UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TATIANE SILVA TAVARES

A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA APLICADA AOS NÚMEROS MÁGICOS DE BALL

ARRAIAS-TO
2023

TATIANE SILVA TAVARES

A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA APLICADA AOS NÚMEROS MÁGICOS DE BALL

Monografia apresentada à UFT − Universidade Federal do Tocantins − Câmpus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor para obtenção de título de Licenciada em Matemática, sob orientação do Profº. Drº. Eudes Antonio da Costa.

Orientador: Profº. Drº. Eudes Antonio da Costa.

ARRAIAS-TO
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

T231i Tavares, Tatiane Silva.
A investigação matemática aplicada aos números mágicos de Ball. / Tatiane Silva Tavares. – Arraias, TO, 2023.
55 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2023.
Orientador: Eudes Antonio Da Costa

1. Números mágicos de Ball. 2. Números Naturais. 3. Proposta de atividades. 4. Processo de ensino. I. Título

CDD 510

Tatiane Silva Tavares

A Investigação Matemática aplicada aos números mágicos de Ball

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário de Arraias, Curso de Licenciatura em Matemática, foi avaliado para a obtenção do título de Licenciado em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Data de aprovação: 01 /02 /2023

Banca Examinadora

Eudes Atos

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa, UFT, Arraias

Janeisi de Lima Meira

Prof Dr Janeisi Lima Meira , UFT, Arraias

Profa Dra Renata Alves da Silva, UFNT, Araguaína

Ao meu filho em nome de toda minha família,
pelo apoio e todo incentivo recebido.

AGRADECIMENTOS

Não poderia deixar de expressar meu profundo agradecimento a Deus. Que mesmo em minha pequenez, sou abençoada com sua bondade e amor.

Agradeço aqui à toda minha família, que sempre esteve ao meu lado. Aos meus pais Domingos e Maria por muitas vezes abdicar de seus sonhos, para que eu possa realizar os meus. Agradeço ao meu filho João Pedro por ser fonte de inspiração e me fazer continuar sempre que a dificuldade aparecia. Aos meus irmãos Wilton e Taides, minha cunhada Luanna e minha prima Fabrine por todo amparo, incentivo e suporte. Ao Ian por ser porto seguro por muitas vezes nesses últimos meses, sempre com palavras de bom ânimo e estímulo.

Ao meu professor e orientador Eudes Antônio por tornar possível a conclusão dessa importante etapa. Por incontáveis horas dedicadas à orientação e partilha de conhecimentos.

À minhas amigas Deyfila e Jucy por serem minhas parceiras, irmãs e confidentes. Por muito tempo ter aguentado de perto meus choros, dias sem dormir, falta de tempo e principalmente ter feito a diferença nessa caminhada acadêmica que levo para a vida.

Aos colegas que foram essenciais para enfrentar esses anos de estudos. Em especial, agradeço ao Bruno, Luccas, Mikelly, Samara, Welington, Luan, Juliana e Camila, pelo companheirismo nos mais diversos momentos desta jornada e pela partilha de conhecimento, amizade e tempo.

Deixo, por fim, meu reconhecimento sincero à eficiente equipe da Universidade Federal do Tocantins por sua ajuda e cooperação excelentes.

"É importante não deixar de questionar. A curiosidade tem uma razão de existir."

Memórias do editor William Miller, citadas em edição da revista Life de 1955

RESUMO

A compreensão da matemática se manifesta em diferentes descobertas, mecanismos, modos e interferências. Contudo, é crescente a necessidade de envolver o estudante no processo de aquisição ou construção da aprendizagem de forma ativa e significativa. O processo ou momentos de ensino estão longe de ser apenas apresentar fórmulas, regras, macetes ou outros mecanismos que possam fazer apenas com que o aprendente alcance notas satisfatórias. Este estudo sobre investigação matemática salienta a importância e auxilia o professor a tornar os momentos de ensino mais uma forma atrativa, envolvendo os estudantes e tornando a matemática um instrumento para desenvolver habilidades, despertar o senso crítico, além de construir estratégias e raciocínio específicos de matemática. O presente estudo planeja uma investigação sobre os números mágicos de Ball, reunindo alternativas didáticas, como a mágica matemática, com a finalidade de possibilitar ao estudante construir suas próprias conjecturas, coloca-lo dinamicamente no processo de ensino e aprendizagem e promover maior interesse e encantamento com a matemática, apresentando ou reforçando conceitos importantes. Destaca ainda um estudo das abordagem dos conceitos referente à BNCC, listando as habilidades e competências referente ao Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Palavras-chave: Investigação Matemática. Números Naturais. Números mágicos de Ball. Processo de Ensino.

ABSTRACT

The understanding of mathematics is manifested in different discoveries, mechanisms, modes and interferences. However, it is a growing need to involve the student in the process of acquisition or construction of learning in an active and meaningful way. The process or teaching moments are far from just presenting formulas, rules, tricks or other mechanisms that can only make the learner reach satisfactory grades. The process or teaching moments are far from just presenting formulas, rules, tricks or other mechanisms that they can only do with which the learner reach satisfactory grades. This study about mathematical investigation reinforce the importance and helps the teachers to make teaching moments a form attractive, involving students and making mathematics an instrument to develop skills, awaken critical sense, in addition to building specific mathematics strategies and reasoning. The present study plans an investigation into Ball's magic numbers, bringing together didactic alternatives, such as mathematical magic, with the aim enable students to construct their own conjectures, dynamically inserting them into the teaching and learning process and promoting greater interest and enchantment with mathematics, introducing or reinforcing important concepts. Still highlights a study of the approaches of the concepts referent to the BNCC, listing the skills and competencies referent to Elementary School II and High School.

Keywords: Mathematical Research. Natural Numbers. Ball's Magic Numbers. Teaching Process.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência que está relacionada a várias áreas do conhecimento. Em parte, isto justifica a sua importância, no entanto, estudos apontam que a matemática ainda é considerada por alguns estudantes uma ciência desafiadora ou difícil (complexa). Entendemos que ensinar matemática é desenvolver o raciocínio lógico, formular conjecturas, ampliar saberes, despertar pensamentos, instigar criatividade e capacidade de resolver problemas. O educador por sua vez, desempenha um importante papel, tendo em vista sua relevância no processo de ensino, a constante busca por motivação, material ou recursos didático-pedagógicos apropriados, a reformulação de didáticas para eficiência no ensino e aprendizagem.

Assim a presente pesquisa terá uma exposição teórica apresentando o algoritmo de Ball, que serão explorados alguns conceitos aritméticos (propriedades dos números inteiros) por uma proposta de atividades utilizando a investigação matemática como metodologia, seguindo a orientação da BNCC - Base Nacional Comum Curricular. A “mágica” usada no algoritmo de Ball é um interessante recurso pedagógico que deve ser explorado no ensino, apresentando ou reforçando importantes conceitos matemáticos, além de explorar o raciocínio, instigando e despertando a curiosidade em formular estratégias para a resolução.

Diante as considerações, o presente trabalho tem como objetivo propor o uso da investigação matemática como metodologia de ensino dos conceitos matemáticos apresentados em ambiente ou situações de aprendizagem e explorar atividades do banco de dados e provas da OBMEP que contemplem um processo de investigação para o ensino dos conceitos matemáticos e analisando as atividades por meio de uma intervenção pedagógica indicando como as competências e habilidades da BNCC podem ser abordadas ou desenvolvidas, finalizando com a apresentação e exploração do número mágico de Ball.

Tendo em vista a necessidade de contextualização da pesquisa, o segundo capítulo é uma revisão bibliográfica acerca da investigação matemática, apresentando como proposta de pesquisa, momentos investigativos e a contribuição na aprendizagem, bem como, apresentamos um breve estudo da BNCC ressaltando as habilidades e competências dos conceitos matemáticos aqui relacionados ao objetivo principal da pesquisa.

Sob o título "conceitos básicos", o terceiro capítulo aborda os assuntos ou conceitos matemáticos, ou seja, apresenta uma revisão com algumas definições e resultados utilizados, que dão embasamento para a exploração dos números mágicos de Ball.

Ao findar o trabalho, no quarto e último capítulo apresentamos uma proposta de atividades, com situações problematizadoras retiradas de provas e bancos de dados da OBMEP, relacionando-as com a BNCC, orientando ou conduzindo o estudante à investigação, buscando estratégias e formulação de conjecturas para solucionar o desafio proposto.

Espera-se com esta pesquisa contribuir como material didático para preparar o docente na investigação matemática, tal como motivar os estudantes, por uma metodologia ativa a aprender ou reforçar conceitos importantes, levando-os a trocas de saberes e elaboração de conjecturas, desenvolvendo assim habilidades básicas no processo de aprendizagem como apregoado na BNCC.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo abordaremos o método de pesquisa-ensino *investigação matemática* relacionando-a com os princípios e normas que regem o processo de ensino e aprendizagem da matemática. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é também tema exploratório, uma vez que é relevante o conhecimento das competências e habilidades no processo de elaboração, construção ou aquisição do saber matemático pelos estudantes.

Para fundamentar a pesquisa nesse capítulo, temos como contribuição os trabalhos de Brasil - BNCC (2018), Corradi (2011); Fiorentini e Lorenzato (2006); Fonseca, Brunheira e Ponte (1999); Ponte (2003); Ponte (2005); Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira (1998); Santos, Paiva, Oliveira, Santos e Malusa (2019) e Silva (2020).

2.1 Investigação Matemática

O termo investigar está relacionado a procurar conhecer o que não se sabe ainda ou compreende. A investigação, por sua vez, é a busca de algo com estratégias definidas, estabelecidas ou traçadas, ou seja, é a procura de informação por meio de um estudo/pesquisa cuidadoso acerca de um determinado assunto. De modo similar, a *investigação matemática* é uma proposta de pesquisa, ensino e aprendizagem que tem como objetivo o desenvolvimento do pensamento matemático atribuindo novos significados aos conhecimentos. De acordo Ponte (2003):

> Numa investigação matemática, parte-se de uma questão muito geral ou de um conjunto de informações pouco estruturadas a partir das quais se procura formular uma questão mais precisa e sobre ela produzir diversas conjecturas. Depois, testam-se essas conjecturas, algumas das quais, perante contra-exemplos, poderão ser desde logo abandonadas. Outras, sem se revelarem inteiramente corretas, poderão ser aperfeiçoadas. Neste processo, por vezes formulam-se novas questões e abandonam-se, em parte ou no todo, as questões iniciais. As conjecturas que resistirem a vários testes vão ganhando credibilidade, estimulando a realização de uma prova que, se for conseguida, lhes conferirá validade matemática. (PONTE, 2003, p. 2).

Como também indicam Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) apud Silva (2020), a realização de uma *investigação matemática* envolve quatro momentos principais. O primeiro momento envolve o **reconhecimento da situação**, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo refere-se ao processo de **formulação de conjecturas**. O terceiro inclui a **realização de testes** e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último momento, diz respeito à argumentação, **demonstração** e avaliação do trabalho realizado. Cada um destes pode incluir diversas atividades como indicado na tabela abaixo:

Tabela 1 – Momentos de uma *investigação matemática*

MOMENTOS DE UMA INVESTIGAÇÃO	ATIVIDADES
Exploração e formulação de questões	Reconhecer uma situação problemática Explorar a situação problemática Formular questões
Formulação de conjecturas	Organizar dados Formular conjecturas
Teste e reformulação de conjecturas	Realizar testes Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 18) apud Silva (2020, p 22).

Os momentos da investigação matemática podem surgir de forma desordenadas, ou seja, não há uma sequência definida ou obrigatória. Uma ação pode levar a formulação de outras conjecturas, de forma que cada descoberta pode definir outros saberes.

> Investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura teste-demonstração. (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2006, p. 10).

Segundo Ponte (2005) os argumentos principais utilizados para justificar a importância das investigações são análogos aos usados para justificar a importância dos problemas, acrescentando-se ainda que as investigações, mais do que os problemas, promovem o envolvimento dos aprendentes, pois podem requerer uma participação ativa desde a primeira fase do processo – a formulação das questões a resolver. Ele ainda explicita que as tarefas de investigação (problemas e os exercícios), surgem num contexto da vida real. Assim possibilita a formulação de problemas, exercícios e investigações em termos puramente matemáticos, despertando no estudante o desejo de envolver nessas atividades que refletem a realidade.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006) as aulas investigativas são :

> Aquelas que mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação. [...] Dependendo da forma como essas aulas são desenvolvidas, a atividade pode restringir-se apenas à fase de explorações e problematizações. Porém, se ocorrer, durante a atividade, formulação

> de questões ou conjecturas que desencadeiam um processo de realização de testes e de tentativas de demonstração ou prova dessas conjecturas, teremos, então, uma situação de investigação matemática.(FIORENTINI e LORENZATO, 2006, p. 29)

Deve-se preocupar em centrar as atividades dos aprendentes em suas ideias e pesquisas, com o intuito de desenvolver o trabalho e atitude investigativa. A criação de um ambiente no qual envolve a todos de forma a estimular o pensar, o despertar por levantamentos de hipóteses e a trocas (interação entre os estudantes) para a construção de possíveis soluções para os problemas é de extrema importância. Assim o professor tem o importante papel de levantar essas propostas de investigação e aguçar o empenho dos estudantes para resolução das atividades em questão.

