



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

ELIAS CALDEIRA PORTO

NÚMEROS SUAVEMENTE ONDULANTES GENERALIZADOS

**ARRAIAS-TO
2023**

Elias Caldeira Porto

NÚMEROS SUAVEMENTE ONDULANTES GENERALIZADOS

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor para obtenção de título de Licenciada em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa.

Orientador: Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa.

ARRAIAS-TO
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

P853n Porto, Elias Caldeira.
Números Suavemente Ondulantes Generalizados. / Elias Caldeira
Porto. – Arraias, TO, 2023.
62 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins –
Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2023.
Orientador: Eudes Antonio da Costa

1. Números Suavemente Ondulantes. 2. Resolução de Problemas.
3. Base Nacional Comum Curricular. 4. Proposta de Atividades. I.
Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizada desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Elias Caldeira Porto

Números Suavemente Ondulantes Generalizados

Monografia apresentada à UFT - Universidade Federal do Tocantins - Campus Universitário de Arraias, Curso de Licenciatura em Matemática, foi avaliado para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Data de aprovação: 01/12/2023

Banca Examinadora



Documento assinado digitalmente
EUDES ANTONIO DA COSTA
Data: 06/12/2023 18:59:01-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Orientador: Prof. Dr Eudes Antonio da Costa
UFT Arraias, Matemática



Documento assinado digitalmente
FERNANDO SOARES DE CARVALHO
Data: 06/12/2023 18:42:01-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Examinador: Prof. Dr. Fernando Soares de Carvalho
UFT Arraias, Matemática



Documento assinado digitalmente
DOUGLAS CATULIO DOS SANTOS
Data: 03/12/2023 08:02:33-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Examinador: Prof. MsC Douglas Catulio dos Santos
SEDUC-BA

Aos meus pais, em nome de toda minha família, e
à Universidade Federal do Tocantins, pelo apoio e
todo incentivo recebido.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela conclusão desta pesquisa e do curso de licenciatura em Matemática.

Aos meus pais, Valdomiro Alves Porto e Delcina Caldeira Ribeiro Porto, por todo apoio necessário para a conclusão desse curso.

Ao Professor Dr. Eudes Antonio da Costa, pelas orientações necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

A Universidade Federal do Tocantins e a todo corpo docente do curso de Matemática, que contribuíram significativamente para minha formação.

“O importante é não parar de questionar; a curiosidade tem sua própria razão de existir”.

Albert Einstein.

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de encontrar expressões matemáticas dos números suavemente ondulantes em um sistema de numeração posicional d maior ou igual a 2 e implementar o currículo da educação básica com propostas de atividades relacionadas aos números suavemente ondulantes, a fim de garantir algumas competências e habilidades destacadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC, BRASIL, 2018) relacionadas a números e expressões algébricas. A pesquisa consiste em um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) que responde ao seguinte problema de pesquisa: como os números suavemente ondulantes estruturam-se em padrões, expressões ou fórmulas matemáticas em sistemas de numeração posicional além da base decimal convencional, e de que maneira este tema pode ser abordado no ensino básico para despertar o entusiasmo pela investigação matemática? Para o desenvolvimento deste trabalho foram adotadas as metodologias de pesquisa bibliográfica e exploratória. Foi realizado um levantamento abrangente de trabalhos acadêmicos sobre números suavemente ondulantes e resultados clássicos da teoria dos números, os quais serviram como fundamentação teórica para as proposições matemáticas identificadas em nossa investigação. Além disso, nesta pesquisa é enfatizada a importância do ensino através da resolução de problemas abordada por Polya (1995), em seu livro “A arte de resolver problemas”, e por outros autores. Esta base teórica é utilizada na apresentação e no desenvolvimento de propostas de atividades apresentadas no Capítulo 5, que visa auxiliar os docentes na abordagem do tema deste trabalho nas séries do Ensino Fundamental e Médio, com a finalidade de os estudantes desenvolverem habilidades relativas aos processos de investigação, na construção de modelos e na resolução de problemas.

Palavras-chave: Metodologia de Resolução de Problema. Números Suavemente Ondulantes. Sistema Posicional Numérico.

ABSTRACT

The aim of this paper is finding mathematical expressions of the gently undulating numbers in a larger d positional number system or equal to 2, and to implement the basic education curriculum with proposals for activities related to smoothly undulating numbers, in order to numbers, in order to guarantee some of the competences and skills highlighted in the National Common Curricular Base (Base Nacional Comum Curricular - BNCC) (BRASIL, 2018) related to numbers and algebraic expressions. This research consists of a final paper that responds to the following research problem: how are gently undulating numbers structured into patterns, expressions or mathematical formulas in positional numbering systems beyond the conventional decimal base, and how can this topic be approached in primary education to awaken enthusiasm for mathematical investigation? A thorough review of academic papers on gently undulating numbers and classical number theory results was conducted. This review provided a theoretical foundation for the mathematical propositions identified in our investigation. In addition, this research underscores the significance of teaching through problem solving, as articulated by Polya (1995) in his seminal work "The Art of Problem Solving" and by other authors. This theoretical basis is used in the presentation and development of activity proposals in Chapter 5, which aim to help teachers approach the theme of this work in the elementary and high school grades. The goal is for students to develop skills related to investigation processes, model building, and problem solving.

Keywords: Problem Resolution Methodology. Gently Undulating Numbers. Numerical Positional System.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Conversão do número $[uz_{11}]_2$ para $[5_3]_{16}$	46
Figura 2 – Conversão do número $[uz_{15}]_2$ para $[54]_{16}$	47
Figura 3 – Conversão do número $[10_{12}]_2$ para $[524]_8$	48
Figura 4 – Conversão do número $[10_{12}]_2$ para $[524]_8$	49
Figura 5 – Conversão do número $[10_{18}]_2$ para $[526]_8$	49
Figura 6 – Conversão do número $[10_5]_7$ para $[2451]_{10}$	55
Figura 7 – Conversão do número $[15_6]_7$ para $[29412]_{10}$	56

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Competências específicas 2, 3 e 5 do Ensino Fundamental	20
Quadro 2 – Habilidades referentes a unidade temática números	21
Quadro 3 – Habilidades referentes a unidade temática álgebra	22
Quadro 4 – Competências específicas 3, 4 e 5 do Ensino Médio	23

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Fatores de uz_{4q+3}	29
Tabela 2 – Fatores de uz_{4q+1}	30

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E BNCC	15
2.1	A resolução de problemas enquanto metodologia de ensino	15
2.2	O processo de resolução de problemas	16
2.3	BNCC	19
2.4	BNCC Matemática - Anos finais do Ensino Fundamental	19
2.5	BNCC Matemática - Ensino Médio	22
3	CONTEÚDO PRELIMINAR	24
4	NÚMEROS SUAVEMENTE ONDULANTES	27
4.1	Alguns resultados na base decimal	27
4.2	Números suavemente ondulantes generalizados	30
5	PROPOSTA DE ATIVIDADES	44
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	57
	REFERÊNCIAS	58

1 INTRODUÇÃO

Atendendo a euforia pela investigação matemática, a relevância da aritmética dos números e a finalidade de implementar o currículo da educação básica, a presente pesquisa consiste em um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) que aborda um subconjunto dos números naturais chamados de números suavemente ondulantes e a aplicação de propostas de atividades na educação básica, referente às principais propriedades que estrutura este conjunto numérico. O desenvolvimento deste conteúdo partiu de um projeto de TCC com o seguinte problema de pesquisa: como os números suavemente ondulantes estruturam-se em padrões, expressões ou fórmulas matemáticas em sistemas de numeração posicional além da base decimal convencional, e de que maneira este tema pode ser abordado no ensino básico para despertar o entusiasmo pela investigação matemática?

Um número uz_n , chamado de número suavemente ondulante, representa um número inteiro positivo formado pelos algarismos 1 e 0, de forma alternada; e n indica a quantidade de algarismos. Portanto, u indica o algarismo 1 e z o 0, com n pertencente ao conjunto dos números naturais maiores que 1. Por exemplo: $10_2 = 10$, $10_3 = 101$, $10_4 = 1010$ e assim sucessivamente.

Dessa forma, para o desenvolvimento deste trabalho, foi considerada a metodologia de pesquisa de cunho bibliográfico, recorrendo a artigos científicos, livros e outros periódicos relacionados ao tema. Além disso, é realizada uma pesquisa exploratória que, segundo Severino (2007, p. 123), “busca apenas levantar informações sobre um determinado objeto, delimitando assim um campo de trabalho, mapeando as condições de manifestação desse objeto”.

Com isso, no Capítulo 2 desenvolvemos a resolução de problemas como metodologia de ensino de matemática, discutindo a maneira que este modo de ensinar matemática é defendido na Base Nacional Comum Curricular (BNCC, BRASIL, 2018), nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, BRASIL, 1998) e por outros autores que destacam a importância desta metodologia. Ademais, são apresentadas as principais contribuições de Polya (1995), Pais (2006) e outros pesquisadores a respeito da metodologia de resolução de problemas, considerando como este processo se desenvolve, de que forma utilizar essa metodologia durante as aulas de Matemática, entre outros. Além disso, com o objetivo de apresentar algumas propostas de atividades a respeito dos números suavemente ondulantes, a seção 2.3 do Capítulo 2 é dedicada à apresentação da BNCC (BRASIL, 2018) e as principais competências e habilidades que serão desenvolvidas no Capítulo 5. Isto porque, para o desenvolvimento do Capítulo 5, é imprescindível a consideração deste documento, para que as atividades estejam alinhadas com esta proposta normativa, não somente quanto a considerar os conteúdos principais contidos na BNCC (BRASIL, 2018) da área de Matemática, mas também no que se referem a competências e habilidades que devem ser desenvolvidas pelos estudantes.

Mais que isso, no Capítulo 3 são apresentados os conteúdos preliminares fundamentais para o desenvolvimento de investigações matemáticas na busca por padrões, expressões

ou fórmulas matemáticas dos números suavemente ondulantes em um sistema de numeração posicional (base) além da convencional base decimal. Posto isso, no Capítulo 4, encontram-se os principais resultados a respeito dos números suavemente ondulantes, tanto de outros autores que investigaram este conjunto numérico, quanto às novas proposições encontradas durante o desenvolvimento desse trabalho.

Ademais, considerando os resultados encontrados no Capítulo 4, e com o objetivo de abordar os números suavemente ondulantes no ensino básico, no Capítulo 5 são apresentadas algumas propostas de atividades com o uso de tecnologias contemporâneas, a fim de incentivar a investigação matemática e a elaboração ou produção de conhecimento pelo discente na escola, tomando por referências as principais proposições encontradas nesta pesquisa sobre os números suavemente ondulantes. Por fim, o último Capítulo é dedicado às considerações finais a respeito deste trabalho e à verificação dos objetivos alcançados.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E BNCC

A resolução de problemas é uma metodologia de ensino utilizada para apresentação, desenvolvimento e explicação de conteúdos relacionados ao componente curricular de Matemática. Esta metodologia busca a problematização dos assuntos de maneira que o estudante possa desenvolver seu raciocínio matemático e aperfeiçoar a argumentação nas demonstrações de fórmulas, teoremas, proposições etc. Em vista disso, neste capítulo enfatizamos a importância da resolução de problemas destacando as principais ideias do método de Polya (1995) e de outros autores. Além disso, também são feitas considerações a respeito da BNCC (BRASIL, 2018) e dos PCN (BRASIL, 1998), salientando as concepções abordadas nestes documentos com relação a esta metodologia de ensino para o desenvolvimento das atividades de Matemática.

2.1 A resolução de problemas enquanto metodologia de ensino

A resolução de problemas em Matemática corresponde basicamente a uma metodologia de ensino que se fundamenta em resolver problemas matemáticos. Problemas estes que, segundo Smole e Diniz (2001, p. 89), “não possuem solução evidente e que exigem que o resolvidor combine seus conhecimentos e decida pela maneira de usá-los em busca da solução”. Assim, esta metodologia tem por objetivo instigar o discente a pensar, expor suas ideias, comunicar-se com os demais estudantes sobre o problema apresentado, desenvolver seu raciocínio lógico-matemático, estruturar o pensamento matemático e o raciocínio dedutivo, formular conjecturas e teoremas e, finalmente, argumentar de forma concisa e fundamentada nas definições matemáticas.

No decorrer das décadas anteriores, a resolução de problemas adquiriu considerável relevância nos processos de ensino de matemática, vista não somente com a finalidade de apresentar um conteúdo, mas, incentivar a criatividade em matemática por parte dos estudantes, estimular a curiosidade, de maneira que, estes possam desenvolver o raciocínio lógico-matemático de forma independente. Smole e Diniz (2001, p. 87) destacam que:

Em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics, reconhecida associação norte-americana de professores de matemática, dedicou sua publicação anual à resolução de problemas, reforçando as propostas curriculares (NCTM, 1989) estabelecidas nos Estados Unidos que indicavam ser a resolução de problemas o centro do ensino e das pesquisas da década de 80.

No Brasil, os PCN (BRASIL, 1998, p. 16) indicam “a Resolução de Problemas” como ponto de partida da atividade matemática e discutem caminhos para “fazer matemática na sala de aula, destacando a importância da História da matemática e das Tecnologias da Comunicação”. Mais que isso, este documento ainda afirma que:

A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos estudantes mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para

gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os estudantes terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança (BRASIL, 1998, p. 40).

O processo de ensino por meio da resolução de problemas refletiu em algumas propostas na BNCC (BRASIL, 2018) tendo inclusive, como objetivo, o desenvolvimento de competências e habilidades de raciocinar, argumentar, representar e comunicar, apoiados na resolução de problemas. De acordo com a BNCC:

[...] o Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas (BRASIL, 2018, p. 266).

Para mais, o PCN (BRASIL, 1998) do componente curricular de Matemática destaca que, na educação básica, o recurso da metodologia de resolução de problemas como forma de ensino deve ser o ponto de partida das aprendizagens, para que os estudantes exercitem o ato de pensar, raciocinar, deduzir, conjecturar, provar e desenvolver habilidades e competências para solucionar diversos problemas matemáticos. Como destacado no PCN da área de Matemática:

A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os estudantes precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las (BRASIL, 1998, p. 40).

Portanto, essa metodologia implica na aquisição de competências e habilidades por partes dos estudantes para lidar com diversos problemas, não somente relacionados à matemática pura, mas envolvendo situações que aborda mais de uma disciplina. O objetivo não é o acúmulo de informações e a memorização de fórmulas e teoremas, mas o desenvolvimento da capacidade cognitiva dos estudantes para lidar com questões matemáticas complexas e resolvê-las.

2.2 O processo de resolução de problemas

A metodologia de resolução de problemas recebeu diversas contribuições científicas e notável reconhecimento por vários educadores, sendo a principal contribuição de George Polya. Suas obras tornaram-se objeto de estudo de vários pesquisadores e constitui-se essencial para o ensino da Matemática. Em seu livro, "A arte de resolver problemas", Polya destaca quatro princípios gerais para resolução de problemas que, por meio da prática e observação destes, proporciona ao estudante a facilidade em reconhecer o objetivo da questão, quais elementos podem servir para a resolução, que ferramentas matemáticas podem ser utilizadas, que dados o

problema aborda, e quais as relações que estes dados possuem com a incógnita. Como destacado pelo autor:

[...] primeiro, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo e discutindo-a (POLYA, 1995, p. 3-4).

