geometria fractal e suas propriedades básicas;
- Apresentar exemplos clássicos de fractais, como o Triângulo de Sierpinski, o Conjunto de Mandelbrot e o Conjunto de Cantor;
- Mostrar a relação entre geometria fractal e outros conceitos matemáticos, como progressões geométricas e sequências numéricas;
- Preparar os alunos para aulas futuras em que serão aprofundados os conceitos de geometria fractal e suas aplicações, especialmente em relação às progressões geométricas.

Procedimentos

A aula inicia com a apresentação de slides (Apêndice B2) a respeito do conteúdo abordado. Introduziremos o conceito de fractal e a origem do termo, cunhado em 1975 por Benoît Mandelbrot, um matemático francês. Será discutido as contribuições de Mandelbrot para a geometria fractal, destacando seu trabalho pioneiro e seu livro "The Fractal Geometry of Nature" publicado em 1982. Exploraremos as propriedades dos fractais, como detalhes infinitos, comprimento infinito, autossimilaridade, dimensões fractais, ausência de suavidade ou derivadas e irregularidade em todas as escalas. Explicaremos como essas características tornam os fractais únicos e interessantes para estudos matemáticos e suas aplicações em diversas áreas. Além disso, demonstraremos como os fractais podem ser observados em diversos fenômenos naturais, como em formações geográficas, plantas, padrões climáticos, entre outros. Será realçada a relevância de estudar fractais para entender melhor a complexidade e a irregularidade presentes na natureza. Em seguida, apresentaremos alguns fractais clássicos e suas propriedades únicas, incluindo o Conjunto de Cantor, a Curva de Peano, a Curva de

Hilbert, a Curva e o Floco de Neve de Koch, o Conjunto de Mandelbrot, o Conjunto de Julia e o Triângulo de Sierpinski. Por fim, explicaremos brevemente como cada um desses fractais é construído e suas aplicações em diferentes contextos matemáticos e científicos.

Recursos

- Notebook;
- Data Show.

Avaliação

Será avaliada a participação e o interesse dos educandos durante as discussões a respeito do tema.

Referências Bibliográficas

Barbosa, R. M. **Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

Janos, M. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2018.

Souza, S. P. de. **A geometria fractal para o ensino de diversos tópicos de matemática no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Estadual Paulista, 2022. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=6465&id2=171055607> . Acesso em: 22 fev. 2024.

3ª Intervenção

Turma: 2ª série do Ensino Médio.

Duração: uma aula de 50 minutos

Conteúdo

- Construção do Triângulo de Sierpinski no plano.

Objetivos

Levar o educando a:

- Os alunos devem entender o que são fractais e a propriedade de auto-semelhança que caracteriza essas figuras;
- Os alunos devem praticar e aprimorar suas habilidades de desenho geométrico, utilizando instrumentos como lápis, régua e transferidor para criar formas precisas;
- Os alunos devem aprender a identificar e aplicar progressões geométricas na construção do Triângulo de Sierpinski, observando como cada iteração se relaciona com a anterior em termos de escala e repetição.

Procedimentos

Na aula de construção do Triângulo de Sierpinski no plano, os alunos serão introduzidos aos conceitos fundamentais de fractais e geometria recursiva. A atividade começará com uma breve explicação sobre fractais, destacando sua característica de auto-semelhança em diferentes escalas. Em seguida, os alunos serão orientados a construir o Triângulo de Sierpinski utilizando papel sulfite, transferidor, régua e lápis. Eles começarão com um triângulo equilátero inicial de 16 centímetros de lado e seguirão um processo de subdivisão recursiva: dividir cada triângulo em quatro partes menores e remover o triângulo central em cada subdivisão.

Durante a atividade, os alunos irão observar como o padrão fractal emerge à medida que mais iterações são realizadas, discutindo conceitos matemáticos como progressões geométricas e proporções constantes entre os segmentos formados. Esta construção manual não apenas demonstrará os princípios de auto-semelhança e complexidade infinita dos fractais, mas também reforçará a compreensão prática de geometria e aritmética básica, como divisão proporcional e geometria euclidiana.

Ao final da aula, espera-se que os alunos tenham não apenas construído o Triângulo de Sierpinski, mas também compreendido como os conceitos matemáticos abstratos podem ser aplicados na prática para criar estruturas complexas e visualmente intrigantes. Esta atividade não só promove o entendimento teórico de fractais, mas também incentiva uma exploração ativa e criativa da matemática em um contexto geométrico e recursivo.

Recursos

- Papel sulfite, lápis, régua e transferidor.

Avaliação

Durante a aula, observou-se os alunos enquanto eles trabalham na construção do Triângulo de Sierpinski no plano. Foi observado também como eles utilizam os instrumentos geométricos, sua precisão no desenho, e como eles aplicam os conceitos de progressões geométricas.

Referências Bibliográficas

Barbosa, R. M. **Descobrendo a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

Janos, M. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2018.

Lima, M. A. **Conhecendo a Geometria Fractal a partir de conceitos básicos da Geometria Plana**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2019. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/profmtat_tcc.php?id1=4572&id2=170660073>. Acesso em: 22 fev. 2024.

Miller, B.; Ranum, D. **Sierpinski Triangle**. Runestone Academy, 2014. Disponível em: <<https://runestone.academy/ns/books/published/pythonds/Recursion/pythondsSierpinskiTriangle.html>>. Acesso em: 26 fev. 2024.

4ª Intervenção

Turma: 2ª série do Ensino Médio.

Duração: uma aula de 50 minutos

Conteúdo

- Construção tridimensional do Triângulo de Sierpinski.

Objetivos

Levar o educando a:

- Proporcionar aos alunos uma compreensão clara dos conceitos de fractais e auto-similaridade, utilizando a construção tridimensional do Triângulo de Sierpinski como exemplo prático;
- Fomentar o engajamento e a participação ativa dos alunos através de atividades práticas e manipulativas, estimulando a curiosidade e o interesse pela matemática;
- Demonstrar como as progressões geométricas são aplicadas na construção de fractais, ajudando os alunos a visualizar e entender melhor esses conceitos matemáticos através de um processo prático e interativo;
- Promover o trabalho colaborativo, incentivando os alunos a trabalharem juntos para alcançar um objetivo comum, reforçando habilidades sociais e de comunicação.