> Para que as atividades investigativas obtenham êxito é preciso que todos estejam conscientes de seu papel nesse processo de ensino e aprendizagem, dando o máximo de atenção, entendendo que para aprender Matemática é fundamental a colaboração e a cooperação entre professor e alunos. Dessa maneira, os trabalhos realizados evidenciam um conjunto de cuidados que o professor deve ter na a presentação da tarefa, na sua interação com os alunos no decorrer da sua realização e na fase de discussão e partilha de resultados. A decisão sobre a informação inicial a dar aos alunos e sobre o apoio a proporcionar-lhes quando sentem dificuldades tem de ser tomada, em cada caso concreto, em função das características dos alunos e da experiência de trabalho que o professor tem com a turma.(CORRADI, 2011, p. 10-11)

O professor desempenha um papel primordial e categórico nas atividades de investigação, pois é ele o responsável de fomentar, despertar ou conduzir as intervenções de um modo claro e coerente, conquistando a interação do educando nas atividades. O mesmo pode assumir diversos papéis na execução da investigação. Ora faz-se necessário dar-lhes autonomia para que eles tracem as suas estratégias de forma que formule seu pensamento matemático. Ora, o professor desafia os estudantes com o objetivo de promover reflexões ou até mesmo motiva-los para o que foi proposto. Assume também o papel de avaliador, recolhendo informações acerca da investigação, procurando compreender e analisar tudo que foi feito, sem expressar sua opinião, uma vez que o discente precisa formular suas próprias ideias e conclusões.

> As ações de ensino ao alcance do professor, ou seja, os meios que pode usar para atingir os objetivos pretendidos, traduzem-se essencialmente em três papéis fundamentais: desafiar, apoiar e avaliar. Estes papéis decorrem da lógica do desenvolvimento de qualquer atividade. O professor desafia os alunos com situações e questões de modo a envolvê-los em trabalho investigativo. Apoia-os, fazendo perguntas, comentários ou sugestões. Procura avaliar os progressos já realizados e eventuais dificuldades, recolhendo informação e, com base nisso, toma a sua decisão de prosseguir, alterar um ou outro aspecto do que se está a fazer, ou mudar para outra fase do trabalho.(PONTE, OLIVEIRA, BRUNHEIRA, VARANDAS e FERREIRA, 1998, p. 24).

É importante ressaltar que esses momentos no qual acontece uma investigação, há sempre uma interação de professor-estudante. Logo, o professor está também em busca de formular conjecturas, validar afirmações, verificar caminhos e avaliar possíveis resultados para tornar um processo de ensino-aprendizagem.

Em outra percepção, não é novidade que os discentes tem um "pré-conceito" estabelecido referente a disciplina de matemática. Contudo, despertar no estudante entusiasmo e envolvimento na realização das atividades são fortes aliados na execução das mesmas. Esta envoltura constitui uma importante base para a aprendizagem, construindo uma evolução da comunicação oral (uma vez que há trocas de pensamentos e conjecturas), autonomia (desmistifica a ideia de que só professor é detentor do conhecimento), capacidade de trabalhar em grupo, além de assumir a postura de matemático dando-lhe um novo olhar diante a exploração de saberes e formulação de estratégicas.

> Como estratégia metodológica, a Investigação Matemática leva o aluno a se movimentar nos conteúdos, levantando questões que podem levar a outras e, assim, quebrar a monotonia e frieza das formas tecnicistas e mecânicas estáticas. O estudante se envolve com a Matemática até encontrar as respostas aos seus questionamentos e, dessa forma, convive e dialoga com ela, familiarizando-se com o que lhe parecia ser tão complexo antes.(SANTOS, PAIVA, OLIVEIRA,SANTOS e MALUSÁ, 2019).

A realização da investigação matemática é um poderoso processo de aprendizagem, com métodos investigativos para otimização do ensino e da aprendizagem, explorando a importância da interpretação de conteúdo e sua contextualização, além de ser uma importante ferramenta de desenvolvimento profissional e de formação para professores. Fonseca, Brunheira e Ponte (1999, p. 14) salienta que "[...] a realização de projetos de investigação, a nível da escola ou de pequenos grupos de professores, poderá ser um modo privilegiado para desenvolver nos professores os saberes necessários à realização de atividades de investigação."

> Na fase final, o professor procura saber quais as conclusões a que os alunos chegaram, como as justificam e se tiram implicações interessantes. O professor tem de manter um diálogo com os alunos enquanto eles vão trabalhando na tarefa proposta, e no final cabe-lhe conduzir a discussão coletiva. Ao longo de todo este processo, precisa criar um ambiente propício à aprendizagem, estimular a comunicação entre os alunos e assumir uma variedade de papéis que favoreçam a sua aprendizagem.
>
> É hoje consensualmente reconhecido que o professor tem um papel decisivo no processo de ensino-aprendizagem. Ele tem de ser capaz de propor aos alunos uma diversidade de tarefas de modo a atingir os diversos objetivos curriculares. Tem de se preocupar tanto com a aprendizagem dos conteúdos matemáticos propriamente ditos como com o desenvolvimento da capacidade geral de aprender. (PONTE, OLIVEIRA, BRUNHEIRA, VARANDAS e FERREIRA, 1998, p. 2)

2.2 BNCC- Base Nacional Comum Curricular

A obrigatoriedade de uma educação para todos foi definida pela Constituição Federal de 1988. Assim, a educação é dever da família, da sociedade e do Estado. Ao correr dos anos foi crescendo a necessidade da criação de um sistema nacional de Educação, de tal forma que, as orientações sobre o planejamento curricular das escolas e do sistema educacional brasileiro sejam unificadas. Cumprindo a exigência constitucional e demais leis nacionais que visam uma educação de qualidade, em 06 de março de 2018, foi criada a versão final da Base Nacional Comum Curricular, no qual foi elaborado por diversos educadores atuantes em todo país brasileiro, com as aprendizagens previstas para toda educação básica.

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN). (BRASIL - BNCC, 2018).

Um bom ambiente de aprendizagem exige um estudo preliminar, planejamento de uma ordem didática balizada numa metodologia ativa. Desenvolver um ambiente de investigação matemática deve ter uma abertura quanto aos problemas que serão abordados, algo que tira o docente da zona de conforto, no entanto está em acordo BNCC, que dispõe, dentre outras competências, a de:

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BRASIL - BNCC, 2018, p. 9).

Para a área de Matemática, a BNCC enfatiza qual saber o estudante precisa desenvolver para que o conhecimento matemático aconteça de forma eficiente. Os conteúdos foram organizados de tal forma que, correlaciona com a realidade vivenciada pelo discente.

> Com base nos recentes documentos curriculares brasileiros, a BNCC leva em conta que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de **ideias fundamentais** que produzem articulações entre eles: **equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação**. Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento. A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc.(BRASIL - BNCC, 2018 p. 268)

A organização de conteúdos dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao Ensino Médio é estabelecida nas cinco unidades temáticas, correlacionadas, na qual é base da formulação de habilidades a ser desenvolvidas ao longo do ensino básico. São eles:

Tabela 2 – Estrutura geral da BNCC para as três etapas da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio)

UNIDADE TEMÁTICA	FINALIDADE
Números	Desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática.
Álgebra	O desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos.
Geometria	Envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos.
Grandezas e medidas	Propor o estudo das medidas e das relações entre elas – ou seja, das relações métricas –, favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.).
Probabilidade e estatística	Propor a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações- -problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas.

Fonte: Brasil - BNCC (2018, p. 268 - 274).

2.2.1 BNCC - Ensino Fundamental II

Sobre a área de Matemática no Ensino Fundamental, a BNCC (BRASIl, 2018) abrange alguns aspectos gerais sobre as características da educação básica nessa etapa, os objetivos de aprendizagem, os princípios que norteiam a abordagem e competência da disciplina, bem como as adaptações vivenciadas pelos estudantes nessa fase.

> O Ensino Fundamental, é a área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade –, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental.(BRASIL - BNCC, 2018 p. 265)

Destacamos agora as unidade temáticas, números e álgebra, objeto de conhecimento e habilidade da BNCC que serão explorado no decorrer da pesquisa em questão:

Tabela 3 – Análise da unidade temática e objeto de conhecimento dos conteúdos abordados na pesquisa ligados ao Ensino Fundamental na BNCC

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETO DE CONHECIMENTO
Números	Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal. Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais Múltiplos e divisores de um número natural. Aproximação de números para múltiplos de potências de 10 Notação científica. Números reais: notação científica e problemas.
Álgebra	1. Propriedades da igualdade

Fonte: Brasil - BNCC (2018, p. 300 - 319).

Tabela 4 – Análise da habilidade dos conteúdos abordados na pesquisa ligados ao Ensino Fundamental na BNCC

HABILIDADES
(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica.
(EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.
(EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).
(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100$ e 1000.
(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
(EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.)
(EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.
(EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.
(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
(EF08MA01) Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.
(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
(EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

Fonte: Brasil - BNCC (2018, p. 300 - 319).

2.2.2 BNCC - Ensino Médio

A BNCC do Ensino Médio é organizada em continuidade ao proposto nas outras etapas de ensino. Assim, os estudantes têm a oportunidade de solidificar os conhecimentos desenvolvidos e aprimorar com os recursos apresentados.

> A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe **a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais** desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade. (BRASIL – BNCC, 2018, p. 471).

Destacamos, agora, as competências específicas da área de Matemática e as habilidade da BNCC que serão explorados no decorrer da pesquisa em questão:

Tabela 5 – Análise das competências específicas na área de Matemática no Ensino Médio na BNCC

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS
Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: Brasil - BNCC (2018, p. 532- 540).

Tabela 6 – Análise da habilidade dos conteúdos abordados na pesquisa ligados ao Ensino Médio na BNCC

HABILIDADES
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Fonte: Brasil - BNCC (2018, p. 537).

3 CONCEITOS BÁSICOS

O capítulo em questão apresenta algumas propriedades da teoria dos números. Tem como principal intuito a contextualização e apresentação de conceitos básicos que serão fundamentais para a compreensão do assunto da pesquisa. Para tal possibilidade, aqui os trabalhos que dão sustentação teórica são publicados por: Brasil - BNCC (2018); Castilho, Silva e Weingaertner (2020); Ball(1926); Domingues (1991); Eves (2004); Hefez (2013); Ifran (2005); Ponte (2006); Santos (2014) e Souza (2018).

3.1 Representação numérica: um pouco de história

Ao longo da história da matemática, podemos observar diversas formas de representação numérica. Como o desenvolvimento das atividades humanas, como criação de animais e plantio de mantimentos para seu sustento, os povos precisavam registrar e representar quantidades por meio de diferentes objetos, antes mesmo da escrita ser desenvolvida.

> Aqueles que guardavam rebanhos de carneiros ou de cabras, por exemplo, precisavam ter certeza de que, ao voltar do pasto, todos os animais tinham entrado no curral. Os que estocavam ferramentas ou armas, ou que armazenavam reservas alimentares para atender a uma vida comunitária, deviam estar aptos a verificar se a disposição dos víveres, armas ou instrumentos era idêntica a que eles haviam deixado anteriormente. Aqueles, afinal, que mantinham relações de inimizade com grupos vizinhos necessitavam saber, ao final de cada expedição militar, se o efetivo de seus soldados estava completo ou não. Os que praticavam uma economia de troca direta deviam estar aptos a "avaliar" para poder trocar um gênero ou mercadoria por outro [...] (IFRAN, 2005, p. 25).

O sistema de numeração ao longo da história foi obtendo identidade, cada povo tinha sua maneira de representação, assim surgiu a riqueza de expressões e símbolos. Contudo, a notação ou representação usual nos dias de hoje é conhecido como sistema de numeração indo-arábico.

> O sistema de numeração indo-arábico tem esse nome devido aos hindus, que o inventaram, e devido aos árabes, que o transmitiram para a Europa Ocidental. Os mais antigos exemplos de nosso atuais símbolos numéricos encontram-se em algumas colunas de pedra erigidas na Índia por volta do ano 250 a.C. pelo rei Açoka. Outros exemplos primitivos na Índia, se corretamente interpretados, encontram-se em registros talhados por volta do ano 100 a.C. nas paredes de uma caverna numa colina perto de Poona e em algumas inscrições de por volta do ano 200 d.C., gravadas nas cavernas de Nasik. Essas primeiras amostras não contêm nenhum zero e não utilizam a notação posicional. Contudo, a ideia de valor posicional e um zero devem ter sido introduzidos na Índia algum tempo antes do ano 800 d.C., pois o matemático persa Al-Khowârizmî descreveu de maneira completa o sistema hindu num livro do ano 825 d.C. (EVES, 2004, p. 40)

Eves(2004, p. 40) aponta que: "até que os símbolos dos numerais indo-arábicos se estabilizassem, com a invenção da imprensa de tipos móveis, muitas modificações em sua grafia se verificaram [...]". Inicialmente não havia o conceito de número para registrar quantidades ou medidas. Com o avanço do conhecimento matemático e domínio da ciência, o conceito de número foi separado (desassociado) dos objetos (coisas) e construiu-se em sua forma abstrata. Assim, foram criados (desenvolvidos) e aperfeiçoados os diversos sistema numéricos.