Neste processo de aprendizagem, o mesmo autor aborda como o professor deve posicionar-se diante das resoluções de problemas em sala de aula. Esta metodologia não atribui ao discente independência total na solução de um exercício, mas considera a importância do professor auxiliar os aprendentes em suas dificuldades. Conforme Polya (1995, p. 1):

[...] o estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o estudante fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável de trabalho.

Por outro lado, o PCN (BRASIL, 1998) da área de Matemática estabelece que os problemas propostos para o processo de ensino e aprendizagem deve possuir características desafiadoras exigindo que a resposta do problema não esteja disponível de início, para que os estudantes não realizem cálculos mecanizados utilizando os números do enunciado. A ideia é que se possa proporcionar “a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado”, conduzindo-os a construir uma resposta consistente e fundamentada em conceitos matemáticos.

Resolver um problema pressupõe que o estudante:

- elabore um ou vários procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses);
- compare seus resultados com os de outros estudantes;

Outro procedimento imprescindível para o processo de resolução de problemas consiste em entender que, ao obter a solução de um problema matemático, o docente deve motivar o discente a ir além dos resultados obtidos, reformulando os problemas e, mais que isso, motivando-os a resolver problemas mais complexos, para envolver-se com o caráter desafiador da matemática. Deve-se também ressaltar a possibilidade de reformular atividades, pois um problema matemático nunca é esgotado, sempre há um resultado particular a ser analisado que às vezes culmina em uma questão mais complexa do que o problema original. Polya (1995, p. 10) reitera que:

Um bom professor precisa compreender e transmitir a seus estudantes o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer. Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a compreensão da resolução.

Mais que isso, os estudos de Polya (1995) a respeito desse assunto refletiram no PCN (BRASIL, 1998, p. 42), que enfatiza em seu texto:

O fato de o estudante ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos - que admitem diferentes respostas em função de certas condições -, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos.

Também a BNCC (BRASIL, 2018, p. 535), apoiada nas contribuições científicas de Polya, apregoa que:

Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.

Contudo, é importante considerar os diferentes níveis de dificuldades que uma diversidade de problemas apresenta, a depender do nível de conhecimento dos aprendentes e do grau de dificuldade do problema; a BNCC (BRASIL, 2018, p. 535-536) salienta que:

[...] a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.

Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco.

Pais (2006), que também estudou a metodologia da resolução de problemas, ressalta a sua importância no processo de ensino e aprendizagem. Em sua obra “Ensinar e Aprender Matemática”, além de abordar as características subjetivas e objetivas durante a resolução de problemas, defende que:

Para explorar os aspectos pedagógicos dos problemas, na direção sinalizada pelas ciências, é preciso lançar mão de conceitos, modelos, definições, algoritmos e teoremas. Quanto mais qualitativa forem as articulações entre esses componentes, maiores serão as chances de obter soluções criativas e consequentemente, expandir o significado do saber (PAIS, 2006, p. 131).

Por outro lado, é necessário que o professor atente-se para a importância da compreensão do enunciado durante as resoluções de problemas, porquanto, segundo Pais (2006, p. 132): “a

experiência mostra-nos que o problema didático do uso de problemas como estratégia metodológica começa com a leitura de seu enunciado, ou seja, com a dificuldade que o aluno pode ter de interpretar o sentido intencionado na redação”. Deste modo, ao abordar esta metodologia de ensino, acreditamos que o desenvolvimento da leitura e escrita é dever de todas as disciplinas; no caso da Matemática, o mesmo autor enfatiza o compromisso do professor trabalhar com a interpretação dos enunciados, levando o aluno a expor seu entendimento.

Portanto, a resolução de problemas constitui um processo que envolve vários aspectos pedagógicos, tanto no desenvolvimento das propostas de atividades quanto na ação do docente diante das dificuldades dos estudantes. Cabe ao professor ter o compromisso de observar as diferentes estratégias e sugestões defendidas pelos autores citados nesta seção, como também as diretrizes nacionais para o ensino de Matemática pois, de acordo com Pais (2006, p. 135): “a valorização, da resolução de problemas é uma estratégia de ensino através da qual é possível explorar a potencialidade da matemática no que diz respeito aos valores formativos”.

2.3 BNCC

A BNCC (BRASIL, 2018) estabelece o conjunto de aprendizagens essenciais a serem abordadas pelas escolas brasileiras comprometidas com o ensino básico, sendo que este documento é “Referência Nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios e das propostas pedagógicas das instituições escolares” (BRASIL, 2018, p. 8).

Diante disso, para o desenvolvimento das propostas de atividades descritas no Capítulo 5 é imprescindível levar em conta a BNCC, para que as atividades estejam alinhadas com suas orientações, não somente quanto a considerar os conteúdos principais contidos na área de Matemática mas, também no que refere-se a competências e habilidades que devem ser desenvolvidas pelos estudantes.

Por conta disso, faz-se necessário apresentar neste capítulo os principais conteúdos, competências e habilidades incluídos na BNCC, que serão considerados nas propostas de atividades deste trabalho. Consideramos conteúdos tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio, referentes às unidades temáticas de *álgebra e números*.

2.4 BNCC Matemática - Anos finais do Ensino Fundamental

No que refere-se ao Ensino Fundamental - anos finais da área de Matemática, é o momento em que o estudante aprofunda as ideias de equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência, além de compreender melhor a linguagem simbólica de Matemática, com auxílio dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos,

calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica. A BNCC (BRASIL, 2018, p. 266) exige que:

O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição).

Dessa forma, com o objetivo de assegurar o desenvolvimento de competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, a seguir são apresentadas três competências específicas da BNCC (BRASIL, 2018) que estão diretamente relacionadas à resolução de problemas, um dos temas principais desse trabalho. Além disso, estas competências são imprescindíveis para as propostas de atividades contidas no Capítulo 5.

Quadro 1 – Competências específicas 2, 3 e 5 do Ensino Fundamental

COMPETÊNCIA 2	Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
COMPETÊNCIA 3	Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
COMPETÊNCIA 5	Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

Fonte: BRASIL (2018, p. 267).

Por outro lado, tratando das unidades temáticas *álgebra e números*, são temas essenciais da teoria dos números, que abordam as quatro operações fundamentais, os conjuntos numéricos, os números primos, as principais sequências numéricas (incluindo Progressão Aritmética - PA e Progressão Geométrica - PG) e entre outros conteúdos. A BNCC (BRASIL, 2018, p. 269) destaca que no Ensino Fundamental - anos finais "[...] a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com

seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos”. Já em relação ao ensino de álgebra:

No Ensino Fundamental – Anos Finais, os estudos de Álgebra retomam, aprofundam e ampliam o que foi trabalhado no Ensino Fundamental – Anos Iniciais. Nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas (BRASIL, 2018, p. 270).

Diante disso, fundamentados nas unidades temáticas descritas anteriormente, os Quadros 2 e 3 descrevem as principais habilidades a serem abordadas nas propostas de atividades contidas no Capítulo 5.

Quadro 2 – Habilidades referentes a unidade temática números

(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais [...] cuja representação decimal é finita, [...].
(EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal,[...], e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais [...] em sua representação decimal.
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
(EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).
(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.
(EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum[...].
(EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, [...] e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.
(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.
(EF08MA01) Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros [...].

Fonte: Brasil (2018).

Quadro 3 – Habilidades referentes a unidade temática álgebra

(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.
(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, [...].
(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, [...].
(EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

Fonte: Brasil (2018).

2.5 BNCC Matemática - Ensino Médio

No Ensino Médio, momento que os discentes consolida, amplia e aprofunda as aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental, a BNCC organiza os conteúdos matemáticos mediante as competências específicas e habilidades, sendo que as habilidades estão diretamente relacionadas as competências. Dessa forma, o documento apregoa que:

[...] os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2018, p. 529).

Sendo assim, dentre as 5 competências destacada pela BNCC (BRASIL, 2018), na tabela seguinte estão elencadas apenas 3, que estão associadas com as propostas de atividades descritas no Capítulo 5, fundamentais para o desenvolvimento do pensamento cognitivo do estudante.

Quadro 4 – Competências específicas 3, 4 e 5 do Ensino Médio

COMPETÊNCIA 3	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
COMPETÊNCIA 4	Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
COMPETÊNCIA 5	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: BRASIL (2018, p. 531).

3 CONTEÚDO PRELIMINAR

Quanto à fundamentação teórica, no sentido do desenvolvimento do trabalho possuir valor científico, consideramos como pertinente ao assunto vários resultados clássicos da teoria dos números contidos nos trabalhos de: Carvalho e Costa (2015, 2022); Domingues (2009); Hefez (2016); Landau (2002); Morgado e Carvalho (2014); e Snyder (1982).

Dessa forma, para que o leitor esteja familiarizado com os números inteiros, podemos definir que este conjunto corresponde a

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -(n+1), -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$$

que possui como subconjunto os números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$. Além disso, é necessário destacar que todo número da forma $2k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ corresponde a um número natural par pertencente ao subconjunto $\{2k\} = \{0, 2, 4, \dots\}$. Por outro lado, para todo $k \in \mathbb{N}$, $2k+1$ representa um número natural ímpar pertencente ao subconjunto $\{2k+1\} = \{1, 3, 5, \dots\}$.

Teorema 3.0.1. *Conforme Domingues (2009), seja d um número natural maior que 1 e seja $M = \{0, 1, 2, \dots, d-1\}$; então, todo número n pode ser representado univocamente da seguinte maneira:*

$$n = a_0 + a_1 \cdot d + a_2 \cdot d^2 + \dots + a_r \cdot d^r.$$

Sendo $r \geq 0$, $a_i \in M$ ($i = 1, 2, \dots, r$) e $a_r \neq 0$.

Exemplo 3.0.1: Observe que o número 1995 na base 10 pode ser representado da seguinte maneira $1995 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 5 \cdot 10^0$. Além disso, o número 1235 na base 6 é escrito na forma $(1235)_6 = 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6^1 + 5 \cdot 6^0$.

Definição 3.0.1: Segundo Domingues (2009), um número natural a divide um número natural b se $b = a \cdot c$, para algum $c \in \mathbb{N}$. Além disso, concluímos que a é divisor de b e que b é múltiplo de a , ou que b é divisível por a . O caso em que a divide b , pode ser indicado pela notação $a \mid b$.

Exemplo 3.0.2: Observe que, para $1010 = 10 \cdot 101$ podemos concluir que os números 10 e 101 divide o número 1010, ou ainda que 1010 é múltiplo de 10 e 101. Mais que isso, $10 \mid 1010 = 10 \cdot 101$ e $101 \mid 1010 = 101 \cdot 10$.

Proposição 3.0.1: Segundo Domingues (2009), sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Um número $d \in \mathbb{N}$ se diz máximo divisor comum de a e b se:

- i) $d \mid a$ e $d \mid b$;
- ii) Se c é um número natural tal que $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \mid d$.

Exemplo 3.0.3: Sejam $a = 6$ e $b = 10$. Indicamos por D_x o conjunto dos divisores de $x \in \mathbb{N}$, então

$$D_6 = \{1, 2, 3, 6\} \text{ e } D_{10} = \{1, 2, 5\},$$

do que segue

$$D_6 \cap D_{10} = \{1, 2\}.$$

Observemos que:

i) $2 \mid 6$ e $2 \mid 10$;

ii) Se $c \mid 6$ e $c \mid 10$, então $c = 1$ ou $c = 2$ e, portanto, $c \mid 2$. Onde 2 é o máximo divisor comum de 6 e 10, o qual indicamos por $(6, 10) = 2$.

Definição 3.0.2: Segundo Domingues (2009), sejam a, b e m números inteiros, $m > 0$. Definimos que a é congruente a b , módulo m , se $m \mid (a - b)$. Notação: $a \equiv b \pmod{m}$.

Exemplo 3.0.4: Podemos dizer que $101 \equiv 10 \pmod{13}$ pois $13 \mid (101 - 10) = 7 \cdot 13$. Também $1010 \equiv 101 \pmod{9}$, porque $9 \mid (1010 - 101)$, $1010101 \equiv 1010 \pmod{101}$ e $10101010 \equiv 10101 \pmod{89}$.

Proposição 3.0.2: De acordo com Hefez (2016), uma PG é uma sequência de números reais (a_n) tal que a_1 é dado e, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $a_{n+1} = a_n q$, sendo q um número real fixo, diferente de 0 e de 1, chamado razão.

Exemplo 3.0.5: Considerando a PG:

$$12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, \dots$$

Sendo a razão $q = 2$, e considerando a recorrência $a_{n+1} = a_n q$, temos que:

$$a_1 = 12$$

$$a_2 = a_{1+1} = a_1 \cdot 2 = 12 \cdot 2 = 24$$

$$a_3 = a_{2+1} = a_2 \cdot 2 = 24 \cdot 2 = 48 \text{ e sucessivamente.}$$

Proposição 3.0.3: Segundo Morgado e Carvalho (2014), a soma dos n primeiros termos de uma PG (a_n) de razão $q \geq 1$ é $S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

Exemplo 3.0.6: Observe que, na PG

$$12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, \dots$$

sendo $q = 2$, a soma dos 5 primeiros termos (S_5) é:

$$\begin{aligned} S_5 &= 12 \frac{1 - 2^5}{1 - 2} = 12 \frac{1 - 32}{-1} \\ &= 12 \frac{-31}{-1} = 12 \cdot 31 = 372 \end{aligned}$$

Proposição 3.0.4: De acordo com Snyder (1982), os números repunidades, resumidamente, tratam-se de um subconjunto do conjunto dos números naturais. De acordo com Carvalho e Costa (2015), os números repunidades foram definidos por Beiler em seu trabalho "Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains" em 1964, considerando a repetição do algarismo 1, n vezes, como um número repunidade, denotado por R_n . Exemplo: para todo $n > 0$, $R_1 = 1$; $R_2 = 11$; $R_3 = 111$; $R_4 = 1111$; ...; R_n ;

Diante disso, Snyder (1982) generalizou uma repunidade em uma base $d > 1$ qualquer, da seguinte forma. Considerando $d > 1$, $(R_n)_d = d^{n-1} + d^{n-2} + \dots + d + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma $(R_n)_d = \frac{d^n - 1}{d - 1}$ e $(R_{n+1})_d = \frac{d^{n+1} - 1}{d - 1}$.

Exemplo 3.0.7: Para $n = 3$, na base 10, $R_3 = \frac{10^3 - 1}{10 - 1} = 111$ e $R_{3+1} = \frac{10^{3+1} - 1}{10 - 1} = 1111$.

Proposição 3.0.5: Segundo Domingues (2009), são chamados números triangulares os números que condizem com a distribuição de pontos em um plano na forma triangular. Se indicado por T_n , para todo $n \geq 1$, o n -ésimo número triangular é representado por:

$$T_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (3.1)$$

Exemplo 3.0.8: Se $n = 10$, então : $T_{10} = \frac{10(10+1)}{2} = 55$. De outra forma, para $n = 15$, $T_{15} = \frac{15(15+1)}{2} = 120$. Na base 5, $(T_3)_5 = \left(\frac{3 \cdot 4}{2}\right)_5 = \left(\frac{22}{2}\right)_5 = (11)_5$.