Procedimentos

Na aula de hoje, os alunos irão se engajar na construção do Triângulo de Sierpinski em sua forma tridimensional, utilizando materiais simples como papel sulfite e tesoura. O objetivo principal dessa atividade é proporcionar uma compreensão prática dos conceitos matemáticos de fractais e progressões geométricas, ao mesmo tempo em que desenvolvem habilidades de visualização espacial e manipulação de materiais.

Será exibido um vídeo de 8 minutos e 51 segundos que demonstra passo a passo a construção do Triângulo de Sierpinski em sua forma tridimensional. Esse vídeo não apenas orienta os alunos no processo de construção, mas também reforça os conceitos teóricos discutidos anteriormente. A visualização do processo ajuda os alunos a compreenderem melhor as propriedades auto-similares dos fractais e a lógica recursiva envolvida na sua criação.

Durante a construção do Triângulo de Sierpinski, os alunos irão explorar diversos conceitos matemáticos. Primeiramente, a auto-semelhança será observada à medida que subdividem o triângulo inicial em triângulos menores, removendo a seção central a cada iteração. Esse processo de subdivisão contínua ilustra como os fractais mantêm sua estrutura independente da escala de observação.

Outro conceito fundamental é o de progressão geométrica. Cada iteração do Triângulo de Sierpinski pode ser vista como uma progressão geométrica, onde a área de cada novo triângulo é uma fração da área do triângulo anterior. Especificamente, se o triângulo inicial tem área a , após a primeira iteração, a área restante é $\frac{3a}{4}$, e assim por diante. Este padrão continua infinitamente, demonstrando a natureza recursiva e a diminuição exponencial da área.

A construção tridimensional do Triângulo de Sierpinski oferece uma abordagem prática e visual para o estudo dos fractais e das progressões geométricas. Esta atividade demonstrará como conceitos abstratos podem ser transformados em experiências tangíveis, facilitando a aprendizagem e estimulando o interesse dos alunos pela matemática. Durante a atividade, os educandos serão instigados a observar e perceber a presença do Triângulo de Sierpinski nessa produção tridimensional. Ao final da aula, os alunos terão não apenas construído um objeto complexo, mas também aprofundado sua compreensão dos princípios matemáticos que governam a estrutura dos fractais.

Recursos

- Notebook;
- Data show;
- Papel sulfite e régua.

Avaliação

Durante a aula, observou-se os alunos enquanto eles trabalham na construção tridimensional do Triângulo de Sierpinski. Foi observado também como eles aplicam os conceitos de progressões geométricas.

Referências Bibliográficas

Barbosa, R. M. **Descobrendo a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

Janos, M. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2018.

Mathycathy. **How to Make a Sierpinski triangle 3D Fractal Pop Out Card**, 2015.

Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=4YDHsMUQbVg>>. Acesso em: 01 de jun. 2024.

5ª Intervenção

Turma: 2ª série do Ensino Médio.

Duração: duas aulas de 50 minutos (100 minutos)

Conteúdo

- Construção do Triângulo de Sierpinski utilizando o software Geogebra.

Objetivos

Levar o educando a:

- Os alunos deverão adquirir habilidades práticas no uso do software GeoGebra, incluindo a criação e manipulação de figuras geométricas, e a utilização de ferramentas tecnológicas para explorar e visualizar conceitos matemáticos;
- Os alunos deverão ser incentivados a explorar variações e extensões do Triângulo de Sierpinski, estimulando a curiosidade e a criatividade na aplicação dos conceitos matemáticos aprendidos;
- Os alunos deverão aplicar os conceitos de progressões geométricas na construção do Triângulo de Sierpinski, observando como cada iteração do fractal envolve a redução proporcional dos lados dos triângulos;
- Promover o trabalho colaborativo, incentivando os alunos a trabalharem juntos para alcançar um objetivo comum, reforçando habilidades sociais e de comunicação.

Procedimentos

Esse momento de interação será dividido em duas aulas de 50 minutos cada. Iniciaremos a aula apresentando o software Geogebra, uma ferramenta poderosa para explorar conceitos geométricos de forma interativa. O foco será na construção do Triângulo de Sierpinski, um fractal clássico que exemplifica a auto-semelhança e a infinita complexidade em escalas diferentes.

Os alunos criarão um triângulo equilátero inicial e, a partir dele, seguirão um processo iterativo onde, a cada passo, encontrarão os pontos médios dos lados dos triângulos e removerão o triângulo central, formando um padrão de triângulos menores a cada iteração. Este exercício permitirá que os alunos visualizem como a estrutura fractal emerge e como a razão geométrica desempenha um papel crucial na formação dos triângulos menores.

Após a construção digital, os alunos responderão a um questionário que visa consolidar os conceitos abordados e avaliar a compreensão dos mesmos. As questões tratarão do processo de construção do Triângulo de Sierpinski, cálculos de perímetro e área após iterações, e reflexões sobre os conceitos de auto-semelhança e progressões geométricas.

O questionário incluirá uma questão com cinco itens que exploram diferentes aspectos do Triângulo de Sierpinski, além de perguntas abertas para que os alunos compartilhem suas impressões sobre a atividade. Esse momento será fundamental para verificar se os alunos conseguem relacionar os conceitos teóricos com a prática realizada no Geogebra e compreender a aplicabilidade dos fractais e das progressões geométricas.

Ao final da aula, faremos uma breve discussão sobre as respostas dos questionários e as observações dos alunos. Refletiremos sobre a eficácia do uso do Geogebra e do método de ensino aplicado, ajustando futuras aulas conforme necessário. Esta abordagem visa não só a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também o engajamento dos alunos através de atividades interativas e visuais.

Recursos

- Notebook;
- Data show;
- Software Geogebra;
- Atividade impressa.