Um sistema de numeração é qualquer sistema de representação de números, ou seja, é aquele que embora seja estruturado de maneira diferente, apresentam algumas características em comum. Assim podemos destacar que o aspecto principal que diferem o sistemas de numeração é referente a base (quantidade a ser agrupada) e a estrutura (posição).

> Com o desenvolvimento de uma sociedade vai-se tornando necessário contar conjuntos cada vez mais numerosos, efetuar cálculos, o que ficaria muito difícil sem uma sistematização do processo de contagem e, paralelamente, do procedimento para escrever os números. O expediente de que o homem fez uso nesse sentido, desde tempos imemoriais, foi, como já mencionamos de passagem, a escolha de uma base para formar grupos de elementos. (DOMINGUES, 1991, p.3).

Atualmente por conveniência e convenção o sistema de numeração decimal é usado para representar os números (quantidades ou medidas) com 10 elementos (símbolos ou algarismos). O sistema decimal é um sistema de numeração que é representado pela base 10 (agrupamento). A potência de base 10 é um número cuja a base é 10 e é elevada a um expoente inteiro n, $n \geq 0$. Neste sistema de numeração o 0 (zero) representa ausência de uma casa ou ordem. Contudo, nesse sistema de numeração indo-arábio os dez algarismos ou símbolos são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, utilizados para representar unidades, dezenas, centenas e assim sucessivamente. O que vai definir o valor numérico é a posição (casa ou ordem) do algarismo. O 0 (zero) em especial desempenha um duplo papel devido seu posicionamento, ou seja, posicionado à esquerda do número não altera seu valor representativo, porém à direita, dá-se representação de grandeza pela base.

Exemplo 3.1. *O número 608 é composto de 6 centenas mais 0 (nenhuma) dezenas e mais 8 unidades, ou seja,*

$$608 = 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \ .$$

3.2 Números naturais

Segundo Ponte(2006, p. 3), "os números naturais permitem a contagem do número de elementos de uma coleção de objetos $[\cdots]$ ". Inicialmente conhecidos como números arábicos, os números naturais ou números inteiros positivos formam o conjunto indicado por $\mathbb{N}$. Podem ainda ser representados pela sequência ordenada $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,\cdots\}$. O zero integra a classe dos naturais porque é inteiro e não negativo.

No conjunto dos números naturais, todos os números possuem um **sucessor**, ou seja, sucessor é aquele número que vem depois. Assim dados os números naturais x e y, x é sucessor de y se $x^+ = x+1 = y$. Portanto, é possível concluir que na sua formação não contém números repetidos, e disto que têm infinitos números naturais. De forma análoga, temos também no conjunto dos números naturais o **antecessor**, ou seja, é o número que vem antes. Assim dado um número natural qualquer distinto de 0 (zero), o número natural y é antecessor de x se $x \neq 0$ e $x-1 = y$. Contudo, a definição de sucessor e antecessor é bem simples, porém importante, pois é a partir dela que é possível a ordenação de números.

3.3 Operações nos Naturais

A aritmética é a parte da matemática que estuda os conjuntos numéricos, identificando propriedades e definindo operações. As operações fundamentais da aritmética são: adição e multiplicação.

A adição é a primeira operação fundamental da aritmética. É dela que derivam a multiplicação. Podemos definir a adição como a operação básica da matemática nos naturais na qual acrescenta, adiciona, junta ou agrupa quantidades. Na adição o resultado entre dois números é conhecido como soma, e os números a serem adicionados são conhecidos como parcelas.

Domingues (1991, p. 82) descreve a adição em $\mathbb{N}$:

Proposição 3.2. *Dados x e y em $\mathbb{N}$, a adição $x+y$ em $\mathbb{N}$ é definida mediante as seguintes condições:*

i) $a+0 = a$

ii) $a+b^+ = (a+b)^+$*, em que* b^+ *indica o sucessor de* b

A operação de adição satisfaz duas importantes propriedades, são elas: comutatividade e associatividade. Na *propriedade comutativa da adição* podemos observar que dados quaisquer números naturais a e b tem-se $a+b = b+a$. Assim, para encontrar a soma $a+b$ através dos sucessores: $a+1, a+1+1, \cdots$ (b vezes), ou b e tomar os sucessores de $b+1, b+1+1, \cdots$ (a vezes) . Assim, a propriedade afirma que a ordem das parcelas não altera o resultado, e logo $a+b = b+a$. Na *propriedade associativa da adição* podemos observar que dados quaisquer números naturais a, b e c se tem $(a+b)+c = a+(b+c)$. Portanto para encontrar a soma de três números a, b e c podemos adicionar a com b, obter o resultado e adicionar a c; ou então primeiro adicionar b com c, obter o resultado e adicionar a a. Contudo, a propriedade associativa afirma que o número resultante é o mesmo, que podem associar as parcelas da forma que facilite os cálculos no ponto de vista de cada um.

Domingues (1991, p. 82) apresenta e demonstra essas e outras propriedades que servem de embasamento teórico à aritméticas dos números naturais:

Proposição 3.3. *Propriedades da adição em* $\mathbb{N}$. *Para quaisquer* a,b *e* c *naturais.*

i) *Associativa:* $a+(b+c)=(a+b)+c$.

ii) *Comutativa:* $a+b=b+a$.

iii) *Distributiva:* $c(a+b)=ac+bc$.

iv) *O zero é o elemento neutro da adição:* $0+a+b=a+b$.

v) *Lei do cancelamento da adição: se* $a+b=a+c$ *então* $b=c$.

Exemplo 3.4. *Examinemos a adição de* $47+24$. *A adição de 7 unidades do primeiro número com as 4 do segundo é* $11=1+1\cdot 10$, *uma unidade e uma dezena. Esta dezena é então juntada a 4 dezenas de 47 e a duas de 24, obtendo-se a 7 dezenas como soma. Mas, embutidas nesse processo, estão as propriedades da adição em* $\mathbb{N}$. *De fato:*

$$\begin{aligned} 47+24 &= (4\cdot 10+7)+(2\cdot 10+4) \\ &= (4\cdot 10+2\cdot 10)+(7+4) \\ &= (4\cdot 10+2\cdot 10+1\cdot 10)+1 \\ &= 7\cdot 10+1=71 \quad . \end{aligned}$$

Domingues (1991, p. 21) descreve a subtração em $\mathbb{N}$:

Definição 3.1. *Define-se a relação* $\leq$ *(menor que ou igual) em* $\mathbb{N}$ *do seguinte modo: se* $a,b\in\mathbb{N}$, *diz-se que* $a\leq b$ *se* $b=a+u$, *para algum* $u\in\mathbb{N}$. *O numero* u *nessas condições chama-se diferença entre* b *e* a *e é indicado por* $u=b-a$, *onde* b *é chamado de minuendo e* a *é chamado de subtraendo.*

A relação subtração é relacionado (dependente) da adição. A adição como foi exposto, leva o conceito de acrescentar e juntar, a subtração por sua vez tem o conceito de retirar ou completar, ou seja, a mesma é usada para diminuir números a fim de obter sua diferença. Na subtração temos o minuendo, que é o valor numérico já existente, o subtraendo que é o numeral que será retirado do minuendo e o resultado do cálculo é conhecido como diferença.

Veja que a subtração $a-b$ só está definida neste caso para os pares ordenados (a,b) em que $a \geq b$. Valem as seguintes propriedades, segundo Domingues (1991, p. 21):

Proposição 3.5. *Propriedades da relação subtração:*

i) $(b-a)+a=b$, *sempre que* $a \leq b$.

ii) *Se* $c \geq a$, *então* $(a+b)-c=(a-c)+b$.

iii) $b+c \leq a$ *então* $a-(b+c)=(a-b)-c$.

iv) *Se* $b \leq a$ *e* $d \leq c$, *então* $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$.

Exemplo 3.6. *Observe a seguinte subtração (retirar o menor do maior):*

$$864-289$$

Nesse caso, como o número de unidades e da dezena do minuendo é menor que o do subtraendo, assim é preciso tomar emprestada uma unidade da casa seguinte. Como podemos vê:

$$\begin{aligned}
864-289 &= (8\cdot 10^2+6\cdot 10+4\cdot 10^0)-(2\cdot 10^2+8\cdot 10+9\cdot 10^0)\\
&= (7\cdot 10^2+10\cdot 10+5\cdot 10+10\cdot 10^0+4\cdot 10^0)-(2\cdot 10^2+8\cdot 10+9\cdot 10^0)\\
&= (7\cdot 10^2+15\cdot 10+14\cdot 10^0)-(2\cdot 10^2+8\cdot 10+9\cdot 10^0)\\
&= (7\cdot 10^2-2\cdot 10^2)+(15\cdot 10-8\cdot 10)+(14\cdot 10^0-9\cdot 10^0)\\
&= 5\cdot 10^2+7\cdot 10+5\cdot 10^0=575 \quad .
\end{aligned}$$

Outra operação básica da matemática é a multiplicação. O algoritmo da multiplicação envolve a soma de partes iguais e o reagrupamento. Assim, a multiplicação surge da adição, pois é a maneira mais prática de calcular adições sucessivas de um mesmo número, obtendo um resultado que chamamos de produto.

Domingues (1991, p. 83) evidencia as propriedades da multiplicação:

Definição 3.2. *Dados* x *e* y *naturais, a multiplicação* xy *(ou* $x\cdot y$*) de números naturais é definida pelas condições seguintes:*

(i) $a\cdot 0=0$;

(ii) $a\cdot b^{+}=ab+a$.

Numa igualdade $ab=c$, a *e* b *são os fatores e* c *o produto.*

Loureiro (2004) enfatiza sobre a operação da multiplicação:

> Trabalha-se com os dois fatores decompostos, calculam-se produtos sem qualquer significado e vai-se reagrupando as unidades de cada ordem obtida. Estas três ações, de natureza totalmente diferente, devem ser realizadas em cadeia e alternadamente, de modo análogo ao que vimos nos algoritmos dominantes anteriores. (LOUREIRO, 2004, p. 25)

Exemplo 3.7. *Observe a seguinte multiplicação:* 2023×6. *Aqui, o número 2023 é multiplicador, o número 6 é o multiplicando e vamos descobrir o produto. Note que poderíamos resolver com a adição, como a ideia é mostrar a facilidade de resolver cálculos com adições sucessivas de um mesmo número, temos:*

$$\begin{aligned} 2023 \times 6 &= (2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3) \times 6 \\ &= (2 \cdot 10^3 \times 6) + (0 \cdot 10^2 \times 6) + (2 \cdot 10 \times 6) + (3 \times 6) \\ &= 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 8 \\ &= 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 8 = 12138 \quad . \end{aligned}$$

O algoritmo da multiplicação envolve a soma de partes iguais e o reagrupamento. Assim, a mesma surge da adição, pois é a maneira mais prática de calcular adições sucessivas de um mesmo número, obtendo um resultado que chamamos de produto.

A relação de divisão está relacionada com a multiplicação, porém a mesma objetiva em separar ou dividir em partes iguais. Aqui, o número que está sendo dividido em partes iguais é chamado dividendo, o que indica quantas vezes irá dividir é conhecido como divisor e o resultado é o quociente.

Definição 3.3. *Diz-se que um número natural a divide um número natural b se $b = ac$, para algum $c \in \mathbb{N}$. Neste caso diz-se também que a é divisor de b e que b é múltiplo de a. Ou ainda que b é divisível por a. Indicaremos por $a|b$ o fato de a dividir b; e se a não divide b, escrevemos $a \nmid b$.*

Em Domingues (1991, p.31) temos as seguintes propriedades de divisibilidade:

Proposição 3.8. *Dados a, b e c naturais, para a relação $x|y$ em $\mathbb{N}$, valem as seguintes propriedades:*

a) $a|a$.

b) *Se $a|b$ e $b|a$ então $a = b$.*

c) $a|b$ *e* $b|c$ *então* $a = b$.

d) *Se $a|b$ e $a|c$, então $a|(bx + cy)$ para x, y coniventes naturais.*

e) *Se $c|a$, $c|b$ e $a \leq b$, então $c|(b - a)$.*

f) *Se* $a = b + c$ *e suponhamos* $d|b$. *Então,* $d|a$ *se, e somente se,* $d|c \cdot (c = a - b)$

g) *Se* $a|b$ *e* $b \neq 0$, *então* $a \leq b$.