Proposição 3.0.6: Segundo Landau (2002), sendo um número $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$ é dito um número primo (ou simplesmente um primo) se só tiver dois divisores positivos, a saber 1 e a . Em outras palavras, a só é divisível por 1 ou por ele mesmo.

Exemplo 3.0.9: Veja que os números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... são exemplos de números primos.

Proposição 3.0.7: Conforme Landau (2002), se $(a, b) = 1$, isto é, se 1 for o único divisor positivo de a e b , então a e b são ditos primos entre si, ou coprimos.

Exemplo 3.0.10: $(15, 7) = 1$. Veja que os números 15 e 7 são coprimos, dado que 15 tem 1, 3, 5 e 15 como seus únicos divisores positivos e, exceto 1, nenhum dos números 3, 5 e 15 dividem 7.

4 NÚMEROS SUAVEMENTE ONDULANTES

Conforme Carvalho e Costa (2022), um número inteiro é considerado ondulante quando seus algarismos (ou dígitos) alternadamente oscilam para maior ou menor que os dígitos adjacentes a eles. Por exemplo: 278956, 789056 e 567239. Vejamos que a diferença absoluta entre dois algarismos adjacentes pode variar para maior ou menor e, a partir disso, estabelecemos a seguinte definição:

Definição 4.0.1: Seja $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ o conjunto de dígitos ou algarismos no sistema posicional decimal. Um número natural N , com $n > 2$ algarismos é ondulante quando,

$$N = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n, \text{ com } a_1 \neq 0 \text{ e } a_i \in D, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

e alternadamente, $a_1 < a_2, a_2 > a_3, \dots$ ou $a_1 > a_2, a_2 < a_3, \dots$, ou seja, após o primeiro dígito, os próximos dígitos alternadamente aumentam e diminuem ou diminuem e aumentam.

Por outro lado, um subconjunto dos números ondulantes são os números suavemente ondulantes. Exemplo: 1010101, 787878, 9090909 etc. Veja que, neste caso, a diferença do valor absoluto entre dois algarismos é sempre constante. Observe a próxima definição.

Definição 4.0.2: Um número natural ab_n , formado por $n > 2$ algarismos é suavemente ondulante quando,

$$ab_n = \underbrace{aba \cdots ab}_{n \text{ par}} \text{ ou } ab_n = \underbrace{aba \cdots ba}_{n \text{ ímpar}} \text{ com } a, b \in D, a \neq b \text{ e } a \neq 0.$$

Usaremos a notação $ab_n \in AB$ para indicar subclasse dos números suavemente ondulante formado pelos algarismos a e b . Portanto, entendemos que os números 345, 679867 e 98712345 são ondulantes, enquanto 20_4 , 10_5 e 98_8 são suavemente ondulantes. Estes tipos de números já foram investigados por diversos autores, como Carvalho e Costa (2022), Costa e Costa (2021), Pickover (1990), Robinson (1994), Shirriff (1994) e Souza e Costa (2023).

4.1 Alguns resultados na base decimal

Em Carvalho e Costa (2022), um número suavemente ondulante, pertencente ao conjunto AB , é indicado por ab_n , em que n indica a quantidade de dígitos do número ab_n , para $n > 2$. Por exemplo: $10_3 = 101$, $57_5 = 57575$ e $39_4 = 3939$. Carvalho e Costa (2022) afirmam que qualquer número suavemente ondulante ab_n pode ser representado por:

$$ab_n = \begin{cases} a \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} 10^{2i} + b \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 10^{2i-1}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$ab_n = \begin{cases} a \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 10^{2i-1} + b \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} 10^{2i}, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Exemplo 4.1.1: Fazendo $a = 1$, $b = 0$ e $n = 7$ na Equação (4.1). Como $\frac{7-1}{2} = 3$, temos que 10_7 pode ser expresso na forma,

$$\begin{aligned} 10_7 &= 1 \sum_{i=0}^3 10^{2i} + 0 \sum_{i=1}^3 10^{2i-1} \\ &= 1(10^0 + 10^2 + 10^4 + 10^6) + 0(10^1 + 10^3 + 10^5) \\ &= 10^0 + 10^2 + 10^4 + 10^6 \\ &= 1010101 \end{aligned}$$

De outro modo, fazendo $a = 3$, $b = 4$ e $n = 6$ na Equação (4.2). Como $\frac{6}{2} = 3$, temos que 34_6 pode ser expresso na forma,

$$\begin{aligned} 34_6 &= 3 \sum_{i=1}^3 10^{2i-1} + 4 \sum_{i=0}^2 10^{2i} \\ &= 3(10^1 + 10^3 + 10^5) + 4(10^0 + 10^2 + 10^4) \\ &= 3 \cdot 101010 + 4 \cdot 10101 \\ &= 343434 \end{aligned}$$

De agora em diante, com a finalidade de mostrar alguns resultados na base 10, vamos considerar o subconjunto UZ , chamados de números *um-zero* e denotados por uz_n , que é pertencente ao conjunto dos números suavemente ondulantes ab_n . Assim, uz_n representa um número inteiro positivo formado pelos algarismos 1 e 0, de forma alternada, sendo que n indica a quantidade de algarismos. Portanto, u indica o algarismo 1 e z o 0, com n pertencente ao conjunto dos números naturais maiores que 1. Por exemplo: $uz_2 = 10_2 = 10$, $uz_3 = 10_3 = 101$, $uz_4 = 10_4 = 1010$ e assim sucessivamente.

Além disso, é necessário esclarecer que para todo $k \geq 1$, $2k$ é um número par e $2k+1$ é um número ímpar; dessa forma, atentando para o conjunto uz_n , se $n = 2k$ então $uz_{2k} = 1010...1010$ termina em 0. E, se $n = 2k+1$, então $uz_{2k+1} = 10101...101$ termina em 1.

Proposição 4.1.1: Todo número suavemente ondulado da forma uz_{2k} é múltiplo de 2 e 5.

Prova: Para todo $k \geq 1$, temos $uz_{2k} = 10...10$ termina em 0, logo, $uz_{2k} \equiv 0 \pmod{2}$, bem como $uz_{2k} \equiv 0 \pmod{5}$.

Exemplo 4.1.2: Veja que $2 \mid uz_6$, pois $uz_6 = 101010 = 2(50505)$. Bem como $5 \mid uz_8$, porquanto, $uz_8 = 10101010 = 5(2020202)$.

Proposição 4.1.2: Se $k \geq 1$, todo número uz_{2k+1} não é múltiplo de 2 ou 5.

Prova: Considerando $n = 2k+1$, $uz_{2k+1} = 10101...101$ termina em 1; conseqüentemente, $uz_{2k+1} \equiv 1 \pmod{2}$. Ou seja, possui resto 1 na divisão por 2. Por outro lado, $uz_{2k+1} \equiv 1 \pmod{5}$, isto é, também admite resto 1 na divisão por 5.

Exemplo 4.1.3: Veja que 2 não divide uz_7 , visto que $uz_7 = 1010101 = 2(505050) + 1$. Por outro lado, 5 não divide uz_9 , pois $uz_9 = 101010101 = 5(20202020) + 1$.

Ainda sobre os números uz_n , Costa e Costa (2021) demonstram que, exceto 101, nenhum outro número suavemente ondulante uz_n é primo na base 10. Com o objetivo de demonstrar este resultado, consideremos que UZ é formado por dois subconjuntos $UZ_{2k} = \{10, 1010, 101010, \dots\}$ e $UZ_{2k+1} = \{101, 10101, 1010101, \dots\}$.

Veja que, se $n = 2k$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$, nenhum número uz_{2k} é primo, pois todo número que termina em 0 é par e múltiplo de 5 (Proposição 4.1.1). Contudo, se n for ímpar, uz_n termina em 1. Com isso, para demonstrar que, neste conjunto, apenas 101 é primo, vamos considerar o seguinte resultado auxiliar.

Lema 4.1.1. Para qualquer x real e $q \geq 1$ inteiro, a seguinte igualdade ocorre (Costa; Costa, 2021).

$$x^{4q} + x^{4q-2} + \dots + x^2 + 1 = (x^{2q} + x^{2q-1} + \dots + x + 1)(x^{2q} - x^{2q-1} + \dots - x + 1)$$

Prova: Para valores iniciais $q = 1$ a fatoração é verdadeira e o passo-chave é a diferença de quadrados, veja:

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = (x + 1)^2 - x^2 = x^4 + x^2 + 1$$

Agora, podemos generalizar essa ideia usando três somas de progressões geométricas,

$$\begin{aligned} x^{4q} + x^{4q-2} + \dots + x^2 + 1 &= (x^{2q} + x^{2q-1} + \dots + x + 1)(x^{2q} - x^{2q-1} + \dots - x + 1) \\ &= \frac{x^{2q+1} - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^{2q+1} + 1}{x + 1} = \frac{x^{4q+2} - 1}{x^2 - 1} \\ &= x^{4q} + x^{4q-2} + \dots + x^2 + 1 \end{aligned}$$

Além disso, com objetivo de esclarecer a demonstração do Teorema 4.1.1, observe a tabela abaixo, que exhibe a fatoração de alguns números uz_{4q+3} para $1 \leq q \leq 3$.

Tabela 1 – Fatores de uz_{4q+3}

$4q + 3$	uz_{4q+3}	fatoração
7	1010101	$101(10^4 + 1)$
11	10101010101	$10101(10^6 + 1)$
15	101010101010101	$1010101(10^8 + 1)$

Fonte: Costa e Costa (2021).

Observe também algumas fatorações para os números uz_{4q+1} para $1 \leq q \leq 3$ na Tabela 2.

Tabela 2 – Fatores de uz_{4q+1}

$4q + 1$	uz_{4q+1}	fatoração
5	10101	$111(10^2 - 10 + 1)$
9	101010101	$11111(10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1)$
13	1010101010101	$1111111(10^6 - 10^5 + 10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1)$

Fonte: Costa e Costa (2021).

Teorema 4.1.1. *Exceto 101, nenhum número alternado uz_n é primo na base 10 (Costa; Costa, 2021).*

Prova: Consideremos $n > 3$, com n ímpar, ou seja, $n = 2k + 1$; e utilizemos dois casos $n = 4q + 1$ ou $n = 4q + 3$, sendo $k, q \in \mathbb{Z}$. Portanto, veja que:

(1) Se $n = 4q + 3$, então:

$$\begin{aligned}
 uz_{4q+3} = uz_{2k+1} &= \underbrace{101 \cdots 01}_k \text{ algarismo } 0 \underbrace{101 \cdots 01}_k \text{ algarismo} \\
 &= uz_k 0 uz_k = uz_k \cdot 10^{k+1} + uz_k \\
 &= uz_k \cdot (10^{k+1} + 1)
 \end{aligned}$$

Portanto, $uz_k = uz_{2q+1}$ é um divisor de uz_{4q+3} .

(2) Agora, se $n = 4q + 1$, temos: $uz_{4q+1} = 10^{4q} + 10^{4q-2} + \cdots + 10^2 + 1$ e pelo Lema 4.1.1 pode ser fatorado na forma $uz_{4q+1} = (10^{2q} + 10^{2q-1} + \cdots + 10 + 1)(10^{2q} - 10^{2q-1} + \cdots - 10 + 1)$ sendo uma consequência direta do Lema 4.1.1, usando $x = 10$.

4.2 Números suavemente ondulantes generalizados

Ainda em Carvalho e Costa (2022), considerando uma base $d \geq 2$ para a e $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ com $a \neq b$ e $a \neq 0$, podemos representar qualquer número suavemente ondulado ab_n utilizando a seguinte expressão:

$$[ab_n]_d = a \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} d^{2i} + b \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} d^{2i-1}, \text{ se } n \text{ é ímpar.} \quad (4.3)$$

$$[ab_n]_d = a \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} d^{2i-1} + b \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} d^{2i}, \text{ se } n \text{ é par.} \quad (4.4)$$

É importante destacar que um número ab_n na base d não é necessariamente suavemente ondulado em outra base $d' \neq d$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.2.1: Fazendo $a = 1$, $b = 0$, $n = 7$ e $d = 5$. Como $\frac{7-1}{2} = 3$, temos que na Equação (4.3), $[10_7]_5$ pode ser expresso na forma

$$\begin{aligned} [10_7]_5 &= 1 \sum_{i=0}^3 5^{2i} + 0 \sum_{i=1}^3 5^{2i-1} \\ &= 1(5^0 + 5^2 + 5^4 + 5^6) + 0(5^1 + 5^3 + 5^5) = 5^0 + 5^2 + 5^4 + 5^6 = 16276 \end{aligned}$$

Veja que $[10_7]_5 = 16276_{10}$ e 16276 é um número ondulante na base 10, mas não é suavemente ondulante. De outra forma, considerando $a = 3$, $b = 4$, $n = 6$ e $d = 5$. Como $\frac{6}{2} = 3$, temos que na Equação (4.4), $[34_6]_5$ pode ser expresso na forma

$$\begin{aligned} [34_6]_5 &= 3 \sum_{i=1}^3 5^{2i-1} + 4 \sum_{i=0}^2 5^{2i} \\ &= 3(5^1 + 5^3 + 5^5) + 4(5^0 + 5^2 + 5^4) = 3 \cdot 3255 + 4 \cdot 651 = 12369 \end{aligned}$$

Veja que 12369_{10} não é um número suavemente ondulante.

Proposição 4.2.1: Considerando n par, se $[ab_n]_d$ é um número suavemente ondulante, então $[ab_n]_{d^2}$ é um monodígito (CARVALHO; COSTA, 2022).