Avaliação

Durante a atividade, observou-se a participação e o engajamento dos alunos. Observando-se eles estão colaborando com seus colegas, fazendo perguntas relevantes, e demonstrando entendimento dos conceitos. Foi avaliado a construção do Triângulo de Sierpinski feita por cada grupo de alunos no GeoGebra, verificando a precisão da construção e se eles seguiram corretamente os passos para criar o fractal. Após a conclusão da construção, foi aplicado um questionário com perguntas sobre o Triângulo de Sierpinski.

Referências Bibliográficas

Barbosa, R. M. **Descobrendo a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

Janos, M. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2018.

Geogebra. **GeoGebra: Dynamic Mathematics for Everyone**. Linz, Áustria:
International GeoGebra Institute, 2024. Software.

6ª Intervenção

Turma: 2ª série do Ensino Médio.

Duração: uma aula de 50 minutos

Conteúdo

- Progressão Geométrica;
- Geometria Fractal.

Objetivos

Levar o educando a:

- Verificar se os alunos compreendem a relação entre progressões geométricas e geometria fractal;
- Avaliar se os alunos conseguem aplicar os conceitos de progressões geométricas na construção e análise de fractais;
- Coletar a opinião dos alunos sobre a eficácia da sequência didática e suas percepções sobre o aprendizado;
- Incentivar os alunos a refletirem criticamente sobre seu próprio aprendizado e a aplicabilidade dos conceitos de geometria fractal e progressões geométricas.

Procedimentos

Iniciaremos a aula com uma breve revisão dos conceitos abordados nas aulas anteriores, focando na construção do Triângulo de Sierpinski e na aplicação de progressões geométricas. Relembraremos os alunos sobre a importância dos cálculos de perímetro e área, especialmente em estruturas fractais, e como esses conceitos são fundamentais para entender a complexidade e a beleza dos fractais.

Os alunos receberão um questionário com quatro questões, cada uma projetada para avaliar diferentes aspectos de sua compreensão e percepção.

A primeira e segunda questão será apresentado aos alunos fractais e eles deverão calcular o perímetro e a área do fractal nas iterações. Além disso, serão desafiados a calcular a soma das áreas dos triângulos em todas as iterações infinitas, aplicando conceitos de progressões geométricas. Estas questões ajudarão a avaliar a capacidade dos alunos de aplicar fórmulas geométricas e entender como o perímetro e a área evolui em um fractal.

Os alunos responderão à pergunta: "O que você achou da sequência didática aplicada em sala de aula?" Esta questão aberta permitirá aos alunos expressar suas opiniões sobre a metodologia e as atividades desenvolvidas, proporcionando insights valiosos para a melhoria do processo de ensino.

A última questão abordará a percepção dos alunos sobre a eficácia da geometria fractal no ensino de progressões geométricas: "Você acha que a utilização da geometria fractal ajudou na assimilação do conteúdo de progressões geométricas?" Esta pergunta avaliará a relevância e a clareza da abordagem pedagógica utilizada.

Após a conclusão do questionário, os alunos serão convidados a compartilhar suas respostas e discutir suas percepções em grupo. Este momento será crucial para entender as dificuldades e os sucessos dos alunos, além de promover um ambiente de aprendizado colaborativo.

Recursos

- Atividade impressa.

Avaliação

Durante a aplicação da sequência didática, a avaliação foi conduzida de duas maneiras principais: observação da participação e engajamento dos alunos, e correção das atividades do questionário.

Referências Bibliográficas

Barbosa, R. M. **Descobrendo a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

Janos, M. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2018.

APÊNDICE B – APRESENTAÇÕES DE SLIDES



SEQUÊNCIA NUMÉRICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Aplicações e teorias de
conceitos matemáticos

1

APRESENTAÇÃO



Sequência numérica

As sequências numéricas são usadas em muitas áreas da matemática e da ciência. Elas são importantes para entender como os números funcionam e como podemos usá-los para resolver problemas.

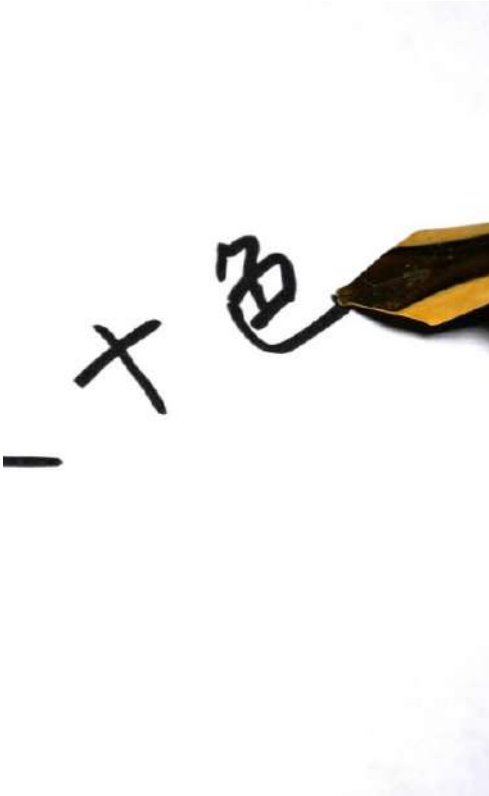
Progressão Geométrica

A Progressão Geométrica é uma sequência particular que tem muitas aplicações em diferentes áreas, como finanças, matemática e física. Ela é formada por uma multiplicação constante entre seus termos.

Aplicações de Sequências Numéricas e Progressão Geométrica

Os conceitos de Sequências Numéricas e Progressão Geométrica são amplamente usados em áreas como finanças, matemática, ciência e tecnologia. Eles são importantes para entender como os números funcionam e como podemos usá-los para resolver problemas em diversas áreas.

2



3

SEQUÊNCIA NUMÉRICA

O que é uma sequência numérica?

Uma sequência numérica é uma lista de números na qual cada termo é obtido somando-se ou subtraindo-se uma constante do termo anterior.

Cálculo da soma de termos de uma sequência

Podemos calcular a soma de termos de uma sequência usando fórmulas matemáticas, que diferem dependendo do tipo de sequência.