Na aritmética uma das propriedades fundamentais é a *divisão euclidiana*, na qual possibilita nos naturais a divisão entre dois números com resto pequeno, ou seja, ao dividir um certo a (dividendo) por um b (divisor), teremos um q (quociente) e r (resto) naturais e únicos, tal que r seja maior que 0 (zero) e menor que b.

Em Hefez (2013, p.53) enfatiza que, dados dois números naturais a e b, com a $a > 0$ e b qualquer, comparando b com os múltiplos de a, podemos considerar os intervalos da forma $[na, (n+1)a)]$, para n um número natural qualquer. Ou seja:

$$\mathbb{N} = [0, a) \cup [a, 2a) \cup [2a, 3a) \cup \cdots \cup [na, (n+1)a) \cup \cdots$$

Contudo, os intervalos acima são dois a dois disjuntos. Assim, o número b estará em um e apenas um dos intervalos acima. Logo, digamos que b pertença ao intervalo:$(qa, (q+1)a)$. Logo, existem dois números naturais q e r, unicamente determinados, tais que $b = aq + r$, com $0 \leq r < a$.

Exemplo 3.9. *Para dividir 1089 por 189, teremos:*

$$\begin{aligned} 1089 - 189 &= 900 \\ 1089 - 2 \times 189 &= 711 \\ 1089 - 3 \times 189 &= 522 \\ 1089 - 4 \times 189 &= 333 \\ 1089 - 5 \times 189 &= 144 < 189 \quad . \end{aligned}$$

Assim, a divisão euclidiana de 1089 por 189 se expressa como: $1089 = 5 \times 189 + 144$.

Os critérios de divisibilidade foram desenvolvidos pela necessidade de saber se um número n é divisível por um número m sem precisar de fato realizar a divisão euclidiana, ou seja, a ideia é reduzir cálculos e aumentar a praticidade. Iremos abordar a seguir alguns critérios de divisibilidade nos quais é importante para compreensão da proposta principal do trabalho (números mágicos de Ball), os resultados apresentados estão em Domingues (1991) e Hefez (2013).

Proposição 3.10. *(Divisibilidade por 2) Um número natural* n *é divisível por 2 se, e somente se,* n *é par, ou seja,um número natural* n *é divisível por 2 se, e somente se, terminar em 0, ou 2, ou 4, ou 6, ou 8.*

Demonstração: Dado um número $n = a_0 + a_1 \cdot 10 + \cdots + a_r \cdot 10^r$, observando que toda potência $10^k (k \geq 1)$ é um número par, então:

$$n = a_0 + a_1(2q_1) + \cdots + a_r(2q_r) = a_0 + 2(a_1q_1 + \cdots + a_rq_r) \ ,$$

ou seja,

$$n = a_0 + 2q(q \in \mathbb{N}) \ .$$

Como $2q$ é divisível por 2, então n é divisível por 2 se, e somente se, a_0 é também divisível por 2. Portanto, se e somente se $a_0 \in \{0, 2, 4, \cdots, 8\}$. $\bullet$

Proposição 3.11. *Veremos a seguir os critérios da divisibilidade por 3 e 9: Um número natural a é divisível por 3 se, e somente se, a soma dos algarismo de a é divisível por 3.*

Demonstração: Primeiro observemos que o resto da divisão de 10^k por 3 é sempre 1, para todo $k \geq 0$. De fato $10^0 = 1 = 3 \cdot 0 + 1$. Vamos supor que $10^k = 3_s + 1$, onde $r \geq 0$. Então $10^{k+1} = 10^k \cdot 10 = (3_s + 1) \cdot (3 \cdot 3 + 1) = 3(9_s) + 3_s + 3 \cdot 3 + 1 = 3(9_s + s + 3) + 1 = 3(10_s + 3) + 1$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} n &= a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_r \cdot 10^r \\ &= a_0 + a_1(3q_1 + 1) + a_2(3q_2 + 1) + \cdots + a_r(3q_r + 1) \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_r) + 3(a_1q_1 + a_2q_2 + \cdots + a_rq_r) \end{aligned}$$

Em resumo,

$$n = (a_0 + a_1 + \cdots + a_r) + 3q$$

Portanto, n é divisível por 3 se, e somente se, $a_0 + a_1 + \cdots + a_r$ é divisível por 3.

A condição de divisibilidade de um número $n = a_0 + a_1 \cdot 10 + \cdots + a_r \cdot 10^r$ por 9 é semelhante á anterior: $9|n \Longleftrightarrow 9|(a_0 + a_1 + \cdots + a_r)$. O motivo é que, também neste caso, $10^k = 9 \cdot s + 1$, para convenientes $k,\ s \in \mathbb{N}$. $\bullet$

Proposição 3.12. *Divisibilidade por 5: Um número natural* $a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ *é divisível por 5 se, e somente se, o algarismo das unidades for 0 a 5.*

Demonstração: Como $5|10$ façamos:

$$\begin{aligned} a &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \\ a &= 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1) + a_0 \ . \end{aligned}$$

Portanto, se $5|a$ então $5|a_0$, ou seja, $a_0 = 5k$ assim $k = 1$ ou $k = 0$. $\bullet$

Proposição 3.13. *Divisibilidade por 11: Um número natural* $a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ *é divisível por 11 se, e somente se,* $(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)$ *for divisível por 11.*

Demonstração: Veja que

$$10 = 11 - 1 \text{ e } 100 = 9 \cdot 11 + 1 \ ,$$

além disso, temos que, existem naturais q, t tais que:

$$10^k = 11 \cdot q - 1 \text{ para } k \text{ ímpar },$$

$$10^k = 11 \cdot t + 1 \text{ para } k \text{ par }.$$

Disto escrevemos

$$\begin{aligned} a &= a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 \\ &= + \cdots + a_3(11 \cdot q_1 - 1) + a_2(11 \cdot 9 + 1) + a_1(11 - 1) + a_0 \\ &= 11 \cdot q + (a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) . \end{aligned}$$

Agora, se $a = a_n 10^n + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$ é divisível por 11 se, somente se, $(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_n)$ for divisível por 11. •

3.4 Algoritmos e Matemágica

Um algoritmo é uma forma de organizar ideias através de uma sequência de instruções, ordenações, procedimentos e raciocínios, com objetivo de executar uma tarefa ou solucionar algum problema. Assim, na matemática os algoritmos são ações executadas com uma finalidade. Logo, é necessário utilizar uma estrutura lógica na medida que segue a sequências de passos (procedimentos) para a construção de saberes.

> Um algoritmo é uma sequência extremamente precisa de instruções que, quando lida e executada por uma outra pessoa, produz o resultado esperado, isto é, a solução de um problema. Esta sequência de instruções é nada mais nada menos que um registro escrito da sequência de passos necessários que devem ser executados para manipular informações, ou dados, para se chegar na resposta do problema. Isto serve por dois motivos: o primeiro é que através do registro se garante que não haverá necessidade de se redescobrir a solução quando muito tempo tiver passado e todos tiverem esquecido do problema; o outro motivo é que, as vezes, queremos que outra pessoa execute a solução, mas através de instruções precisas, de maneira que não haja erros durante o processo. Queremos um algoritmo para a solução do problema. (CASTILHO, SILVA E WEINGAERTNER, 2020, p. 13)

A BNCC (2018) apregoa a importância de combinar algoritmo e fluxograma, tendo assim a linguagem algorítmica e algébrica relacionadas entre si.

> Associado ao pensamento computacional, cumpre salientar a importância dos algoritmos e de seus fluxogramas, que podem ser objetos de estudo nas aulas de Matemática. Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema. Assim, o algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma. A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos. (BRASIL-BNCC, 2018, p. 271).

Exemplo 3.14. *Castilho, Silva e Weingaertner (2020, p. 15) descreve o seguinte algoritmo para fazer um bolo de chocolate:*

1. *Providencie todos os ingredientes da receita.*
2. *Providencie uma forma pequena.*
3. *Ligue o forno em temperatura média.*
4. *Coloque a manteiga na batedeira.*
5. *Coloque o açúcar na batedeira.*
6. *Ligue a batedeira.*
7. *Enquanto houver gemas, junte uma gema e depois bata até obter um creme homogêneo.*
8. *Adicione aos poucos o leite.*
9. *Desligue a batedeira.*
10. *Adicione a farinha de trigo.*
11. *Adicione o chocolate em pó.*
12. *Adicione o fermento.*
13. *Reserve a massa obtida em um lugar temporário.*
14. *Execute o algoritmo para obter as claras em neve.*
15. *Junte as claras em neve à massa de chocolate que estava reservada.*
16. *Misture esta massa delicadamente.*
17. *Execute o algoritmo para untar a forma com manteiga e farinha.*
18. *Coloque a massa na forma.*
19. *Coloque a forma no forno.*
20. *Espere 30 minutos.*
21. *Tire a forma do forno.*
22. *Desenforme o bolo ainda quente.*
23. *Separe o bolo em um lugar temporário.*
24. *Faça a cobertura segundo o algoritmo de fazer cobertura.*

25. Coloque a cobertura no bolo.

A mágica e a Matemática não é novidade, e que os truques ou mágicas encantam a todos os públicos é consenso. É uma forte arma que prende a atenção, podendo despertar o desejo investigador, e o desejo de desvendar os passos (ocultos) para tal resultado. Sabe-se ainda que há uma explicação sólida para cada truque, levando aos mágicos a incansável busca por métodos mais eficazes e bem executados. Assim, também é explorado a mágica na Matemática, onde o objetivo é proporcionar ao aluno uma forma didática bastante interessante nos desenvolvimentos das atividades matemáticas.

Em Bastos (2015, p.2) temos um breve relato de fato histórico e a ligação da matemática e a mágica:

> Wade H. Sherard, no seu livro 'Mathemagic in the classroom', refere que, historicamente, se pode considerar que a magia matemática teve origem no século $XVII$. Vários truques aritméticos estão incluídos em 'Problemes plaisons et délectables' de Claude Gaspar Bachet publicado em 1612 e 1624 e em 'Créations mathématiques et physiques' publicado em 1694, em Paris. Alguns dos problemas apresentados por Bachet foram baseados em escritos de matemáticos anteriores como Alcuin, Luca Pacioli di Burgo,Tartaglia e Cardano. No manuscrito 'De Viribus Quantitatis', de Luca Pacioli, (1490), é descrito pela primeira vez um truque relacionado com matemática. Girolamo Cardano, no seu livro 'Subtilitate rerum', (1551), apresentou pela primeira vez a descrição de um truque de cartas. No entanto, o interesse atual pela magia matemática pode ser atribuído aos escritos de W W Rouse Ball (1850 - 1925) e Martin Gardner (1914 - 2010), grandes impulsionadores da matemática recreativa. Ball foi professor no Trinity College em Cambrige e publicou o seu clássico 'Mathematical Recreations & Essays', em 1892, que se tornou uma fonte de material em magia matemática. Martin Gardner, falecido em 2010, ficou conhecido pela publicação dos artigos 'Mathematical Games' na revista Scientif American entre 1957 e 1981. Muitos desses artigos eram dedicados à magia matemática. O seu livro 'Mathematics, Magic and Mistery', publicado pela primeira vez em 1956, é talvez a primeira etapa da atual magia matemática. Muitos dos seus livros publicados posteriormente e relacionados com a matemática recreativa também contêm muito material relacionado com magia matemática. A literatura de magia matemática cresceu rapidamente e hoje inclui uma grande variedade de truques desde os mais simples até aos mais elaborados. Podemos encontra-los, por exemplo em 'Mathemagic in the Classroom' (1983 e 1998) de Wade Sherard, 'Magia Matemática' (2012) de Miguel Capó Dolz, 'Xavier e a Magia Matemática' (2010) de Paulo Afonso e 'A Magia da Matemática' (2010) de Ilydio Pereira de Sá. Existem também muitas publicações onde podemos encontrar diversos desafios matemáticos, atividades lúdicas, curiosidades numéricas, quebra-cabeças, etc.

Alguns truques de mágica têm como base alguns conceitos da matemática, levando, assim, a importância de ter-se o domínio da mesma para execução. Usar a "mágica" como recurso pedagógico no ensino da Matemática é possibilitar uma aula diferenciada tendo como principal intuito, fazer com que os estudantes gostem de aprender essa disciplina, diversificar a rotina da classe e despertar o interesse deles. Outro ponto positivo é a motivação a aprender pois envolvem atitude emocional positiva, possibilitando, assim, a diminuição de bloqueios apresentados por alguns estudantes no processo de aprendizagem em matemática.

3.5 Número reverso

O Número reverso ou contrário é o número que se obtém invertendo-se a ordem ou posição dos algarismos. Desta forma, para obter o número reverso de um número de 2 algarismos, adotamos o seguinte procedimento: denotamos um número natural por x e suponhamos que a sua representação decimal seja $x = ab$ ou seja, $10a + b$, observando que as notações de ab indicam representação no sistema decimal, sendo a o algarismo das dezenas e b o algarismo das unidades. O número de dois algarismos denominado com x em questão, quando submetemos a inversão dos algarismo, denotamos por x' o resultado. Logo, a representação decimal do reverso de $x = ab$ será $x' = ba$, ou seja, o número $10b + a$ é reverso de x. Assim, como exemplo, o reverso de 86 é 68. E o reverso de 37 é 73 e (curiosidade) ambos são primos.