Prova: Considere $d' = d^2$, $c = (a \cdot d + b)$ e $n = 2 \cdot k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Note que:

$$\begin{aligned} [ab_n]_d &= a \cdot d^{2k-1} + b \cdot d^{2k-2} + a \cdot d^{2k-3} + b \cdot d^{2k-4} + \dots + a \cdot d^1 + b \\ &= (ad + b)d^{2k-2} + (ad + b)d^{2k-4} + \dots + (ad + b)d^0 \\ &= c \cdot d^{2k-2} + c \cdot d^{2k-4} + \dots + c \cdot d^0 \\ &= c \cdot (d^2)^{k-1} + c \cdot (d^2)^{k-2} + \dots + c \cdot (d^2)^0 \\ &= c \cdot (d')^{k-1} + c \cdot (d')^{k-2} + \dots + c \cdot (d')^0 \\ &= c \cdot \frac{d'^k - 1}{d' - 1} = c \cdot (R_k)_{d'} \end{aligned}$$

perceba que, como $c = (ad + b)$, então $[ab_n]_d = c \cdot (R_k)_{d'} = (ad + b) \cdot (R_k)_{d'}$. Além disso, $(R_k)_{d'}$ é uma monodígito na base $d' = d^2$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.2.2: Observe que $[12_6]_3 = [555]_9$.

$$\begin{aligned} [12_6]_3 &= 1 \cdot 3^{6-1} + 2 \cdot 3^{6-2} + 1 \cdot 3^{6-3} + 2 \cdot 3^{6-4} + \dots + 1 \cdot 3^1 + 2 \\ &= (1 \cdot 3 + 2)3^{6-2} + (1 \cdot 3 + 2)3^{6-4} + (1 \cdot 3 + 2)3^0 \\ &= 5 \cdot 3^{6-2} + 5 \cdot 3^{6-4} + 5 \cdot 3^0 \\ &= 5 \cdot (3^2)^{3-1} + 5 \cdot (3^2)^{3-2} + 5 \cdot (3^2)^0 \\ &= 5 \cdot (9)^2 + 5 \cdot (9)^1 + 5 \cdot (9)^0 \\ &= 5 \cdot \frac{9^3 - 1}{9 - 1} = [5 \cdot 111]_9 = [555]_9 \end{aligned}$$

Por outro lado, também verifica que $[12_8]_4 = [6666]_{16}$, vejamos:

$$\begin{aligned}
 [12_8]_4 &= 1 \cdot 4^{8-1} + 2 \cdot 4^{8-2} + 1 \cdot 4^{8-3} + 2 \cdot 4^{8-4} + \dots + 1 \cdot 4^1 + 2 \\
 &= (1 \cdot 4 + 2)4^{8-2} + (1 \cdot 4 + 2)4^{8-4} + \dots + (1 \cdot 4 + 2)4^0 \\
 &= 6 \cdot 4^{8-2} + 6 \cdot 4^{8-4} + \dots + 6 \cdot 4^0 \\
 &= 6 \cdot (4^2)^{4-1} + 6 \cdot (4^2)^{4-2} + \dots + 6 \cdot (4^2)^0 \\
 &= 6 \cdot (16)^3 + 6 \cdot (16)^2 + \dots + 6 \cdot (16)^0 \\
 &= 6 \cdot \frac{16^4 - 1}{16 - 1} = [6 \cdot 1111]_{16} = [6666]_{16}
 \end{aligned}$$

Para toda base $d > 1$, se n é ímpar, então, $[uz_n]_d$ possui a seguinte representação polinomial:

$$[uz_n]_d = d^{n-1} + d^{n-3} + d^{n-5} + \dots + d^2 + d^0 \quad (4.5)$$

Exemplo 4.2.3: Na Equação (4.5) fazendo $n = 9$ e $d = 4$, note que:

$$\begin{aligned}
 [uz_9]_4 = [101010101]_4 &= 4^{9-1} + 4^{9-3} + 4^{9-5} + 4^{9-7} + 4^{9-9} \\
 &= 4^8 + 4^6 + 4^4 + 4^2 + 4^0
 \end{aligned}$$

De outro modo, se $n = 7$ e $d = 4$, então:

$$\begin{aligned}
 [uz_7]_4 = [1010101]_4 &= 4^{7-1} + 4^{7-3} + 4^{7-5} + 4^{7-7} \\
 &= 4^6 + 4^4 + 4^2 + 4^0
 \end{aligned}$$

Para toda base $d > 1$, se n é par, então $[uz_n]_d$ é representado univocamente da seguinte maneira:

$$[uz_n]_d = d^{n-1} + d^{n-3} + d^{n-5} + \dots + d^3 + d^1 \quad (4.6)$$

Exemplo 4.2.4: Utilizando a Equação (4.6), veja que $[uz_8]_5$ pode ser representado por um polinômio que resulta no número 81380_{10} .

$$\begin{aligned}
 [uz_8]_5 = [10101010]_5 &= 5^{8-1} + 5^{8-3} + 5^{8-5} + 5^{8-7} \\
 &= 5^7 + 5^5 + 5^3 + 5^1 = 81380_{10}
 \end{aligned}$$

Ainda, pela mesma equação, a seguinte igualdade é verdadeira: $[uz_6]_5 = 3255_{10}$. Observe:

$$\begin{aligned}
 [uz_6]_5 = [101010]_5 &= 5^{6-1} + 5^{6-3} + 5^{6-5} \\
 &= 5^5 + 5^3 + 5^1 = 3255_{10}
 \end{aligned}$$

Antes de apresentar outros resultados acerca dos números $[uz_n]_d$, é necessário destacar que não existe, ainda, nenhuma decorrência que demonstre a existência de uma fórmula única que considere um n par e ímpar para números $[uz_n]_d$. Supomos que este problema decorre do fato de os números suavemente ondulantes terminarem em 0 ou 1. Portanto, as proposições seguintes ora consideram os números $[uz_n]_d$ para todo n par, ora discorrem para todo n ímpar.

Proposição 4.2.2: Para toda base $d > 1$, se $n = 2k + 1$ com $k \geq 1$, então um número suavemente ondulante $[uz_n]_d$, pode ser representado por: $[uz_{2k+1}]_d = \frac{d^{2k+2} - 1}{d^2 - 1}$.

Prova: Considerando a Equação (4.5): $[uz_n]_d = d^{n-1} + d^{n-3} + d^{n-5} + \dots + d^2 + d^0$, e substituindo n por $2k + 1$, podemos utilizar uma soma de PG. Vejamos:

$$\begin{aligned} [uz_{2k+1}]_d &= d^{2k+1-1} + d^{2k+1-3} + d^{2k+1-5} + \dots + d^2 + d^0 \\ &= d^{2k} + d^{2k-2} + d^{2k-4} + \dots + d^2 + d^0 \\ &= \frac{(d^2)^{k+1} - 1}{d^2 - 1} \\ &= \frac{d^{2k+2} - 1}{d^2 - 1} \end{aligned}$$

Ou seja, se n é ímpar, $[uz_{2k+1}]_d = \frac{d^{2k+2} - 1}{d^2 - 1}$.

Exemplo 4.2.5: Tomando $k = 2$ e $d = 2$, temos:

$$[10101]_2 = [uz_5]_2 = [uz_{2 \cdot 2 + 1}]_2 = \frac{2^{2 \cdot 2 + 2} - 1}{2^2 - 1} = \frac{2^6 - 1}{3} = \frac{63}{3} = 21$$

De outro modo, se $k = 3$ e $d = 4$, temos:

$$[1010101]_4 = [uz_7]_4 = [uz_{2 \cdot 3 + 1}]_4 = \frac{4^{2 \cdot 3 + 2} - 1}{4^2 - 1} = \frac{4^8 - 1}{15} = \frac{65535}{15} = 4369$$

Proposição 4.2.3: Se $k \geq 1$ e $n = 2k$, então um número suavemente ondulante da forma $[uz_{2k}]_d$, em uma base $d > 1$, pode ser representado por: $[uz_{2k}]_d = \frac{d(d^{2k} - 1)}{d^2 - 1}$.

Prova: Utilizando a Equação (4.6): $[uz_n]_d = d^{n-1} + d^{n-3} + d^{n-5} + \dots + d^3 + d^1$, e substituindo n por $2k$, podemos realizar uma soma de PG. Vejamos:

$$\begin{aligned} [uz_{2k}]_d &= d^{2k-1} + d^{2k-3} + d^{2k-5} + \dots + d^3 + d^1 \\ &= \frac{d((d^2)^k - 1)}{d^2 - 1} \\ &= \frac{d(d^{2k} - 1)}{d^2 - 1} \end{aligned}$$

Isto significa que $[uz_{2k}]_d = \frac{d(d^{2k} - 1)}{d^2 - 1}$

Exemplo 4.2.6: Verifiquemos para $k = 2$ e $d = 3$, respectivamente:

$$[uz_{2 \cdot 2}]_3 = \frac{3(3^{2 \cdot 2} - 1)}{3^2 - 1} = \frac{240}{8} = 30 = [1010]_3 = [uz_4]_3$$

De forma análoga, tomando $k = 4$ e $d = 5$, temos:

$$[uz_{2 \cdot 4}]_5 = \frac{5(5^{2 \cdot 4} - 1)}{5^2 - 1} = \frac{1953120}{24} = 81380 = [10101010]_5 = [uz_8]_5$$

Proposição 4.2.4: Se $k > 1$ e $d > 1$, então $[uz_{2k}]_d$ não é primo na base 10.

Prova: Como $2k - 1$ é ímpar para todo $k \geq 1$, consideremos a Equação (4.5): $[uz_n]_d = d^{n-1} + d^{n-3} + d^{n-5} + \dots + d^2 + d^0$, com $n = 2k - 1$, para provar que $[uz_{2k-1}]_d = \frac{d^{2k} - 1}{d^2 - 1}$.

$$\begin{aligned} [uz_{2k-1}]_d &= d^{2k-1-1} + d^{2k-1-3} + d^{2k-1-5} + \dots + d^2 + 1 \\ &= d^{2k-2} + d^{2k-4} + d^{2k-6} + \dots + d^2 + 1 \\ &= \frac{(d^2)^k - 1}{d^2 - 1} = \frac{d^{2k} - 1}{d^2 - 1} \end{aligned}$$

Mostramos que $[uz_{2k-1}]_d = \frac{d^{2k} - 1}{d^2 - 1}$. Agora, veja que $[uz_{2k}]_d = [d \cdot uz_{2k-1}]_d$; de fato,

$$\begin{aligned} [uz_{2k}]_d &= [d \cdot uz_{2k-1}]_d \\ &= \frac{d(d^{2k} - 1)}{d^2 - 1} \\ &= d \cdot (d^{2k-2} + d^{2k-4} + d^{2k-6} + \dots + d^2 + 1) \end{aligned}$$

Ou seja, todo número $[uz_{2k}]_d$ possui como múltiplos os números:

$$d \text{ e } (d^{2k-2} + d^{2k-4} + d^{2k-6} + \dots + d^2 + 1)$$

Logo, não é primo na base 10.

Exemplo 4.2.7: Se $k = 3$ e $d = 9$, veja que:

$$\begin{aligned} [uz_{2 \cdot 3}]_9 &= [9 \cdot uz_{2 \cdot 3 - 1}]_9 = [9 \cdot uz_5]_9 = [9 \cdot (9^4 + 9^2 + 9^0)]_9 \\ &= 9^5 + 9^3 + 9^1 = 59787_{10} \end{aligned}$$

Observe que o número 59787 não é primo na base 10, pois $59787 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 73$. De outra forma, se $k = 4$ e $d = 7$, então:

$$\begin{aligned} [uz_{2 \cdot 4}]_7 &= [7 \cdot uz_{2 \cdot 4 - 1}]_7 = [7 \cdot (uz_7)]_7 = [7 \cdot (7^6 + 7^4 + 7^2 + 7^0)]_7 \\ &= 7^7 + 7^5 + 7^3 + 7^1 = 840700_{10} \end{aligned}$$

Note que 840700_{10} não é um número primo.

Para demonstrar o próximo resultado, utilizaremos o seguinte Lema, cuja demonstração pode ser encontrada em Hefez (2013).

Lema 4.2.1. Sejam $x, y \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Temos que $x - y$ divide $x^n - y^n$.

Proposição 4.2.5: Admitindo uma base $d > 1$ e $k \geq 1$, $[uz_{2k}]_d \mid [uz_{2k \cdot q}]_d$, para todo $q > 1$.

Prova: Inicialmente, vamos definir uma fórmula generalizada para encontrar qualquer número da forma $[uz_{2k \cdot q}]_d$. Com este fim, considerando a Equação (4.6): $[uz_n]_d = d^{n-1} + d^{n-3} + d^{n-5} + \dots + d^3 + d^1$, para $n = 2k \cdot q$, note que:

$$\begin{aligned} [uz_{2k \cdot q}]_d &= d^{2kq-1} + d^{2kq-3} + d^{2kq-5} + \dots + d^3 + d^1 \\ &= \frac{d((d^2)^{kq} - 1)}{d^2 - 1} \end{aligned}$$

Visto que $[uz_{2k}]_d = \frac{d(d^{2k} - 1)}{d^2 - 1}$, demonstraremos que $[uz_{2k}]_d \mid [uz_{2k \cdot q}]_d$.

$$\begin{aligned} \frac{[uz_{2k \cdot q}]_d}{[uz_{2k}]_d} &= \frac{d((d^2)^{kq} - 1)}{d^2 - 1} \cdot \frac{d^2 - 1}{d(d^{2k} - 1)} \\ &= \frac{d^{2kq} - 1}{d^{2k} - 1} \end{aligned}$$

Podemos dizer que $\frac{d^{2kq} - 1}{d^{2k} - 1}$ é um número inteiro. Isto porque, como $\frac{d^{2kq} - 1}{d^{2k} - 1} = \frac{(d^{2k})^q - 1^q}{d^{2k} - 1}$, segue do Lema 4.2.1 que $d^{2k} - 1$ divide $(d^{2k})^q - 1^q$.

Exemplo 4.2.8: Podemos observar que o resultado é especificado quando $k = 2$, $q = 3$ e $d = 6$. Repare.

$$\frac{[uz_{2 \cdot 2 \cdot 3}]_6}{[uz_{2 \cdot 2}]_6} = \frac{[uz_{12}]_6}{[uz_4]_6} = \frac{6^{2 \cdot 2 \cdot 3} - 1}{6^{2 \cdot 2} - 1} = \frac{6^{12} - 1}{6^4 - 1} = 1680913_{10}$$

Também é válido no caso em que $k = 1$, $q = 4$ e $d = 8$. Vejamos:

$$\frac{[uz_{2 \cdot 1 \cdot 4}]_8}{[uz_{2 \cdot 1}]_8} = \frac{[uz_8]_8}{[uz_2]_8} = \frac{8^{2 \cdot 1 \cdot 4} - 1}{8^{2 \cdot 1} - 1} = \frac{8^8 - 1}{8^2 - 1} = 266305_{10}$$

O próximo resultado mostra que a diferença entre dois números suavemente ondulantes de índice ímpar é um quadrado perfeito em qualquer base $d > 1$. Vejamos:

Proposição 4.2.6: Para todo $k \geq 2$ e $d > 1$, $[uz_{2k+1}]_d - [uz_{2k-1}]_d = d^{2k}$.

Prova: Levando em conta a Equação 4.5: $[uz_n]_d = d^{n-1} + d^{n-3} + d^{n-5} + \dots + d^2 + d^0$, e admitindo $n = 2k - 1$, temos que:

$$\begin{aligned} [uz_{2k-1}]_d &= d^{2k-1-1} + d^{2k-1-3} + d^{2k-1-5} + \dots + d^2 + d^0 \\ &= d^{2k-2} + d^{2k-4} + d^{2k-6} + \dots + d^2 + d^0 \end{aligned}$$

Além disso, para $n = 2k + 1$, utilizando a Equação 4.5, temos:

$$\begin{aligned} [uz_{2k+1}]_d &= d^{2k+1-1} + d^{2k+1-3} + d^{2k+1-5} + \dots + d^2 + d^0 \\ &= d^{2k} + \underbrace{d^{2k-2} + d^{2k-4} + d^{2k-6} + \dots + d^0}_{[uz_{2k-1}]_d} \\ &= d^{2k} + [uz_{2k-1}]_d \end{aligned}$$

Visto que $[uz_{2k+1}]_d - [uz_{2k-1}]_d = d^{2k}$, considerando o resultado anterior, podemos substituir $[uz_{2k+1}]_d$ por $d^{2k} + uz_{2k-1}$. Então:

$$\begin{aligned} [uz_{2k+1}]_d - [uz_{2k-1}]_d &= \\ d^{2k} + [uz_{2k-1}]_d - [uz_{2k-1}]_d &= d^{2k} \end{aligned}$$

Exemplo 4.2.9: Considerando $k = 2$, vejamos para a base $d = 9$.

$$\begin{aligned} [uz_{2 \cdot 2 + 1}]_9 - [uz_{2 \cdot 2 - 1}]_9 &= [uz_5]_9 - [uz_3]_9 = [10000]_9 \\ &= [10^4]_9 = [(10^2)^2]_9 \end{aligned}$$

Para $k = 3$ e $d = 3$, temos:

$$\begin{aligned} [uz_{2 \cdot 3 + 1}]_3 - [uz_{2 \cdot 3 - 1}]_3 &= [uz_7]_3 - [uz_5]_3 = [1000000]_3 \\ &= [10^6]_3 = [(10^3)^2]_3 \end{aligned}$$

Corolário 4.2.1. Se $[uz_{2k+1}]_d - [uz_{2k-1}]_d = d^{2k}$, então:

$$\sqrt{[uz_{2k+1}]_d - [uz_{2k-1}]_d} = d^k \text{ e } \sqrt[k]{[uz_{2k+1}]_d - [uz_{2k-1}]_d} = d^2.$$

Prova: Basta aplicar a Proposição 4.2.6.

$$\sqrt{[uz_{2k+1}]_d - [uz_{2k-1}]_d} = \sqrt{(d^k)^2} = d^k$$

Por outro lado:

$$\sqrt[k]{[uz_{2k+1}]_d - [uz_{2k-1}]_d} = \sqrt[k]{(d^2)^k} = d^2$$

Proposição 4.2.7: Se $k \geq 1$ e $d > 1$, então $[uz_{2k+1}]_d = [d \cdot (uz_{2k}) + 1]_d$.