Exemplos de aplicação

As sequências numéricas são amplamente utilizadas em matemática, ciência e engenharia. Exemplos incluem cálculo de juros compostos, previsão de tendências de dados e modelagem de sistemas dinâmicos.

DEFINIÇÃO DE SEQUÊNCIA NUMÉRICA

O que é uma sequência numérica?

Uma sequência numérica é uma lista de números que segue um padrão específico. Cada termo é obtido somando-se ou subtraindo-se uma constante do termo anterior.

Razão ou diferença

A constante pela qual cada termo é adicionado ou subtraído é chamada de razão ou diferença. Ela é usada para determinar o próximo termo da sequência.

Tipos de Sequências Numéricas

Existem dois tipos de sequências numéricas: aritméticas e geométricas. Uma sequência aritmética é quando cada termo é adicionado ou subtraído por uma razão constante. Em uma sequência geométrica, cada termo é multiplicado ou dividido por uma razão constante.

4



5

SEQUÊNCIA GEOMÉTRICA

Definição de Sequência Geométrica

A sequência geométrica é uma sequência de números em que cada termo é obtido multiplicando-se o termo anterior por uma constante r .

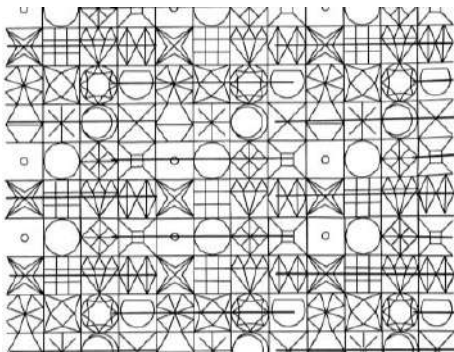
Uso da Sequência Geométrica no Cálculo de Crescimento Populacional

A sequência geométrica pode ser usada para calcular o crescimento populacional ao longo do tempo, onde a constante r representa a taxa de crescimento populacional.

Uso da Sequência Geométrica em Investimentos com Juros Compostos

A sequência geométrica pode ser usada em investimentos com juros compostos, onde a constante r representa a taxa de juros e o termo a_1 representa o capital inicial.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA



Definição de Progressão Geométrica

A progressão geométrica é uma sequência de números na qual cada termo subsequente é obtido multiplicando-se o termo anterior por uma constante. Isso é conhecido como razão r .

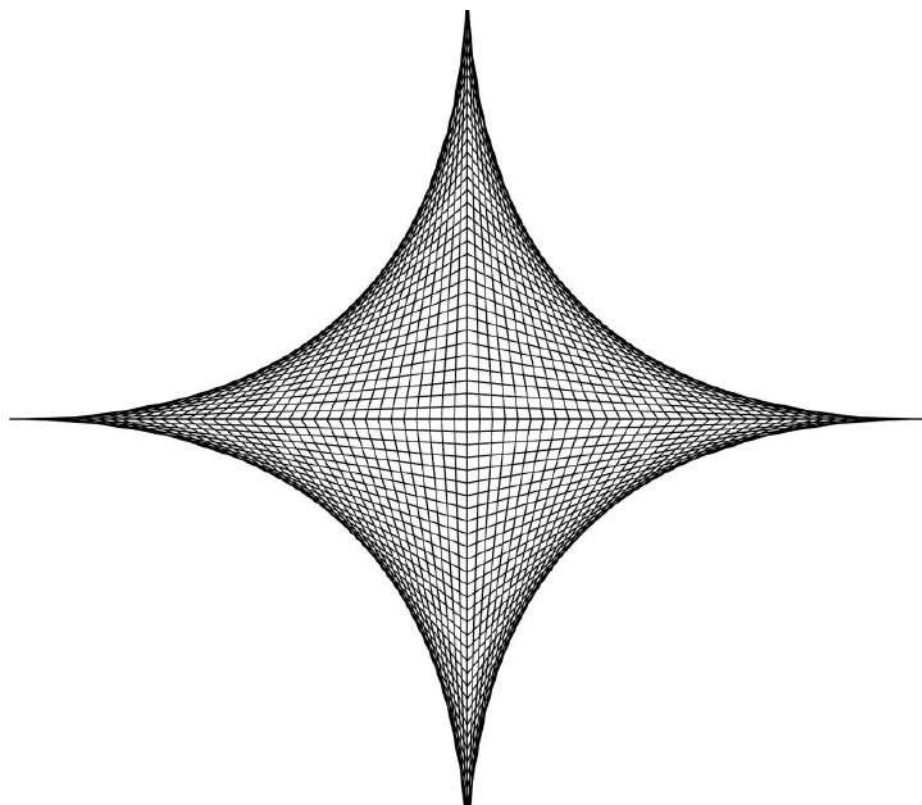
Aplicações da Progressão Geométrica

A progressão geométrica tem muitas aplicações práticas em finanças, matemática, ciência e tecnologia. Por exemplo, é usada para calcular juros compostos, previsão de crescimento populacional, modelagem de ciclos de vida de produtos, entre outros.

Cálculo da Soma de Termos da Progressão Geométrica

A soma dos termos de uma progressão geométrica finita pode ser calculada usando a fórmula $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$, onde a_1 é o primeiro termo, q é a razão e n é o número de termos.

6



DEFINIÇÃO DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Uma progressão geométrica é uma sequência de números na qual a razão entre dois termos consecutivos é constante. Esta sequência pode ser definida por sua razão q e seu primeiro termo a_1 . A fórmula geral para o termo n da sequência é: $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$.