De uma forma geral, conforme Costa (2022) enfatiza, um número reverso é:

Definição 3.4. *Dado um número inteiro positivo x_n, no sistema decimal, constituído de n algarismo, isto é, um número do tipo $x_n = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0$, para todo i, com $a_i \in D = \{0,1,2,\cdots,9\}$, $n \geq 2$ e $a_{n-1} \neq 0$, é representado por:*

$$x_n = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \ .$$

Para $n \geq 2$, o número de n algarismo obtido na inversão da posição dos algarismos e indicado por x'_n, logo $x'_n = a_0 \cdots a_{n-1}$ é o número reverso de x_n.

Exemplo 3.15. *Observando o que foi exposto, o reverso de 2023 é 3202. Assim como o reverso de 1989 é 9891.*

3.6 Números mágicos de Ball

Nesta seção, apresentamos o algoritmo e a análise das propriedades dos números mágicos de Ball. Em especial, foram fontes para o alicerce desta pesquisa os seguintes trabalhos: Costa (2021) e Costa e Mesquita (2014).

Trata-se de um "enigma" com números no qual fascinam a todos; pois são simples e muitas regras reduzem-se a operações aritméticas. Neste trabalho procuramos explorar o número Mágico 1089, além de outras combinações que verifica o algoritmo de Ball adiante.

Algoritmo 3.1. *Temos um x_n que representa um número inteiro positivo com n algarismo, $n \geq 2$ e $a_{n-1} \neq 0$ e x'_n é um número reverso de x_n. Logo considere:*

1. *Considere um número* x_n*;*

2. *Escreva o número reverso* x'_n*;*

3. *Encontre o valor absoluto da diferença entre esses números, representado por*

$$y_n = |x_n - x'_n| = b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_2b_1b_0 \ ,$$

o qual deve ser considerado com um número de n *algarismo* $b_{n-1}, b_{n-2}, \cdots$ *for zero;*

4. *Escreva o número reverso* y'_n*;*

5. *Escreva o número* $B = y_n + y'_n$.

Segundo Costa (2021, p.20), entendemos por número mágico de Ball qualquer $B \neq 0$, se B for o resultado do Algoritmo 3.1 . Quando $x_n > x'_n$, de forma simplificada obtemos o número mágico de Ball fazendo $B = (x_n - x'_n) + (x_n - x'_n)'$.

Exemplo 3.16. *Pensando no número 738, temos: Para* $n = 3$*, dado* $x_3 = 738$*, usamos o algoritmo para obter seu reverso, ou seja* $x'_3 = 837$*, onde obtemos* $y_3 = 837 - 738 = 099$ *(lembrando a condição do resultado ser positivo). Agora* $y'_3 = 990$*. Finalmente, resulta que* $B = 099 + 990 = 1089$*.*

Lembramos que no sistema de numeração posicional decimal escrevemos os números como uma adição de parcelas de potência de 10 multiplicados por números de um algorismo. Por exemplo, o número 15.495 pode ser descrito com $1 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 9 \times 10 + 5 \times 10^0$. Assim, Costa e Mesquita (2014) desvendam a matemágica:

> Sejam agora a_2, a_1, a_0 ao os algarismo dois á dois distintos do número escolhido. Considerando $a_2 > a_0$, para fazer a subtração $a_2a_1a_0 - a_0a_1a_2$ devemos escrever:
>
> $$a_2a_1a_0 - a_0a_1a_2 = (a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0) - (a_0 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_2) \ .$$
>
> Por termos $a_0 < a_2$, necessitamos reescrever deslocando uma dezena de $a_1 \times 10$ para a unidade a_0, assim:
>
> $$a_2a_1a_0 - a_0a_1a_2 = [a_2 \times 10^2 + (a_1 - 1)10 + (a_0 + 10)] - [a_0 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_2] \ .$$
>
> Agora, deslocamos uma centena de $a_2 \times 10^2$ para $(a_1 - 1)10$ por ser menor que $a_1 \times 10$. Assim,
>
> $$\begin{aligned} a_2a_1a_0 - a_0a_1a_2 &= [(a_2 - 1) \times 10^2 + ((a_1 - 1)10 + 10^2) + (a_0 + 10)] - [a_0 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_2] \\ &= (a_2 - a_0 - 1) \times 10^2 + 9 \times 10 + (a_0 - a_2 + 10) \\ &= b_2b_1b_0 \ . \end{aligned}$$
>
> Por fim fazendo $b_2b_1b_0 + b_0b_1b_2$ resulta em 1089. Portanto, não importando qual número escolhido, formado por três algarismo (dois à dois) distintos, os cálculos efetuados sempre conduzem a 1089. Assim, o número 1089 é considerado "mágico"por esta razão. (COSTA e MESQUITA, 2014, p. 34-35)

Ainda, segundo Costa (2021, p.20), na justificativa para o Algoritmo retornar o número 1089 quando $n = 3$, observa-se também que o Algoritmo 3.1 resulta em 9×11^2, ou seja, 1089. Assim, para qualquer $x_3 = a_2a_1a_0$, com $a_2 \neq a_0$, o resultado final sempre será o número 1089. Ainda propõem o algoritmo para todo número inteiro positivo x_n para qualquer $n \geq 2$.

Ball (1926) apresenta a seguinte regra como explicação do algoritmo resultante ao número 1089:

$$
\begin{array}{cccc}
 & 100a & +10b & +c \\
- & 100c & +10b & +a \\
\hline
 & 100(a-c-1) & +90 & +(10+c-a) \\
+ & 100(10+c-a) & +90 & +(a-c-1) \\
\hline
 & 900 & +180 & +9 \\
\hline
1089 & & &
\end{array}
$$

4 PROPOSTAS DE ATIVIDADES

A OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas é um projeto nacional direcionado as escolas públicas e privadas brasileiras. Seu objetivo principal é estimular o estudo da Matemática e contribuir para a melhoria da qualidade do ensino-aprendizagem da educação básica. O Banco de Questões da OBMEP tem o intuito de ser apoio para identificar assuntos cobrados em provas e processo seletivo, bem como mostrar ao estudante e professor a linguagem e estilo dessas avaliações. Neste capítulo, as atividades e problematizações propostas são do Banco de Questões (BQ) da OBMEP e Provas e Soluções(PS) da OBMEP (BRASIL - OBMEP), promovendo a abordagem e a construção de propriedades acerca dos números mágicos de Ball. As atividades em questão estão no cadernos: BQ-OBMEP (2006), BQ-OBMEP (2007), BQ-OBMEP (2008), BQ-OBMEP (2009), BQ-OBMEP (2010), BQ-OBMEP (2012) e PS - OBMEP (2022) . As habilidades e competências da BNCC – Brasil (2018) utilizadas estão descritas no capítulo II.

4.1 Representação dos números

Objetivo: Fazer uma breve revisão dos conceitos elementares do sistema de numeração decimal, uma vez que é de extrema importância na construção de um número.

Habilidades: EF06MA02, EF08MA01 e EF09MA04.

Problema 4.1. *(BQ - OBMEP 2006) Em 1998, a população do Canadá era de 30,3 milhões. Qual é a representação numérica da população do Canadá em 1998?*

Um plano de resolução investigativa: Nesse caso, pretendemos investigar a representação decimal do número 30,3 (milhões). Aqui a turma poderá ser divida em grupos, de forma que todos começam a interagir, havendo trocas de ideias e estratégias. É necessário que o professor espere que o estudante tenha a percepção da forma que os dois primeiros algarismo representam, ou seja, qual valor da casa decimal do número 3 e do 0. Após referenciar o valor de 30 milhões, fazermos uma analogia de quantos zeros tem na casa de 1 milhão. Pergunta-se para os estudantes:

i) Há quantos zeros em um mil?

ii) Há quantos zeros em um milhão?

iii) Sabendo assim, quantos zeros tem 30 milhões?

iv) O terceiro algarismo, o numeral 3 após a vírgula, representa que casa numérica?

Todas estratégias, ideias e pensamentos deverão ser anotadas para que o professor possa fazer a justificação e avaliação.

Após a descoberta da forma numeral do terceiro algarismo, certificar que o estudante faz a ligação com ambos. Espera-se que cheguem a representação decimal de 30300000. ■

4.2 Adição e Subtração

Objetivo: Nessa sessão, iremos verificar a compreensão dos alunos e reforçar conceitos quanto ao processo de agrupamentos, adição, subtração e trocas existentes no sistema de numeração.

Habilidades: EF06MA14 .

Problema 4.2. *(BQ - OBMEP 2007) Encontre quatro números inteiros distintos e maiores do que 0 tais que somados de três em três dão 6, 7, 8 e 9.*

Um plano de resolução investigativa: A princípio o professor estimula a investigação, levando a todos a observar com cuidado e atenção o que se pede na atividade. Começa ainda observando se os estudante por si próprio, perceba que se a maior soma de três desses números é 9, logo, os demais números tem que ser menor que quanto? Pode-se nessa fase, verificar a existência de testes com finalidade de chega-se a formulação de conjecturas que todos os números têm que ser menores do que 7, ou seja:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$

O professor indaga: Já "experimentou"todos os números possíveis que satisfaça o que se foi pedido? Tentou quantos números? Nessa fase, o professor tem que acompanhar o pensamento e avaliando se há evolução.

O professor começa a despertá-los uma outra percepção: Temos mais alguns "limites"para solucionar esse problema? Já testaram com todos os algarismo? O que vocês observaram? levando-o a lembrar que a menor soma é 6, assim, os demais números têm que ser menor que quanto?

Espera-se que aqui que os estudantes consigam concluir que têm que ser menores do que 5, logo restam: 1, 2, 3 e 4.

Agora com os levantamentos, o professor começa a questiona-los quais são os devidos números. Assim, espera-se que obtenhamos na conclusão:

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$1+2+4=7$$

$$1+3+4=8$$

$$2+3+4=9$$

Permita que o estudante trabalhe no seu tempo, e sempre ao finalizar a atividade, o professor precisa certificar se de fato as atividades foram compreendidas, e consequentemente fazer avaliação. ■

Problema 4.3. *(BQ - OBMEP 2007) Se o algarismo* 1 *aparece* 171 *vezes na numeração das páginas de um livro, quantas páginas tem o livro?*

Um plano de resolução investigativa: Aqui o professor pode questionar: Como é a estrutura de um livro? Por folha há quantas páginas? Quantos vezes o numeral 1 aparece a cada 10 páginas? E quando aparece nas casa de unidades e a cada 100 páginas?

Espere então que o estudante observe e conclua que a cada 10 páginas aparece o 1 na unidade e a cada 100 páginas o 1 aparece 10 vezes na dezena. Assim temos:

i) 20 páginas entre $1-99$:
1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91 → 10 (1 na unidade)
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 → 10 (1 na dezena)

O professor deixa os estudantes levantarem suas hipóteses. É importante deixá-los construir sua próprias conjecturas, testes e análises. Logo, acrescenta-se 100 folhas para verificação, questionando: Agora com 100 folhas, o que vocês podem perceber? Quantos números 1 temos nesse intevalo?

ii) 120 páginas entre $100-199$:
101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191 → 10 (1 na unidade)
110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119 → 10 (1 na dezena)
100, 101, 102, ..., 199 → 100 (1 na centena)

Com a nova informação, agora temos até então o total de 140 vezes que aparece o número 1. Ainda não é o resultado esperado. Nesse momento deixa que os mesmo continue a investigar. Assim, teremos:

iii) 20 páginas entre $200-299$:
201, 211, 221, 231, 241, 251, 261, 271, 281, 291 → 10 (1 na unidade)
210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219 → 10 (1 na dezena)

Contudo espera-se que os estudantes constate que até a página 299 temos $20+120+20=160$ vezes que aparece o número 1, faltando assim apenas 171 - $160=11$ uns, que seriam os 2 primeiros que aparecem na unidade de 301, 311 e os 9 primeiros que aparecem nas dezenas de 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318.

Logo, chegamos ao resultado que o livro tem 318 páginas. ■

Problema 4.4. *(BQ - OBMEP 2006) O número da casa de Júlia tem exatamente três algarismos, cuja soma é 24. Encontre todos os possíveis números da casa de Júlia, em cada uma das situações a seguir:*

a) *Os três algarismos são iguais.*

b) *Os algarismos são todos diferentes.*

c) *Apenas dois algarismos são iguais.*

Um plano de resolução investigativa: Nesta questão, o professor começa a leitura enfatizando que o número 24 deve ser escrito como uma soma de 3 algarismos. Deixe que os estudantes façam os levantamentos das possibilidades, analisando com atenção o que se pede. Espera-se que os estudantes notem inicialmente que os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 não podem ser usados, pois se um deles fossem usados, por exemplo o algarismo 5, logo teríamos que encontrar dois algarismos cuja soma é 19, justificando que $24-5=19$, no qual sabemos que isso não é possível. Caso os estudantes não cheguem nesse caminho com clareza, o professor pode estimular fazendo perguntas, com intuito de saber se os estudantes fizeram "testes"ou análises com os números. Assim é interessante que o professor questione em cada etapa se os estudantes verificaram todos os números e se encontraram algo importante na sua investigação.