Prova: Considerando $[uz_{2k}]_d = \frac{d(d^{2k} - 1)}{d^2 - 1}$, temos que:

$$\begin{aligned} [uz_{2k+1}]_d &= [d \cdot (uz_{2k}) + 1]_d \\ &= d \cdot \frac{d(d^{2k} - 1)}{d^2 - 1} + 1 \\ &= \frac{d^2(d^{2k} - 1) + d^2 - 1}{d^2 - 1} \\ &= \frac{d^{2k+2} - d^2 + d^2 - 1}{d^2 - 1} \\ &= \frac{d^{2k+2} - 1}{d^2 - 1} \end{aligned}$$

Exemplo 4.2.10: Considerando $k = 4$, vejamos para a base $d = 6$.

$$\begin{aligned} [uz_{2 \cdot 4 + 1}]_6 &= [6 \cdot uz_{2 \cdot 4} + 1]_6 = [6 \cdot (6^7 + 6^5 + 6^3 + 6^1) + 6^0]_6 \\ &= [6^8 + 6^6 + 6^4 + 6^2 + 6^0]_6 \\ &= [101010101]_6 = [uz_9]_6 \end{aligned}$$

Por outro lado, se $k = 3$ e $d = 7$, então:

$$\begin{aligned} [uz_{2 \cdot 3 + 1}]_7 &= [7 \cdot uz_{2 \cdot 3} + 1]_7 = [7 \cdot (7^5 + 7^3 + 7^1) + 7^0]_7 \\ &= [7^6 + 7^4 + 7^2 + 7^0]_7 \\ &= [1010101]_7 = [uz_7]_7 \end{aligned}$$

Com o objetivo de demonstrar a proposição adiante, vamos considerar o seguinte Lema, cuja demonstração pode ser encontrada em Hefez (2013).

Lema 4.2.2. Se dois números a e b são coprimos, então $\text{mdc}(a, b) = 1$.

Proposição 4.2.8: Se $k \geq 1$ e $d > 1$, então $[uz_{2k}]_d$ e $[uz_{2k+1}]_d$ são números suavemente ondulantes coprimos.

Prova: Tendo em vista que $[uz_{2k}]_d = \frac{d(d^{2k} - 1)}{d^2 - 1}$ e $[uz_{2k+1}]_d = \frac{d^{2k+2} - 1}{d^2 - 1}$, conforme a proposição 4.2.7, $[uz_{2k+1}]_d = [d \cdot uz_{2k} + 1]_d$.

Empregando o Lema 4.2.2, temos que:

$$([uz_{2k}]_d [uz_{2k+1}]_d) = ([uz_{2k}]_d [d \cdot uz_{2k} + 1]_d) = ([uz_{2k}]_d 1) = [1]_d$$

Exemplo 4.2.11: Observemos que, para $d = 5$, o divisor comum entre $[uz_{2023}]_5$ e $[uz_{2024}]_5$ é: $([uz_{2023}]_5, [uz_{2024}]_5) = ([uz_{2023}]_5 [5 \cdot uz_{2023} + 1]_5) = ([uz_{2023}]_5 1) = [1]_5$.

Proposição 4.2.9: Se $k \geq 1$ e $d > 1$, então $[uz_{2k+1}]_d = [d^2 \cdot uz_{2k-1} + 1]_d$.

Prova: Considerando $[uz_{2k-1}]_d = \frac{d^{2k} - 1}{d^2 - 1}$, note que:

$$\begin{aligned} [uz_{2k+1}]_d &= [d^2 \cdot uz_{2k-1} + 1]_d \\ &= \frac{d^2 \cdot (d^{2k} - 1)}{d^2 - 1} + 1 \\ &= \frac{d^2 \cdot (d^{2k} - 1) + d^2 - 1}{d^2 - 1} \\ &= \frac{d^{2k+2} - d^2 + d^2 - 1}{d^2 - 1} \\ &= \frac{d^{2k+2} - 1}{d^2 - 1} \end{aligned}$$

Exemplo 4.2.12: Admitindo $k = 4$, vejamos para a base $d = 5$.

$$\begin{aligned} [uz_{2 \cdot 4 + 1}]_5 &= [5^2 \cdot uz_{2 \cdot 4 - 1} + 1]_5 = [5^2 \cdot uz_7 + 1]_5 = [5^2(5^6 + 5^4 + 5^2 + 5^0) + 5^0]_5 \\ &= 5^8 + 5^6 + 5^4 + 5^2 + 5^0 = [101010101]_5 = [uz_9]_5 \end{aligned}$$

Além disso, podemos verificar a validade para $k = 3$ e $d = 4$. Observe.

$$\begin{aligned} [uz_{2 \cdot 3 + 1}]_4 &= [4^2 \cdot uz_{2 \cdot 3 - 1} + 1]_4 = [4^2 \cdot uz_5 + 1]_4 = [4^2(4^4 + 4^2 + 4^0) + 4^0]_4 \\ &= 4^6 + 4^4 + 4^2 + 4^0 = [1010101]_4 \end{aligned}$$

Proposição 4.2.10: Se $k \geq 1$ e $d > 1$, então, dois números consecutivos, $[uz_{2k-1}]_d$ e $[uz_{2k+1}]_d$, são primos entre si.

Prova: Sejam $[uz_{2k+1}]_d = \frac{d^{2k+2} - 1}{d^2 - 1}$ e $[uz_{2k-1}]_d = \frac{d^{2k} - 1}{d^2 - 1}$, conforme a Proposição 4.2.9, $[uz_{2k+1}]_d = [d^2 \cdot uz_{2k-1} + 1]_d$.

Além disso, se dois números a e b são coprimos, então, pelo Lema 4.2.2:

$$\begin{aligned} ([uz_{2k-1}]_d [uz_{2k+1}]_d) &= ([uz_{2k-1}]_d [d^2 \cdot uz_{2k-1} + 1]_d) \\ &= ([uz_{2k-1}]_d 1) = [1]_d \end{aligned}$$

Exemplo 4.2.13: Observemos que, para $d = 3$, o *mdc* entre $[uz_{2025}]_3$ e $[uz_{2027}]_3$ é:

$$([uz_{2025}]_3 [uz_{2027}]_3) = ([uz_{2025}]_3 [3^2 \cdot uz_{2025} + 1]_d) = ([uz_{2025}]_3 1) = [1]_3.$$

Proposição 4.2.11: Se $k \geq 1$ e $d > 1$, temos a identidade:

$$[uz_{4k+4}]_d = d \cdot [uz_{2k+1}]_d \cdot (d^{2k+2} + 1)$$

Prova: Considerando a Equação (4.6): $[uz_n]_d = d^{n-1} + d^{n-3} + d^{n-5} + \dots + d^1$, para $n = 4k + 4 = 2(2k + 2)$, temos que:

$$\begin{aligned} [uz_{2(2k+2)}]_d &= d^{2(2k+2)-1} + d^{2(2k+2)-3} + d^{2(2k+2)-5} + d^{2(2k+2)-7} \dots + d^3 + d^1 \\ &= \frac{d((d^2)^{2k+2} - 1)}{d^2 - 1} \\ &= \frac{d(d^{4k+4} - 1)}{d^2 - 1} \end{aligned}$$

Multiplicando a equação $\frac{d(d^{4k+4}-1)}{d^2-1}$ por $\frac{d^2+1}{d^2+1}$, veja que:

$$\begin{aligned}
 [uz_{2(2k+2)}]_d &= \frac{d(d^{4k+4}-1)}{d^2-1} \cdot \frac{d^2+1}{d^2+1} \\
 &= \frac{d(d^2+1)(d^{4k+4}-1)}{d^4-1} \\
 &= \frac{d(d^2+1)}{d^2+1} \cdot \frac{(d^{2k+2}-1)(d^{2k+2}+1)}{d^2-1} \\
 &= d \cdot \frac{(d^{2k+2}-1)}{d^2-1} \cdot (d^{2k+2}+1) \\
 &= d \cdot [uz_{2k+1}]_d \cdot (d^{2k+2}+1)
 \end{aligned}$$

Observe que $[uz_{2(2k+2)}]_d = [uz_{4k+4}]_d$ é múltiplo da base d , do número suavemente ondulante $[uz_{2k+1}]_d$, bem como de $(d^{2k+2}+1)$.

Exemplo 4.2.14: Considerando $k = 2$ e $d = 2$, note que:

$$\begin{aligned}
 [uz_{4 \cdot 2 + 4}]_2 &= 2 \cdot [uz_{2 \cdot 2 + 1}]_2 \cdot (2^{2 \cdot 2 + 2} + 1) \\
 &= 2 \cdot [uz_5]_2 \cdot 65 = 2 \cdot 21 \cdot 65 \\
 &= 2730 = [1010101010]_2 = [uz_{12}]_2
 \end{aligned}$$

De outra forma, perceba que para $k = 1$ e $d = 5$ a proposição também é verdadeira.

$$\begin{aligned}
 [uz_{4 \cdot 1 + 4}]_5 &= 5 \cdot [uz_{2 \cdot 1 + 1}]_5 \cdot (5^{2 \cdot 1 + 2} + 1) \\
 &= 5 \cdot [uz_3]_5 \cdot 626 = 5 \cdot 26 \cdot 626 \\
 &= 81380 = [10101010]_5 = [uz_8]_5
 \end{aligned}$$

No próximo resultado faremos uma conexão entre os números repunidades e os números suavemente ondulantes. A saber:

Proposição 4.2.12: Para todo $k \geq 1$ e $d > 1$ $(R_{2k+1})_d = [uz_{2k+1}]_d + [uz_{2k}]_d$.

Prova: Se $(R_{n+1})_d = \frac{d^{n+1}-1}{d-1} \forall n \in \mathbb{N}^*$, então, para $n = 2k$, $(R_{2k+1})_d = \frac{d^{2k+1}-1}{d-1}$. Diante

disso, vamos demonstrar que $(R_{2k+1})_d = [uz_{2k+1}]_d + [uz_{2k}]_d$.

$$\begin{aligned}
 (R_{2k+1})_d &= [uz_{2k+1}]_d + [uz_{2k}]_d \\
 &= \frac{d^{2k+2} - 1}{d^2 - 1} + \frac{d(d^{2k} - 1)}{d^2 - 1} \\
 &= \frac{d^{2k+2} + d^{2k+1} - d - 1}{d^2 - 1} \\
 &= \frac{d^{2k+1}(d + 1) - (d + 1)}{d^2 - 1} \\
 &= \frac{(d^{2k+1} - 1)(d + 1)}{(d + 1)(d - 1)} \\
 &= \frac{d^{2k+1} - 1}{d - 1}
 \end{aligned}$$

Exemplo 4.2.15: Considerando $k = 3$ e $d = 4$, note que:

$$(R_{2 \cdot 3 + 1})_4 = [uz_{2 \cdot 3 + 1}]_4 + [uz_{2 \cdot 3}]_4 = [uz_7]_4 + [uz_6]_4 = [1111111]_4 = (R_7)_4$$

De outra maneira, admitindo $k = 4$ e $d = 2$, temos que:

$$(R_{2 \cdot 4 + 1})_2 = [uz_{2 \cdot 4 + 1}]_2 + [uz_{2 \cdot 4}]_2 = [uz_9]_2 + [uz_8]_2 = [111111111]_2 = (R_9)_2$$

Proposição 4.2.13: Se $k \geq 1$ e $d > 1$, então $[uz_{2k+1}]_d = \frac{(R_{2k+2})_d}{(R_2)_d}$.

Prova: Para todo $d > 1$ e $k \geq 1$, $(R_2)_d = d + 1$ e $(R_{2k+2})_d = \frac{d^{2k+2} - 1}{d - 1}$. Portanto:

$$\begin{aligned}
 [uz_{2k+1}]_d &= \frac{(R_{2k+2})_d}{(R_2)_d} \\
 &= \frac{(d^{2k+2} - 1)}{(d - 1)} \cdot \frac{1}{(d + 1)} \\
 &= \frac{d^{2k+2} - 1}{d^2 - 1}
 \end{aligned}$$

Exemplo 4.2.16: Considerando $k = 3$, vejamos para a base $d = 3$.

$$\begin{aligned}
 [uz_{2 \cdot 3 + 1}]_3 &= \frac{(R_{2 \cdot 3 + 2})_3}{(R_2)_3} = \frac{(R_8)_3}{(R_2)_3} = \frac{3^{2 \cdot 3 + 2} - 1}{3^2 - 1} \\
 &= \frac{3^8 - 1}{3^2 - 1} = [1010101]_3 = [uz_7]_3
 \end{aligned}$$

Também, a proposição é verdadeira para $k = 2$ e $d = 7$.

$$\begin{aligned}
 [uz_{2 \cdot 2 + 1}]_7 &= \frac{(R_{2 \cdot 2 + 2})_7}{(R_2)_7} = \frac{(R_6)_7}{(R_2)_7} = \frac{7^{2 \cdot 2 + 2} - 1}{7^2 - 1} \\
 &= \frac{7^6 - 1}{7^2 - 1} = [10101]_7 = [uz_5]_7
 \end{aligned}$$

Proposição 4.2.14: Se $k \geq 1$ e $d > 1$, então $[uz_{2k+2}]_d = \frac{d \cdot (R_{2k+2})_d}{(R_2)_d}$.