7



CÁLCULO DA SOMA DE TERMOS

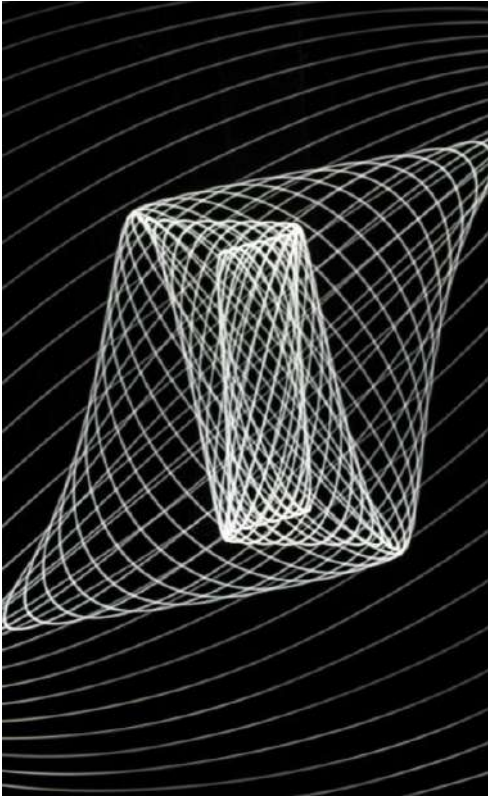
Progressão Geométrica

A fórmula para calcular a soma dos primeiros n termos de uma progressão geométrica é essencial para o cálculo de juros compostos em investimentos. Ela é dada por $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$, onde a_1 é o primeiro termo, q é a razão e n é o número de termos.

Juros compostos

O cálculo da soma dos primeiros n termos de uma progressão geométrica com a fórmula $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ é essencial para o cálculo de juros compostos em investimentos. Isso permite que os investidores calculem a quantidade de dinheiro que será ganha com o tempo, considerando os juros compostos.

8



APLICAÇÕES EM ÁREAS DIVERSAS

Juros Compostos em Investimentos

Sequências numéricas e progressões geométricas são usadas para calcular juros compostos em investimentos financeiros, ajudando a prever retornos futuros com base no investimento inicial e na taxa de juros.

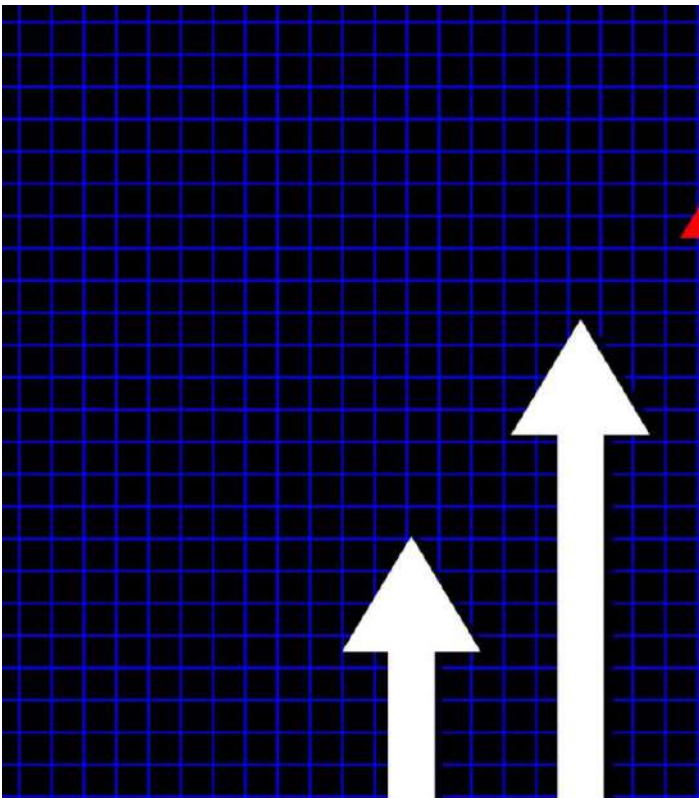
Crescimento Populacional

Sequências numéricas e progressões geométricas são usadas para modelar o crescimento populacional em diferentes regiões e ajudam a prever o tamanho da população no futuro.

Modelagem Matemática de Fenômenos Naturais

Sequências numéricas e progressões geométricas são usadas na modelagem matemática de fenômenos naturais, como o crescimento de plantas e animais, a propagação de doenças e a dinâmica das populações.

9



EXEMPLO DE APLICAÇÃO EM CRESCIMENTO POPULACIONAL

- Vamos chamar a população inicial de a_1 .
 - Por exemplo, se começarmos com a_1 bactérias, depois de uma hora teremos $2 \times a_1$ bactérias. Após duas horas, a população terá dobrado novamente, então teremos $2 \times (2 \times a_1) = 2^2 \times a_1$ bactérias. Depois de três horas, a população será $2 \times (2^2 \times a_1) = 2^3 \times a_1$ bactérias, e assim por diante.
 - Podemos ver que a população de bactérias após n horas pode ser expressa como $a_n = a_1 \times 2^n$, onde a_n é a população depois de n horas. Aqui, a_1 é o primeiro termo da progressão geométrica, 2 é a razão, e n é o número de termos, ou seja, o número de horas.
 - Então, usamos uma progressão geométrica porque a população de bactérias está crescendo de forma exponencial, com a razão sendo o fator de crescimento constante (dobrando, ou multiplicando por 2, a cada hora).
-