Contudo, como não podem ser usados os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5 . Após alguns testes, os estudantes chegarão a percepção que o número da casa de Júlia só pode ser composto pelos algarismos 6, 7, 8 e 9.

Levanta-se as seguintes hipóteses:

i) Pensando na primeira possibilidade, qual será o algarismo que repetirá em todas as casas numéricas?

Observe-se que, como os três algarismos são iguais, então o número da casa é 888.

ii) Na segunda possibilidade, quando se tem todos algarismos diferentes, qual ou quais serão as possibilidades? Consegue quantas possibilidades?

Se os três algarismos são diferentes, temos apenas as seguintes alternativas:
Iniciando com o algarismo 9: 987 e 978

Iniciando com o algarismo 8: 897 e 879
Iniciando com o algarismo 7: 798 e 789

O professor observa se os estudantes notaram que neste caso o número da casa não pode iniciar com o algarismo 6, pois $24 - 6 = 18$, e a única maneira de escrever 18 como soma de dois algarismos é $9 + 9$, o que daria um número com dois algarismos iguais.

iii) E por último, qual a possibilidades satisfaz apenas dois algarismo iguais?

Com apenas dois algarismos iguais temos 3 números: 996, 699 e 969 .

Em todas as etapas, o professor precisa deixar os discentes buscarem seu próprio entendimento, montando sempre o seu caminho e claro, submetendo-os sempre a análise, com a finalidade avaliativa em todas a etapas. ■

Problema 4.5. *(BQ - OBMEP 2006) Quatro cidades A, B, C e D, foram construídas à beira de uma rodovia reta, conforme a ilustração abaixo:*

$$\underline{A \,|\, B \,|\, C \,|\, D}$$

A distância entre A e C é de $50km$ *e a distância entre B e D é de* $45km$*. Além disso, sabe se que a distância entre a primeira e a última é de 80 km. Qual é a distância entre as cidades B e C?*

Um plano de resolução investigativa:

Aqui iremos apresentar três formas de resolver esse problema. Assim, quando o estudante chegar em uma solução, poderá envolve-lo a pensar em um outro meio para solucionar o problema.

Primeira resolução: O professor orienta os estudantes a organizarem os dados expostos pelo problema de forma a começar a traçar estratégias:

A distância que temos de A até C é 50, B até D é 45, e a distância total da casa A até a D é 80.

O professor observa como cada um está tentando resolver o caso, e se necessário faça as seguintes indagações:

i) Alguém precisou fazer algum desenho para analisar melhor o caso?

ii) Quem não fez desenho, como estão analisando os dados?

Eles podem chegar a seguinte conclusão :
Temos, CD $= 80 - 50 = 30$ e AB $= 80 - 45 = 35$.
Logo, BC $= 80 - 35 - 30 = 15$.
Outra resolução: Depois que o professor verificou como cada um está montando sua estratégia de resolução, ele poderá observar que:

A até C é 50, B até D é 45 e A até D é 80. Assim, B até C é a mesma distância de A até C diminuindo a distância de A até B, ou seja : $BC = AC - AB$, como sabemos que A até C é 50, temos: $BC = 50 - AB$. O professor observa se os estudantes conseguem chegar a conclusão que $AB = AD - BD$, que resulta 35 $(80 - 45)$, para que possa perceber que finalmente a distância de B até C é $AC - AB$, ou seja, $50 - 35$, tendo como resultado final $15km$.
Mais uma resolução: Aqui terá uma amostra de uma outra percepção que o estudante pode ter, ou até mesmo, o professor pode tentar aguçar o desejo de investigar em outros caminhos, como a finalidade de despertar no estudante a construção de várias estratégias para solucionar o "mistério".

Analisando os dados ofertado no problema temos:

i) O resultado da distância de AB com AC descobrimos CD, ou seja $80 - 50 = 30$.

ii) Como já foi dito que a distância de BD é 45, para sabermos BC, é só calcular a diferença com CD, ou seja $45 - 30 = 15$

Assim temos que a distância de B até C é de $15km$ ■

Problema 4.6. *(BQ - OBMEP 2006) A prefeitura de uma certa cidade fez uma campanha que permite trocar 4 garrafas de 1 litro vazias por uma garrafa de 1 litro cheia de leite. Quantos litros de leite pode obter uma pessoa que possua 43 dessas garrafas vazias fazendo várias trocas?*

Um plano de resolução investigativa: O professor poderá fazer as seguintes perguntas:

1. Ao ler atentamente o que foi pedido, qual relação numérica vocês podem perceber? Notando a quantidade de garrafa inicial, quantas trocas é possível com 43 garrafas vazias?

   Aqui espera-se que os alunos faça a divisão de 43 por 4, assim teremos em 43 garrafas vazias, a troca por 10 garrafas cheias, sobrando ainda 3 vazias.

2. Podemos perceber que houve resto na divisão, que relação tem com o número de garrafa?

A pergunta é para enfatizar que como a troca é de 4 em 4, o resto "sobrou", ou seja, é a quantidade de garrafa que continuará vazia, esperando juntar-se mais para eventual troca.

3. Depois de consumir as 10 garrafas cheias, fazer a troca, quantas garrafas vazias ficaremos? Lembrando que sobraram 3 vazias.

   Depois do consumo teremos no total de 13 garrafas vazias. Agora efetuando a divisão por 4, teremos 3 garrafas cheias e 1 vazia.

4. Agora ainda há possibilidade de troca?

   Aqui temos 4 garrafas, possibilitando a última troca, que seria por uma garrafa cheia.

5. Somando o total de garrafas cheias que nos possibilitou com 43 garrafas vazias, quantos teremos?

   Aqui espera-se que os alunos façam a soma de: $10+3+1=14$

O professor acompanha cada anotação do estudante e avalia as estratégias usadas nessa experiência. ■

Problema 4.7. *(BQ- OBMEP 2006) Escreva os números de 0 a 9 em um círculos, de forma que eles cresçam no sentido anti-horário. Em seguida, subtraia 1 dos números ímpares e some 1 aos números pares. Escolhendo três números consecutivos, qual é a maior soma que se pode obter?*

Um plano de resolução investigativa: Aqui, o professor além de trabalhar a operação de adição e a relação de subtração, trabalhará lógica matemática, com finalidade de desvendar um resultado "oculto"em uma sequência numérica. Sendo assim, o professor orienta os estudantes a organizarem suas ideias com desenho, relação ou como achar melhor de acordo a sua estratégia a sequência de 0 a 9.

Esperando que a partir de qualquer círculo, obtenha-se inicialmente a sequência 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

O professor orienta que faça a subtração por 1 dos números ímpares e somando 1 aos pares, como a atividade orienta.

Espera-se, que cheguem na sequência 1, 0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, 8.

Agora é fácil verificar que a maior soma possível com 3 números consecutivos é $6+9+8=23$.

O professor certifica se todos compreenderam e analisa se houve estratégias diferentes para solucionar a atividade exploratória. ■

Problema 4.8. *(BQ - OBMEP 2008) Quantos números inteiros entre 10 e 999 têm a soma de seus algarismos igual a 9?*

Um plano de resolução investigativa: Após apresentar o problema para os estudantes, o professor começa a analisar as estratégias levantadas, certificar como está a organização de ideias, caso tenha necessidade, pergunte-os: Acredita-se que facilitaria a resolução da atividade se dois grupos fossem formados: um de 2 algarismos e outro com números de 3 algarismos?

Assim chegaríamos ao grupo de 2 algarismo: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 e 90. Lembrando sempre a condição principal do problema: a soma dos dois algarismo deve ser igual a nove. Aqui o total de números nesse grupo é de 9 números.

O grupo de 3 algarismo podem ser obtidos na mesma linha investigativa, assim temos:
108 ; 117 ; 126 ; 135 ; 144 ; 153 ; 162 ; 171 ; 180 $\Rightarrow$ 9 números
207 ; 216 ; 225 ; 234 ; 243 ; 252 ; 261 ; 270 $\Rightarrow$ 8 números
306 ; 315 ; 324 ; 333 ; 342 ; 351 ; 360 $\Rightarrow$ 7 números
405 ; 414 ; 423 ; 432 ; 441 ; 450 $\Rightarrow$ 6 números
504 ; 513 ; 522 ; 531 ; 540 $\Rightarrow$ 5 números
603 ; 612 ; 621 ; 630 $\Rightarrow$ 4 números
702 ; 711 ; 720 $\Rightarrow$ 3 números
801 ; 810 $\Rightarrow$ 2 números
900 $\Rightarrow$ 1 número

Seria interessante que o professor deixasse-os listar cada número, e sempre acompanhando, percebendo se esqueceu de algum número, sempre questionando-os a certeza da lista.

Portanto, ao finalizar o segundo grupo, teremos no total de $9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$ números de três algarismos. Assim, teremos no total de 54 números.

Podemos montar uma estratégia de uma maneira mais geral. Denotemos por n o algarismo da centena. Então a soma dos algarismos da dezenas e da unidade é $9-n$, onde n pode ser 1, 2, . . . , 9. Como o algarismo da dezena pode ser o algarismo 0, temos $9-n+1=10-n$ possibilidades de escolha, entre os algarismos $9-n$ e 0.

Portanto, fixando o algarismo da centena em n, temos $10-n$ possibilidades de escolha para o algarismo da dezena e além disso, fica automaticamente definido o algarismo da unidade.

Desde que o algarismo da centena pode ser: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, temos: $(10-1)+(10-2)+(10-3)+(10-4)+(10-5)+(10-6)+(10-7)+(10-8)+(10-9)=45$, números de três algarismos cuja soma dos seus algarismos é 9. Portanto, existem $9+45=54$ números entre 10 e 999 cuja soma de dois algarismos é 9.

Há sempre a possibilidade do estudante montar estratégias como essa, mais simplificada. Logo, é necessário que o professor esteja bem preparado para que apimente ainda mais essa vontade de explorar o conteúdo. ∎

4.3 Divisibilidade: múltiplos e divisores

Objetivo: Verificar a compreensão dos estudantes e reforçar conceitos quanto ao processo que envolve ideias de atividades que envolvem múltiplos e divisores.

Habilidades: EF06MA05, EF06MA06, EF07MA01 e EF08MA03.

Problema 4.9. *(BQ- OBMEP 2009) Consideremos um conjunto formado por 10 números naturais diferentes. Se calculamos todas as diferenças entre esses números, pelo menos uma dessas diferenças é um múltiplo de 9?*

Um plano de resolução investigativa: O professor a priore desperta nos estudantes as estratégias de investigar, fazendo testes sobre os múltiplos de 9. Começa perguntando: Quais os restos diferentes que podemos encontrar em uma divisão por 9? e por um número n qualquer?

Os estudantes podem listar os possíveis restos por 9. São eles: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8.

O professor continua a indagação: em um grupo aleatório de 10 elementos, podemos relacionar o resto? Aqui a intenção é fazer com que os estudantes considere que em um grupo de 10 números, pelo menos dois deles têm o mesmo resto quando divididos por 9, já que temos no máximo 9 restos diferentes.

Só assim podemos chegar na diferença desses dois números que têm o mesmo resto, obtemos o número com resto zero, ou seja, divisível por 9.

O professor pode tornar ainda mais interessante: oriente o estudante no sentido a dar ideias de um conjunto aleatório, e certifica que a investigação é uma afirmação para qualquer número. ∎

Problema 4.10. *(BQ - OBMEP 2006) Quantos números entre 1 e 601 são múltiplos de 3 ou múltiplos de 4?*

Um plano de resolução investigativa: O professor começa fazer alguns questionamentos:

i) Primeiramente o que podemos fazer para descobrir quantos números são múltiplos de 3 entre 1 e 601? Aqui é esperado que ele divida 601 por 3. Obtendo como resultado o quociente o 200 e resto 1 . Isso mostra que temos 200 números destes que são múltiplos de 3.

ii) Agora podemos achar os múltiplos de 4 na mesma linha de investigação anterior?

Esperando que seguindo o mesmo procedimento, isto é, dividindo 601 por 4, temos quociente o 150 com resto 1. Assim podemos observar que têm-se 150 números.

iii) Segundo os levantamentos, podemos chegar em qual resultado? Será se tem número repetidos na lista de 3 com a lista de 4?

É importante fazer com que o aprendente observe que tem número que contam como múltiplos de 3 e 4. O professor desperta neles uma forma de resolver a situação, uma vez que não podemos repetir números

Assim, é esperável chegar a conclusão que o total 200 (múltiplo de 3) + 150 (múltiplo de 4) = 350. Para que achem alguns números que aparecem contados duas vezes, pois são múltiplos de 3 e de 4 ao mesmo tempo. Assim o professor pode questionar: Os múltiplos de 3 e 4 são múltiplos mais de algum número?