Prova: Para todo $d > 1$ e $k \geq 1$, $(R_2)_d = d + 1$ e $(R_{2k+2})_d = \frac{d^{2k+2} - 1}{d - 1}$. Logo:

$$\begin{aligned} [uz_{2k+2}]_d &= \frac{d \cdot (R_{2k+2})_d}{(R_2)_d} \\ &= \frac{d \cdot (d^{2k+2} - 1)}{(d - 1)} \cdot \frac{1}{(d + 1)} \\ &= \frac{d \cdot (d^{2k+2} - 1)}{d^2 - 1} \end{aligned}$$

Exemplo 4.2.17: Considerando $k = 2$, observe que para a base $d = 3$ a proposição é verdadeira:

$$\begin{aligned} [uz_{2 \cdot 2 + 2}]_3 &= \frac{3 \cdot (R_{2 \cdot 2 + 2})_3}{(R_2)_3} = \frac{3 \cdot (R_6)_3}{(R_2)_3} = \frac{3 \cdot (111111)_3}{(11)_3} = \frac{3 \cdot (364)}{4} \\ &= 273_{10} = [101010]_3 = [uz_6]_3 \end{aligned}$$

Além disso, para $k = 3$ e $d = 2$ note que:

$$\begin{aligned} [uz_{2 \cdot 3 + 2}]_2 &= \frac{2 \cdot (R_{2 \cdot 3 + 2})_2}{(R_2)_2} = \frac{2 \cdot (R_8)_2}{(R_2)_2} = \frac{2 \cdot (11111111)_2}{(11)_2} = \frac{2 \cdot (255)}{3} \\ &= 170_{10} = [10101010]_2 = [uz_8]_2 \end{aligned}$$

Antes de prosseguirmos para a proposição subsequente, analise o Lema seguinte, cuja demonstração encontra-se em Costa e Santos (2022).

Lema 4.2.3. Qualquer número repunidade $(R_{k+1})_d$ pode ser calculado obedecendo a seguinte fórmula: $(R_{k+1})_d = \frac{d^{k+1} - 1}{d - 1}$ para todo $d > 1$ e $k \geq 1$.

Proposição 4.2.15: Considerando $d > 1$ e $k \geq 1$, $[uz_{2k+1}]_d = (R_{k+1})_{d^2}$.

Prova: Conforme o Lema 4.2.3, $(R_{k+1})_d = \frac{d^{k+1} - 1}{d - 1}$ para todo $d > 1$ e $k \geq 1$. Desse modo, tomando uma base d^2 , $(R_{k+1})_{d^2} = \frac{(d^2)^{k+1} - 1}{d^2 - 1}$. Com isso:

$$\begin{aligned} [uz_{2k+1}]_d &= (R_{k+1})_{d^2} \\ &= \frac{(d^2)^{k+1} - 1}{d^2 - 1} \\ &= \frac{d^{2k+2} - 1}{d^2 - 1} \end{aligned}$$

Exemplo 4.2.18: Verificando no caso em que $k = 2$ e $d = 3$, $[uz_{2 \cdot 2+1}]_3 = [uz_5]_3$ é uma repunidade na base 9.

$$[uz_{2 \cdot 2+1}]_3 = \frac{3^{2 \cdot 2+2} - 1}{3^2 - 1} = \frac{3^6 - 1}{8} = 91 = (111)_9 = (R_3)_9$$

Por outro lado, considerando $k = 3$ e $d = 4$, $[uz_{2 \cdot 3+1}]_4 = [uz_7]_4$ é uma repunidade na base 16.

$$[uz_{2 \cdot 3+1}]_4 = \frac{4^{2 \cdot 3+2} - 1}{4^2 - 1} = \frac{4^8 - 1}{15} = 4369 = (1111)_{16} = (R_4)_{16}$$

Proposição 4.2.16: Se $k \geq 1$ e $d = 3$, então $[uz_{2k+1}]_3$ é um número triangular na base 10.

Prova: Considerando $[uz_{2k+1}]_d = \frac{d^{2k+2} - 1}{d^2 - 1}$ temos que:

$$\begin{aligned} [uz_{2k+1}]_3 &= \frac{3^{2k+2} - 1}{3^2 - 1} = \frac{(3^{k+1})^2 - 1}{8} = \frac{(3^{k+1} - 1)(3^{k+1} + 1)}{2 \cdot 2 \cdot 2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{k+1} - 1}{2} \cdot \frac{3^{k+1} + 1}{2} = \frac{\frac{3^{k+1} - 1}{2} \cdot \frac{3^{k+1} + 1}{2}}{2} \end{aligned}$$

Seja $a = \frac{3^{k+1} - 1}{2}$ e $b = \frac{3^{k+1} + 1}{2}$, observe as três etapas seguintes:

- Vamos mostrar que a e b são inteiros.

$$a = \frac{3^{k+1} - 1}{2} = \frac{2k}{2} = q$$

tal que $a = q$ é um inteiro. De outro modo,

$$b = \frac{3^{k+1} + 1}{2} = \frac{3^{k+1} - 1}{2} + \frac{2}{2} = q + 1$$

Portanto, b é inteiro, visto que a soma de $q + 1$ é um número inteiro.

- Além disso, vamos demonstrar que a e b são consecutivos:

$$b - a = \frac{3^{k+1} + 1}{2} - \frac{3^{k+1} - 1}{2} = \frac{3^{k+1} - 3^{k+1} + 1 + 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Portanto, a e b são consecutivos.

- Agora, demonstraremos que $[uz_{2k+1}]_3$ é um número triangular na base 10.

Se $b - a = 1$, então $b = a + 1$. Assim sendo:

$$[uz_{2k+1}]_3 = \frac{\frac{3^{k+1} - 1}{2} \cdot \frac{3^{k+1} + 1}{2}}{2} = \frac{a(a+1)}{2}, \text{ com } a \in \mathbb{N}^*$$

logo, $[uz_{2k+1}]_3$ é um número triangular na base 10.

Exemplo 4.2.19: Considerando $k = 3$, veja que $[uz_{2 \cdot 3 + 1}]_3 = [uz_7]_3$ é um número triangular na base 10.

$$[uz_{2 \cdot 3 + 1}]_3 = \frac{\frac{3^{3+1} - 1}{2} \cdot \frac{3^{3+1} + 1}{2}}{2} = \frac{40 \cdot 41}{2} = \frac{40(40+1)}{2} = 820_{10} = T_{40}$$

Além disso, para $k = 5$, $[uz_{2 \cdot 5 + 1}]_3 = [uz_{11}]_3$ também é um número triangular na base 10. Observe:

$$[uz_{2 \cdot 5 + 1}]_3 = \frac{\frac{3^{5+1} - 1}{2} \cdot \frac{3^{5+1} + 1}{2}}{2} = \frac{364 \cdot 365}{2} = \frac{364(364+1)}{2} = 66430_{10} = T_{364}$$

Corolário 4.2.2. *Exceto $[uz_2]_3$, nenhum número suavemente ondulante $[uz_n]_3$ é primo na base 10.*

Prova: Tomando o conjunto dos números pares ($2k, \forall k \geq 1$), de acordo com a Proposição 4.2.4: se $d > 1$ e $k > 1$, exceto $[uz_2]_d$, nenhum número $[uz_{2k}]_d$ é primo na base 10. Portanto, se $k > 1$, então $[uz_{2k}]_3$ não é primo na base 10.

Por fim, de acordo com a Proposição 4.2.16: para todo número ímpar da forma $2k + 1$, com $k \geq 1$, $[uz_{2k+1}]_3 = \frac{a(a+1)}{2}$, ou seja, $[uz_{2k+1}]_3$ é múltiplo de a na base 10; dessa forma, $[uz_{2k+1}]_3$ não é primo na base 10.

5 PROPOSTA DE ATIVIDADES

Com o objetivo de abordar os resultados do Capítulo 4 no ensino básico, este capítulo discorre sobre algumas propostas de atividades, a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental e Médio, que compreendem os números suavemente ondulantes. Por conta disso, antes de apresentar alguns problemas sobre os números suavemente ondulantes, é recomendado que o docente faça uma apresentação ou revisão acerca dos conceitos de sequências, em especial de PA e PG, bem como escrever um número inteiro em um sistema posicional de base $d > 1$, além da base decimal. Sugerimos solicitar aos estudantes sugestões de como escrever números suavemente ondulantes uz_n na base 10 por meio de uma equação polinomial, além de destacar o que vêm a ser estes números durante a investigação, e construir com os discentes as demonstrações dos principais resultados deste trabalho, bem como as definições e outros conceitos.

Após os estudantes apropriarem-se de algumas ideias acerca destes números, o professor pode propor algumas atividades envolvendo sequências PA e PG a respeito dos principais assuntos citados anteriormente, inclusive números suavemente ondulantes. O objetivo é relembrar conceitos essenciais relacionados a estes conteúdos, a fim de que os estudantes tenham um arcabouço conceitual suficiente para lidar com os diferentes problemas.

Além disso, durante as resoluções de atividades, no que se refere aos principais resultado dos números uz_n , é relevante que o docente alerte os estudantes quanto aos devidos cuidados que devem ser tomados ao demonstrar um resultado generalizado, principalmente quanto à delimitação do conjunto em que “padrões” acontecem, a escolha dos fundamentos teóricos e a validade dos resultados. Como destaca Polya (1995, p. 115): “[...] para o lógico de um certo tipo, somente existe demonstrações completas. Aquilo que pretender ser uma demonstração não deverá deixar nenhuma lacuna, nenhuma escapatória, nenhuma incerteza, pois do contrario não será uma demonstração”.

No decorrer das resoluções, o professor pode resolver os problemas juntamente com os discentes incentivando-os a fazerem comentários a respeito de como solucionar a questão. Um bom exemplo seria fazer questionamento a partir do método de Polya (1995): quais os dados principais do problema? O que é necessário para resolve-lo? Como os diversos itens estão inter-relacionados? Que teorema ou propriedade da teoria dos números pode ser utilizada?

Por outro lado, considerando os principais resultados envolvendo os números $[uz_n]_d$, é importante destacar que as propostas de atividades a seguir têm por objetivo apresentar ao docente como iniciar uma investigação, quais ferramentas utilizar e apresentar uma possível solução para o problema de forma fundamentada, sobretudo alguns resultados que não foram provados a respeito dos números suavemente ondulantes, que permite ao docente expor aos aprendentes interessantes questões em aberto para que eles possam produzir conhecimento científico no ensino básico.

Problema 5.0.1. Como $[107]_2 = 85$ e $[125]_8 = 85$, então $[107]_2 = [125]_8$. Considerando $d > 1$ e $k \geq 1$, $[uz_{2k+1}]_d = \frac{d^{2k+2} - 1}{d^2 - 1}$ e $[R_{k+1}]_d = \frac{d^{k+1} - 1}{d - 1}$. À vista disso, vamos verificar se cada igualdade abaixo é verdadeira, convertendo-as para a base 10:

- $[uz_3]_2 = [R_2]_4$;
- $[uz_5]_2 = [R_3]_4$;
- $[uz_7]_3 = [R_4]_9$;
- $[uz_9]_3 = [R_5]_6$.

Além disso, torna-se necessário destacar que, no decorrer desta atividade, podem ser trabalhadas as Competências Específicas 3, 4 e 5 do Ensino Médio da área de Matemática e suas tecnologias, contidas na BNCC (Brasil, 2018).

Comentários:

Com objetivo de agilizar os cálculos e utilizar ferramentas computacionais apregoadas pela BNCC (BRASIL, 2018), ao abordar este tipo de atividade em sala de aula é aceitável ou recomendável que os estudantes utilizem calculadoras eletrônicas (calculadoras contidas em celular ou em sites da internet) para resolução do problema proposto. Isto porque as potenciações podem resultar em um número muito grande e as divisões podem ser trabalhosas. Dessa forma, a verificação das igualdades pode ser feita da seguinte forma:

$$\bullet [uz_3]_2 = [uz_{2 \cdot 1 + 1}]_2 = \frac{2^{2 \cdot 1 + 2} - 1}{2^2 - 1} = 5 \quad \text{e} \quad [R_2]_4 = [R_{1+1}]_4 = \frac{4^{1+1} - 1}{4 - 1} = 5$$

logo, $[uz_3]_2 = [R_2]_4$.

$$\bullet [uz_5]_2 = [uz_{2 \cdot 2 + 1}]_2 = \frac{2^{2 \cdot 2 + 2} - 1}{2^2 - 1} = 21 \quad \text{e} \quad [R_3]_4 = [R_{2+1}]_4 = \frac{4^{2+1} - 1}{4 - 1} = 21$$

logo, $[uz_5]_2 = [R_3]_4$.

Enquanto,

$$\bullet [uz_7]_3 = [uz_{2 \cdot 3 + 1}]_3 = \frac{3^{2 \cdot 3 + 2} - 1}{3^2 - 1} = 820 \quad \text{e} \quad [R_4]_9 = [R_{3+1}]_9 = \frac{9^{3+1} - 1}{9 - 1} = 820$$

assim, $[uz_7]_3 = [R_4]_9$.

Por fim,

$$\bullet [uz_9]_3 = [uz_{2 \cdot 4 + 1}]_3 = \frac{3^{2 \cdot 4 + 2} - 1}{3^2 - 1} = 7381 \quad \text{e} \quad [R_5]_6 = [R_{4+1}]_6 = \frac{6^{4+1} - 1}{6 - 1} = 1555,$$

daí $[uz_9]_3 \neq [R_5]_6$.

Observe que para os três primeiros resultados a igualdade é verdadeira e claramente percebemos uma relação entre os números $[uz_{2k+1}]_d$ e $[R_{k+1}]_{d^2}$, ou seja, entre números suavemente ondulantes e um número repunidade. Porém, para o último caso verificamos que a igualdade não é verdadeira. Podemos supor que isto ocorre porque a base 6 não é quadrado perfeito da base 3, dessa forma, $[uz_{11}]_3 \neq [R_6]_6$. Portanto, intuímos que a relação é válida quando uma base d' é quadrado perfeito de uma base d .

Por outro lado, se continuássemos com as investigações, prestando atenção na base d , após outros resultados poderíamos conjecturar que todo número suavemente ondulado da forma $[uz_{2k+1}]_d$ é um número repunidade da forma $[R_{k+1}]_{d^2}$. Dessa forma, caberia ao professor pedir aos estudantes uma justificativa deste fato com fundamentos lógicos nas principais proposições e definições a respeito dos números suavemente ondulantes e dos números repunidades - tendo o cuidado de não conceder informações claras para facilitar a resolução por parte dos discentes. É necessário destacar que não faremos a demonstração deste problema, porque ela encontra-se na Proposição 4.2.15.

Além disso, o professor pode propor outros problemas de investigação semelhante a este, porém utilizando conversores de bases disponíveis em plataformas na internet ou aplicativos de celular. Algumas sugestões seriam <https://www.calculadoraonline.com.br/conversao-bases> e <https://www.cjdinfo.com.br/utilitario-conversor-bases-numericas>.

Por exemplo, utilizando o primeiro site, o professor pode solicitar aos discentes verificarem se existem outros números $[uz_n]_d$, que é um monodígito na base $d' \neq d$. Assim sendo, seguindo o passo a passo e as capturas de tela realizadas, vejamos se $[uz_{11}]_2$ e $[uz_{15}]_2$ são monodígitos na base 16.

Olhando para a Figura 1, observe que o sistema binário e o hexadecimal já está definido. Portanto, digitando o número $[uz_{11}]_2$ no sistema binário, vemos que o resultado é o número $[555]_{16}$, registrado no sistema hexadecimal. Assim, $[uz_{11}]_2 = [5_3]_{16}$ e obtemos o desejado.

Figura 1 – Conversão do número $[uz_{11}]_2$ para $[5_3]_{16}$

Binário:	☐	10101010101
Octal:	☐	2525
Decimal:	☐	1365
Hexadecimal:	☐	555
Base N:	☐	
Base X:	☐	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para $[uz_{15}]_2$, basta seguir os mesmos passos. Inserindo o número $[uz_{15}]_2$ no sistema binário, vemos que o resultado é o número $[5555]_{16}$, que instantaneamente é registrado no sistema hexadecimal. Por conseguinte, é verdadeiro que $[uz_{15}]_2 = [54]_{16}$. Observe a Figura 2:

Figura 2 – Conversão do número $[uz_{15}]_2$ para $[54]_{16}$

<u>Binário:</u>	☐	101010101010101
Octal:	☐	52525
Decimal:	☐	21845
<u>Hexadecimal:</u>	☐	5555
Base N:	☐	
Base X:	☐	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, utilizando este recurso o docente pode solicitar que o discente prossiga com as investigações, verificando se todo número $[uz_n]_d$ é um número monodígito $[5_n]_{16}$ para todo $n > 1$, e justificar este resultado com uma demonstração formal.

Mais que isso, é imprescindível destacar que o recurso computacional é um meio de não apenas calcular de forma rápida, mas também de agilizar as investigações e demonstrações utilizando uma tecnologia que executa os cálculos em frações de segundo, e assim possibilita observar e encontrar padrões. Sob outra perspectiva, o mais interessante seria mostrar aos aprendentes como um computador faz isso com uso da linguagem de programação, que utiliza algoritmos matemáticos em seu sistema computacional fundamentado na teoria dos números. Ou seja, por simples cálculos manuais os discentes ficariam instigados a analisar o comportamento de números suavemente ondulantes em outras bases numéricas, utilizando uma tecnologia eficiente e gratuita. Além disso, o PCN destaca que:

Quanto ao uso da calculadora, constata-se que ela é um recurso útil para verificação de resultados, correção de erros, podendo ser um valioso instrumento de auto-avaliação. A calculadora favorece a busca e percepção de regularidades matemáticas e o desenvolvimento de estratégias de resolução de situações-problema pois ela estimula a descoberta de estratégias e a investigação de hipóteses, uma vez que os estudantes ganham tempo na execução dos cálculos. Assim elas podem ser utilizadas como eficiente recurso para promover a aprendizagem de processos cognitivos (BRASIL, 1998, p. 45).

Problema 5.0.2. *Conforme Shirriff (1994), números suavemente ondulantes duplos são números inteiros que são suavemente ondulantes em quaisquer duas bases. Por exemplo: $[252]_9 = [131]_{13}$ e $[191919]_{10} = [121212]_{11}$ são números suavemente ondulantes duplos.*

Com o auxílio de um conversor de bases numéricas, verifique se $[10_{12}]_2 = [524]_8$ e $[10_{18}]_2 = [526]_8$ são números suavemente ondulantes duplos.

Nesta atividade o professor pode desenvolver as Competências específicas 3, 4 e 5 referentes ao Ensino Médio, compreendidas na BNCC (BRASIL, 2018).

Comentários:

Para resolver este problema, podemos utilizar outra plataforma de conversor de bases numéricas que pode ser encontrada no site: <https://www.cjdinfo.com.br/utilitario-conversor-bases-numericas>. Este conversor tem a capacidade de converter um número desde a base 2 até a 36, constituindo uma ferramenta muito importante para conjecturas matemáticas e verificação de resultados.

Portanto, para verificar se $[10_{12}]_2$ é igual a outro número suavemente ondulante na base 8, veja os seguintes passos com capturas retirados do site citado.

1º passo: Clique no ícone à direita (destacado pelo quadrado em vermelho na Figura 3) e selecione a base de entrada, que no nosso caso é o sistema binário (2); depois, digite o número $[10_{12}]_2$ no valor de entrada.

Figura 3 – Conversão do número $[10_{12}]_2$ para $[52_4]_8$

Conversor de Bases Numéricas

Esta página faz a conversão de bases numéricas de 2 a 36, incluindo *binário(2)*, *octal(8)*, *decimal(10)* e *hexadecimal(16)*, utilizando as rotinas genéricas apresentadas no item [Soluções](#).

Entre com a Base e o Valor de Entrada. Indique a Base de Saída e Clique em Converter.

Valores muito altos poderão provocar *Overflow* ou perda de dados na conversão.

Base de Entrada: 2 (0 ~ 1) - binário ▼

Valor de Entrada: 101010101010

Base de Saída: ▼

Valor de Saída:

Converter

Fonte: Elaborado pelo autor.

2º passo: Observando a Figura 4, no ícone destacado pelo quadrado pequeno em vermelho, selecione a base de saída, neste caso a base 8. Após isso, abaixo do nome valor de saída, clique no nome “converter”, e será possível perceber que o número $[52_4]_8$ aparecerá no valor de saída. Portanto, é verdade que $[10_{12}]_2 = [52_4]_8$ e são números suavemente ondulantes duplos.

Figura 4 – Conversão do número $[10]_2$ para $[52]_8$

 **Conversor de Bases Numéricas**

Esta página faz a conversão de bases numéricas de 2 a 36, incluindo *binário*(2), *octal*(8), *decimal*(10) e *hexadecimal*(16), utilizando as rotinas genéricas apresentadas no item [Soluções](#).

Entre com a Base e o Valor de Entrada. Indique a Base de Saída e Clique em Converter.

Valores muito altos poderão provocar *Overflow* ou perda de dados na conversão.

Base de Entrada: 2 (0 ~ 1) - binário ▼

Valor de Entrada: 1010101010

Base de Saída: 8 (0 ~ 7) - octal ▼

Valor de Saída: 5252

Converter

Fonte: Elaborado pelo autor.

Ademais, se seguirmos os mesmos passos, também verificamos que $10[18]_2 = [52]_8$ são números suavemente ondulantes duplos nas bases 2 e 8. Observe este resultado na Figura 5 abaixo.

Figura 5 – Conversão do número $[10]_{18}$ para $[52]_8$

 **Conversor de Bases Numéricas**

Esta página faz a conversão de bases numéricas de 2 a 36, incluindo *binário*(2), *octal*(8), *decimal*(10) e *hexadecimal*(16), utilizando as rotinas genéricas apresentadas no item [Soluções](#).

Entre com a Base e o Valor de Entrada. Indique a Base de Saída e Clique em Converter.

Valores muito altos poderão provocar *Overflow* ou perda de dados na conversão.

Base de Entrada: 2 (0 ~ 1) - binário ▼

Valor de Entrada: 1010101010101010

Base de Saída: 8 (0 ~ 7) - octal ▼

Valor de Saída: 525252

Converter

Fonte: Elaborado pelo autor.

Continuando com as investigações, poderíamos perceber que existe uma relação entre os números $[101010...]_2 = [525252...]_8$ e $[101010...]_2 = [252525...]_8$. Mais que isso, segundo Shirriff (1994), para as bases d e d^k , para todo k ímpar, há infinitos números suavemente ondulantes duplos. Além disso, não são conhecidos muitos resultados sobre os números ondulantes duplos na bases d e d^k , possibilitando ao docente formular propostas de atividades usando recursos computacionais, com o objetivo de incentivar a produção científica na escola, abordando a elaboração de conjecturas em matemática e comprovando os resultados. Isto porque, a BNCC:

[...] propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas (BRASIL, 2018, p. 528).

Problema 5.0.3. *Considerando a subtração entre um número repunidade e um número suavemente ondulante ambos na base 10, prove que: $R_{2k+1} - uz_{2k} = uz_{2k+1}$ para todo $k \geq 1$.*

Perceba que este tipo de argumentação é simples de ser realizada ou generalizada a partir de alguns exemplos numéricos. Assim, pode ser aplicada em séries do segundo segmento do Ensino Fundamental para transmitir ao estudante noções simples de álgebra por meio de em demonstrações fáceis a fim de, futuramente, formular argumentações mais complexas. Ademais, neste problema podem ser trabalhadas as Competências 2, 3 e 5 contidas na BNCC (BRASIL, 2018) da área de Matemática do Ensino Fundamental.

Comentários:

Veja que, para valores iniciais, a igualdade é verdadeira. Considerando $k = 1$:

$$R_{2 \cdot 1 + 1} + uz_{2 \cdot 1} = 111 - 10 = 101 = uz_{2 \cdot 1 + 1} \quad (5.1)$$

Para $k = 2$:

$$R_{2 \cdot 2 + 1} + uz_{2 \cdot 2} = 11111 - 1010 = 10101 = uz_{2 \cdot 2 + 1} \quad (5.2)$$

Por fim, se $k = 3$, consequentemente:

$$R_{2 \cdot 3 + 1} + uz_{2 \cdot 3} = 1111111 - 101010 = 1010101 = uz_{2 \cdot 3 + 1} \quad (5.3)$$

Visto que para os três primeiros valores a igualdade é verdadeira, vamos demonstrar que $R_{2k+1} - uz_{2k} = uz_{2k+1}$ para todo $k \geq 1$.

Sabemos que para $d > 1$, $(R_{2k+1})_d = \frac{d^{2k+1} - 1}{d - 1}$, enquanto $[uz_{2k}]_d = \frac{d(d^{2k} - 1)}{d^2 - 1}$. Se

$d = 10$, então, $R_{2k+1} = \frac{10^{2k+1} - 1}{10 - 1}$ e $uz_{2k} = \frac{10(10^{2k} - 1)}{10^2 - 1}$; logo:

$$\begin{aligned}
 uz_{2k+1} &= R_{2k+1} - uz_{2k} \\
 &= \frac{10^{2k+1} - 1}{10 - 1} - \frac{10(10^{2k} - 1)}{10^2 - 1} \\
 &= \frac{1}{10 - 1} \cdot (10^{2k+1} - 1) - \frac{1}{10 - 1} \cdot \frac{10(10^{2k} - 1)}{10 + 1} \\
 &= \frac{1}{10 - 1} \cdot \left[(10^{2k+1} - 1) - \frac{10(10^{2k} - 1)}{10 + 1} \right] \\
 &= \frac{1}{10 - 1} \cdot \frac{(10^{2k+1} - 1)(10 + 1) - 10(10^{2k} - 1)}{10 + 1} \\
 &= \frac{1}{10 - 1} \cdot \frac{10^{2k+2} + 10^{2k+1} - 10 - 1 - 10^{2k+1} + 10}{10 + 1} \\
 &= \frac{1}{10 - 1} \cdot \frac{10^{2k+2} - 1}{10 + 1} \\
 &= \frac{10^{2k+2} - 1}{10^2 - 1}
 \end{aligned}$$

Observe que $uz_{2k+1} = \frac{10^{2k+2} - 1}{10^2 - 1}$ é um número suavemente ondulante na base 10. Portanto, está provado que $R_{2k+1} - uz_{2k} = uz_{2k+1}$.

Vimos que a justificativa foi relativamente simples e o docente pode solicitar aos estudantes analisar se esse resultado na base 10 é válido para uma base $d > 1$, constituindo uma forma de incentivar os discentes quanto às investigações matemáticas. Também, o professor pode apresentar os seguintes problemas para verificação, validação ou demonstração. Mostre que para $d > 1$ e $k \geq 1$ as seguintes igualdades ocorre:

- $(R_{2k})_d - [uz_{2k}]_d = [uz_{2k+1}]_d$;
- $(R_{2k+2})_d - [uz_{2k+1}]_d = [uz_{2k+2}]_d$;
- $(R_{2k+1})_d - [uz_{2k+1}]_d = [uz_{2k}]_d$;
- $[uz_{2k+1}]_d + [uz_{2k+2}]_d = (R_{2k+2})_d$.

Assim sendo, podemos perceber que existem relações entre os números $[uz_n]_d$ e $[R_n]_d$, e também entre os números $[uz_n]_d$ e os outros números monodígitos. É possível demonstrar tais relações sem exigir muito conhecimento formal do estudante, possibilitando ao docente várias oportunidade de se adaptar à linguagem dos estudantes ou a acostuma-los com pequenas demonstrações. A seguir, veja outras questões a serem comprovadas pelos discentes: mostre que, para todo $d > 1$, $k \geq 1$ e $n > 1$, as seguintes relações são verdadeiras:

- $[(d^2 + 1)_d]^n \mid [(uz_{4k-1})_d]^n$;
- $[(d^2 + 1)_d]^n \mid [(uz_{4k})_d]^n$;
- $[(R_{2k+1})_d]^n \mid [(uz_{4k+1})_d]^n$;
- $[(R_{2k-1})_d]^n \mid [(uz_{4k-2})_d]^n$.

Problema 5.0.4. Para qualquer $k \geq 1$, na base 10, uz_{2k-1} pode ser entendida como uma sequência de números suavemente ondulantes ímpares. Vejamos:

$$1, 101, 10101, 1010101, 101010101, 10101010101, \dots$$

Determine o k -ésimo termo da sequência anterior, e comprove que $uz_{2k+1} - uz_{2k-1} = 10^{2k}$ para todo $k \geq 1$.

Este tipo de atividade aborda uma parte introdutória a respeito dos números suavemente ondulantes. Possibilita ainda uma prática de demonstrar um padrão de um resultado que se repete, sendo fundamental para exercitar os discentes com pequenas demonstrações, simples e objetivas, com objetivo de trabalhar o pensamento numérico e o algébrico, essencial na teoria dos números. Mais que isso, nesta atividade podem ser trabalhadas as seguintes habilidades contidas na BNCC (BRASIL, 2018) do segundo segmento do Ensino Fundamental: EF06MA02, EF06MA06, EF07MA03, EF07MA04, EF07MA06, EF07MA14, EF07MA15, EF07MA16, EF08MA06 e EF09MA09.

Comentários:

Considerando este problema, em uma primeira análise o discente pode ser induzido a imaginar que trata-se de uma PA. Porém, ao realizar sucessivas subtrações entre um termo sucessor com o anterior:

- $101 - 1 = 10^2$;
- $10101 - 101 = 10^4$;
- $1010101 - 10101 = 10^6$;
- $101010101 - 1010101 = 10^8$.

Percebemos que a cada diferença tem-se um novo número, sendo: $10^2, 10^4, 10^6, 10^8 \dots$. Dessa forma, rapidamente surge a ideia de que pode ser uma PG. Porém, a razão não permanece

constante neste tipo de sequência, o que o conduz à conclusão de que a sequência não se trata de PA e nem de PG.

Entretanto, após estes exemplos, podemos perceber que, a partir de $uz_1 = 1$, os próximos termos podem ser obtidos da seguinte forma:

$$uz_3 = uz_1 + 10^{2 \cdot 1} ; uz_5 = uz_3 + 10^{2 \cdot 2} ; uz_7 = uz_5 + 10^{2 \cdot 3} \text{ e } uz_9 = uz_7 + 10^{2 \cdot 4} \quad (5.4)$$

Ou seja, a partir de uz_1 , o próximo termo é a soma do anterior com uma potência 10^{2k} para todo $k \geq 1$. Portanto, considerando que $2k - 1$ é um número ímpar, o k -ésimo termo é igual a $uz_{2k-1} + 10^{2k}$, isto é, $a_k = uz_{2k-1} + 10^{2k}$. Além disso, de maneira análoga, o mesmo problema poderia ser abordado considerando a sequência dos números ondulantes do tipo uz_{2k} : $\{10, 1010, 101010, \dots\}$, e expor algumas propriedades a respeito desses números contidas neste trabalho – principalmente as relacionadas ao pensamento numérico em outras bases numéricas além da decimal.

De outra forma, se os estudantes tiverem conhecimento sobre as principais definições e proposições a respeito dos números uz_n , a partir dos resultados anteriores eles podem pensar na segunda parte do exercício: $uz_{2k+1} - uz_{2k-1}$ é sempre igual a $(10^k)^2$? Ou seja, a subtração entre um número suavemente ondulante (uz_{2k+1}) e seu antecessor (uz_{2k-1}) é sempre um quadrado perfeito? Note que a igualdade é válida para alguns valores iniciais.

- Se $k = 1$, então:

$$uz_{2 \cdot 1 + 1} - uz_{2 \cdot 1 - 1} = 101 - 1 = (10^1)^2 \quad (5.5)$$

- Para $k = 2$:

$$uz_{2 \cdot 2 + 1} - uz_{2 \cdot 2 - 1} = 10101 - 101 = (10^2)^2 \quad (5.6)$$

- Por último, se $k = 3$, consequentemente:

$$uz_{2 \cdot 3 + 1} - uz_{2 \cdot 3 - 1} = 1010101 - 10101 = (10^3)^2 \quad (5.7)$$

Dessa forma, podemos pensar em uma demonstração pelo seguinte argumento.

Sabendo que $[uz_{2k+1}]_d = \frac{d^{2k+2} - 1}{d^2 - 1}$ e $[uz_{2k-1}]_d = \frac{d^{2k} - 1}{d^2 - 1}$, se considerarmos $d = 10$,

então, $uz_{2k+1} = \frac{10^{2k+2} - 1}{10^2 - 1}$ e $uz_{2k-1} = \frac{10^{2k} - 1}{10^2 - 1}$. Portanto:

$$\begin{aligned}
 10^{2k} &= uz_{2k+1} - uz_{2k-1} \\
 &= \frac{10^{2k+2} - 1}{10^2 - 1} - \frac{10^{2k} - 1}{10^2 - 1} \\
 &= \frac{10^{2k+2} - 10^{2k} - 1 + 1}{10^2 - 1} \\
 &= \frac{10^{2k}(10^2 - 1)}{10^2 - 1} \\
 &= 10^{2k} = (10^k)^2
 \end{aligned}$$

O docente pode problematizar ainda mais a questão questionando os aprendentes se tal resultado é válido pra uma base $d > 1$. Ou seja, para toda base $d > 1$ e para todo $k \geq 1$ a subtração entre o sucessor de um número suavemente ondulante $[uz_{2k+1}]_d$ e seu antecessor $[uz_{2k-1}]_d$ é sempre um quadrado perfeito da forma $(d^k)^2$? Veja que, se seguirmos os mesmos passos, como demonstrado anteriormente, não será difícil demonstrar que realmente este resultado é válido para qualquer base $d > 1$.

Por outro lado, observamos que a relação $[uz_{2k+1}]_d - [uz_{2k-1}]_d = d^{2k}$ considera apenas os números $[uz_n]_d$ para n ímpares. Problematizando ainda mais, para $[uz_n]_d$ com n par, a subtração entre um número suavemente ondulante ($[uz_{2k+2}]_d$) e seu antecessor ($[uz_{2k}]_d$) é sempre um quadrado perfeito da forma $(d^k)^2$? Após algumas verificações para a base $d = 10$, o discente poderá concluir que $[uz_{2k+2}]_d - [uz_{2k}]_d \neq (d^k)^2$ – isto é, não é um quadrado perfeito. Porém, nas investigações feitas para o desenvolvimento deste trabalho foi possível concluir que $[uz_{2k+2}]_d - [uz_{2k}]_d = d^{2k+1}$ para todo $k \geq 1$ e $d > 1$; este resultado não foi demonstrado, mas fica como um desafio a ser apresentado para os discentes do ensino básico.

Problema 5.0.5. *Se $n > 1$ e $d > 1$, existe algum número $[uz_n]_d$ que divide $[ab_n]_d$?*

Este problema é um pouco mais elaborado ou complexo do que os anteriores, pois, ainda que não tenha uma demonstração aparentemente difícil, os estudantes podem encontrar dificuldades no desenvolvimento da resolução. Dessa forma, o problema está mais direcionado aos discentes do Ensino Médio, no desenvolvimento das Competências 3, 4 e 5 da BNCC (BRASIL, 2018).

Comentários:

O problema consiste em uma conexão entre os números $[ab_n]_d$, observada por Carvalho e Costa (2022), e os números $[uz_n]_d$ abordados neste trabalho. Levando em conta que $[ab_n]_d$ é múltiplo de $[uz_n]_d$, inicialmente, os discentes poderão verificar, com alguns valores, se o resultado da divisão de $[ab_n]_d$ por $[uz_n]_d$ é um número inteiro. Após isso, o professor pode solicitar uma justificativa formal acerca destes resultados. Assim sendo, observe a seguinte solução para o problema.

Veja que, por definição, os números suavemente ondulantes $[ab_n]_d$ consistem em alternar os algarismos a e b n -vezes, para todo $n > 1$ em uma base $d \geq 1$. Além disso, com $a \neq 0$ e $a \neq b$, os algarismos a e b deve pertencer ao conjunto $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Ou seja, existem p combinações possíveis para $[ab_n]_d$, sendo algumas $[12_n]_d$; $[53_n]_d$; $[64_n]_d$; $[75_n]_d$; $[96_n]_d$; $[72_n]_d$; $[89_n]_d$ etc. É imprescindível dizer que não existe uma fórmula que aborda de forma única os números $[ab_n]_d$ para n par e $[ab_n]_d$ para n ímpar, portanto, devemos considerar $[ab_n]_d$ quando n for par e, depois, quando n for ímpar. Logo, considerando $[ab_{2k}]_{10}$, existem vários números ondulante múltiplos de $[uz_{2k-1}]_{10}$ para todo $k \geq 1$. Veja alguns exemplos:

- $10_3 \mid 12_4$ pois $\frac{1212}{101} = 12$.
- $10_7 \mid 23_8$ porque $\frac{23232323}{1010101} = 23$.
- E $10_5 \mid 79_6$ porquanto $\frac{797979}{10101} = 79$.

Além disso, utilizando uma calculadora, é possível verificar que os seguintes resultados são verdadeiros: $10_9 \mid 98_{10}$; $10_{15} \mid 67_{16}$; $10_{13} \mid 20_{14}$; $10_{17} \mid 54_{18}$; e $10_{23} \mid 91_{24}$.

Por outro lado, se considerarmos a base 7, podemos conjecturar que $[ab_{2k}]_7$ é divisível por $[uz_{2k-1}]_7$. Veja o exemplo seguinte:

- $[10_5]_7 \mid [15_6]_7$.

Com a utilização de um conversor de bases, veja que $[10_5]_7 = [2451]_{10}$. Observe a Figura 6.

Figura 6 – Conversão do número $[10_5]_7$ para $[2451]_{10}$

Binário:	☐	100110010011
Octal:	☐	4623
<u>Decimal:</u>	☒	2451
Hexadecimal:	☐	993
<u>Base N:</u>	☐	7 10101
Base X:	☐	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Por outro lado, $[15_6]_7 = [29412]_{10}$. Veja a Figura 7.

Figura 7 – Conversão do número $[15_6]_7$ para $[29412]_{10}$

Binário:	☐	111001011100100
Octal:	☐	71344
<u>Decimal:</u>	☒	29412
Hexadecimal:	☐	72E4
<u>Base N:</u>	☒	7 151515
Base X:	☐	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com isso, $\frac{[15_6]_7}{[10_5]_7} = \frac{29412}{2451} = 12$.

Além disso, realizando o mesmo processo, é possível verificar que: $[10_7]_7 \mid [23_8]_7$; $[10_9]_7 \mid [65_{10}]_7$; $[10_{15}]_7 \mid [26_{16}]_7$; $[10_{17}]_7 \mid [40_{18}]_7$; $[10_{21}]_7 \mid [61_{22}]_7$; $[10_3]_7 \mid [54_4]_7$; e $[10_{11}]_7 \mid [43_{12}]_7$.

A partir desses casos, concluímos que, para alguns valores, $[uz_{2k-1}]_{10} \mid [ab_{2k}]_{10}$ e $[uz_{2k-1}]_7 \mid [ab_{2k}]_7$; com isso, vamos demonstrar que $[uz_{2k-1}]_d \mid [ab_{2k}]_d$ para todo $d > 1$ e $k \geq 1$.

Prova: Considerando $[ab_n]_d$, para $n = 2 \cdot k$ e algum $k \in \mathbb{N}^*$, note que:

$$\begin{aligned}
 [ab_n]_d = [ab_{2k}]_d &= a \cdot d^{2k-1} + b \cdot d^{2k-2} + a \cdot d^{2k-3} + b \cdot d^{2k-4} + \dots + a \cdot d^1 + b \\
 &= (ad + b)d^{2k-2} + (ad + b)d^{2k-4} + \dots + (ad + b)d^0 \\
 &= (ad + b)(d^{2k-2} + d^{2k-4} + \dots + d^2 + d^0)
 \end{aligned}$$

De outra forma, considerando $[uz_n]_d = d^{n-1} + d^{n-3} + d^{n-5} + \dots + d^2 + d^0$, para $n = 2k - 1$ temos que:

$$\begin{aligned}
 [uz_{2k-1}]_d &= d^{2k-1-1} + d^{2k-1-3} + d^{2k-1-5} + \dots + d^2 + 1 \\
 &= d^{2k-2} + d^{2k-4} + \dots + d^2 + d^0
 \end{aligned}$$

Agora, vamos provar que $\frac{[ab_{2k}]_d}{[uz_{2k-1}]_d} = ad + b$. Veja:

$$\frac{[ab_{2k}]_d}{[uz_{2k-1}]_d} = \frac{(ad + b)(d^{2k-2} + d^{2k-4} + \dots + d^2 + d^0)}{(d^{2k-2} + d^{2k-4} + \dots + d^2 + d^0)} = ad + b$$

Em vista disso, $[ab_{2k}]_d$ é divisível por $[uz_{2k-1}]_d$.

Veja que a demonstração abrange apenas os números $[ab_n]_d$ para todo n par. Dessa forma, como atividade, o professor pode solicitar ao discente demonstrar se $[ab_{2k+1}]_d$ é divisível por $[uz_{2k+1}]_d$ ou $[uz_{2k}]_d$ para todo $k \geq 1$ e $d > 1$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer desta pesquisa, vimos a importância da resolução de problemas como metodologia para o ensino da Matemática e o quanto este método manteve sua relevância nas últimas décadas, a ponto de refletir nos PCN (BRASIL, 1998) e na BNCC (BRASIL, 2018), ambos da área de Matemática. Além disso, abordamos a resolução de problemas citando alguns pontos de vistas defendidos por Polya (1995), Pais (2006) e outros autores, proporcionando ao leitor a compreensão acerca deste processo de ensino que é bastante conhecido, mas possui uma relevância extraordinária para o ensino da Matemática.

Após apresentar os conteúdos preliminares, utilizados para fundamentação teórica, desenvolvemos os principais resultados a respeito dos números suavemente ondulantes, em um sistema de numeração posicional (base) além da convencional base decimal, em resposta ao objetivo geral deste trabalho, descrito no Capítulo 1. Por fim, foram apresentadas cinco propostas de atividades a serem desenvolvidas em sala de aula que norteiam os docentes do ensino básico sobre como abordar este conteúdo no Ensino Fundamental e Médio, inclusive com uso de tecnologias computacionais, incentivadas pelos documentos orientadores, tais como PCN (BRASIL, 1998) e BNCC (BRASIL, 2018), ambos da área de Matemática.

Contudo, é evidente que a pesquisa não finaliza aqui, uma vez que ela abre a possibilidade dos professores de Matemática e demais leitores que interessarem pelo assunto prosseguirem com as investigações, com objetivo de fomentar a investigação matemática por parte dos estudantes, possibilitando ainda o incentivo a demonstrações matemáticas e a valorização da teoria dos números. Isto porque constitui-se essencial para as relações financeiras, matemática discreta e, inclusive, se faz presente nos avanços tecnológicos que vivenciamos, principalmente na Ciência da Computação. Como ressalta Domingues (2009, p. 15): “são os modernos sistemas criptográficos, cuja seiva vem da teoria dos números, que permite aos bancos, empresas comerciais e órgãos militares, por exemplo, trocar informações com segurança através de códigos sofisticados”.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quartos ciclos: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CALCULADORA ONLINE. Calculadora de Conversão de Bases Numéricas, c2023. Disponível em: <https://www.calculadoraonline.com.br/conversao-bases#>. Acesso em: 5 out. 2023.

CARVALHO, Fernando Soares; COSTA, Eudes Antonio. Escrever o Número $11 \cdot \cdot \cdot 11$ como Produto de Dois Números. **Revista do Professor de Matemática**, [s. l.], n. 87, 2015. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/87/36.html>. Acesso em: 15 set. 2023.

CARVALHO, Fernando Soares; COSTA, Eudes Antonio. Um passeio pelos números ondulantes. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, v. 8, n. 2, p. e3001-e3001, 2022.

CJDINFO. **Conversor de Bases Numéricas**, c2023. Disponível em: <https://www.cjdinfo.com.br/utilitario-conversor-bases-numericas>. Acesso em: 5 out. 2023.

COSTA, Eudes Antonio; COSTA, Grieg Antonio. Existem números primos na forma $101 \dots 101$. **Revista do Professor de Matemática**, [s. l.], v. 103, p. 21-22, 2021.

COSTA, Eudes Antonio; SOUZA, Arthur Batista. Números ondulantes na forma $101 \dots 101$. **Gazeta de Matemática**, [s. l.], SPM, 2024.

DOMINGUES, Hygino Hugueros. **Fundamentos de aritmética**. Florianópolis: Ed. da UFSC, 2009.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Coleção PROFMAT.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. 286 p.

LANDAU, Edmund. **Teoria elementar dos números**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2002.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cesar Pinto. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2014. 204 p. Coleção PROFMAT.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PICKOVER, Clifford Alan. Is There a Double Smoothly Undulating Integer? **Journal of Recreational Mathematics**, [s. l.], v. 22, n.1, p. 52-53, 1990.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência Ltda, 1995, 196p.

ROBINSON, D. F. There Are no Double Smoothly Undulating Integers in Both Decimal and Binary Representation. **Journal of Recreational Mathematics**, [s. l.], v. 26, n. 2, p. 102-103, 1994.

SANTOS, César Bezerra. **Os números repunidades na base b**. 2022. 49 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2022.

SANTOS, Douglas Catulio; COSTA, Eudes Antonio. Peculiarities of smoothly undulating number smoothly undulating numbers. **InterMaths**, [s. l.], v. 4, n. 2, p. 38-53, 2023.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. 23. ed. São Paulo: Cortez, 2007.

SHIRRIFF, Ken. Comments on Double Smoothly Undulating Integers. **Journal of Recreational Mathematics**, [s. l.], v. 26, n. 2, p. 103-104, 1994.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed editora, 2001.

SNYDER, William M. Factoring Repunits. **The American Mathematical Monthly**, [s. l.], v. 89, n. 7, p. 462-466, 1982.

SOUZA, Arthur Batista de. **Números Ondulantes, Repunidades e Investigação Matemática**. 2023. 75 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2023.