10

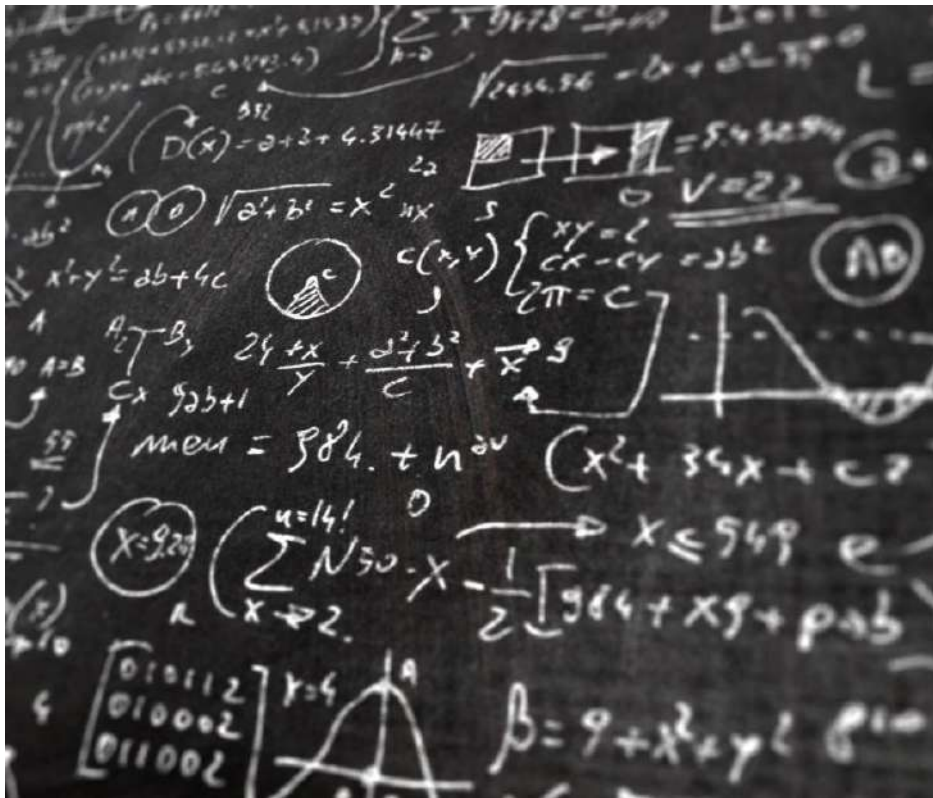
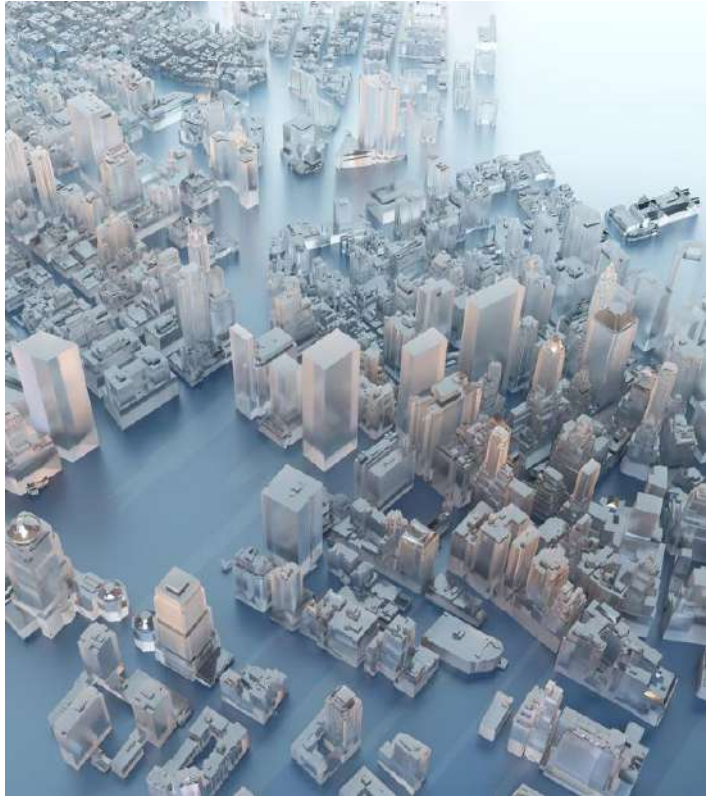
EXEMPLO DE APLICAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sequências Numéricas

As sequências numéricas são usadas em matemática para modelar diferentes fenômenos, incluindo o crescimento populacional de uma cidade.

Progressões Geométricas

As progressões geométricas também são usadas em matemática para modelar diferentes fenômenos, incluindo o crescimento populacional de uma cidade.



CONCLUSÃO

As sequências numéricas e as progressões geométricas são conceitos fundamentais em matemática com muitas aplicações práticas em várias áreas. Espero que esta apresentação tenha ajudado a entender melhor esses conceitos e como podemos usá-los na prática.



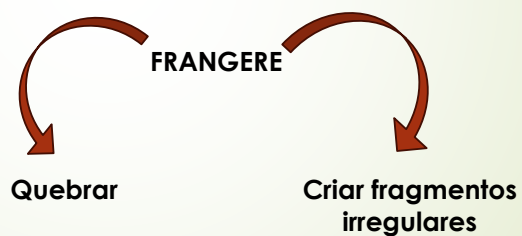
GEOMETRIA FRACTAL

1



FRACTAL

- O termo "fractal" foi criado em 1975 por Benoît Mandelbrot, matemático francês nascido na Polónia, que descobriu a geometria fractal na década de 70 do século XX, a partir do adjetivo latino fractus, do verbo frangere.



2

Benoît Mandelbrot

- Benoît B. Mandelbrot (1924 – 2010) foi um matemático francês de origem judaico-polonesa. É conhecido principalmente por suas contribuições no campo da geometria fractal, tendo o termo "fractal" sido por ele cunhado em 1975. Foi aluno do matemático francês Paul Lévy.



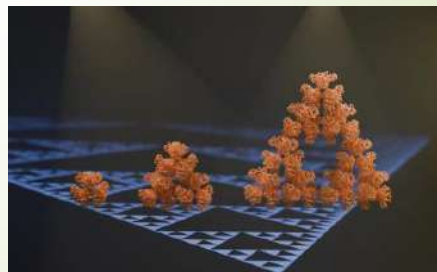
3

DEFINIÇÃO

- O conceito de geometria fractal teve sua origem no século XX, com os trabalhos pioneiros de matemáticos como Benoit Mandelbrot e Gaston Julia. Mandelbrot, em seu livro "The Fractal Geometry of Nature", publicado em 1982, introduziu o termo "fractal" para descrever formas geométricas complexas e irregulares encontradas na natureza.
- Genericamente, os fractais são caracterizados por:
 1. Detalhes infinitos;
 2. Comprimento infinito;
 3. Autossimilaridade;
 4. Dimensões fractais;
 5. Ausência de suavidade ou derivadas;
 6. Irregularidade em todas as escalas.