Após alguns testes, pode-se observar que os múltiplos de 3 e de 4 são também múltiplos de 12. O mesmo argumento usado acima mostra que temos 50 múltiplos de 12 de 1 a 601. Logo, o número de múltiplos de 3 ou 4 de 1 a 601 é $350 - 50 = 300$.

■

Problema 4.11. *(BQ - OBMEP 2007) Múltiplos de 9:*

a) *Qual é o menor múltiplo (positivo) de 9 que é escrito apenas com os algarismos 0 e 1?*

b) *Qual é o menor múltiplo (positivo) de 9 que é escrito apenas com os algarismos 1 e 2?*

Um plano de resolução investigativa: O professor aproveita a possibilidade para reforçar o que é múltiplo no início a investigação. Temos:

i) Na primeira indagação o professor pode investigar os estudantes a observar que um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos é um múltiplo de 9. Assim, poderá perguntar se alguém já pode dizer qual é o menor algarismo que é escrito com 0 e 1 que seja múltiplo de 9? Espere que cada um exponha sua estratégia.

Logo, esperamos que cheguem ao número que deve ter 9 algarismos iguais a 1. Assim, o menor número é: 111111111.

ii) Na letra b, o professor faz as seguintes perguntas: Sabendo que podemos escrever 1 e 2, quantos algarismo será o seu menor múltiplo? Se alternar os números, consegue chegar em um resultado satisfatório?

Assim, esperamos chegar a conclusão seguindo as devidas condições, devemos usar o maior número possível de algarismos iguais a 2, que devem ficar nas casas mais á direita. Assim, o menor número é: 12222.

■

Problema 4.12. *(BQ - OBMEP 2007) No número* $6a78b$*, a é o algarismo da unidade de milhar e b é o algarismo da unidade. Se* $6a78b$ *é divisível por 45, então o valor de* $a+b$ *é:*

Um plano de resolução investigativa: O professor pode deixá-los fazer uma análise do problema, e caso necessário, questiona-los: O número 45 é divisível por algum número?

Assim, os discentes apontarão os números 5 e 9 como números divisíveis por 9. É importante lembrarmos de alguns conceitos, por exemplo, que todo número divisível por 5 termina em 0 ou 5, assim, $b = 0$ ou $b = 5$. Analogamente, todo número divisível por 9 tem como a soma dos seus algarismos um número que é múltiplo de 9.

Note que temos um mistério e para desvenda-lo é necessário usarmos estratégias. O professor agora observa que caminhos os estudantes estão permeando para a resolução do problema.

i) Que relação pode-se ter depois de ressaltar os Espera-se que o estudante volte ao enunciado da questão e faça a seguinte analogia: temos segundo o problema $6a78b$, assim $6+a+7+8+b = 21+a+b$ é múltiplo de 9. Como $a \leq 9$, e $b = 0$ ou $b = 5$, temos $21 \leq 21+a+b \leq 21+9+5 = 35$.

ii) Já podem aportar alguns "suspeitos"para análise?

No entanto, é necessário fazer um levantamento de quais números podem ser apontados, já que sabemos que estamos em um intervalo entre 21 e 35 ($21 \leq 21+a+b \leq 21+9+5 = 35$). É importante lembrá-los que tal número tem que ser múltiplo de 9, ou seja, o número em questão entre 21 e 35, tem que ser múltiplo de 9. Assim, o único número que satisfaz é 27.

Portanto, $21+a+b = 27$.

iii) Levando em consideração tudo que foi formulado para desvendar o mistério, qual/quais número(os) podemos apontar?

Contudo, podemos concluir que $a+b = 6$ e o número procurado é 61785 ou 66780.

■

4.4 Reverso de um número

Objetivo: Revisar e analisar conceitos do reverso de um número ou número reverso.

Habilidade: EF06MA01.

Problema 4.13. *(BQ - OBMEP 2012) O reverso de um número de dois algarismos, ambos diferentes de zero, é o número obtido trocando-se a ordem de seus algarismos. Por exemplo, o reverso de 25 é 52 e o reverso de 79 é 97. Qual dos números exposto no quadro não é a soma de um número de dois algarismos com o seu reverso?*

Um plano de resolução investigativa: O professor deve analisar como os estudantes estão montando as estratégias, verificando os caminhos que estão seguindo. Aqui, podemos observar que é uma pergunta de negação (apontando qual está errada). Logo, temos que atentar a isso.

O professor pode dar indícios que como não sabemos quem é o algarismo, podemos então chamá-lo de $n = ab$ um número de dois algarismos, sendo a seu algarismo da dezena e b o da unidade. O professor pode questiona-los: com essa informação, o que podemos fazer para ajudar a descobrir a soma?

É necessário entender ou lembrar que se n é um número de dois algarismos, e a é o algarismo de dezena e b de unidades, logo $n = 10a + b$.

Por outro lado, a e b são diferentes de zero e o reverso de n é $10b + a$. Logo, temos como soma:

$$(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b).$$

Observando os dados investigativos, o professor analisa se alguém chegará a conclusão que a soma desse número com seu reverso é sempre um múltiplo de 11. Desvendando assim a charada, uma vez que só tem uma alternativa que satisfaz a questão.

O professor nessa atividade pode explorar todas as alternativas, fazendo com que o estudante formule teste ou cálculos com propósito de investigar que realmente as demais são divisíveis por 11 e encontrar seus números reverso e original.

Como exemplo temos: $121 = 11 \times 11$. O raciocínio inicial mostra que se escolhermos algarismos não nulos a e b de modo que sua soma seja 11, então 121 será a soma do número $10a + b$ e de seu reverso, assim $a = 6$ e $b = 5$, levando ao $121 = 65 + 56$ ou até mesmo $a = 2$ e $b = 9$, levando ao $121 = 29 + 92$. O estudante pode fazer essa analogia para todas as alternativas, explorando o conhecimento sobre número reverso e soma.

∎

Problema 4.14. *(BQ - OBMEP 2008) Quantos números entre* 10 *e* 99 *existem tais que invertendo a ordem de seus algarismos, obtemos um número maior que o número original?*

Um plano de resolução investigativa: A atividade aborda o assunto de números reversos, conceito importante para desenvolver atividades com o números mágicos de Ball. O problema em questão é uma análise com número de 2 algarismos é da forma ab ou representação no sistema posicional $ab = a10 + b$. Assim, poderá começar com algumas indagações caso perceba que os estudantes não estão em um caminho seguro:

i) Observando o que se pede, há necessidade de avaliarmos o valor numérico do algarismo de unidade e dezena?

Como é proposto que o número reverso deve ser maior que o original, a primeira percepção é que a unidade tem que ser maior do que o algarismo de dezena, ou seja $b > a$.

ii) Tem algum número que não pode está na unidade?

Como $b > a$, claramente, a não pode ser 9.

ii) Quais são os algarismos que podem ser de unidade? e quais poderão ser na dezena?

Vamos fazer as seguintes colocações:
Quando a unidade for 1, temos na dezena: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 $\Rightarrow$ 8 números
Quando a unidade for 2, temos na dezena: 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, $\Rightarrow$ 7 números
Quando foi na unidade for 3, temos na dezena: 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, $\Rightarrow$ 6 números
Quando a unidade for 4, temos na dezena: 5, 6, 7, 8 ou 9, $\Rightarrow$ 5 números
Quando foi na unidade for 5, temos na dezena: 6, 7, 8 ou 9, $\Rightarrow$ 4 números
Quando a unidade for 6, temos na dezena: 7, 8 ou 9, $\Rightarrow$ 3 números
Quando a unidade for 7, temos na dezena: 8 ou 9, $\Rightarrow$ 2 números
Quando a unidade for 8, temos na dezena: somente o 9, $\Rightarrow$ 1 números.

Logo, temos $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ números.

É importante destacar que o professor estimule o estudante a explorar, justificar, convencer e provar cada conjectura levantada. ■

4.5 Algoritmo

Objetivo: Reforçar conceito de ordenada, passos e regras, com um esquema de processamento que permite a realização de uma tarefa para resolução de cálculos matemáticos.

Habilidades: EF06MA04, EF06MA23, EF07MA01, EF07MA05, EF08MA11, EM13MAT315 e EM13MAT405.

Problema 4.15. *(BQ - OBMEP 2010) Pensei em 2 números de dois algarismos, que não possuem algarismos em comum, sendo um o dobro do outro. Além disso, os algarismos do* *menor número são a soma e a diferença dos algarismos do maior número. Quais são os números?*

Um plano de resolução investigativa: O professor pede para que os alunos leem com calma, e que siga as orientações de forma pausada para que todos compreendam de fato o que o problema deseja. Ele pode fazer os seguintes questionamentos:

i) O que podemos afirmar segundo o que orienta?

É necessário despertá-los a percepção que são dois números de dois algarismo, ou seja menor que 100, que não possuem algarismo em comum, ou seja, são algarismo diferentes um do outro, que é par por ser o dobro do menor, mas não termina em zero porque o maior e o menor número não possuem algarismos em comum;

ii) Pensando nos fatos, o que podemos afirmar referente a dezena?

Podemos perceber aqui que seu algarismo das dezenas é 2, no mínimo, porque sua metade é um número com dois algarismos;

iii) Com relação a unidade e dezena, quais números poderão ser para serem menores que 100?

Aqui observamos que a soma de seus algarismos é 9, no máximo, porque essa soma é um dos algarismos do menor número;

O professor orienta para fazer uma relação dos números que seja possível levando em consideração tudo que foi dito.

Os candidatos ao maior e menor número são:
Maior: 22, 26, 32, 34, 36, 44, 54, 62, 72
Menor: 11, 13, 16, 17, 18, 22, 27, 31, 36

O menor candidato dos dois números é 22 e o maior é 72. Depois de 22, o número par seguinte é 24, que desconsideramos porque sua metade é 12, que repete o algarismo 2. Já 26 é candidato nesse critério, mas 28 não é, por ter a soma de algarismos igual a 10.

Por verificação, temos que 17 e 34 são os números que satisfazem as condições do problema.

■

Problema 4.16. *(PS - OBMEP 2022) Uma máquina transforma um número de três algarismos, não todos iguais e podendo ter zeros à esquerda, em outro número de três algarismos (podendo ter zeros à esquerda) da seguinte forma:*

1) *ordena os algarismos do número em ordem decrescente;*

2) *ordena os algarismos do número em ordem crescente;*

3) *calcula a diferença entre os números obtidos em I e II.*

Como por exemplo, as transformações: 082 em 792 e 495 em 495.

a) Qual é o número que sai da máquina se a entrada for 373?

b) Encontre um número que é transformado pela máquina no número 099.

c) Em qualquer número que sai da máquina, o algarismo das dezenas é igual a 9 e a soma do algarismo das unidades com o das centenas também é igual a 9. Explique por que isso ocorre.

Um plano de resolução investigativa: Apresentaremos duas soluções para a atividade, lembrando que, por tratar de uma experiência investigativa, o estudante pode descobrir outros caminhos para se chegar na solução. Logo, o professor que está bem preparado didaticamente deve analisar os resultados.

O professor, aqui, espera que os estudantes analisem as orientações das atividades e a construção de conjecturas. Pode assim perguntar: O que vocês descobriram até agora?

Na atividade, o esperado é que o estudante ordene os algarismos, mas claro, o mesmo pode ir por um caminho diferente, cabe o professor analisar a eficiência desse caminho. Pode notar que o algarismos de 373 em ordem decrescente, obtemos 733. Ordenando-os em ordem crescente, obtemos 337. O resultado fornecido pela máquina é 733 − 337 = 396.
Primeira solução: Para descobrir um número que é transformado pela máquina no número 099, suponhamos que os algarismos do número que entra na máquina, em ordem decrescente, sejam a, b e c. A condição de que os algarismos não são todos iguais garante que, uma vez colocados em ordem decrescente (a, b, c), tem-se $a > c$. Consideremos a conta:

$$\begin{array}{rccc} & a & b & c \\ - & c & b & a \\ \hline \end{array}$$

Nessa etapa o professor verifica como os alunos coletaram os dados e que estratégias estão montando com eles. Caso necessário, o professor pode estimulá-los questionando, que estratégias são necessárias para descobrir um valor numérico que não se sabe.

Seguindo com a construção de uma das soluções temos: como $a > c$, é preciso tomar emprestada uma dezena e calcular $10 + c - a$.

$$\begin{array}{rccc} & a & b-1 & c \\ - & c & b & a \\ \hline & & & 10+c-a \end{array}$$

Para subtrair $b-1$ de b, é preciso tomar uma centena emprestada e calcular $10+(b-1)-b$, que sempre dá 9.

$$\begin{array}{cccc} & a-1 & b-1 & c \\ - & c & b & a \\ \hline & & 9 & 10+c-a \end{array}$$

Finalmente, o algarismo das centenas será $a-1-c$.

$$\begin{array}{cccc} & a-1 & b-1 & c \\ - & c & b & a \\ \hline & a-1-c & 9 & 10+c-a \end{array}$$

O professor deve sempre observar em quais caminhos os estudantes estão, assegurando a evolução das descobertas.

Logo o professor questiona: Quais métodos tomarão para que chegue no número 099? Espera-se que para o resultado ser 099, basta que $10+c-a$ seja igual a 9, ou seja, que $a-c$ seja igual a 1 (note que, nesse caso, o algarismo das centenas será $a-1-c$ ou seja, 0). Portanto, qualquer número de três algarismos em que a diferença entre o maior e o menor algarismo seja 1, produz 099 na saída da máquina. Alguns exemplos de tais números: 334, 676, 100.

Outra solução: Suponhamos aqui que os algarismos do número que entra na máquina, em ordem decrescente, sejam a, bec. O resultado fornecido é:

$$(100a+10b+c)-(100c+10b+a) = 99(a-c)$$

Portanto, para que o resultado seja 099, basta que se tenha $99(a-c) = 99$, ou seja, $a-c=1$. Assim, qualquer número de três algarismos em que a diferença entre o maior e o menor algarismo seja 1, produz 099 na saída da máquina.

Como visto na primeira solução apresentada, se os algarismos do número que entra na máquina, em ordem decrescente, são a, bec, o resultado fornecido é $a-1-c$ 9 $10+c-a$. Logo, o algarismo das dezenas é sempre 9 e a soma do algarismo das unidades com o das centenas é $a-1-c+10+c-a=9$.

Assim, o professor ao findar as etapas, deve partilhar os resultados, ideias e conjecturas. ∎

Problema 4.17. *(PS - OBMEP 2022) A calculadora de Joana possui duas teclas especiais:*

1. *A tecla [A] acrescenta o algarismo 3 à direita do número que está no visor.*

2. *A tecla [S] troca o número no visor pela soma de seus algarismos.*

Agora resolva as seguintes questões:

a) Partindo do número 99, se Joana apertar as teclas [A] [S] [A] [S], nessa ordem, qual número aparecerá?

b) Mostre como Joana pode obter o número 2022 a partir do 99 usando apenas as teclas [A] e [S]

c) Explique por que Joana nunca vai obter o número 22 a partir do 99 usando apenas as teclas [A] e [S].

Um plano de resolução investigativa: O professor deixa os discentes analisarem as proposta da atividade. Logo na primeira questão verifica se os alunos chegarão a essa conclusão:

i) Aparecerá o número 6, observe: $99 \xrightarrow{A} 993 \xrightarrow{S} 21 \xrightarrow{A} 213 \xrightarrow{S} 6$

ii) O que podemos fazer agora? Quais caminhos tomar para que apareça 2022? É necessário fazer testes com alguns números?

Podemos apertar a tecla [A] n vezes de modo a transformar o número 99 no número $99333\cdots3$ formado com dois "9s"seguidos de n "3s"para enfim apertar a tecla [S] e transformar esse número no número $(18+3n)$.

Agora é encontrar o valor de n para que tenhamos: $18+3n = 2022 \Longrightarrow 3n = 2004 \Longrightarrow n = 668$

Portanto, para transformar 99 em 2022, apertamos a tecla [A] 668 vezes e, em seguida, apertamos a tecla [S].

Nessa fase o professor pode observar a interação dos estudantes, por ser uma atividade de testes e com estratégias, pode observar se há interação entre eles. Caso precise de interferência, é possível fazer algumas perguntas, como: "o que vocês descobriram?", "tentou ou chegou em algum número?", entre outros questionamentos.

Continuando a estratégia de resolução, em suma, para chegar em 2022 a partir de 99 é necessário usar [S] pelo menos uma vez; se isso for realizado logo na primeira vez, o 99 inicial vai contribuir com 18. A parcela restante é $2022-18 = 2004$ é divisível por 3 e chegamos às 668, o número de vezes que a tecla [A] deve ser apertada.

iii) Qual relação podemos apontar entre o número 22 e 99?

Aqui o professor continuará a observar os apontamentos levantados pelos estudantes.

Assim temos: a soma dos algarismos de um número deixa o mesmo resto na divisão por 3 que o número original. Além disso, ao acrescentarmos um algarismo 3 no final de um número, a soma de seus algarismos continua deixando o mesmo resto na divisão por 3 que o número original.

De fato, utilizaremos um exemplo com 6 algarismos, mas a generalização é essencialmente a mesma:

$$N = \overline{abcdef} = 100.000a + 10.000b + 1.000c + 100d + 10e + f$$

$$\Longrightarrow N = (99999a + 9999b + 999c + 99d + 9e) + (a + b + c + d + e + f)$$

$$Se a + b + c + d + e + f = 3q + r$$

$$\Longrightarrow N = 3 \times (33333a + 3333b + 333c + 33d + 3e) + 3q + r$$

$\Longrightarrow N = 3p + 3q + r \Longrightarrow$ O resto de N na divisão por 3 também é r. Vale também a recíproca: se o resto de N na divisão por 3 é r, então $a+b+c+d+e+f$ tem o mesmo resto r na divisão por 3.

Portanto, todos os números gerados após sucessivas aplicações de teclas [S] e [A] deixam o mesmo resto na divisão por 3 que o número original. O número 99 deixa resto 0 na divisão por 3 e o número 22 deixa resto 1 na divisão por 3; logo, não é possível partir de 99 e chegar em 22. ■

4.6 Números mágicos de Ball

Objetivo: Explorar todos conceitos matemáticos expostos na pesquisa-ensino no processo de investigação para o ensino dos conceitos do número mágico de Ball.

Habilidade: Todas as habilidades descritas ao decorrer da pesquisa, uma vez que o encadeamento e sequenciamento das atividades teve como finalidade chegar nesta etapa. Assim todas que foram listados no capítulo II esperamos que sejam contempladas na atividade em questão.

Problema 4.18. *Na semana da matemática em uma certa escola, teve apresentação de um mágico. O mágico dividiu a plateia em duas turmas, uma trabalhando com números pares e a outra somente números ímpares. Logo desafiou a todos a seguir a seguinte sequência:*

1. *Pensem em um número qualquer composto de três algarismos e que difere um do outro;*

2. *Faça seu inverso;*

3. *Subtraia o menor pelo maior;*

4. *O resultado dessa subtração (onde se deve considerar sempre um número de três algarismo, mesmo quando a diferença na casa das centenas é zero) e inverta;*

5. *Some o seu inverso;*

Ao findar as orientações, pasmem: o mágico "adivinhou"o resultado de tal ações.

Levando em consideração tudo que foi exposto, responda:

a) *Qual o número que resultou as orientações:*

b) *O fato de ser par ou impar modificou o resultado da sequência?*

Um plano de resolução investigativa: O professor orienta que o estudante leia atentamente e faça exatamente como se é pedido. Logo, questiona:
Vocês "experimentaram" os números pares?
E com os números ímpares?
Que resultado encontraram?
Fizeram quantas tentativas para chegar nesse números?
Qual a relação da diferença pode-se dizer entre os números pare e ímpares?

Aqui o esperado é que o estudante note que independente do número ser ímpar ou par, o resultado sempre será 1089.

Observando como os estudantes estão envolvidos na investigação, o professor analisa os métodos e conjecturas que o mesmo estão construindo. O estudante dever deve trabalhar no seu tempo, analisar os fatos com calma e o professor verificar se o caminho investigativo é de fato eficiente. O professor orienta a anotarem todos os passos da investigação do número 1089.

Mesmo que a atividade não venha explorar de fato, porém seria interessante o professor aguçar ainda mais a curiosidade, levantando ou questionando as possíveis justificativas de ser chegar sempre em 1089. Fazer relação se existem números divisíveis e quais são as relações entre si.

Por fim o professor avalia o raciocínio, conjecturas e hipóteses levantadas, e compartilha os resultados e ideias.

Pode ainda deixar o seguinte desafio, considere um número inteiro positivo x_n constituído de $n > 3$ algarismos, determinar condições para que o Algoritmo 3.1 funcione, isto é, retorne um número B não nulo, para $n = 4, 5, ...$ ■

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática pode ser uma poderosa ferramenta na construção de um ser crítico e criativo, além de desenvolver habilidades que permitam resolver problemas, aprimorar a capacidade de raciocínio e estabelecer estratégia própria. Não é possível impor um único modelo de pensar, é preciso desenvolver por habilidades, oferecer caminhos e possibilidades de experimentar, descobrir e formular novos pensamentos. O professor é primordial nesse processo de ensino e aprendizagem, pois é seu papel a responsabilidade de propor aos estudantes uma diversidade de tarefas de modo a atingir os objetivos curriculares, preocupando assim tanto com a aprendizagem do conteúdo como a capacidade no aprender, construção e aquisição de conhecimento.

A investigação matemática como metodologia de ensino dá autonomia ao estudante para formular suas conjecturas, traçar novos caminhos investigativos, descobrir e partilhar novas ideias. Ao professor oportuniza o amadurecimento profissional, uma vez que é necessário não apenas ter domínio de conceitos, mas ensinar permitindo que os estudantes sejam participes, ou seja, ao professor cabe o importante papel de condutor do processo.

No decorrer desse trabalho, procuramos realizar um estudo sobre os números mágicos de Ball na forma de propostas de atividades explorando a investigação matemática e atendendo a BNCC. Fez-se necessário uma orientação teórica, uma vez que o algoritmo em pauta aborda alguns processos e conceitos matemáticos. O foco principal é uma participação ativa dos estudantes e o despertar para novas descobertas.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Cíntia Soares de. **Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área**. Trabalho de Conclusão de Curso de Matemática da universidade Católica de Brasília, 2006.

BASTOS, I. M. **Magia Matemática com Números**. Dissertação de Mestrado. Universidade de Aveiro, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL - OBMEP. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escola Públicas** Banco de Questões e Provas e Soluções da OBMEP. Disponível em http://www.obmep.org.br/.

CASTILHO, Marcos; SILVA, Fabiano e WEINGAERTNER, Daniel. **Algoritmos e estruturas de dados I**. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, p. 345, 2020.

CORRADI, Daiana Katiúscia Santos. **Investigação Matemática**. Revista da Educação Matemática da UFOP, Vol 01, 2011. XI Semana da Matemática e III Semana da Estatística.

COSTA, Eudes Antonio. **Os números mágicos de Ball e a sequência de Fibonacci**.Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, v. 6, n. 1, p. 19-25,2021.

COSTA, Eudes. A.; MESQUITA, Elis. G. C. **O Número Mágico M**.Revista da Olimpíada (IME-UFG), número 9. 33-43, 2014.

COSTA, Eudes Antônio; SANTOS, Ronaldo Antônio. **Número de Ball Generalizados**. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, v.7, p. 61-85, 2022.

DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de Aritmética.** Atual editora LTDA, São Paulo, 1991.

EVES, Howard. **Introdução á história da matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FONSECA, Helena, BRUNHEIRA, Lina, PONTE, JP da. **As atividades de investigação, o professor e a aula de matemática**. Actas do ProfMat, v. 99, p. 177 - 188, 1999.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**.

São Paulo: Paz e Terra, 1996.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**; Coleção PROFMAT, 1ª edição. Sociedade Brasileira de Matemátia (2013).

IFRAH, Georges.**Os números: a história de uma grande invenção.** 11. ed. São Paulo: Globo, 2005.

LOUREIRO, Cristina. **Em defesa da utilização da calculadora: Algoritmos com sentido numérico de Educação e Matemática**. nº. 77, p. 22-29. APM, Lisboa, 2004.

MAIER, Rudolf R. **Teoria dos Números - Texto de aula.** 139 f. Universidade de Brasília Departamento de Matemática -IE, Brasília, 2005.

PONTE, J. P. (2003). **Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal**. Investigar em Educação, 2, 93-169.

PONTE, J. P. (2005).**Gestão curricular em Matemática**. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). **Números e álgebra no currículo escolar**. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, e P. Canavarro (Eds.), Números e álgebra na prendizagem da Matemática e na formação de professores (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

PONTE, J. P., BROCARDO, J. OLIVEIRA, H. (2006). **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica.

PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., BRUNHEIRA, L., VARANDAS, J.M., e FERREIRA, C.(1998).**O trabalho do professor numa aula de investigação matemática**. Quadrante, 7(2), 41-70.

SILVA, Aleff Hermínio da. **Investigação Matemática: contribuições dessa metodologia para o ensino-aprendizagem da Divisibilidade dos números naturais**. 74 f. TCC (Graduação) - Curso de Curso de Licenciatura em Matemática, Centro de Ciências Aplicadas e Educação Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto – Pb, 2020.

SANTOS, Anderson Flávio dos. **Sistemas de Numeração Posicionais e não Posicionais**. 2014. 79 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"„ São José do Rio Preto, 2014.

SOUSA, Josivânio Silva de. **O Ensino do Sistema de Numeração com ênfase em Resolução de problemas, jogos e Aplicações.** 81 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2018.

W. W. R. Ball. **Mathematical Recreations and Essays**, The Macmillan Company,New

York, (Tenth Edition), 1926