4

FRACTAIS NA NATUREZA



5

FRACTAIS CLÁSSICOS

CONJUNTO DE CANTOR (POEIRA DE CANTOS)

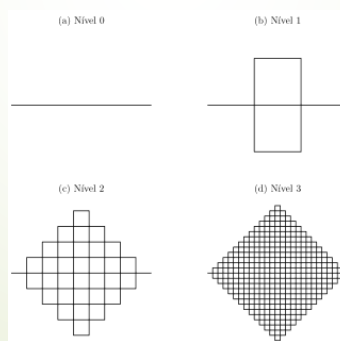
O procedimento para criar a Poeira de Cantor é o seguinte: inicialmente, considera-se um intervalo fechado de $[0,1]$. Posteriormente, remove-se o intervalo aberto correspondente ao terço central do intervalo inicial, resultando em dois intervalos menores: $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$. Repetido um número infinito de vezes, o processo gera um conjunto infinito de comprimento nulo.



6

► A CURVA DE PEANO

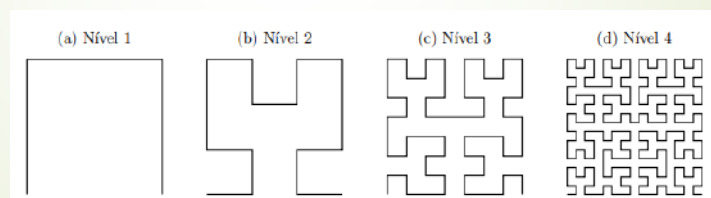
. A curva é definida de forma recursiva, começando com uma subdivisão do quadrado em nove partes iguais e conectando-as em uma ordem específica; essa subdivisão e reconexão são repetidas infinitamente, resultando na curva final que cobre todo o quadrado.



7

► A CURVA DE HILBERT

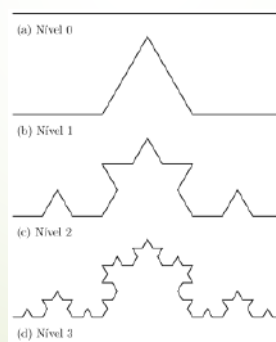
Inicialmente, parte-se de um segmento (que pode assumir a forma de uma linha reta ou outra configuração inicial). Posteriormente, são aplicadas rotações e reflexões para originar novos segmentos, seguindo o padrão autossimilar característico da Curva de Hilbert. O ciclo iterativo é repetido conforme necessário, ajustando o nível de detalhe desejado.



8

► A CURVA E O FLOCO

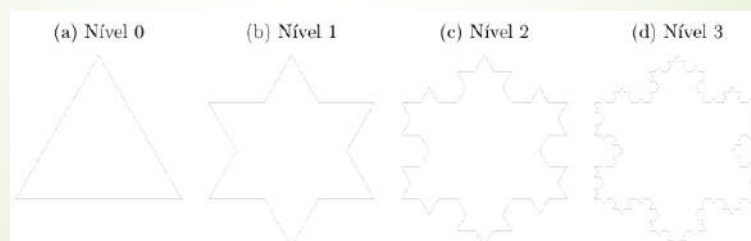
A Curva de Koch é um objeto matemático que consiste em um segmento de reta sobre o qual é aplicada uma transformação. A transformação é feita dividindo esse segmento em três pedaços congruentes, criando um triângulo equilátero sobre o segmento central e removendo sua base.



9

► FLOCO DE NEVE DE KOCH

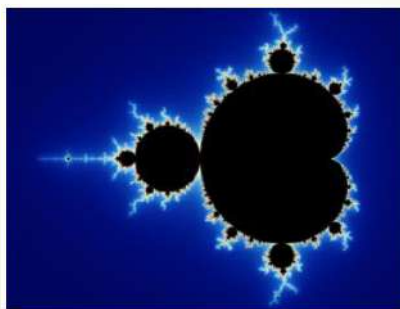
Para obter a primeira iteração, procedemos dividindo os segmentos de um triângulo equilátero em três partes congruentes, substituindo o segmento central por um triângulo equilátero sem a base.



10

► O CONJUNTO DE MANDELBROT

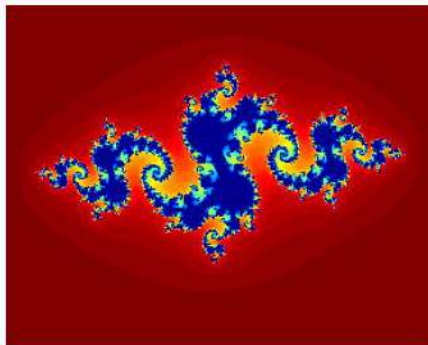
A visualização do Conjunto de Mandelbrot é genuinamente fascinante, destacando-se como uma das imagens mais extraordinárias geradas computacionalmente. O autor concebeu uma representação gráfica notável, desdobrando-se em um conjunto infinito de figuras, sendo a principal delas uma curva cardióide centralizada no plano complexo.



11

► O CONJUNTO DE JULIA

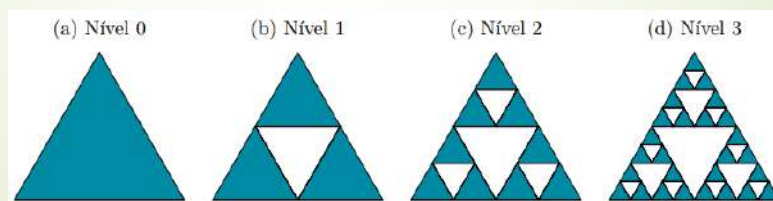
O Conjunto de Julia está intimamente relacionado ao Conjunto de Mandelbrot na teoria dos conjuntos complexos e fractais. Ambos estão associados a processos iterativos que envolvem funções quadráticas específicas.



12

► O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

O Triângulo de Sierpinski é um fractal gerado a partir de um triângulo por meio de uma regra simples. Inicialmente, partimos de um triângulo equilátero e conectamos os pontos médios de cada lado com segmentos de reta, resultando em quatro triângulos semelhantes ao original. Em seguida, retiramos a figura central e aplicamos novamente a mesma regra aos três triângulos restantes. Este processo é repetido de forma infinita, convergindo para a configuração final do Triângulo de Sierpinski.



APÊNDICE C – QUESTIONÁRIOS APLICADOS

Escola Estadual Último de Carvalho

Couto Magalhães – TO, ____ de junho de 2024

Professor: Jairomar Sobrinho

Série/ano: 2ª série – Vespertino

Questionário 01

1. Questões sobre o Triângulo de Sierpinski



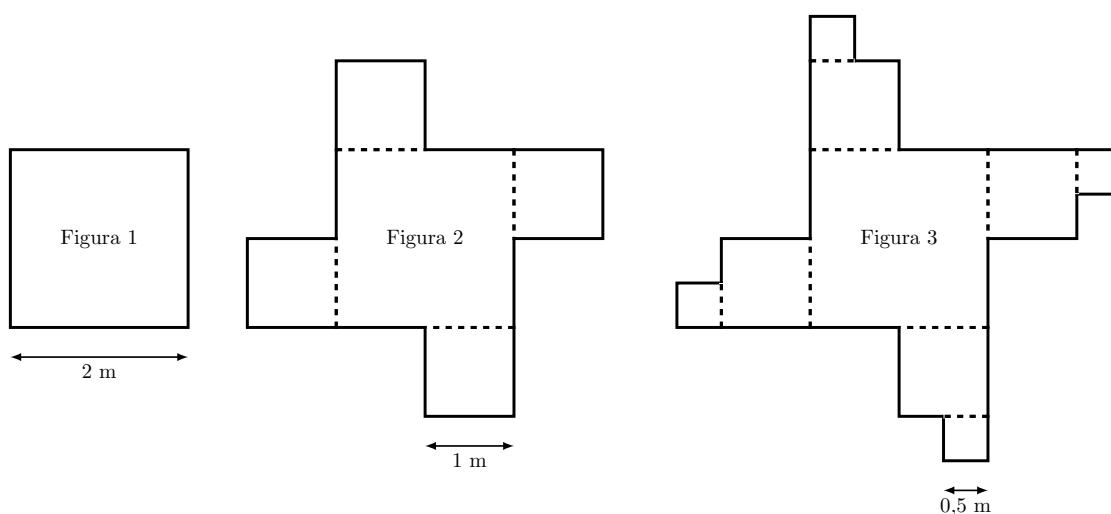
Após concluir a construção do Triângulo de Sierpinski no Geogebra, resolva as seguintes questões:

- Quantos lados tem a figura inicial do fractal? Suas medidas são iguais? Por quê?
- Considere um Triângulo de Sierpinski com um triângulo equilátero inicial de lado a . Após a primeira iteração, quantos triângulos menores são formados e qual é o lado de cada um desses triângulos menores?
- Calcule o perímetro total do Triângulo de Sierpinski após a segunda iteração, considerando que o triângulo inicial tem lado a .
- Calcule a área total do Triângulo de Sierpinski após a terceira iteração, considerando que o triângulo inicial tem lado a .
- Explique como o perímetro do Triângulo de Sierpinski se comporta após um número infinito de iterações. Ele é finito ou infinito? Justifique sua resposta.

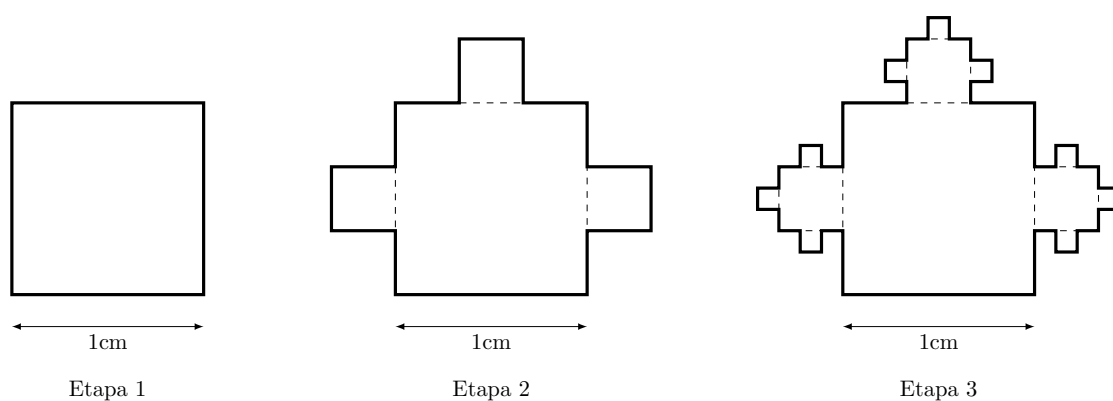
Escola Estadual Último de Carvalho
 Couto Magalhães – TO, ____ de junho de 2024
 Professor: Jairomar Sobrinho
 Série/ano: 2ª série – Vespertino

Questionário 02

1. Sabendo que cada quadrado apresenta o lado a metade do quadrado adjacente, responda:



- Qual o perímetro da figura 3?
 - Qual a soma dos perímetros das 3 primeiras figuras?
 - Qual a área da figura 3?
 - Qual a soma das infinitas áreas das figuras?
2. A região fractal F , construída a partir de um quadrado de lado 1 cm, é constituída por uma infinidade de quadrados e construída em uma infinidade de etapas. A cada nova etapa consideram-se os quadrados de menor lado (L) acrescentados na etapa anterior e acrescentam-se, para cada um destes, três novos quadrados de lado $L/3$. As três primeiras etapas de construção de F são apresentadas a seguir.



Sabendo disso, responda?

- Qual o perímetro da etapa 3?
 - Qual a área da etapa 4?
 - Qual a soma das infinitas áreas do fractal?
3. O que você achou da sequência didática aplicada em sala de aula?
- Muito boa
 - Boa
 - Regular
 - Ruim
 - Muito Ruim

Por favor, explique sua resposta:

4. Você acha que a utilização da geometria fractal ajudou na assimilação do conteúdo de progressões geométricas?

- a) Sim, ajudou muito
- b) Sim, ajudou
- c) Não ajudou muito
- d) Não Ajudou
- e) Atrapalhou

Por favor, explique sua resposta:
