UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARRAIAS CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

LUCAS SANTOS TEIXEIRA

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E ANIMAÇÕES COM MANIM: ESTRATÉGIAS VISUAIS PARA O ENSINO DE CÁLCULO INTEGRAL

Arraias, TO

2025

Lucas Santos Teixeira

História da Matemática e Animações com Manim: Estratégias Visuais para o Ensino de Cálculo Integral

Monografia apresentada à Universidade Federal do Tocantins (UFT), Campus Universitário de Arraias para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Mônica Suelen Ferreira de Moraes
Coorientador: Prof. Dr. Luis Andrés Castillo Bracho

Arraias, TO

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

T266h Teixeira, Lucas Santos.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E ANIMAÇÕES COM MANIM:: ESTRATÉGIAS VISUAIS PARA O ENSINO DE CÁLCULO INTEGRAL. / Lucas Santos Teixeira. – Arraias, TO, 2025.

64 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2025.

Orientadora : Mônica Suelen Ferreira de Moraes

Coorientador: Luis Andrés Castillo Bracho

1. Cálculo Integral. 2. História da Matemática. 3. Tecnologias Digitais. 4. Manim. I. Título

CDD 510

FOLHA DE APROVAÇÃO

Lucas Santos Teixeira

História da Matemática e Animações com Manim: Estratégias Visuais para o Ensino de Cálculo Integral

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário Sérgio Jacintho Leonor, Curso de Licenciatura em Matemática, foi avaliado para a obtenção do título de Licenciado em Matemática e aprovada em sua forma final pela Orientadora e pela Banca Examinadora.

Data de aprovação: 08/07/2025

Banca Examinadora

gov.br
Documento assinado digitalmente
MONICA SUELEN FERREIRA DE MORAES
Data: 08/07/2025 16:05:44-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Mônica S. F. de Moraes (UFT)
Orientadora

gov.br
Documento assinado digitalmente
LUIS ANDRES CASTILLO BRACHO
Data: 08/07/2025 16:17:38-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Luis Andrés Castillo B. (UFNT)
Coorientador

gov.br
Documento assinado digitalmente
IVONNE COROMOTO SANCHEZ SANCHEZ
Data: 08/07/2025 16:19:14-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Ivonne C. S.Sánchez (UFNT)
Examinadora 1

gov.br
Documento assinado digitalmente
DAILSON EVANGELISTA COSTA
Data: 08/07/2025 16:35:21-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Dailson Evangelista Costa (UFT)
Examinador 2

AGRADECIMENTOS

Agradeço, não por obrigação, mas porque faz sentido.

A Deus, por ser presença nos dias em que não havia resposta, quando seguir em frente foi mais escolha do que certeza.

Aos meus pais, Erenilza José dos Santos (*in memoriam*) e Jovenil Teixeira Chaves, pelos valores que me acompanham, pelos gestos que às vezes dizem mais que palavras e por nunca deixarem que eu esquecesse de onde vim.

Às minhas irmãs, Leilane Santos Teixeira e Laiane Santos Teixeira, e ao meu irmão, Lailson Santos Teixeira, por fazerem parte da minha vida e acreditarem em mim em todos os momentos.

À universidade pública de qualidade, que me deu oportunidades que muitos não tiveram. À banca examinadora deste trabalho, composta pela Profa. Dra. Ivonne Coromoto S. Sánchez e pelo Prof. Dr. Dailson Evangelista Costa, pelas contribuições feitas para a melhoria deste trabalho. Aos meus orientadores, Profa. Dra. Mônica Suelen Ferreira de Moraes e Prof. Dr. Luis Andrés Castillo Bracho, pela paciência, pelo rigor e pelos diálogos que me fizeram pensar diferente e crescer cada dia mais; pela preocupação, por cada leitura, por acreditarem em mim e me instruírem. Aos profissionais da UFT que fazem tudo funcionar nos bastidores.

Aos professores Dr. Alan Carlos Baia dos Santos, Dr. Eudes Antonio da Costa, Dra. Gisele Detomazi Almeida, Dr. Ivo Pereira da Silva, Dr. Jefferson Luís Arruda, Dr. Robson Martins de Mesquita e Dr. Thiago Rodrigues Cavalcante, por motivarem ir além da sala de aula, por diversas orientações que foram além do TCC e também por recomendações.

À minha companheira Ana, por estar ao meu lado mesmo nos dias difíceis, pelo apoio e pelas palavras de incentivo.

Aos amigos próximos, que estão juntos mesmo que às vezes distantes, por acreditarem, ouvirem sem pressa, tornarem os dias mais leves e ajudarem sem pedir nada em troca. Aos colegas que caminham comigo. A todos que, de alguma forma, contribuíram com a minha formação.

E a mim, Lucas Santos Teixeira, por ter continuado mesmo quando parecia mais fácil desistir. Ninguém viu tudo, mas eu sei o que custou chegar até aqui.

Não sou resultado apenas do meu esforço. Há muita gente por trás dessa conquista, e eu não me esqueço disso.

RESUMO

Apresentam-se, neste trabalho, os resultados de uma pesquisa qualitativa com abordagem bibliográfica cujo objetivo foi investigar as potencialidades do uso de animações produzidas com o software Manim no ensino do conceito de área no cálculo integral. Trata-se de uma análise histórico-didática que articula conhecimentos da história da matemática com tecnologias digitais, buscando facilitar a compreensão de conteúdos abstratos por meio de recursos visuais e interativos. Com base na análise de episódios históricos fundamentais para o desenvolvimento do conceito de área, como os métodos de Eudoxo, Arquimedes, Al-Khwārizmī, Cavalieri, Newton, Leibniz e Riemann, foram elaboradas quatro animações com o Manim, destacando momentos-chave dessa trajetória conceitual. A análise desses materiais indicou que representações visuais bem estruturadas favorecem a compreensão de ideias matemáticas complexas, conectando o passado da matemática às linguagens atuais dos estudantes. Embora o uso do Manim exija conhecimentos básicos de programação, os resultados evidenciam seu potencial didático, especialmente na formação inicial de professores. Conclui-se que a integração entre história da matemática e tecnologia constitui estratégia promissora para tornar o ensino mais significativo, criativo e acessível, além de fomentar práticas pedagógicas alinhadas à educação Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics (STEAM).

Palavras-chaves: Cálculo Integral. História da Matemática. Tecnologias Digitais. Videos Digitais. Manim.

ABSTRACT

This paper presents the results of a qualitative research study with a bibliographic approach, whose objective was to investigate the potential of using animations produced with Manim software in teaching the concept of area in integral calculus. It is a historical-didactic analysis that combines knowledge of the history of mathematics with digital technologies, seeking to facilitate the understanding of abstract content through visual and interactive resources. Based on the analysis of historical episodes fundamental to the development of the concept of area, such as the methods of Eudoxus, Archimedes, Al-Khwārizmī, Cavalieri, Newton, Leibniz, and Riemann, four animations were created with Manim, highlighting key moments in this conceptual trajectory. Analysis of these materials indicated that well-structured visual representations facilitate the understanding of complex mathematical ideas, connecting the past of mathematics to the current languages of students. Although the use of Manim requires basic programming knowledge, the results highlight its educational potential, especially in the initial training of teachers. It is concluded that the integration of the history of mathematics and technology is a promising strategy for making teaching more meaningful, creative, and accessible, in addition to promoting pedagogical practices aligned with Science, Technology, Engineering, Arts, and Mathematics (STEAM) education.

Keywords: Integral Calculus. History of Mathematics. Digital Technologies. Digital Videos. Manim.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UFT	Universidade Federal do Tocantins
Manim	Mathematical Animation Engine
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação
TDIC	Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação
STEAM	Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
EaD	Educação a Distância
ABP	Aprendizagem Baseada em Problemas
AM^2	Animações Matemáticas com Manim
ManimGL	Manim Graphics Library
ManimCE	Manim Community Edition
AM^2	Animações Matemáticas com Manin
qh	high quality
qm	medium quality
ql	low quality
CMD	Command Prompt
TFC	Teorema Fundamental do Cálculo
CDI	Cálculo Diferencial e Integral

LISTA DE SÍMBOLOS

$\int$	Operador de Integral indefinida
$\int_a^b$	Operador de Integral definida
$\lim\limits_{n \to \infty}$	Operador de Limites
$\sum$	Operador de Somatório
f	Função
δ	Delta
$\leq$	Menor ou igual a
$>$	Maior que
σ	Sigma
dx	Diferencial de x
dy	Diferencial de y
$\frac{dy}{dx}$	Derivada de y em relação a x
y	Variável dependente
x	Variável independente
$\frac{d}{dx}$	Operador diferencial
$=$	Igualdade
F	Primitiva (Antiderivada)
[ ]	Intervalo fechado
r	Raio
$\approx$	Aproximadamente igual
A	Área
h	Altura
$\surd$	Radical
∞	Infinito
$\pm$	Mais ou Menos
$\triangle$	Triângulo
$\rightarrow$	Tendência

Sumário

1 INTRODUÇÃO

O interesse pelo tema deste trabalho surgiu durante a formação inicial no curso de Matemática da Universidade Federal do Tocantins (UFT – Arraias). Desde os primeiros contatos com a Matemática do Ensino Superior pensava, "ao encontrar outra coisa para fazer, largo isso aqui", e em meio às dificuldades encontradas no início, conheci pessoas que me orientavam a não desistir, minha família, alguns professores da Educação Básica e Superior, técnicos e terceirizados da UFT, veteranos conhecidos e amigos particulares, diariamente me motivaram a continuar e então, fui superando as dificuldades que encontrei.

No final do semestre 2022.2, quando ainda estava no segundo período do curso, através do professor, naquela época convidado da UFT, Me. Luis Andrés Castillo Bracho, tive meu primeiro contato com o mundo da pesquisa científica. Nesta ocasião, tive um olhar diferente de um "eu" como acadêmico, não só como um professor em formação inicial, mas também como alguém que se insere no mundo da pesquisa.

A partir deste momento, comecei a ter algumas referências de escrita de textos acadêmicos, como também participação em eventos científicos. Aproveito para destacar que estas participações foram de maneira remota, pelo fato de estarmos numa pandemia, mas isso não me impediu de começar uma nova faceta como acadêmico, que além dos componentes curriculares, eu estava me inserindo em comunidade científica, sob orientações do professor Luis e da professora Ivonne.

Não parando por aí, em seguida, tive a experiência de participar como bolsista CAPES do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), naquele momento coordenado pelo Dr. Dailson Evangelista Costa, e posteriormente pela Dra. Mônica Suelen Ferreira de Moraes e Dra. Janete Aparecida Klein, onde desenvolvi atividades no período de 11/2022 a 04/2024 em algumas escolas do município de Arraias, sob supervisão do professor Severino Cassiano de Souza Filho. Ao finalizar o Pibid, em 2024, fui convidado a compor o corpo editorial da Revista Tocantinense de Educação Matemática (ReTEM). Participei como bolsista UFT do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (Pibic), onde me inseri no projeto de pesquisa intitulado: "Contribuições históricas e propostas inovadoras para o ensino do cálculo diferencial e integral: análise crítica e inclusão de tecnologias educacionais", sob orientação da Profa. Dra. Mônica Moraes, nesta ocasião, já sendo a minha orientadora de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Vale destacar que as atividades de pesquisa desenvolvidas em tal projeto são o desdobramento que eu fiz neste TCC.

Este projeto da professora Mônica busca, de maneira geral, investigar as contribuições do desenvolvimento histórico da Matemática, com foco no ensino do Cálculo Diferencial e

Integral, por meio da análise de livros, pesquisas, manuais de história da Matemática e outras publicações bibliográficas, e elaborar propostas didáticas com a utilização de softwares educacionais. No meu TCC, abordo o Cálculo Integral, em específico o conceito de Área, desde o método da Exaustão de Eudoxo até chegar no teorema fundamental do Cálculo.

Diversas pesquisas sobre a produção acadêmica com foco nas contribuições que o uso combinado de História da Matemática e as Tecnologias Digitais têm para o ensino e aprendizagem da Matemática. A nível internacional, Thomsen, Jankvist e Clark (2022) enfatizam que pesquisas mapeadas propõem ou analisam atividades baseadas em fontes históricas primárias que são apoiadas especificamente com *Softwares* de Geometria Dinâmica (DGS) e Sistemas de Álgebra Computacional (CAS).

No contexto nacional, Sánchez, Castillo e Mendes (2021) realizaram um mapeamento com o propósito de compor um panorama do uso das Tecnologias Digitais nas pesquisas de História da Matemática para o Ensino de Matemática. Os resultados desta pesquisa constataram que as Tecnologias Digitais mais utilizadas nas pesquisas analisadas desde a década de 1990 são os softwares de Geometria Dinâmica, especificamente o GeoGebra, e que a maioria dessas pesquisas foi encontrada na modalidade de História para o Ensino da Matemática (HEnM). No entanto, o uso do GeoGebra para abordar o ensino de Matemática por meio de informações históricas, conforme apreciado nos trabalhos analisados, não ultrapassa a fronteira de ser um substituto do quadro branco, da planilha, do kit geométrico, entre outros (Sánchez; Castillo, 2022).

Sousa (2023) nos convida a pensar na possibilidade de que existem alianças entre a história da Matemática e tecnologias digitais que têm se constituído à medida que a história da aliança inicial foi se instituindo com fundamentos teórico-práticos e aplicações e ainda descreve diversas atividades-históricas-com-tecnologias e investigações-históricas-com-tecnologias, onde destaca o GeoGebra e seu papel nas referidas atividades.

Nesse cenário, temos as experiências relatadas por Sánchez e Castillo (2022) quando descrevem o uso do GeoGebra para (re)explorar a demonstração do teorema de Pitágoras a fim de dinamizar a demonstração planteada por Sócrates – registrada, segundo os autores, na obra intitulada *The Pythagorean Proposition*, de autoria de Elisha Scott Loomis e publicada no ano de 1968. Sánchez e Castillo (2022) diferenciam-se da abordagem do problema histórico, pois, em vez de fazer as construções passo a passo, descrevem o uso de um objeto de aprendizagem elaborado na interface do GeoGebra, de maneira que seja possível, para os sujeitos envolvidos na atividade, visualizar a tradução dos conceitos na demonstração nas diversas representações que o *software* permitir.

Seguindo esse raciocínio, temos experiências semelhantes com GeoGebra, quando Coêlho *et al.* (2023) descrevem as possibilidades de utilizar o software GeoGebra para um novo ponto de vista da demonstração do Teorema de Viviani. A ideia principal deste trabalho foi promover uma educação ativa na abordagem de conteúdos da geometria euclidiana para estudantes do Ensino Médio. Além disso, temos o trabalho de Teixeira *et al.* (2023) quando descrevem um objeto de aprendizagem elaborado no GeoGebra para o estudo do Teorema de Stewart, com o intuito de dar um novo ponto de vista da demonstração do referido teorema. Outro exemplo, Castillo e Sánchez (2024) descrevem a exploração dinâmica da demonstração da Proposição XXXIV do livro I dos Elementos da Edição de Byrne (1847) com GeoGebra. Para outros exemplos, ver: (Gomes; Sousa, 2021; Marques *et al*., 2024; Sánchez; Castillo, 2024; Sánchez; Castillo; Mendes, 2024; Sánchez; Mendes; Castillo, 2023; Silva, 2019; Silva; Sousa, 2020).

Pelo contexto anteriormente exposto, podemos perceber que existe uma variedade de trabalhos para constituir conexões entre História da Matemática e Tecnologias Digitais, especificamente por meio de *softwares* de Matemática dinâmica, como o GeoGebra. Porém, Sousa (2023) considera que as variações da aliança, ou alianças, entre História da Matemática e Tecnologias Digitais possam ser estabelecidas, para além do GeoGebra, pelo fato de ter trabalhos em andamento que usam objetos de aprendizagem (OA), histórias em quadrinhos (HQ) em versões digitais, podcasts, mapas mentais, entre outros recursos, advindos do desenvolvimento das Fases das Tecnologias Digitais na Educação Matemática (Borba; Silva; Gadanidis, 2021).

Nessa linha, recentemente, Borba, Souto e Canedo Junior (2022) exploraram como vídeos digitais e transmissões ao vivo influenciaram tanto a sociedade em geral quanto o ensino de Matemática. Eles destacam como essas tecnologias se tornaram essenciais durante a pandemia, não apenas como recursos pedagógicos, mas como instrumentos para promover uma educação crítica e participativa.

Desse modo, surge então o seguinte tema de pesquisa: Vídeos Digitais com Manim para ensino de Cálculo Integral: Alianças entre História da Matemática e Tecnologias Digitais.

A seleção deste tema surgiu a partir do projeto da Prof.ª Dra. Mônica Suelen Ferreira de Moraes, mas, para constatar que a minha ideia não foi abordada ainda no câmpus da UFT, a justificativa para essa pesquisa baseia-se numa pesquisa prévia. Coêlho *et al*. (2024) fizeram uma análise documental das monografias da licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, campus de Arraias, identificando a predominância de temas como Formação Inicial, Tecnologias Digitais e Educação Inclusiva. No entanto, os resultados apontaram que em nenhum trabalho foi tratada a relação entre História da Matemática, Tecnologias Digitais, Conceito de Área e Produção de Vídeos com Manim para o ensino do conceito de área, o que indica uma lacuna na produção acadêmica local. Portanto, a pesquisa propõe-se a preencher essa lacuna, explorando as possibilidades didáticas de vídeos digitais baseados em informações históricas da Matemática.

Diante deste cenário, surge então a questão: Quais as contribuições do desenvolvimento histórico e epistemológico da Matemática podemos trazer para o ensino de Cálculo Integral, em específico do conceito de área abordado com tecnologias digitais? Essa questão surge da necessidade de explorar métodos acessíveis e matematicamente fundamentados para a criação de vídeos digitais, sem a complexidade associada a pacotes especializados de animação.

Para cumprir o anteriormente exposto, definimos como objetivo geral, a caracterização das contribuições históricas e epistemológicas da Matemática para o ensino do Cálculo Integral, com ênfase no conceito de área, utilizando tecnologias digitais. Com o intuito de viabilizar o alcance desse objetivo geral, a pesquisa foi desdobrada em objetivos específicos que orientam, de forma sistemática, as etapas do trabalho. Esses objetivos visam garantir a fundamentação teórica, a análise da ferramenta tecnológica, o planejamento pedagógico e a produção dos materiais audiovisuais que compõem a proposta. Dentre os objetivos específicos, destacam-se: sistematizar de maneira coerente episódios históricos relevantes para a construção do conceito de área, desde a Antiguidade até o surgimento do Cálculo Integral; caracterizar tecnologias digitais com potencial para construir animações baseadas nesses episódios históricos; e elaborar vídeos digitais de animações matemáticas, com o uso de tecnologias digitais, a fim de dinamizar as contribuições históricas e epistemológicas relacionadas ao conceito de área.

2 HISTÓRIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A História da Matemática constitui um recurso pedagógico que tem despertado o interesse de pesquisadores da Educação Matemática, consolidando-se, para muitos professores, como uma metodologia capaz de contribuir significativamente para o processo de ensino e aprendizagem em sala de aula. Nas palavras de Mendes (2022, p. 19), a História da Matemática refere-se ao uso de si mesma no ensino, sendo definida como “explorações educativas da história das ideias produzidas no passado e como podem ser refletidas na Matemática que ensinamos”.

A Matemática que conhecemos atualmente é resultado de um longo processo histórico de construção, marcado pelos esforços humanos para resolver problemas cotidianos e compreender o mundo. Desde a Antiguidade, diferentes civilizações desenvolveram conhecimentos matemáticos para atender às suas necessidades práticas, evidenciando que os conceitos hoje sistematizados nos currículos escolares são fruto de transformações, debates e aperfeiçoamentos ao longo do tempo.

Enquanto campo de pesquisa, a História da Matemática vem se consolidando no Brasil especialmente nas últimas cinco décadas, ampliando sua presença nas discussões sobre formação docente e práticas pedagógicas (MENDES, 2022). Ao incorporar elementos históricos ao ensino, o professor insere os estudantes em contextos que evidenciam a evolução e a aplicação dos conceitos matemáticos, favorecendo uma aprendizagem mais significativa e uma compreensão mais profunda da natureza do conhecimento matemático.

Nesse contexto, Mendes (2022) compreende a História como agente de cognição na Educação Matemática e propõe a investigação histórica como princípio orientador do ensino e da aprendizagem. Para o autor, utilizar a História na geração da Matemática escolar implica promover uma dinâmica experimental de caráter investigatório, na qual o estudante desenvolve seu espírito investigativo ao explorar informações históricas e reconstruir a trajetória de determinados tópicos matemáticos (MENDES, 2015, p. 141).

Uma alternativa teórico-prática que viabiliza essa proposta é a Investigação Histórica. Para Mendes (2006), essa perspectiva pode ser adaptada às necessidades do professor, tornando seu uso produtivo no contexto escolar. O princípio articulador dessas atividades é a investigação, promovendo um ambiente criativo, provocador e problematizador em sala de aula. Nessa mesma direção, Fossa (2006) defende que a investigação histórica envolve necessariamente a compreensão conceitual e pode contribuir para o desenvolvimento das habilidades que a escola almeja formar. O autor sugere que a História da Matemática seja incorporada ao ensino por meio de atividades de redescoberta ou resolução de problemas, visto que constitui uma fonte rica de situações desafiadoras capazes de aprofundar a compreensão dos estudantes.

Além disso, Coêlho et al. (2023) destacam que o uso de fontes primárias, como tratados históricos, configura-se como um campo fértil de investigação. O contato com textos originais possibilita aos estudantes compreender os processos de construção do conhecimento matemático, favorecendo uma aprendizagem mais reflexiva e contextualizada. Mendes (2022) ressalta ainda que o estudo de textos do passado permite ao professor orientar seus alunos na reconstrução das ideias atualmente sistematizadas nos livros didáticos, valorizando a riqueza conceitual presente nos documentos originais.

A inserção da História da Matemática no ensino também se mostra uma estratégia relevante para enfrentar dificuldades conceituais, especialmente em conteúdos abstratos. Ao discutirem o conceito de limite, Teixeira e Costa (2024) destacam que ele não surgiu de maneira pronta e formalizada, mas foi sendo construído desde as reflexões sobre o infinito na Antiguidade até sua consolidação no século XIX. Segundo os autores, essa perspectiva histórica permite ao estudante compreender que as dificuldades enfrentadas na aprendizagem refletem, em certa medida, o próprio percurso histórico de elaboração do conceito.

Nessa perspectiva, a História atua como mediadora na construção do significado conceitual. Para Teixeira e Costa (2024), a dimensão histórica evidencia o caráter dinâmico da Matemática, rompendo com a visão de um corpo estático de regras e fórmulas. A articulação entre história, problematização e recursos didáticos torna o ensino mais significativo e acessível, promovendo não apenas a compreensão técnica dos conteúdos, mas também o desenvolvimento da argumentação, da reflexão e da curiosidade intelectual dos estudantes.

Em estudo posterior, ao discutirem o ensino de sistemas de equações lineares, Teixeira e Costa (2025) reforçam que a Matemática deve ser compreendida em seu contexto de desenvolvimento histórico e social. Fundamentados em Ubiratan D'Ambrosio (1996), os autores defendem que a História da Matemática possibilita entender como teorias e práticas foram criadas e utilizadas em contextos específicos ao longo do tempo, ampliando a percepção crítica da disciplina (TEIXEIRA; COSTA, 2025).

Assim, reconhecer o caráter histórico do conhecimento matemático fortalece o raciocínio lógico e amplia a compreensão conceitual dos estudantes, evidenciando a relação entre teoria, prática e contexto social (TEIXEIRA; COSTA, 2025). A perspectiva histórica contribui, portanto, para a humanização do ensino da Matemática, ao demonstrar que seus conceitos foram elaborados para responder a problemas concretos de diferentes épocas. Tal abordagem favorece práticas pedagógicas mais significativas e alinhadas às demandas contemporâneas, promovendo maior engajamento dos estudantes e superando metodologias centradas apenas na memorização de procedimentos.

3 TECNOLOGIAS DIGITAIS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

A busca por maneiras eficazes de integrar a tecnologia no ensino sempre esteve presente no bojo das pesquisas educacionais. À medida que a tecnologia desempenha um papel cada vez mais significativo na educação matemática, compreender como os professores podem integrar, de forma satisfatória, ferramentas digitais na sua prática docente torna-se imprescindível para a qualidade do ensino e da aprendizagem de matemática (Borba; Silva; Gadanidis, 2021).

No Brasil, as primeiras ações de políticas públicas no sentido de introduzir o uso da tecnologia informática na educação escolar aconteceram a partir de 1981, com o 1° Seminário Nacional de Informática Educativa (Borba; Penteado, 2019). Dado início aos incentivos para o uso de tecnologias de informática na educação brasileira, isso se tornou um direito do cidadão previsto na Lei de Diretrizes e Bases (LDB) da Educação Nacional (Lei n. 9.394/1996) (Brasil, 1996).

Segundo Costa, Duqueviz e Pedroza (2015), no começo, era mais comum falar em Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), pois o termo abrangia tecnologias como televisão, jornal e mimeógrafo, já os computadores, tablets e smartphones, são dispositivos eletrônicos, que também foram conhecidos como TIC, porém agora os pesquisadores têm os chamado de Novas Tecnologias por serem digitais ou Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC).

Concordamos com o pensamento de Borba e Penteado (2019, p. 12) de que "A relação entre a informática e a Educação Matemática não deve ser pensada de forma dicotômica", pois a possibilidade de que trabalhar com os computadores abre novas perspectivas para a profissão docente, "as mídias informáticas associadas a pedagogias que estejam em ressonância com essas novas tecnologias podem transformar o tipo de Matemática abordada em sala de aula" (Borba; Penteado, 2019, p. 37).

Segundo Valente (1999), a incorporação de computadores na atividade educacional ainda representa um desafio, porém, é algo que merece reconhecimento devido à capacidade de aprimorar e enriquecer o processo de ensino e aprendizado, oferecendo novas abordagens para redefinir conceitos previamente estabelecidos, visando uma melhor compreensão.

A integração de *softwares* educacionais não só alinha o ensino do Cálculo Diferencial e Integral às tecnologias emergentes, como também fomenta o desenvolvimento de competências digitais essenciais para o sucesso acadêmico e profissional dos estudantes.

A utilização do método STEAM (*Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics*) tende a estimular a criatividade por meio de uma educação interdisciplinar, em que os alunos desenvolvem de forma holística os vários conceitos teóricos em contextos que criam ligações entre a escola e a comunidade (Sanders, 2009; Gonzalez; Kuenzi, 2012; Xie; Fang; Shauman, 2015).

> Nossa noção de educação integrativa de STEM inclui abordagens que exploram o

> ensino e a aprendizagem entre duas ou mais das áreas temáticas STEM e/ou entre um sujeito STEM e um ou mais assuntos escolares. Assim como o esforço tecnológico, por exemplo, não pode ser separado dos contextos sociais e estéticos, tampouco o estudo da tecnologia deve ser desconectado do estudo dos estudos sociais, artes e humanidades (Sanders, 2009, p. 21, tradução nossa).

A utilização de *softwares* educacionais permite explorar visualizações e simulações que facilitam a compreensão dos conceitos abstratos do Cálculo Diferencial e Integral, tornando o aprendizado mais tangível e significativo. Essa abordagem encoraja a explorar ativamente os conceitos matemáticos, desenvolvendo habilidades de resolução de problemas e pensamento crítico.

O uso de tecnologias digitais no ensino de Matemática tem se consolidado como uma estratégia potente para promover aprendizagens mais significativas, exploratórias e conectadas com o cotidiano dos estudantes. Softwares gráficos, ambientes de geometria dinâmica, simuladores e recursos audiovisuais oferecem novas possibilidades didáticas que rompem com abordagens exclusivamente expositivas, promovendo maior interação entre conteúdo, docente e discente.

No contexto específico do ensino de Cálculo Diferencial e Integral, as tecnologias digitais podem contribuir para a visualização de conceitos abstratos, como limites, derivadas, integrais e áreas sob curvas, favorecendo a construção de significados por meio de representações múltiplas e dinâmicas.

Diante disso, esta seção apresenta uma revisão de literatura com o objetivo de investigar como as tecnologias digitais vêm sendo abordadas em pesquisas acadêmicas relacionadas ao ensino de Cálculo. A elaboração desta revisão seguiu os seguintes passos: inicialmente, realizamos uma busca utilizando os termos “História da Matemática”, “Cálculo Diferencial e Integral”, “Tecnologias Digitais” e “Ensino de Matemática”. A partir destes termos, foram utilizadas as seguintes sequências de busca: “Cálculo Diferencial e Integral” AND “História da Matemática”; “Cálculo Diferencial e Integral” AND “Tecnologias Digitais”; ‘Cálculo Diferencial e Integral” AND “Ensino de Matemática”; ‘História da Matemática” AND “Tecnologias Digitais”; “Cálculo Diferencial e Integral” AND “História da Matemática” AND “Tecnologias Digitais”; ‘Cálculo Diferencial e Integral” AND “História da Matemática” AND “Ensino de Matemática”; “Cálculo Diferencial e Integral” AND “Tecnologias Digitais” AND ‘Ensino de Matemática”; ‘História da Matemática” AND “Tecnologias Digitais” AND “Ensino de Matemática”; ‘Cálculo Diferencial e Integral” AND “História da Matemática” AND “Tecnologias Digitais” AND “Ensino de Matemática”.

As buscas foram realizadas nas plataformas Capes T&D, Periódicos Capes e Biblioteca

Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), onde foram encontrados 401 trabalhos. Após um primeiro recorte temporal (2013 a 2023), restaram 228 trabalhos. Em seguida, foi feito um novo recorte por tipologia, selecionando apenas Teses e Dissertações, o que resultou em 85 trabalhos. Desses, 68 estavam diretamente relacionados ao tema escolhido. Após a exclusão de trabalhos repetidos ou corrompidos, o total foi reduzido para 43 trabalhos, sendo 20 teses e 23 dissertações.

Dentre esses, fizemos os seguintes recortes por tema específico: 8 Teses e 8 Dissertações abordam a relação entre Cálculo Diferencial e Integral e História da Matemática; 9 Teses e 10 Dissertações tratam da conexão entre Cálculo Diferencial e Integral e Tecnologias Digitais; 3 Teses e 5 Dissertações abordam a interseção entre Tecnologias Digitais e História da Matemática. Neste trabalho, focamos nos trabalhos que abordam a conexão entre Cálculo Diferencial e Integral e Tecnologias Digitais.

Neste, são analisadas teses e dissertações que abordam diferentes aspectos do ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral com o uso de Tecnologias Digitais. Essas pesquisas trazem contribuições valiosas para a Educação Matemática, ao explorar novas perspectivas teóricas, práticas pedagógicas criativas e o papel das tecnologias digitais no ensino superior.

Quadro 1: Levantamento de Teses

Autor/Ano	**Título**	**Tecnologia Digital**
Farias (2015)	Introdução a noções de Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio no contexto das TIC: implicações para prática do professor que ensina matemática	GeoGebra e o *Winplot*
Paranhos (2015)	Parametrização e Movimentação de Curvas e Superfícies para uso em Modelação Matemática	*Winplot*
Almeida (2017)	Material para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral: referências de Tall, Gueudet e Trouche	GeoGebra
Silva (2017)	A modalidade EAD semipresencial e a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral	ATLAS.ti®
Brito (2019)	Estudo do centro de massa em Cálculo Diferencial e Integral: Uma abordagem Didática envolvendo recursos tecnológicos	GeoGebra
Pereira (2019)	Cálculo Diferencial e Integral no curso de agronomia: Uma perspectiva de trabalho de projetos com modelagem matemática e tecnologias digitais de informação e comunicação	GeoGebra, *Excel, Maple* e *WolframAlpha*
Prevot (2019)	Uma Abordagem com Uso de *M-Learning* na Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral em Cursos de Engenharia Baseada em ABP e Modelagem Matemática	*M-Learning*
Backendorf (2020)	Abstração reflexionante e matemática dinâmica: Compreensão do conceito de Integral dupla	GeoGebra
Silva (2021)	Uma contribuição pedagógica da visualização dinâmica no ensino e na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral	*Widgets*

Fonte: Autor (2025)

Após a análise das teses, que aprofundam temas complexos e de amplo alcance no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, direcionamos o foco para as dissertações. Essas produções, geralmente com escopo mais específico e prático, oferecem contribuições importantes e complementares, explorando metodologias, recursos tecnológicos e contextos pedagógicos que enriquecem o panorama da Educação Matemática em nível superior. A seguir, será apresentado um quadro e, em seguida, a descrição comentada das dissertações selecionadas para esta pesquisa.

Quadro 2: Levantamento de Dissertações

Autor/Ano	**Título**	**Tecnologias Digitais**
Ferrão (2013)	Mapas conceituais digitais como elemento sinalizador da aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral	*CmapTools*
Souza (2015)	Do castelo de esperas à chegada da tecnologia: o uso do *Graphmática* para o ensino de cálculo	*Graphmática*
Pires (2016)	As Influencias das Tecnologias da Informação e Comunicação nas Estratégias de Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral	*Photomath*, *FX Calculus Problem Solver*, *WolframAlpha* e GeoGebra
Alonso (2017)	Aspectos visuais e gráficos do teorema fundamental do cálculo	GeoGebra
Waideman (2018)	Um aplicativo para o estudo de derivadas	Derivada Quiz
Schaun (2019)	As Representações Tridimensionais das Superfícies Quádricas na Disciplina de Cálculo com Realidade Aumentada	*MateAR²* e *HP Reveal*
Santos (2021)	Sequência didática digital com a temática derivadas – um experimento no ensino superior	sistema inteligente Siena e GeoGebra
Reis (2022)	O emprego do *software Maple* como ferramenta educacional de ensino-aprendizagem de cálculo diferencial e integral por meio do ensino híbrido, formato flex	*Maple*
Anjos (2023)	O quiz interativo digital na identificação de dificuldades de aprendizagem em cálculo I	*MIT App Inventor*
Carmo (2023)	Práticas experimentais de Cálculo com calculadoras	Calculadoras

Fonte: Autor (2025)

As dissertações analisadas apresentam uma ampla variedade de abordagens e perspectivas voltadas ao ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, explorando diferentes contextos educacionais, metodologias e recursos tecnológicos. Destacam-se investigações que abordam a integração das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), especialmente softwares como GeoGebra e Winplot, como ferramentas fundamentais para mediar a compreensão de conceitos matemáticos complexos, tais como funções, parametrização, modelagem matemática e o conceito de centro de massa. A diversidade metodológica é evidente, com estudos que utilizam desde a observação participante, análise qualitativa e teorias educacionais, até a Engenharia Didática, Análise Institucional e Sequências Didáticas, buscando promover um aprendizado mais aprofundado, significativo e contextualizado.

As pesquisas também evidenciam a importância da prática docente refletida, destacando que a integração do Cálculo Diferencial e Integral no ensino depende tanto do domínio do conteúdo e das tecnologias pelo professor quanto do engajamento coletivo em comunidades de prática, que favorecem a troca de saberes e a ressignificação das práticas pedagógicas. Além disso, a adoção de metodologias inovadoras, como a Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), modelagem matemática aplicada, e o uso de ambientes virtuais, incluindo modalidades semipresenciais e a Educação a Distância (EaD), tem se mostrado promissora para ampliar o acesso, a motivação e o desempenho dos alunos, especialmente em cursos de Engenharia e Agronomia, em que as dificuldades com a base matemática são recorrentes.

Os resultados também indicam que a combinação de múltiplos ambientes de aprendizagem, como o uso de materiais didáticos elaborados com fundamentação teórica robusta, visualizações dinâmicas, objetos de aprendizagem interativos, e ambientes presenciais e digitais, contribui para o desenvolvimento de uma compreensão integrada dos conceitos matemáticos, favorecendo tanto a abstração reflexionante quanto a autoavaliação dos erros pelos estudantes. Por fim, as teses reforçam a necessidade de articular teoria, prática pedagógica e tecnologia para transformar o ensino de Cálculo em uma experiência mais acessível, dinâmica e colaborativa, capaz de promover a construção coletiva do conhecimento e de superar desafios históricos no ensino dessa disciplina, tema que será aprofundado nas seções seguintes deste trabalho.

Como também as dissertações demonstram a diversidade de abordagens e ferramentas aplicadas ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral, revelando tanto os desafios quanto as possibilidades que emergem no contexto educacional. Desde o uso de tecnologias digitais, como softwares e aplicativos interativos, até metodologias inovadoras, como monitorias online e práticas experimentais, cada pesquisa contribui de forma singular para ampliar a compreensão e o enfrentamento das dificuldades de aprendizagem. Embora cada estudo tenha explorado aspectos específicos, como a relevância do conceito de função, a integração de tecnologias digitais e as práticas avaliativas, todos convergem ao destacar a necessidade de estratégias pedagógicas mais inclusivas, dinâmicas e voltadas para a construção de significados. Esses trabalhos reforçam a importância de alinhar recursos tecnológicos, práticas docentes e objetivos pedagógicos para transformar o ensino de Cálculo em uma experiência mais acessível e significativa, o que será aprofundado nas próximas discussões deste trabalho.

3.1 Vídeos Digitais

O uso de vídeos digitais como recurso didático tem se consolidado como uma estratégia significativa no ensino de Matemática, especialmente diante da crescente popularização das tecnologias móveis e do acesso à internet. Por integrarem som, imagem, fala e movimento, os vídeos proporcionam uma abordagem multimodal, ampliando as formas de representação e compreensão dos conceitos matemáticos. Essa linguagem audiovisual, próxima do cotidiano midiático e cultural dos estudantes, favorece o engajamento e aproxima o ensino de suas realidades.

Segundo Fontes *et al.* (2019), quando utilizados com planejamento adequado e objetivos pedagógicos bem definidos, os vídeos podem desempenhar um papel relevante na mediação da aprendizagem. Mais do que simples apoio ao conteúdo, eles podem funcionar como ferramentas para análise, investigação, discussão e até mesmo produção de conhecimento por parte dos estudantes. Além disso, incentivam a autoria e a criatividade, dialogando com diferentes abordagens contemporâneas da Educação Matemática, como o uso das tecnologias digitais, a valorização da participação discente e a formação crítica.

Nesse mesmo sentido, Borba, Souto e Canedo Junior (2022) analisaram os impactos dos vídeos digitais e das transmissões ao vivo não apenas na educação matemática, mas também na sociedade de forma geral, especialmente durante a pandemia. Os autores destacam que esses recursos tornaram-se fundamentais não só como instrumentos pedagógicos, mas também como meios para fomentar uma educação mais crítica, interativa e participativa.

Diante desse contexto, os vídeos digitais aparecem como uma alternativa promissora para estabelecer conexões entre a História da Matemática e o uso de Tecnologias Digitais. No entanto, como apontam Borba, Souto e Canedo Junior (2022), embora existam inúmeros softwares, aplicativos e pacotes multimídia disponíveis para a criação de vídeos educativos, muitos deles apresentam uma curva de aprendizagem elevada. Esses programas frequentemente exigem que o professor compre, aprenda e manuseie ferramentas especializadas, muitas vezes complexas, envolvendo recursos gráficos, repetição de comandos e apresentação de parâmetros matemáticos.

Dessa forma, torna-se evidente a necessidade de métodos mais acessíveis, de uso simples, com fundamentação matemática sólida e, preferencialmente, baseados em código aberto. Tais soluções poderiam viabilizar a produção de vídeos digitais educativos sem demandar a aquisição de softwares caros ou o domínio de ambientes técnicos excessivamente complexos.

3.2 Animações matemáticas com Manim

Nesse contexto, encontramos a biblioteca de Python denominada Manim (Mathematical Animation Engine), que foi criada por Grant Sanderson, conhecido pelo projeto 3Blue1Brown. O Manim foi desenvolvido para criar animações precisas usando programação em Python, que permite produzir vídeos digitais de animações matemáticas, oferecendo um controle flexível e preciso de todos os elementos nos vídeos digitais (Castillo; Sánchez; Teixeira, 2024).

As representações visuais desempenham um papel fundamental no ensino da matemática, facilitando a compreensão de conceitos abstratos e o desenvolvimento de habilidades para a resolução de problemas. Nesse contexto, as animações digitais criadas com o Manim (Mathematical Animation Engine) destacam-se como uma ferramenta inovadora, oferecendo aos alunos uma maneira dinâmica e interativa de visualizar conceitos matemáticos (Teixeira *et al.*, 2025). O Manim é uma biblioteca em Python desenvolvida por Grant Sanderson, conhecido pelo projeto 3Blue1Brown, que permite a criação de animações matemáticas precisas e flexíveis, integrando-se facilmente com outras bibliotecas Python (Castillo; Sánchez, 2023).

Uma das principais vantagens do Manim é sua capacidade de transformar conteúdos tradicionalmente algébricos em visualizações geométricas dinâmicas, que podem ser abordadas de forma visual e intuitiva por meio de animações que ilustram o processo passo a passo (Teixeira *et al.*, 2025). Essa abordagem não apenas torna o conteúdo mais acessível, mas também conecta os alunos com a história da matemática, enriquecendo sua aprendizagem.

O projeto AM² (Animações Matemáticas com Manim), desenvolvido por Castillo e Sánchez (2025), visa capacitar professores a utilizar o Manim em suas práticas pedagógicas. O projeto enfatiza a criação de roteiros didáticos bem estruturados, que combinam rigor matemático com criatividade, permitindo a exploração de conceitos como derivadas, limites e funções de forma visual e interativa. Por exemplo, animações que mostram a derivada como o limite da razão entre as variações de y e x ajudam os alunos a compreenderem a ideia de inclinação da tangente de maneira concreta (Teixeira *et al*., 2025).

Além disso, o Manim permite a combinação de diferentes representações matemáticas em uma única cena, como equações, gráficos e derivadas, o que beneficia alunos com diversos estilos de aprendizagem. Essa multimodalidade é particularmente útil no ensino do cálculo diferencial, em que conceitos abstratos podem ser ilustrados de forma dinâmica (Teixeira *et al.*, 2025). No entanto, apesar de suas potencialidades, o uso do Manim apresenta desafios, como a curva de aprendizado inicial associada à programação em Python e a necessidade de infraestrutura tecnológica adequada (Castillo; Sánchez, 2023).

As animações matemáticas com Manim representam uma ferramenta poderosa para o ensino, promovendo uma aprendizagem mais visual, interativa e contextualizada. Futuras pesquisas podem explorar o impacto dessas animações na retenção de conceitos e no desenvolvimento de habilidades metacognitivas, além de investigar sua aplicação em tópicos mais complexos, como equações diferenciais e integrais (Teixeira *et al.*, 2025).

O Manim foi criado por Grant Sanderson, conhecido pelo projeto 3Blue1Brown. Essa biblioteca foi desenvolvida para criar animações precisas usando programação em Python. Devido à escassa documentação da versão original, diversas pessoas começaram a produzir tutoriais e materiais descritivos sobre a biblioteca. Isso deu origem a uma comunidade ativa, com centenas de pessoas contribuindo com documentação, tutoriais e exemplos.

Atualmente, existem três versões do Manim:

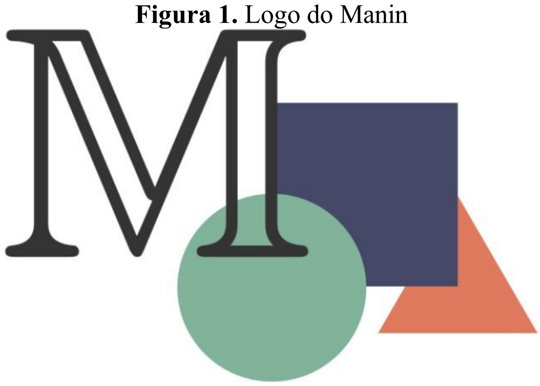
ManimGL: Manim Graphics Library é a versão original criada por Grant Sanderson, também conhecido como 3Blue1Brown, para o seu canal no YouTube. Ele começou a desenvolver ManimGL em 2018 para criar animações matemáticas para seu canal no YouTube. A versão inicial foi usada em seus vídeos, que são conhecidos por sua alta qualidade visual e clareza na explicação de conceitos matemáticos. Esta versão utiliza OpenGL para renderizar gráficos, o que permite a criação de animações matemáticas de alta qualidade. No entanto, esta versão não recebe mais atualizações frequentes e pode ser mais difícil de configurar e usar em alguns sistemas.

ManimCE: Manim Community Edition é a versão do ManimGL mantido pela comunidade. Esta versão tem como objetivo ser mais acessível e receber atualizações regulares. Ela oferece melhorias em termos de documentação, facilidade de instalação, novas funcionalidades e correções de bugs. É a versão recomendada para a maioria dos usuários novos e aqueles que procuram uma experiência mais estável e suportada.

ManimCairo: Manim Cairo é outra implementação do Manim que utiliza a biblioteca Cairo para renderização de gráficos em vez de OpenGL. A biblioteca Cairo é conhecida por sua capacidade de criar gráficos vetoriais de alta qualidade. No entanto, esta versão é menos comum e pode não ter tantas funcionalidades ou suporte comunitário como o ManimCE.

Para a maioria dos usuários, especialmente iniciantes, ManimCE é a melhor escolha devido ao suporte comunitário ativo, melhor documentação e facilidade de instalação. No entanto, se você está confortável com configuração de ambientes mais complexos e precisa de funcionalidades específicas do OpenGL, pode considerar o ManimGL. O Manim Cairo pode ser uma opção se você precisa especificamente de gráficos vetoriais de alta qualidade e está familiarizado com a biblioteca Cairo. Neste trabalho, escolhemos trabalhar com ManimCE na sua versão v0.18.1. ManimCE é um fork do Manim original criado pela comunidade para continuar o desenvolvimento da biblioteca após o ManimGL não receber mais atualizações frequentes. O fork oficial que deu origem a esta versão do Manim foi criado em 21 de outubro de 2020. Desde então, a comunidade tem trabalhado ativamente no projeto, adicionando novas funcionalidades, melhorando a documentação e corrigindo bugs. Foi criado com o objetivo de tornar o Manim mais acessível, fácil de usar e continuamente atualizado.

Figura 1. Logo do Manin



Fonte: THE MANIM COMMUNITY (2020). Disponível em: https://commons.m.wikimedia.org/wiki/File:Manim_icon.svg

Principais Características:

A renderização com OpenGL é uma das principais características do Manim. O uso do OpenGL permite a criação de animações suaves e complexas, oferecendo uma experiência visual avançada. Outro ponto forte do Manim são as atualizações frequentes. A comunidade ativa mantém o software constantemente atualizado, adicionando novas funcionalidades, corrigindo bugs e melhorando a documentação.

A documentação e os tutoriais disponíveis para o Manim são significativamente melhores em comparação com outras versões. Existem muitos tutoriais que ajudam os usuários a aprenderem e explorarem as funcionalidades do software. A extensibilidade é outro aspecto importante, facilitando a adição de novas funcionalidades e a personalização das animações conforme necessário.

A compatibilidade com Python é um grande diferencial do Manim. A integração completa com Python permite que os usuários aproveitem as bibliotecas Python em conjunto com o Manim, aumentando a versatilidade e as possibilidades de uso do software. Segundo Coluci (2022), Python é uma linguagem muito popular e é ensinada em vários cursos de graduação no Brasil.

Estrutura básica de uma cena em Manin:

No Manim, cada cena é criada usando a classe “Scene”. Esta classe, própria do Manim (não de Python), serve como um contêiner que contém e gerencia os objetos, ações e configurações de toda a animação que se está criando. A maneira básica de criar uma cena no Manim é sistematizada no quadro a seguir. No entanto, é importante mencionar que esta estrutura é comum a todas as animações a renderizar com o Manim. A qual poderá ser mais complexa ou menos, dependendo do que se planeja exibir.

Quadro 3- Estrutura básica de uma cena em Manin

Estrutura	**Descrição**
Criação do cenário com a classe “*Scene*”	Para criar uma cena é necessário definir uma nova classe que herde da classe *Scene*, mantendo *Scene* para animações em 2D e a classe *ThreeDScene* para animações em 3D, incorporadas no Manim. Isto permite que a classe personalizada herde todas as funcionalidades e método da classe “mãe” Scene.
Método *construct( )*	A classe Scene contém um método *construct( )* que precisa ser implementado em sua classe de cena personalizada. Este método serve como ponto de entrada para definir o conteúdo e as ações da cena. Dentro de *construct( )*, você escreve o código para criar objetos, animá-los e especificar ações na cena.
Criar os objetos e animações	Dentro do método *construct( )*, você pode criar e manipular objetos matemáticos (*MObjects*) e outros objetos como textos, definir suas propriedades e aplicar animações neles. Esses objetos e animações definem os elementos visuais e movimentos na cena.
Tempo e duração	A classe *Scene* fornece um sistema de gerenciamento de tempo que rastreia a progressão da animação ao longo do vídeo. Você pode especificar durações de animações, adicionar pausas ou atrasos e controlar o tempo de sincronização de objetos e eventos dentro da cena,
Renderizar e exibir	Depois de definir a cena e seu conteúdo, você pode renderizar e exibir a animação usando o mecanismo de renderização do Manim. O motor que transforma seu código e objetos em uma representação visual que pode ser reproduzida, exportada e salva como um arquivo de vídeo ou gif.

Fonte: Castillo; Sánchez; Teixeira (2024)

Na Figura 2, utilizando a estrutura básica descrita anteriormente. Como pode ser visto, a primeira linha definiu uma nova cena “CreateCircle” (este nome é personalizável) usando a classe “Scene”. Logo foi utilizado o método construct(), sempre utilizando o atributo self. Este atributo é usado posteriormente nas últimas linhas do código para criar as animações e transformações para os objetos interagirem na cena.

Figura 2. Estrutura básica de uma cena

```python
from manim import *

class CreateCircle(Scene):
    def construct(self):
        circle = Circle()
        circle.set_fill(PINK, opacity=0.5)
        self.play(Create(circle))
```

Fonte: Castillo; Sánchez; Teixeira (2024)

Após a criação dos objetos, animações e definição do tempo e duração destas, podemos passar para a renderização e exportação da cena. A renderização no Manim refere-se ao processo de conversão de código, objetos e animações escritos em Python em uma representação visual, geralmente em um arquivo de vídeo no formato MP4. Essa renderização é realizada por um mecanismo que converte os quadros (frames) em um arquivo de vídeo. Em todas as versões do Manim, a exportação da animação no formato de vídeo pode ser feita em três principais qualidades: Alta (-qh), Média (-qm) e Baixa (-ql). Também existe a possibilidade de exportar em 4K, porém, o tempo e sucesso da renderização dependerão do hardware utilizado. Para iniciar a renderização, o código deve ser inserido na janela de comando (PowerShell ou terminal CMD, ambos no Windows). Quanto menor a qualidade, menos tempo levará para renderizar. Na Figura 3 apresentam-se os códigos para executar o processo de renderização em qualidade alta, média e baixa, respectivamente.

Figura 3. Códigos para renderização no Manin

```
manim -pqh Circle.py CreateCircle #Alta qualidade
manim -pqm Circle.py CreateCircle #Qualidade média
manim -pql Circle.py CreateCircle #Baixa qualidade
```

Fonte: Castillo; Sánchez; Teixeira (2024)

Transformações e animações de MObjects:

O Quadro 2 apresenta uma visão geral das principais animações e transformações que são comumente usadas no Manim. Os MObjects não aparecerão na tela a menos que esses métodos sejam adicionados ao código. No entanto, é importante distinguir entre uma animação e uma transformação. No contexto do Manim, uma animação representa um efeito visual ou uma ação aplicada a um objeto ou a uma cena em uma duração especificada. Ela define como um objeto muda e evolui ao longo do tempo, como o desvanecimento ou o movimento na tela. Por outro lado, uma transformação refere-se a uma alteração específica aplicada às propriedades de um objeto, como sua posição, escala ou rotação. Ela descreve a modificação dos atributos de um objeto para obter um efeito visual desejado, como dimensionar um objeto para torná-lo maior ou movê-lo para uma nova posição. As transformações podem ser usadas em animações para criar visualizações dinâmicas e interativas.

Quadro 4 - Visão geral das animações e transformações básicas no Manin

Nome do Método	**Tipo de Método**	**Descrição**
Add( )	Animação	Adiciona o MObject especificado à cena, tornando-o visível e interativo.
Write( )	Animação	Revela um MObject baseado em texto, exibindo gradualmente cada caractere como se estivesse sendo escrito.
Create( )	Animação	Faz com que um MObject apareça na cena como se estivesse sendo criado do zero
FadeIn( )	Animação	Faz com que um MObject apareça gradualmente, esvaecendo-o a partir da transparência
FadeOut( )	Animação	Faz com que um MObject desapareça gradualmente, esvaecendo-o até a transparência.
Wait( )	Animação	Pausa a animação por uma duração específica.
ReplacementTransform( )	Transformação	Transforma um MObject em outro, mantendo a posição e o estado da animação.

Scale()	Transformação	Redimensiona um MObject aumentando ou diminuindo sua escala com base no fator de escala especificado
Move_to()	Transformação	Move um MObject para uma posição específica na tela, fazendo uma transição suave para o novo local.
Next_to()	Transformação	Posiciona um objeto próximo a outro.
Shift()	Transformação	Desloca um MObject em um vetor de deslocamento especificado, alterando sua posição na cena.

Fonte: Castillo; Sánchez; Teixeira (2024)

Controle de câmera:

No Manim, o controle da câmera refere-se à capacidade de manipular o ponto de vista e o enquadramento da cena que está sendo renderizada. A câmera serve como uma “lente virtual” por meio da qual o público vê a animação. O controle da câmera no Manim permite ajustar a posição, o nível de zoom e a rotação para obter diferentes perspectivas e efeitos visuais. Ao alterar os parâmetros da câmera, você pode controlar qual parte da cena fica visível, o enquadramento dos objetos e a composição geral da animação.

4 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

No campo da Educação Matemática, Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 110) ressaltam que a abordagem qualitativa “busca investigar e interpretar o caso como um todo orgânico, uma unidade em ação com dinâmica própria, mas que guarda forte relação com seu entorno e contexto sociocultural”. Nessa perspectiva, conforme apontam Bogdan e Biklen (1994, p. 67), a investigação qualitativa tem como finalidade “gerar teoria, descrição ou compreensão”, ou seja, busca compreender os processos pelos quais os sujeitos constroem significados em torno do fenômeno investigado. Ainda segundo esses autores, há um entendimento compartilhado entre estudiosos da pesquisa qualitativa de que o papel do investigador “não consiste em modificar pontos de vista” dos participantes, mas sim em compreender suas percepções e as razões que os levam a adotá-las e colocá-las em prática (Bogdan; Biklen, 1994, p. 138).

Esta pesquisa possui abordagem qualitativa de cunho bibliográfico, com elementos de pesquisa histórica, buscando articular contribuições epistemológicas da Matemática ao ensino do conceito de área por meio do uso de tecnologias digitais.

A pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em materiais já publicados, como livros, artigos científicos, publicações em periódicos, jornais, boletins, monografias, dissertações e teses. Seu principal objetivo é proporcionar ao pesquisador um contato direto com o que já foi produzido sobre o tema investigado. Nessa modalidade de pesquisa, é fundamental que o pesquisador analise criticamente os dados obtidos, atentando-se para possíveis incoerências, contradições ou limitações presentes nas obras consultadas (Prodanov; Freitas, 2013).

Na pesquisa bibliográfica, ao estabelecer relação entre os objetos de estudo das pesquisas já existentes e examiná-las em consonância umas com as outras, temos a possibilidade de vislumbrar perspectivas capazes de orientar práticas educacionais e estratégias de formação de professores que ensinam matemática (Lakatos; Marconi, 2003).

O percurso metodológico se fundamenta na perspectiva da História da Matemática como elemento formativo e didático, alinhando-se à concepção de que o conhecimento matemático é um produto histórico e cultural. A investigação também dialoga com pressupostos da Educação Matemática que valorizam a mediação tecnológica na construção de significados conceituais.

Para a operacionalização do desenvolvimento da pesquisa, foram estabelecidas cinco etapas articuladas entre si, a serem desenvolvidas: 1.ª) levantamento, organização e sistematização das pesquisas; 2.ª) seleção e estudo de tecnologias digitais para animações matemáticas; 3.ª) sistematização histórica e epistemológica do conceito de área; 4.ª) elaboração de animações digitais com base na história da matemática; 5ª) produção bibliográfica.

Quadro 5 - Etapas da pesquisa

Etapas	Descrição
1) Levantamento, organização e sistematização das pesquisas	Nesta primeira etapa, realizamos a identificação e análise de pesquisas publicadas concernente ao desenvolvimento histórico do Cálculo Diferencial e Integral, e também, a respeito da utilização de *softwares* que auxiliam os processos de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.

2) Seleção e estudo de tecnologias digitais para animações matemáticas	Esta etapa envolveu a caracterização de tecnologias digitais com potencial para a criação de animações matemáticas. Optou-se pelo uso do Manim (Mathematical Animation Engine), uma biblioteca Python voltada à produção de vídeos educacionais com representações matemáticas dinâmicas. O Manim foi escolhido por permitir a modelagem precisa de objetos matemáticos, além de possibilitar a integração de textos, gráficos, formas geométricas e transformações visuais. Durante essa etapa, foi realizado um estudo da estrutura do software, de sua sintaxe, dos tipos de animações possíveis e dos recursos de renderização e exportação em vídeo.
3) Sistematização histórica e epistemológica do conceito de área	Esta etapa consistiu na seleção, organização e análise de episódios históricos relevantes à gênese e ao desenvolvimento do conceito de área, desde a Antiguidade até a formulação do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Foram utilizadas fontes bibliográficas, como tratados clássicos, obras de divulgação científica, artigos acadêmicos e materiais didáticos que exploram a História da Matemática. A ênfase recaiu sobre contribuições de matemáticos como Eudoxo, Arquimedes, Cavalieri, Newton, Leibniz e Riemann, com especial atenção ao método da exaustão e ao processo de formalização da integração definida. Essa reconstrução cronológica e conceitual subsidiou a base teórica para a construção dos materiais digitais.
4) Elaboração de animações digitais com base na história da matemática	Na terceira etapa, com base nos episódios históricos previamente sistematizados, foram elaboradas animações matemáticas com o uso do Manim. O processo de criação foi guiado pela lógica histórica e pelo objetivo didático de promover uma compreensão mais visual, interativa e contextualizada do conceito de área. As animações buscaram representar geometricamente as ideias de aproximação de áreas por polígonos (método da exaustão), a transição para métodos infinitesimais e a síntese formal do conceito de integral. Cada vídeo foi roteirizado com base nos conceitos matemáticos e na narrativa histórica, e posteriormente codificado e renderizado para ser utilizado como recurso audiovisual educacional.
5) Produção bibliográfica	Está prevista a publicação dos resultados em artigos científicos em revistas especializadas na área de Educação Matemática, Ensino de Matemática e História da Matemática. Além disso, apresentamos a pesquisa em eventos acadêmicos. Essas apresentações permitiram a divulgação dos resultados parciais desta pesquisa para a comunidade científica e proporcionaram oportunidades para discussões e colaborações.

Fonte: Autor (2025)

Dessa forma, a metodologia adotada permitiu a articulação entre fundamentos teóricos e práticos, favorecendo uma compreensão mais profunda do conceito de área a partir de sua historicidade e de sua representação dinâmica por meio das tecnologias digitais. Ao integrar os aportes da História da Matemática com os recursos de visualização proporcionados pelo Manim, buscou-se promover uma experiência de aprendizagem mais significativa e contextualizada, especialmente no que diz respeito ao ensino do Cálculo Integral.

Além disso, o percurso metodológico evidenciou o potencial das animações matemáticas como ferramentas mediadoras na construção de sentidos conceituais e históricos. A sistematização das etapas contribuiu não apenas para o desenvolvimento dos produtos educacionais da pesquisa, mas também para a ampliação de possibilidades pedagógicas voltadas à formação de professores e ao ensino da Matemática. As reflexões que emergem desse processo serão aprofundadas na seção de análise e resultados.

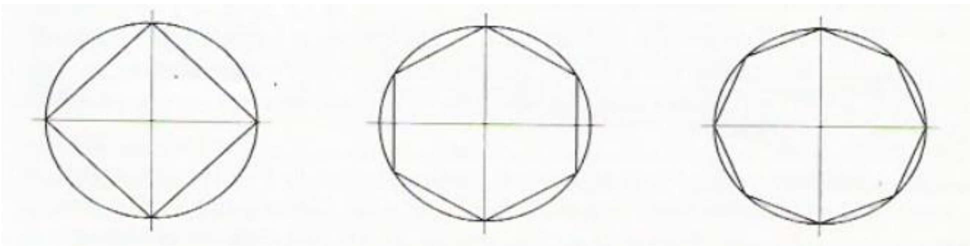
5 SISTEMATIZAÇÃO HISTÓRICA E EPISTEMOLÓGICA DO CONCEITO DE ÁREA

A busca por calcular áreas não é nova: acompanha o pensamento humano desde a Antiguidade. Muito antes do surgimento do cálculo moderno, matemáticos já tentavam medir o espaço ocupado por figuras curvas. Neste capítulo partiremos de uma linha do tempo, evidenciando matemáticos que contribuíram com o conceito de área ao longo da história.

No mundo grego, um dos primeiros grandes avanços veio com Eudóxio de Cnido, discípulo de Platão. Diante da dificuldade de calcular a área de figuras curvas, Eudóxio desenvolveu o método da exaustão, que consistia em aproximar uma área desconhecida por meio de figuras conhecidas (como triângulos e polígonos).

Eudoxo de Cnido foi um matemático, astrônomo e filósofo grego, considerado um dos maiores matemáticos da Antiguidade. Ele nasceu na cidade de Cnido, na Ásia Menor (atualmente Turquia). O método da Exaustão, segundo Baron (1987, p. 34), foi introduzido pela primeira vez por Grégoire de Saint-Vincent (1584–1667) no intuito de descrever o processo criado por Eudoxo de Cnido (408–355 a.C.) para evitar a passagem direta para o conceito de limite, usado para provar que as áreas dos círculos são proporcionais aos quadrados de seus diâmetros. De acordo com Miles e Bussab (1999, p. 58), o "Método de Exaustão" de Eudoxo utilizava polígonos regulares inscritos com um número crescente de lados e o termo exaustão vem da ideia de os polígonos irem preenchendo a área do círculo, a seguir uma representação geométrica trazida pelos autores.

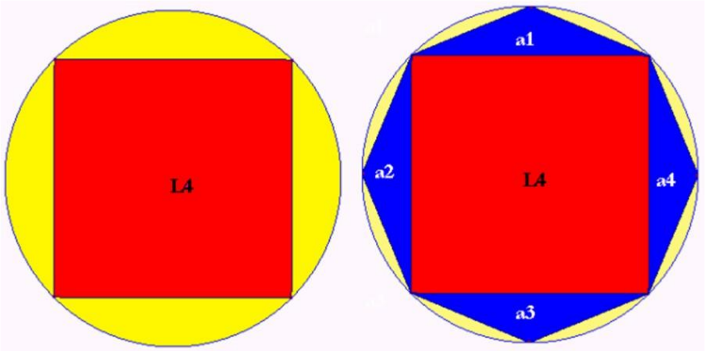
Figura 4: Método da Exaustão de Eudoxo de Cnido



Fonte: Milies e Bussab (1999).

Nesse contexto, Bongiovanni (2005), traz a ideia de polígonos regulares inscritos em figuras curvas, como círculos.

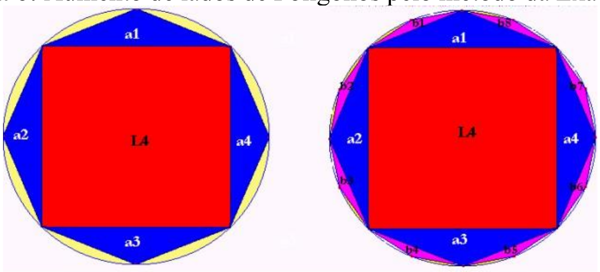
Figura 5: Polígonos regulares inscritos num círculo



Fonte: Bongiovanni (2005, p. 105)

De acordo com a imagem a seguir, podemos ver que o método da exaustão de Eudoxo de Cnido realmente utilizava polígonos regulares inscritos com um número crescente de lados e intuitivamente podemos perceber como a área desses polígonos regulares com número crescente de lados preenche a área do círculo.

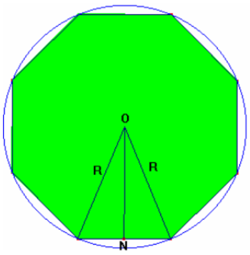
Figura 6: Aumento de lados de Polígonos pelo método da Exaustão



Fonte: Bongiovanni (2005, p. 106)

Mais adiante, ainda no trabalho de Bongiovanni (2005) podemos ver que tais polígonos regulares são transformados em triângulos isósceles cuja medida dos lados congruentes é igual ao raio do círculo.

Figura 7: Polígonos regulares sendo dividido em triângulos isósceles



Fonte: Bongiovanni (2005, p. 107)

Arquimedes de Siracusa (287–212 a.C.) é considerado um dos maiores matemáticos da Antiguidade, destacando-se pela originalidade de seus métodos e pelo rigor demonstrativo. Suas contribuições foram tão significativas que anteciparam ideias centrais do cálculo integral em cerca de dois milênios, como apontado por Sá (2011) apud Marques et al. (2024). Entre suas técnicas mais notáveis, encontra-se o método da exaustão, uma abordagem primitiva de integração que permitia a estimativa de áreas e volumes de figuras curvas por meio da utilização de polígonos inscritos e circunscritos, com número de lados cada vez maior. A ideia era que, ao aumentar indefinidamente o número de lados dos polígonos, suas áreas tenderiam à área da figura desejada.

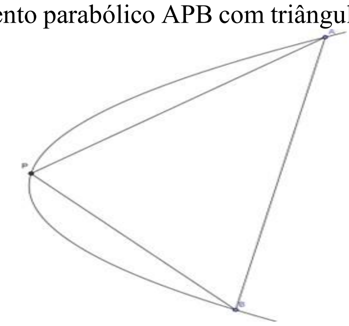
Esse método se fundamenta nos estudos anteriores de Eudoxo de Cnido, que desenvolveu um rigoroso método geométrico para lidar com grandezas incomensuráveis, o que marcou uma resposta à crise das proporções pitagóricas. Arquimedes, no entanto, aperfeiçoou a técnica ao utilizar dois tipos de aproximações: interna e externa à figura curva. Esse refinamento metodológico permitiu, por exemplo, uma aproximação precisa do número π utilizando polígonos regulares de até 96 lados, chegando ao valor de 3,142, muito próximo ao aceito atualmente (Marques et al., 2024).

No contexto da matemática grega antiga, em que ainda não existia a noção de limites e o infinito representava um desafio tratado como “horror ao infinito”, Arquimedes desenvolveu métodos engenhosos para calcular áreas de figuras curvilíneas (Messias; Brandemberg; Moraes, 2023). Sua abordagem para determinar a área sob um segmento parabólico destaca-se como um dos primeiros exemplos bem-sucedidos de cálculo de áreas limitadas por curvas.

Entre essas realizações, destaca-se a obra Quadratura da parábola, na qual Arquimedes aplicou o método de exaustão para determinar a área A de um segmento parabólico, a região delimitada entre uma parábola e uma reta. De acordo com Boyer (2014, p. 80), esse feito foi um marco no uso da soma de infinitas parcelas para obter uma área exata, séculos antes do surgimento formal do cálculo. Arquimedes demonstrou que a área A dessa região é igual a 4/3 da área de um triângulo inscrito com a mesma base e altura.

Conforme mostrado por Silva (2014, p. 69), o método arquimediano inicia-se com a construção de um triângulo inscrito no segmento parabólico, utilizando como base a corda AB e como vértice o ponto de maior altura da parábola. Esta construção geométrica inicial estabelece a primeira aproximação para a área desejada.

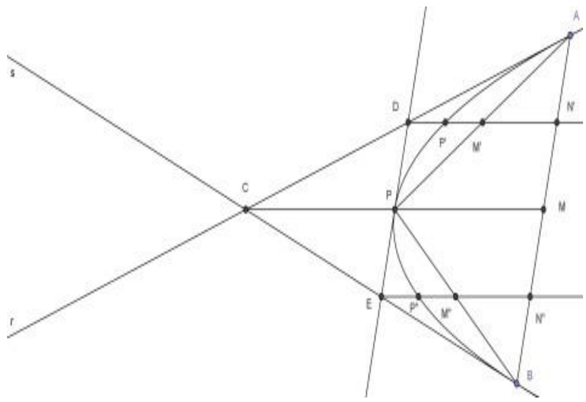
Figura 8: Segmento parabólico APB com triângulo inscrito △APB



Fonte: Silva (2014, p. 69.)

Em seguida, conforme ilustrado por Silva (2014, p. 72), o segmento parabólico é subdividido em dois novos triângulos menores, inscritos sobre os lados do triângulo anterior. Cada novo par de triângulos possui, em conjunto, um quarto da área do triângulo inicial.

Figura 9: Processo de subdivisão do segmento parabólico



Fonte: Silva (2014, p. 72.)

Esse processo continua indefinidamente, somando áreas em uma progressão geométrica:

$$A = T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{4^2}T + \cdots = T\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) = \frac{4}{3}T$$

Que podemos escrever na linguagem moderna como:

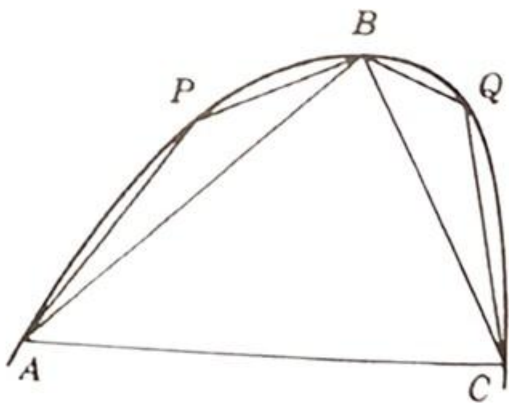
$$A = T \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^i$$

Considerando a soma das áreas como uma série geométrica de razão $r = \left|\frac{1}{4}\right| < 1$, temos que a série é convergente e a área total é dada pelo limite das somas parciais.

$$A = T \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{i} = \frac{T}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4T}{3}$$

Assim, conforme destacou Boyer (2014, p. 80), Arquimedes demonstrou rigorosamente que a área total do segmento parabólico é quatro terços da área do triângulo inscrito. Esse resultado é notável por ter sido obtido por meio de raciocínio geométrico puro, em um contexto histórico que rejeitava abertamente o uso do infinito como entidade concreta.

Figura 10: Ilustração do processo iterativo



Fonte: Boyer (2014, p. 88.)

Silva (2014, p. 38) comenta que "Arquimedes percebeu que se adicionarmos $\frac{1}{3}$ da última área no final da soma anterior, independentemente do valor de n, sempre obteremos $\frac{4}{3}$". Isso evidencia a regularidade e o refinamento do método empregado. Ainda segundo Silva(2014, p. 18), a Proposição 1 da obra fundamenta-se no princípio de que "se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade [...] se chegará por fim a uma grandeza menor do que qualquer outra predeterminada", o que corresponde diretamente ao conceito moderno de limite.

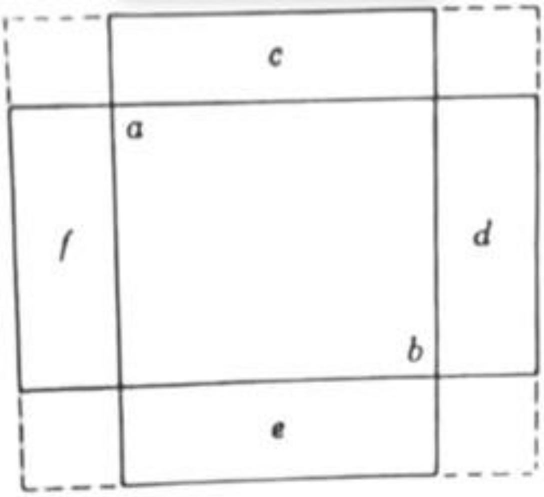
Embora fosse evidente a intuição experimental no trabalho de Arquimedes, o rigor exigido pela matemática grega exigia demonstrações formais. Assim, ele recorreu ao que hoje conhecemos como dupla redução ao absurdo, prática que mais tarde seria nomeada como "exaustão" por Grégoire de Saint-Vincent. Segundo Moraes (2021), esse tipo de procedimento, baseado em repetições infinitas, foi predominante até o século XVII, quando os matemáticos passaram a trabalhar com a ideia de passagem direta ao limite. Foi nesse processo que surgiram as formulações do cálculo infinitesimal por Newton e Leibniz, cujas descobertas se assentaram em grande medida nos métodos inaugurados por Arquimedes.

Dessa forma, evidencia-se que os métodos cinemáticos e infinitesimais arquimedianos constituíram fundamentos essenciais para o desenvolvimento do cálculo moderno, reafirmando seu lugar de destaque na história da matemática.

A evolução do cálculo integral passa por diversos estágios históricos, e uma dessas raízes encontra-se na obra de *Muḥammad ibn Mūsā,* Al-Khwārizmī, matemático persa do século IX. Seu tratado *al-jabr wa'l muqabalah* não apenas fundou a álgebra sistemática, como também apresentou maneiras visuais e geométricas de lidar com equações, antecipando ideias fundamentais ligadas ao conceito de área, central no cálculo integral.

Em um dos exemplos descritos por Boyer (1996, p.158), Al-Khwārizmī resolve a equação $x^2 + 10 = 39$ por meio de raciocínio geométrico, utilizando figuras visuais. Ele representa o termo x^2 como um quadrado e os termos lineares como retângulos. Ao reorganizar essas formas, chega-se à solução correta da equação. Essa técnica, conhecida como completar o quadrado, permite visualizar áreas como partes que se somam ou se equilibram, uma estratégia que, mais tarde, seria essencial para o pensamento integral.

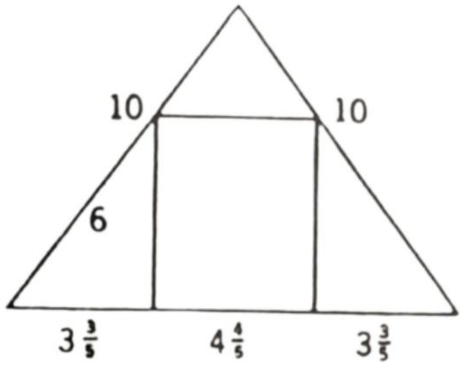
Figura 11: Representação geométrica do método de completar o quadrado,



Fonte: Boyer (1996, p.160)

Esse raciocínio visual aparece em um problema atribuído a Heron de Alexandria. Al-Khwārizmī analisa um triângulo isósceles com um quadrado inscrito em sua base. Ele calcula a área total do triângulo como 48 metros quadrados e, a partir disso, deduz o lado do quadrado como $\frac{4}{5}$ metros. Essa maneira de dividir uma figura conhecida em partes menores para encontrar uma medida específica é bastante semelhante ao raciocínio que sustenta o cálculo integral.

Figura 12: Problema geométrico envolvendo quadrado inscrito em triângulo, resolvido por al-Khwarizmi



Fonte: Boyer (1996, p.161)

Além disso, Boyer comenta que o matemático ‘Abd al-Hamid ibn Turk também tratou de equações quadráticas e utilizou figuras geométricas para ilustrar quando essas equações não tinham solução. Ele mostrou, por exemplo, que certas configurações espaciais indicavam a impossibilidade de encontrar raízes reais, antecipando a noção moderna de discriminantes e o uso do espaço como forma de justificar resultados.

Boyer (1996) destaca que, apesar de a álgebra árabe ser retórica, ou seja, sem símbolos, havia grande clareza na abordagem geométrica. Isso pode ser observado na figura 11, na qual retângulos são subdivididos para representar diferentes termos algébricos. Mesmo sem a notação algébrica que conhecemos hoje, Al-Khwārizmī conseguia relacionar números e espaço por meio de representações visuais, o que é essencial para compreender como a área pode ser manipulada matematicamente.

Portanto, embora Al-Khwārizmī não tenha criado o cálculo integral, ele contribuiu para a construção do conceito de área como ferramenta matemática. Seu uso de figuras para resolver problemas e ilustrar equações demonstra uma abordagem que vai muito além da álgebra: revela um modo de pensar que seria fundamental para que, séculos depois, matemáticos como Newton e Leibniz pudessem formalizar a integração e calcular áreas sob curvas com precisão analítica.

No início do século XVII, enquanto a Europa fervilhava de descobertas e renascimentos científicos, um monge italiano, Bonaventura Cavalieri (1598–1647), vislumbrava um novo modo de medir o contínuo. Inspirado por seu mentor Galileu Galilei, Cavalieri dedicava-se a um conceito ousado para sua época: E se as áreas planas e os volumes sólidos pudessem ser compostos por infinitas “linhas” ou “planos” indivisíveis em vez de unidades discretas? Nascido da tradição geométrica dos gregos, que usavam o método da exaustão para provar teoremas com rigor espartano, Cavalieri ousou trocar o rigor absoluto por uma ideia poderosa, embora ainda imprecisa: se duas figuras forem formadas por conjuntos de segmentos paralelos (ou "indivisíveis") de mesma medida, então terão áreas iguais. Este raciocínio, depois chamado Teorema de Cavalieri, parecia heresia matemática, mas era engenhoso.

Segundo Baron (1985), Cavalieri concebia uma figura plana composta por um número infinito de retas paralelas equidistantes, e um sólido como formado por infinitos planos paralelos. A comparação entre áreas e volumes era feita por meio da comparação entre esses indivisíveis: “Em notação moderna, se em duas figuras planas A_1 e A_2, para todo par de interseções correspondente l_1 e l_2, $l_1 = l_2$, então $A_1 = A_2$, pois de algum modo $\sum l_1 = A_1$ e $\sum l_2 = A_2$” (Baron, 1985, p. 12). Em que $\sum l_1 = Soma\ de\ todas\ as\ retas\ da\ figura.$

Com isso, Cavalieri desenvolveu um método sistemático de integração antes mesmo de o cálculo ser formalizado. Em sua obra *Geometria Indivisibilibus Continuorum* (1635), ele aplicou esse pensamento para determinar áreas sob curvas e volumes de figuras, como parábolas, cônicas e até espirais. Usava relações proporcionais entre “potências” das linhas, antecipando fórmulas como:

$$\int_0^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1}, para\ qualquer\ numero\ natural\ n \in \mathbb{N}\ tal\ que\ n \leq 9$$

Muito antes dessa notação existir! Por exemplo, ele demonstrava, geometricamente, que a área sob $\mathrm{y} = \mathrm{x}$ de 0 a b era proporcional a b^2, o que hoje sabemos valer $\frac{\mathrm{b}^2}{2}$.

É verdade que seus contemporâneos criticaram seus métodos como obscuros ou inconsistentes; afinal, os indivisíveis pareciam desafiar os alicerces da geometria clássica. Mas muitos também reconheceram sua força prática. Os métodos de Cavalieri foram amplamente utilizados no século XVII, influenciando diretamente Newton, Wallis e outros pioneiros do cálculo.

Como observa Baron (1985, p. 13), “tão úteis, importantes e poderosas tornaram-se essas técnicas que, para muitos matemáticos do século XVII, os fins justificavam os meios”.

Mais que um técnico da matemática, Cavalieri foi um visionário do infinito, que pavimentou o caminho para a integração. Seu método com indivisíveis não era apenas uma ideia, era um precursor claro do cálculo integral, que nasceria formalmente décadas depois.

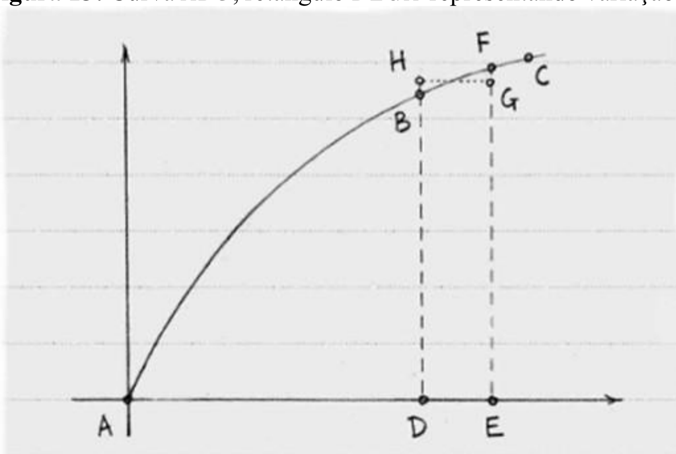
Durante séculos, os matemáticos se depararam com um desafio fascinante: como medir a área de uma região curva? Enquanto a área de quadrados e triângulos era conhecida desde a Antiguidade, a área sob uma curva permanecia envolta em mistério. Essa busca culminou, no século XVII, em uma descoberta monumental: o Teorema Fundamental do Cálculo.

Essa história passa por dois dos maiores nomes da matemática: Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, cujos caminhos, embora distintos, convergiram para a mesma verdade profunda: área e taxa de variação são operações inversas.

Isaac Newton nasceu na Inglaterra em 1642. Desde cedo, dedicou-se ao estudo do movimento, da gravidade e das propriedades das curvas. Ao analisar curvas que representavam a velocidade de um objeto ao longo do tempo, Newton fez uma observação notável: a área sob a curva de velocidade representava a distância percorrida pelo objeto.

Mais que isso, Newton percebeu que essa área crescia à medida que o tempo passava. Isso o levou a uma ideia radical para a época: tratar a área como uma quantidade que varia continuamente.

Figura 13: Curva ABC, retângulo $DEGH$ representando variação de área.



Fonte: Perkins(2012, p. 78)

Nas palavras de Perkins: “O insight de Newton aqui foi tratar a área abaixo da curva ABC como uma quantidade variável.” (PERKINS, 2012, p. 78, tradução nossa)

Ele observou que, ao deslocar um ponto D sobre o eixo horizontal, a variação da área sob a curva poderia ser aproximada por um pequeno retângulo.

A fundamentação do Teorema Fundamental do Cálculo, sob a ótica de Isaac Newton, reside na interpretação da área sob uma curva (quadratura) como uma grandeza dinâmica. Ao associar a curva ABC à velocidade de um corpo, a área acumulada passa a representar a distância percorrida.

Conforme ilustrado na Figura 13, ao considerar um incremento infinitesimal DE no eixo horizontal, surge uma variação na área correspondente à região $DEFB$. Newton propõe a existência de um retângulo equivalente $DEGH$, cuja área iguala-se à de $DEFB$, estabelecendo a relação:

$$DH = \frac{\text{mudança na área ADB}}{\text{mudança na horizontal DE}}$$

Essa razão traduz-se como:

$$DH = \frac{\text{mudança na distância no tempo DE}}{\text{mudança no tempo DE}}$$

O ponto crucial do argumento ocorre no limite: quando o intervalo DE tende a zero ("infinitamente pequeno"), a altura DH converge para a altura DB da curva. Portanto, Newton demonstra que a altura da curva em um ponto D é idêntica à taxa de variação da sua quadratura naquele ponto:

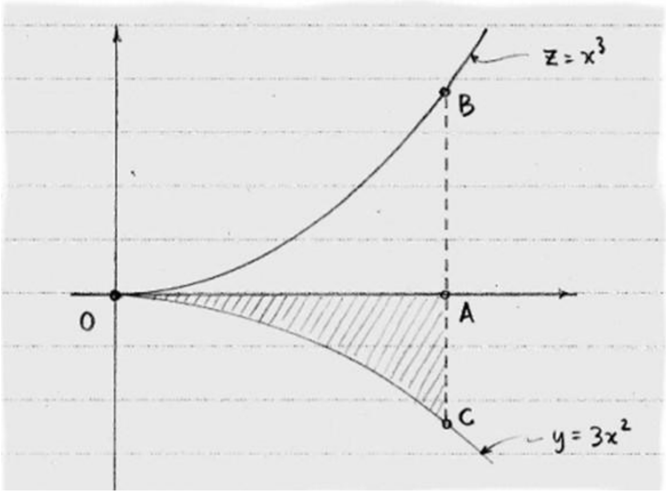
$$DB = taxa\ de\ variação\ de\ ABD\ no\ ponto\ D$$

Mas DB é a altura da curva ABC em D ao longo da horizontal; assim, Newton descobriu uma ligação entre uma curva, sua quadratura e a taxa de variação da quadratura:

A altura desse retângulo representava a taxa de crescimento da área. Ao tornar esse deslocamento infinitamente pequeno, a altura do retângulo se igualava à altura da curva naquele ponto. Assim, Newton concluiu: "A altura de uma curva em um ponto ao longo da horizontal é igual à taxa de variação da quadratura da curva nesse ponto." (PERKINS, 2012, p. 79, tradução nossa)

Essa foi a primeira face do teorema: a derivada da área sob a curva é a própria curva. Newton não se contentou apenas em derivar áreas. Ele queria saber: seria possível fazer o caminho inverso? Para validar sua descoberta, Newton aplicou o conceito às curvas $y = 3x^2 e\ z = x^3,$ conforme ilustrado na Figura 14.

Figura 14: Curvas $y = 3x^2$ e $z = x^3$.



Fonte: Perkins(2012, p. 79)

Nesta construção, a curva y representa a taxa de variação (derivada) da curva z. Geometricamente, Newton demonstrou que a área acumulada sob a parábola y (região OAC) corresponde exatamente à ordenada AB da curva cúbica z, em linguagem moderna, escrevemos:

$$\int_0^A 3x^2\, dx = x^3|_0^A = A^3$$

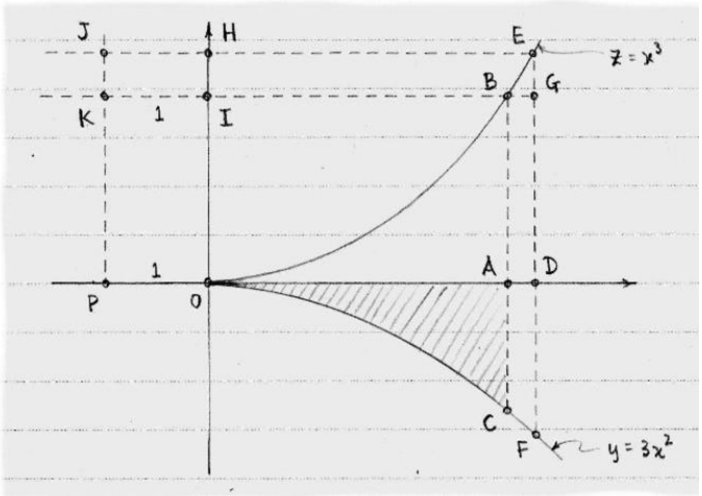
Na demonstração de Newton que vimos nas imagens anteriores, o segmento AB representa a altura (ordenada) da curva $z = x^3$ no ponto A. E como a altura da curva no ponto A é exatamente A^3, então,

$$\int_0^A 3x^2\, dx = x^3|_0^A = AB$$

Invertendo o raciocínio anterior: se antes a altura da curva era a derivada da área, aqui Newton estabelece que a altura da função original (z) é o resultado da quadratura (integral) de sua taxa de variação (y). Este "fechamento do ciclo" é o que define a natureza inversa entre diferenciação e integração.

Ao considerar tais curvas, Newton percebeu que a inclinação da curva z correspondia à altura da curva y. Ou seja, a curva z era a integral da curva y. "A altura de uma curva em um ponto ao longo da horizontal é igual à quadratura da taxa de variação da curva até esse ponto." (PERKINS, 2012, p. 79, tradução nossa)

Figura 15: Área da região $OAC = AB$



Fonte: Perkins(2012, p. 80)

Na figura 15, Newton consolida a relação de "espelhamento" entre a quadratura e a taxa de variação. Por meio da introdução de um ponto P, tal que o segmento unitário $OP = 1$ define a base de um retângulo auxiliar $POIK$, e demonstra-se que a área sob a curva y acumulada até o ponto A $(região\ OAC)$ equivale exatamente à altura AB da curva z naquele mesmo ponto.

Conforme Perkins (2012, p. 80), Newton fundamenta a relação entre a quadratura (área) e a taxa de variação utilizando o conceito de incrementos infinitamente pequenos. Ao posicionar o ponto D de modo que o segmento AD tenda a zero, ele estabelece que a inclinação da reta tangente à curva z no ponto B equivale à razão $\frac{EG}{BG}$. Simultaneamente, essa inclinação é representada pela altura AC da curva y no ponto correspondente. A partir dessa equivalência, Newton desenvolve a seguinte cadeia de implicações matemáticas:

$$AC = \frac{EG}{BG}$$

$$\Longrightarrow$$

$$EG = AC * BG$$

$$\Longrightarrow$$

$$HI = AC * AD$$

$$\Longrightarrow$$

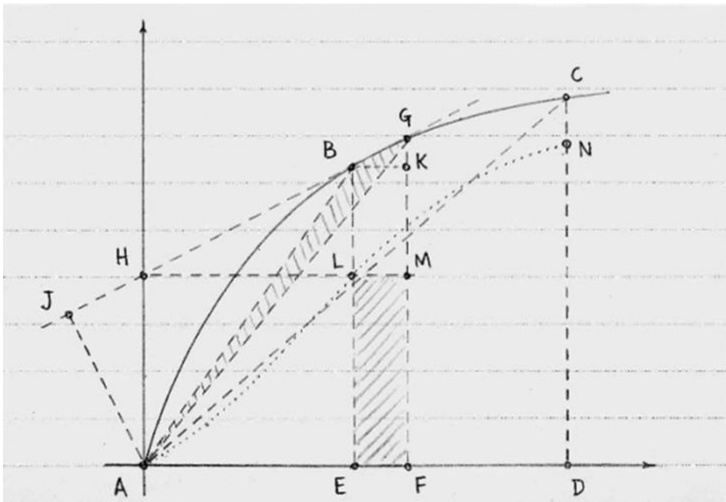
$$área\ do\ retangulo\ KIHJ \approx área\ da\ região\ ADFC$$

Ao tratar essa aproximação como uma igualdade absoluta para intervalos infinitesimais, Newton conclui que a soma dessas áreas em todo o intervalo resulta em:

$$\acute{a}rea\ do\ ret\hat{a}ngulo\ POIK = \acute{a}rea\ da\ regi\tilde{a}o\ OAC$$

Enquanto Newton pensava em movimento e física, na Alemanha Leibniz estava explorando o problema da área por meio da geometria. Newton pensou: "E se eu dividir a área sob uma curva em infinitos triângulos bem pequenos?" Esses triângulos, chamados por ele de triângulos característicos, tinham um lado que representava a inclinação da curva (a derivada) e outro que representava uma pequena parte da base (um incremento em x). Leibniz percebeu que podia transformar o problema de encontrar uma área complicada em outro problema mais simples, com base nesses triângulos e retângulos. Esse processo ele chamou de transmutação. "Leibniz chamou essa equação de seu teorema da 'transmutação'." (PERKINS, 2012, p. 83. Tradução nossa)

Figura 16: Curva ABC com triângulo ABG e retângulo EFML, destacando a transmutação.



Fonte: Perkins(2012, p. 82)

Esse teorema permitiu a Leibniz resolver, de forma geométrica, problemas que pareciam intratáveis. Um de seus triunfos foi redescobrir a fórmula de Jyesthadeva para π:

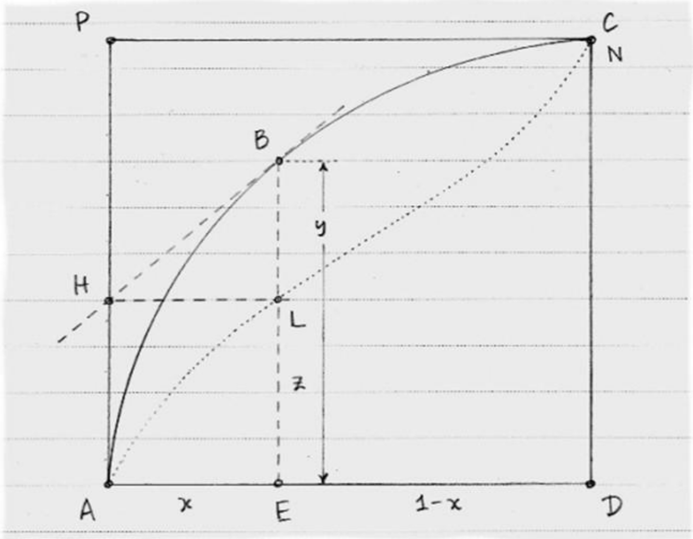
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Que em linguagem moderna podemos escrever como:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{-1}{2n-1}\right) = \frac{\pi}{4}, \text{ ou ainda, } \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\frac{-1}{2k-1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Utilizando seu método e relações entre tangentes, retângulos e curvas, ele obteve essa série calculando a área de um quarto de círculo com $raio$ 1.

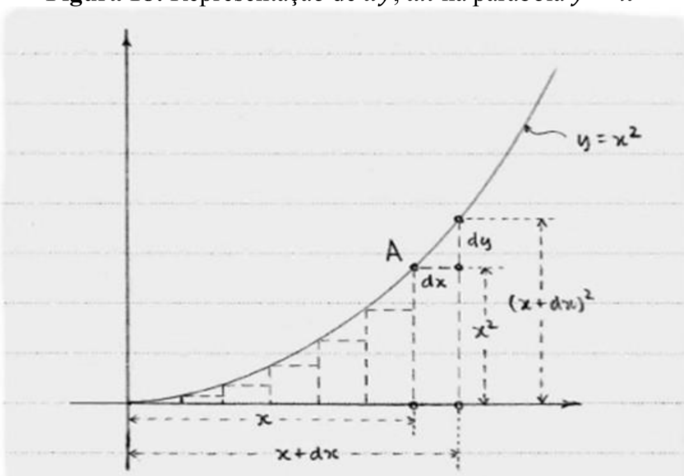
Figura 17: Quadrante de círculo com construções geométricas para deduzir a série.



Fonte: Perkins(2012, p. 84)

Enquanto Newton preferia argumentos geométricos e palavras, Leibniz queria um sistema simbólico universal. Foi ele quem criou os símbolos dx, dy, e o elegante ∫ (derivado da letra S de "summa"), em que: dx representa um pequeno pedaço no eixo x; dy, a variação correspondente em y; $\int y\, dx$, a soma de todos os pequenos retângulos com altura y e largura dx, ou seja, a área sob a curva. "Leibniz interpretou uma curva como a razão (em cada ponto) do movimento vertical da curva em relação ao seu movimento horizontal." (PERKINS, 2012, p. 95, tradução nossa).

Figura 18: Representação de dy, dx na parábola $y = x^2$



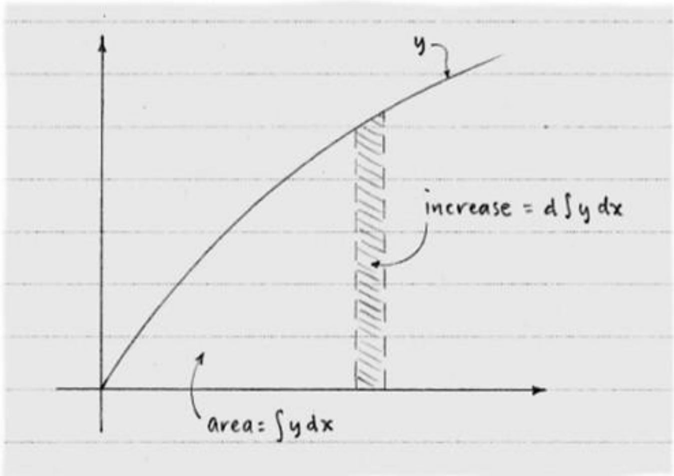
Fonte: Perkins(2012, p. 97)

Essa notação deu clareza ao que Newton havia demonstrado: a derivada da área acumulada é a função original, e a integral da derivada retorna à função:

$$y = \frac{d}{dx}\left(\int y\,dx\right)\ e\ \int \frac{dy}{dx}dx = y$$

"Aí está o teorema fundamental do cálculo em uma casca de noz." (PERKINS, 2012, p. 99, tradução nossa).

Figura 19: Curva y com área representada pela integral, e a notação simbólica do TFC.



Fonte: Perkins(2012, p. 98)

A ideia de área percorreu uma longa jornada de figuras estáticas à noção dinâmica de crescimento e mudança. Newton a viu como algo que aumenta com o tempo; Leibniz como algo que pode ser decomposto e reconstruído por símbolos.

Ambos revelaram que derivar e integrar são opostos perfeitos: um desfaz o outro, e juntos, constituem o coração do cálculo moderno. Suas ideias transformaram para sempre a matemática, a física, a engenharia e a própria maneira como entendemos o mundo.

No início do século XIX, calcular áreas sob curvas, ou seja, integrar funções ainda era um desafio em termos de rigor matemático. Embora a ideia de integral fosse conhecida desde os tempos de Newton e Leibniz, a prática ainda se apoiava em intuições geométricas e manipulações informais. Foi nesse cenário que emergiu Bernhard Riemann (1826–1866), que redefiniu o conceito de integral de forma a torná-lo uma ferramenta analítica rigorosa (BRESSOUD, 2019, p. 163).

Riemann estabeleceu que a área sob uma curva poderia ser calculada pela soma de pequenos retângulos desenhados sob ela, usando a fórmula:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i^*) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

O valor da integral seria então o limite dessa soma, conforme os subintervalos se tornassem infinitamente pequenos (BRESSOUD, 2019, p. 164), ou seja.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Essa abordagem era revolucionária porque não apenas tornava o conceito de área formalmente preciso, mas também permitia integrar funções com descontinuidades desde que a variação estivesse “controlada”.

“A função f é integrável se, para qualquer valor $\delta > 0$, os pontos com variação maior que δ puderem ser contidos em intervalos cuja soma dos comprimentos seja menor que um valor dado σ” (BRESSOUD, 2019, p. 164). Para mostrar o poder de sua definição, Riemann construiu uma função impressionante:

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{((nx))}{n^2}$$

Essa função apresenta um ponto de descontinuidade em todo intervalo aberto, mas ainda assim é integrável, graças à sua definição. Essa foi uma verdadeira prova de força do novo conceito de integral. “Riemann imediatamente produziu uma função que tem um ponto de descontinuidade em todo intervalo aberto, por menor que seja, mas que, mesmo assim, é integrável” (BRESSOUD, 2019, p. 165).

Essa definição moderna de integral, feita por Riemann, abriu o caminho para a formulação rigorosa do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Esse teorema conecta dois pilares do cálculo: A integração, que mede áreas e a derivação, que mede taxas de variação. Segundo o TFC, se uma função f é contínua em $[a,b]$ e F é uma primitiva de f, então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Esse resultado já era conhecido desde Newton e Leibniz, mas foi com Riemann que ele passou a ter base lógica formal. Como afirma Bressoud (2019, p. 166), a definição de Riemann "funciona perfeitamente para o propósito que ele pretendia: estabelecer quando uma função é integrável".

Contudo, como destaca Almeida (2013, p. 8), a integral de Riemann tem limitações. Mesmo que uma função tenha uma derivada (ou primitiva), isso não garante que ela seja integrável segundo Riemann. Isso significa que o TFC não vale em todos os casos com essa definição. "O Teorema Fundamental do Cálculo não é geral na teoria de Riemann, pois a existência de uma primitiva não garante que a função seja integrável" (ALMEIDA, 2013, p. 8).

Para resolver essas limitações, novas teorias de integração foram desenvolvidas: A Integral de Lebesgue, mais poderosa, mas mais complexa; A Integral de Henstock-Kurzweil (também chamada Riemann Generalizada), que estende a definição de Riemann sem perder sua simplicidade.

Essa última garante que toda função que possui uma primitiva é integrável, ou seja, torna o Teorema Fundamental do Cálculo verdadeiramente geral (ALMEIDA, 2013, p. 9). "Nesta teoria de integração, toda função derivável possui integral, ou seja, o TFC é geral" (ALMEIDA, 2013, p. 9).

A definição de integral criada por Riemann revolucionou o cálculo. Ela não apenas permitiu integrar funções antes impossíveis, como também fundamentou com rigor o Teorema Fundamental do Cálculo, que passou a ter uma base sólida.

Mesmo que outras definições mais avançadas tenham surgido para lidar com os casos que Riemann não contemplava, o seu trabalho continua sendo a base do ensino e da aplicação da integração até hoje.

6 ANIMAÇÕES MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE ÁREA

Neste apartado, apresentamos de forma visual e explicativa as animações desenvolvidas com Manin para o ensino do conceito de área, de acordo com a história criada no tópico anterior. Criamos 4 animações matemáticas com o Manim para representar visualmente como ocorria em cada método, o processo de desenvolvimento do conceito de área.

Animação 1: Método da Exaustão de Eudoxo

O script escrito em Manim apresenta uma animação que visa ilustrar o cálculo da área do círculo por meio do método da exaustão de Eudoxo, utilizando sucessivos polígonos regulares inscritos. A construção se desenvolve de maneira gradual, com ênfase na transição entre a visualização geométrica e a interpretação algébrica, permitindo compreender como a área do círculo pode ser aproximada por figuras poligonais. A seguir, apresenta-se uma análise qualitativa das etapas da animação.

A animação tem início com a construção de um círculo branco de raio 3, centralizado na tela. Um ponto é marcado em seu centro e, em seguida, é traçado um raio em direção à borda do círculo, com uma cor vermelha destacada. No canto superior direito da tela, é exibida a equação que representa esse raio: "$r = 3.00$". Ao mesmo tempo, no canto superior esquerdo, aparece a fórmula da área do círculo: $A_{círculo} = \pi r^2 \approx 28{,}27$, apresentada em uma tonalidade alaranjada. A cena pausa brevemente, oferecendo ao espectador tempo para observar e entender os elementos que compõem essa introdução.

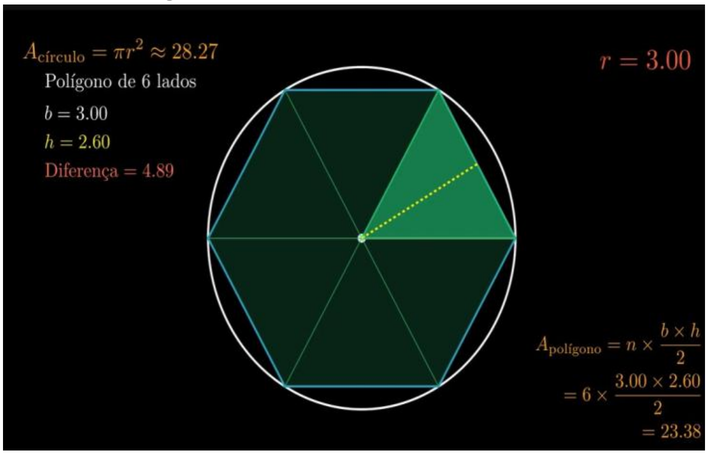
Na cena seguinte, inicia-se uma sequência visual que representa o método de exaustão por meio da aproximação da área do círculo com polígonos regulares inscritos. São exibidos, um a um, polígonos com $4, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 24$ e 32 lados. Cada novo polígono substitui o anterior na tela, mantendo o círculo original como base. Ao ser desenhado, o polígono azul é subdividido em triângulos verdes translúcidos que partem do centro do círculo. Um dos triângulos é destacado com uma coloração mais forte e opaca. Sobre ele, é traçada a base (lado do polígono) e, a partir do centro, uma linha tracejada amarela representa a altura do triângulo.

Junto à construção do triângulo, são apresentadas informações numéricas relacionadas à sua geometria. No canto inferior direito, surgem três expressões que representam o cálculo da área do polígono: a fórmula geral $A = n \cdot \frac{b \cdot h}{2}$, a substituição pelos valores específicos de base e altura, e o resultado da área calculada. No canto superior esquerdo, logo abaixo da fórmula da área do círculo, aparecem dados complementares: o número de lados do polígono, o valor da base b, a altura hhh, e a diferença entre a área do círculo e a área do polígono, destacada em vermelho. Essas informações variam a cada novo polígono exibido, revelando como os valores se aproximam da área do círculo conforme o número de lados aumenta.

A partir da exibição do polígono de 8 lados, uma nova informação visual é adicionada no canto inferior esquerdo. Trata-se de uma comparação entre a altura h do triângulo e o raio r do círculo, destacando a tendência de que, com o aumento do número de lados, a altura do triângulo se aproxima do raio. A comparação é apresentada com uma seta visual indicando essa convergência, por exemplo: "$h = 2.92 \rightarrow r = 3.00$". Essa representação reforça a ideia de que os triângulos inscritos estão, progressivamente, se tornando mais semelhantes a segmentos radiais do círculo.

A animação segue esse processo até alcançar o polígono de 32 lados. Neste momento, a figura do polígono já se confunde com a forma do círculo, e a diferença entre suas áreas é praticamente insignificante. Visualmente, é possível perceber que, quanto maior o número de lados do polígono, mais ele se aproxima da área do círculo, demonstrando com clareza o método de exaustão. A animação encerra-se com uma breve pausa contemplativa, permitindo ao espectador refletir sobre o processo de aproximação e a beleza matemática envolvida nesse raciocínio.

Figura 20: Animação do método da Exaustão



Fonte: Produzido pelo autor. Disponível em: https://youtu.be/Uoz2h5NtYL4

Animação 2: Método de Completar Quadrados

A animação começa com um fundo branco limpo, que cria um contraste nítido com os elementos que aparecerão. Surge, então, uma equação quadrática em letras grandes e amarelas: "$a\,x^2 + b\,x + c = 0$". Essa é a primeira introdução ao tema, e o espectador tem três segundos para absorver a informação antes de passar para a próxima etapa.

Em seguida, a equação se transforma suavemente, revelando uma forma alternativa: "$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{c}{a}\right) = 0$". Essa mudança é sutil, mas importante, e é acompanhada de uma pausa de dois segundos para que o público possa entender essa nova representação da equação.

Logo após, um quadrado vermelho aparece no centro da tela, simbolizando o termo x^2. Embaixo do quadrado, o texto "$Área$: x^2" surge, reforçando a ideia de que estamos lidando com uma área geométrica. Durante quatro segundos, a animação destaca a área do quadrado com um leve efeito de vibração, chamando a atenção do espectador.

Em seguida, um retângulo verde entra em cena, representando o termo linear da equação. O texto ao lado indica: "Dimensões: $\frac{b}{a}$", o que ajuda a conectar a parte algébrica com a representação geométrica. Novamente, a área do retângulo vibra suavemente, enfatizando sua relevância na compreensão do conceito, e isso acontece ao longo de mais quatro segundos.

Após a apresentação do retângulo, um quadrado azul surge na tela, simbolizando o complemento necessário para completar o quadrado. Ao lado, aparece o texto "$Área$: $\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$", que indica a importância desse complemento na transformação da equação. A área do quadrado azul também ganha um efeito vibrante, mantendo a atenção do público.

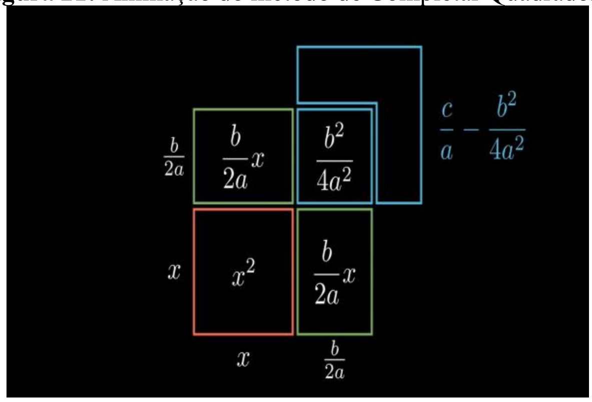
Na sequência, os retângulos verdes se movem e se transformam, ilustrando o processo geométrico de ajuste que ocorre ao completar o quadrado. O texto que aparece diz: "Ajustando para completar o quadrado", guiando o espectador sobre o que está acontecendo. Essa cena dura cinco segundos, permitindo uma visualização clara da dinâmica entre os elementos.

A cena culmina com a aparição de um quadrado roxo, que representa a nova forma da expressão: "$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ ". O texto surge com clareza, mostrando ao público que chegamos à expressão final do processo de completar quadrados. Essa parte dura quatro segundos, durante os quais a animação mantém a atenção do espectador.

As equações finais aparecem logo em seguida, exibindo: "$\frac{c}{a} - \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) = 0$" e "$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 * a * c}}{2a}$". Essas expressões ajudam a conectar a técnica de completar quadrados aos resultados práticos, e essa exibição ocorre ao longo de seis segundos.

Finalmente, a câmera se afasta, proporcionando uma visão geral da cena, enquanto o texto finaliza com uma mensagem inspiradora: "A Matemática se revela através da geometria!" Esta última cena dura cinco segundos, encerrando a animação de forma memorável.

Figura 21: Animação do método de Completar Quadrados



Fonte: Produzido pelo autor. Disponível em: https://youtu.be/ww2pSMeXDCw

Animação 3: Princípio de Cavalieri

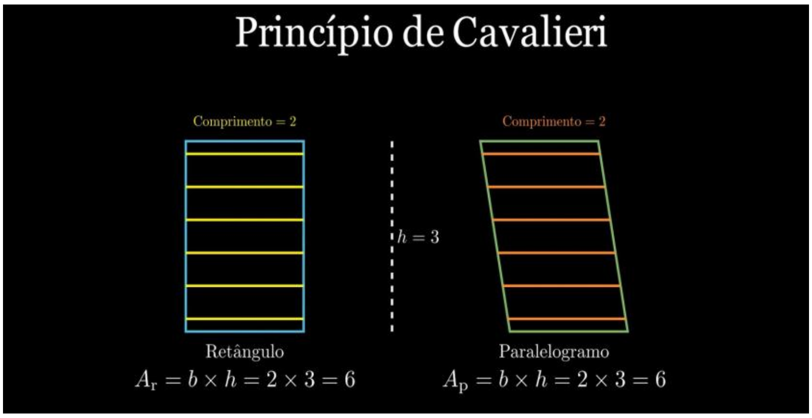
A animação começa com a apresentação do título "Princípio de Cavalieri" no topo da tela, seguido pela exibição da definição formal do princípio, que explica que duas figuras com a mesma altura e mesma largura em todos os pontos ao longo dessa altura possuem áreas iguais. Após três segundos, a definição desaparece, dando lugar à visualização das figuras geométricas.

Dois objetos aparecem simultaneamente: um retângulo azul no lado esquerdo e um paralelogramo verde no lado direito da tela, cada um com seu respectivo rótulo identificando-o. A demonstração principal começa quando seis linhas horizontais amarelas atravessam o retângulo de um lado para o outro, enquanto linhas laranjas correspondentes aparecem no paralelogramo, mostrando visualmente como cada fatia horizontal possui exatamente o mesmo comprimento em ambas as figuras em cada nível de altura.

Uma linha vertical tracejada branca surge entre as duas figuras, acompanhada pelo rótulo "$h = 3$", representando a altura comum a ambas as formas geométricas. Textos acima de cada figura confirmam que o comprimento de todas as fatias horizontais é igual a 2 unidades em ambos os casos.

Finalmente, os cálculos de área aparecem abaixo de cada figura, demonstrando matematicamente que tanto o retângulo quanto o paralelogramo possuem área igual a 6 unidades quadradas (2×3), comprovando visual e numericamente o Princípio de Cavalieri. A animação enfatiza como, apesar das formas diferentes, a equivalência nas dimensões das fatias horizontais em cada nível resulta necessariamente em áreas iguais.

Figura 22: Animação do Princípio de Cavalieri



Fonte: Produzido pelo autor. Disponível em: https://youtu.be/VibNRXWdWA0

Animação 4: Teorema Fundamental do Cálculo

A animação começa apresentando o título “Teorema Fundamental do Cálculo” no centro da tela. Depois de alguns segundos, esse título desaparece suavemente e dá lugar à explicação principal do teorema, que diz o seguinte: “Se f for integravel em $[a, b]$ e F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então $\int_a^a f(x)dx = F(b) - F(a)$" que significa, se uma função pode ser integrada em um determinado intervalo, e se existe outra função que representa a antiderivada dela naquele intervalo, então a área sob a curva pode ser calculada usando os valores dessa antiderivada nas extremidades do intervalo. Após essa explicação teórica, o texto também some da tela.

Em seguida, aparece um sistema de eixos cartesianos na parte inferior da tela. Nele, é desenhada uma curva azul, e em seguida aparece $f(x)$.

Logo depois, dois pontos a e b são destacados na base do gráfico, sobre o eixo x, marcando os limites inferior e superior do intervalo de integração. Esses pontos recebem pequenas legendas abaixo de cada um.

Com o intervalo definido, surgem quatro retângulos verdes sob a curva, espaçados igualmente, com base no eixo x e altura determinada pelo valor da curva $f(x)$ no início de cada subintervalo. Um desses retângulos é destacado com mais detalhes: aparecem uma linha indicando a base, outra mostrando a altura, e dois textos pequenos explicando que essas medidas representam a largura do intervalo (Δx) e o valor da função naquele ponto específico $(f(x_i^*))$.

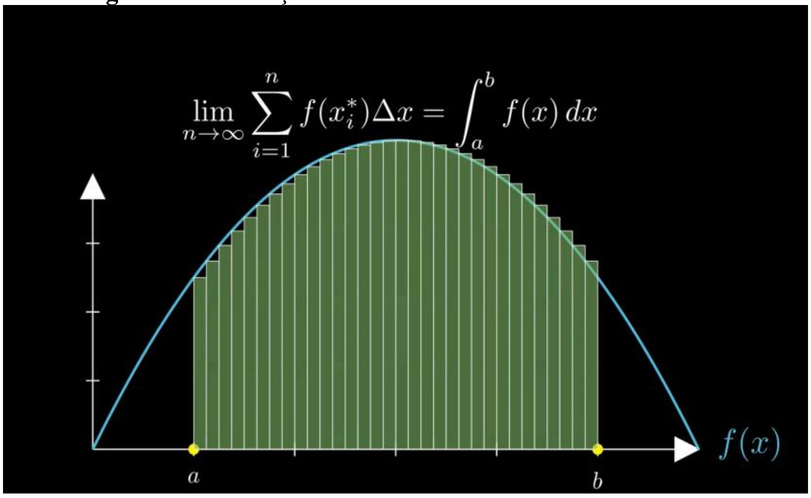
No topo do gráfico, aparece a descrição geral da ideia da soma de Riemann, que é a soma das áreas desses retângulos como uma aproximação da área total sob a curva, representada por $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$. Para tornar essa aproximação mais precisa, a animação mostra um aumento gradual no número de retângulos, de 4 para 8 , depois para dezesseis e, por fim, 32, tornando-os mais estreitos e numerosos, o que melhora a precisão visual da área representada.

Com isso, a expressão no topo muda para refletir a ideia de que, conforme o número de retângulos tende ao infinito, representada por $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$, essa soma se transforma exatamente na área sob a curva entre os dois pontos do intervalo, o que corresponde à $\int_a^b f(x)dx$, ou seja, integral definida da função.

Em seguida, os retângulos desaparecem da tela, sendo substituídos por uma área sombreada contínua entre os dois pontos marcados, mostrando de forma clara e visual que a integral representa a área sob a curva nesse intervalo.

Para finalizar, aparece a animação reforçando o resultado central do teorema, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, explicando que a integral da função nesse intervalo é igual à diferença entre os valores da função antiderivada no ponto final e no ponto inicial. A animação termina com essa ideia clara e visualmente destacada.

Figura 23: Animação do Teorema Fundamental do Cálculo



Fonte: Produzido pelo autor. Disponível em: https://youtu.be/RM_3L0dVXwY

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho de conclusão de curso teve como objetivo compreender de que maneira a articulação entre a História da Matemática e as Tecnologias Digitais pode contribuir para o ensino do conceito de área no Cálculo Integral. Inspirado em projetos de pesquisa em que estive inserido ao longo da graduação, esta investigação aprofundou-se na produção de vídeos matemáticos animados utilizando o Manim.

Partindo de uma fundamentação teórica robusta, foram resgatados episódios históricos que permearam a construção do conceito de área ao longo do tempo, desde Eudoxo, Arquimedes e Cavalieri até as formulações de Newton, Leibniz e Riemann. A historicidade do conceito não foi aqui tratada como um fim em si mesma, mas como um recurso didático capaz de inspirar metodologias mais reflexivas e situadas no tempo. A sistematização desses episódios, aliada à produção de animações digitais, permitiu construir uma linha narrativa visual que auxilia na compreensão conceitual do Cálculo Integral, historicamente enraizada e esteticamente acessível.

As animações produzidas neste trabalho demonstraram o potencial dos recursos visuais para tornar o aprendizado mais significativo. O Manim, embora exija conhecimentos prévios em programação, provou-se uma ferramenta poderosa na representação dinâmica de conceitos matemáticos. A experiência de codificar vídeos que representem processos matemáticos como o método da exaustão, o princípio de Cavalieri e o Teorema Fundamental do Cálculo proporcionou a mim uma nova forma de pensar o ensino da Matemática: menos linear, mais visual, mais conectado à linguagem dos estudantes.

Do ponto de vista pedagógico, acreditamos que a abordagem utilizada neste trabalho contribui para uma Educação Matemática mais contextualizada, interdisciplinar e crítica. A interseção entre História da Matemática, programação e visualização gráfica instiga novas práticas formativas, tanto para o estudante quanto para o futuro professor. Nesse sentido, este trabalho também dialoga com as propostas da educação STEAM, integrando ciência, tecnologia, engenharia, artes e matemática como linguagens complementares para a construção do conhecimento.

No entanto, reconhecemos que esta pesquisa tem suas limitações. Por se tratar de uma monografia de conclusão de curso, não foi possível realizar uma implementação em sala de aula com avaliação empírica dos vídeos produzidos. Além disso, a curva de aprendizagem do Manim, somada à necessidade de conhecimento em Python, pode ser uma barreira para docentes que não dominam tais tecnologias. Isso aponta para a necessidade de capacitação continuada e de uma maior inserção das linguagens de programação na formação inicial de professores, no componente de Introdução à Informática.

Como desdobramento desta investigação, abrem-se caminhos promissores para aprofundamentos futuros. Sugere-se expandir o uso do Manim para abordar visualmente outros tópicos do Cálculo Diferencial e Integral, investigar empiricamente os efeitos das animações produzidas sobre o aprendizado dos estudantes em contextos escolares ou de formação docente, desenvolver programas de capacitação voltados para o ensino de programação aplicada à Educação Matemática, criar comunidades colaborativas online que compartilhem e analisem recursos didáticos visuais com base em História da Matemática e disponibilizar os vídeos produzidos em plataformas abertas, promovendo o acesso democrático a materiais inovadores e instigando redes de troca entre educadores.

Conclui-se, portanto, que a História da Matemática, aliada às Tecnologias Digitais, especialmente no contexto da produção de vídeos com o Manim, constitui-se como uma estratégia promissora para o ensino do Cálculo. Para além das fórmulas e algoritmos, ensinar Matemática é também contar histórias, despertar curiosidades e criar pontes entre o conhecimento ancestral e os desafios do presente. É nessa travessia entre a rigidez formal e a fluidez da inovação que reside a potência transformadora deste trabalho.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Marcio Vieira de. **Material para o ensino do cálculo diferencial e integral**: referências de Tall, Gueudet e Trouche. 2017. 261 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/20263. Acesso em: 15 jan. 2025.

ALONSO, Erasto Piedade. **Aspectos visuais e gráficos do teorema fundamental do cálculo**. 2017. 193 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) — Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: https://pemat.im.ufrj.br/producao-cientifica/dissertacoes/2017/142-aspectos-visuais-e-graficos-do-teorema-fundamental-do-calculo. Acesso em: 15 jan. 2025.

ANJOS, Isabela Matias dos. **O quiz interativo digital na identificação de dificuldades de aprendizagem em cálculo I**. 2023. 114 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2023. Disponível em: http://www.repositorio.ufop.br/jspui/handle/123456789/16536. Acesso em: 15 jan. 2025.

BACKENDORF, Viviane Raquel. **Abstração reflexionante e matemática dinâmica**: compreensão do conceito de integral dupla. 2020. 127 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/220418. Acesso em: 15 jan. 2025.

BARON, Margaret E. **The origins of the infinitesimal calculus.** Reprint of the 1969 ed. Mineola, New York: Dover Publications, 1987.

BARON, Margaret E.; BOS, H. J. M. **Curso de história da matemática:** origens e desenvolvimento do cálculo. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985. 5 v. Ilustrado. Título original: History of mathematics: origins and development of the calculus.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

BONGIOVANNI, V. As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido: a teoria das proporções e o método de exaustão. **Unión**: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Madri, n. 2, p. 91-110, 2025. Disponível em: https://mail.revistaunion.org/index.php/UNION/article/download/1389/1088/. Acesso em: 15 jan. 2025.

BORBA, Marcelo Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

BORBA, Marcelo C.; SILVA, Ricardo Scucuglia R. da; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**. São Paulo: Autêntica, 2021.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SOUTO, Daise Lago Pereira; CANEDO JUNIOR, Neil da Rocha. **Vídeos na educação matemática**: Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2022.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRITO, Celso Eduardo. **Estudo do centro de massa em cálculo diferencial e integral**: uma abordagem didática envolvendo recursos tecnológicos. 2019. 614 f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufba.br/handle/ri/31304. Acesso em: 6 jan. 2025.

BYRNE, Oliver. **The first six books of the elements of Euclid**, in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners. London: William Pickering, 1847. Disponível em: https://www.math.uci.edu/~ndonalds/Elements-I-VI.pdf. Acesso em: 2 abr. 2025.

CARMO, João Victor Gonçalves do. **Práticas experimentais de cálculo com calculadoras**. 2023. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2023. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/entities/publication/455bd057-2305-4b3c-93a6-7f4329809747. Acesso em: 15 jan. 2025.

CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne C. A Proposição XXXIV do Livro I dos Elementos de Oliver Byrne no GeoGebra. **Paradigma**, Maracay, v. 45, p. e2024016, 2024. Disponível em: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024016.id1529. Acesso em: 15 jan. 2025.

CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne C. Projeto AM²: Animações Matemáticas com Manim. **Paradigma**, Maracay, v. 46, n. 1, p. e2025009, jan./jun. 2025. Disponível em: https://revistaparadigma.com.br/index.php/paradigma/article/view/1623. Acesso em: 2 jul. 2025.

CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne C. Uso de Python no ensino de matemática: PyGgb e Manim. **ReTEM – Revista Tocantinense de Educação Matemática**, Arraias, v. 1, p. e23006, jan./dez. 2023. Disponível em: https://doi.org/10.63036/ReTEM.2965-9698.2023.v1.163. Acesso em: 15 jan. 2025.

CASTILLO, Luis Andres; SÁNCHEZ, Ivonne C.; TEIXEIRA, Lucas Santos. Projeto AM2: Animações Matemáticas com Manim. In: ENCONTRO NACIONAL ONLINE DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA, 5., 2024, Barra do Bugres. **Anais [...]**. Barra do Bugres: GEPEME/UNEMAT, 2024. p. 1114-1127. ISBN: 978-65-01-810783-7. Disponível em: https://eventos.faepenmt.com.br/venopem/. Acesso em: 15 abr. 2025.

COÊLHO, Iara Martins; TEIXEIRA, Lucas Santos; CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne C. Uma caracterização das monografias da licenciatura de matemática da UFT - Arraias (2019 – 2023). **ReTEM – Revista Tocantinense de Educação Matemática**, Arraias, v. 2, p. e24007, 2024. Disponível em: https://ojs.sbemto.org/index.php/ReTEM/article/view/67. Acesso em: 2 abr. 2025.

COÊLHO, Iara Martins; TEIXEIRA, Lucas Santos; CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto. História da matemática e geometria dinâmica: um novo olhar ao teorema de Viviani para o ensino médio. **Journal of Education Science and Health**, [S. l.], v. 3, n. 1, p. 1-15, 2023. Disponível em: https://doi.org/10.52832/jesh.v3i1.178. Acesso em: 2 abr. 2025.

COLUCI, Vitor R. Animações de conceitos da teoria de erros usando Manim/Python. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 44, p. e20210239, 2022. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2021-0239. Acesso em: 2 abr. 2025.

COSTA, Sandra Regina Santana; DUQUEVIZ, Barbara Cristina; PEDROZA, Regina Lúcia Sucupira. Tecnologias Digitais como instrumentos mediadores da aprendizagem dos nativos digitais. **Psicologia Escolar e Educacional**, São Paulo, v. 19, n. 3, p. 603-610, set./dez. 2015. Disponível em: https://doi.org/10.1590/2175-3539/2015/0193912. Acesso em: 2 abr. 2025.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

FARIAS, Maria Margarete do Rosário. **Introdução a noções de cálculo diferencial e integral no ensino médio no contexto das TIC:** implicações para a prática do professor que ensina matemática. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2015. Disponivel em: https://repositorio.unesp.br/entities/publication/84d0bc09-a966-48aa-8312-fe61d88b1939. Acesso em: 15 jan. 2025.

FERRÃO, Naíma Soltau. **Mapas conceituais digitais como elemento sinalizador da aprendizagem de cálculo diferencial e integral**. 2013. 114 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013. Disponível em: https://tede.pucsp.br/handle/handle/10965. Acesso em: 15 jan. 2025.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FONTES, Bárbara Cunha *et al*. Educação Matemática e Vídeos Digitais: diálogos, reflexões e análises. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2019, Cuiabá. **Anais [...]**. Cuiabá: SBEM, 2019. p. 1-8. Disponível em: https://igce.rc.unesp.br/Home/Pesquisa58/gpimem-pesqeminformaticaoutrasmidiaseeducacaomatematica/xiii_enen-trabalho_fontes_canedo_ferreira_domingues_borba.pdf. Acesso em: 15 jan. 2025.

FOSSA, John A. Recursos pedagógicos para o ensino da matemática a partir das obras de dois matemáticos da Antiguidade. In: MENDES, Iran Abreu; FOSSA, John; NÁPOLES VALDÉS, Juan E. (org.). **A história como um agente de cognição na educação matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006. p. 79–136.

GOMES, Anna Beatriz de Andrade; SOUSA, Giselle Costa de. Apontamentos de temas geométricos para atividades-históricas-com-tecnologias. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 8, n. 22, p. 117–130, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.30938/bocehm.v8i22.4701. Acesso em: 10 abr. 2025.

GONZALEZ, Heather B.; KUENZI, Jeffrey J. **Science, Technology, Engineering, and Mathematics (STEM) Education**: A Primer. [S. l.]: Congressional Research Service, 2012.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MARQUES, Edinelson Rocha; CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne C.; SMITH, Daniele Esteves Pereira. Método de exaustão de Arquimedes via GeoGebra: uma atividade para o ensino da matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 11, n. 31, p. 1–18, 2024. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/10997. Acesso em: 10 abr. 2025.

MENDES, Iran Abreu. A investigação histórica como agente de cognição matemática na sala de aula. In: MENDES, Iran Abreu; FOSSA, John; NÁPOLES VALDÉS, Juan E. (org.). **A história como um agente de cognição na educação matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006. p. 79–136.

MENDES, Iran Abreu. **História da matemática no ensino**: entre trajetórias profissionais, epistemologia e pesquisas. São Paulo: Livraria da Física, 2015. (Coleção história da matemática para professores).

MENDES, Iran Abreu. História para o ensino de matemática: fundamentos epistemológicos, métodos e práticas. **Cocar**, Belém, v. 16, n. 34, p. 1-26, jul. 2022. Edição Especial. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/242795. Acesso em: 10 abr. 2025.

MESSIAS, M. A. de V. F.; BRANDEMBERG, J. C.; MORAES, M. S. F. de. Potencialidades de uma abordagem histórica do cálculo para o ensino dos conceitos de limite e continuidade de uma função. **Areté - Revista Amazônica de Ensino de Ciências**, Manaus, v. 19, n. 33, p. 1-22, 2023. Disponível em: https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n33.3967. Acesso em: 12 abr. 2025.

MILIES, Francisco César Polcino; BUSSAB, José Hugo de Oliveira. **A geometria na antiguidade clássica**. São Paulo: FTD, 1999.

MORAES, M. S. F. de. **Processos de superação dos obstáculos epistemológicos na história do conceito de limite de função**: potencialidades conceituais e didáticas para a formação de professores de matemática. 2021. 268 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2021. Disponível em: https://ri.ufmt.br/handle/1/5859. Acesso em: 10 jan. 2025.

PARANHOS, Marcos de Miranda. **Parametrização e movimentação de curvas e superfícies para uso em modelação matemática**. 2015. 154 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015. Disponível em: https://ariel.pucsp.br/handle/handle/11029. Acesso em: 15 jan. 2025.

PEREIRA, Giselle Moraes Resende. **Cálculo diferencial e integral no curso de agronomia**: uma perspectiva de trabalho de projetos com modelagem matemática e tecnologias digitais de informação e comunicação. 2019. 321 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/27813. Acesso em: 15 jan. 2025.

PERKINS, David. **Calculus and its origins**. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2012. (MAA Spectrum Series).

PIRES, Luiz Fernando Rodrigues. **As influências das tecnologias da informação e comunicação nas estratégias de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral**. 2016. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/3663. Acesso em: 15 jan. 2025.

PREVOT, Fulvio Bianco. **Uma abordagem com uso de M-Learning na aprendizagem de cálculo diferencial e integral em cursos de engenharia baseada em ABP e modelagem matemática**. 2019. 250 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2019. Disponível em: https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UNICSUL-1_219a576a1af3e4caadc6a48473ac2cc1. Acesso em: 15 jan. 2025.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do trabalho científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

REIS, Hailton César Alves dos. **O emprego do softwere Maple como ferramenta educacional de ensino-aprendizagem de cálculo diferencial e integral por meio do ensino híbrido, formato flex**. 2022. 134 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Fundação Universidade Federal de Rondônia, Ji-Paraná, 2022. Disponível em: https://ri.unir.br/jspui/handle/123456789/3580. Acesso em: 15 jan. 2025.

SÁNCHEZ, Ivonne C.; CASTILLO, Luis Andrés. Uma antiga demonstração do teorema de Pitágoras desde a perspectiva da geometria dinâmica. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 9, n. 26, p. 214-226, 2022. Disponível em: https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8030. Acesso em: 10 abr. 2025.

SÁNCHEZ, Ivonne C.; CASTILLO, Luis Andrés; MENDES, Iran Abreu. Conexões históricas e epistemológicas entre a Oxytome e a elipse: implicações para o ensino de seções cônicas. **CoInspiração – Revista dos Professores que Ensinam Matemática**, Porto Alegre, v. 7, p. e2024003, 2024. Disponível em: https://doi.org/10.61074/CoInspiracao.2596-0172.e2024003. Acesso em: 10 abr. 2025.

SÁNCHEZ, Ivonne C.; CASTILLO, Luis Andrés; MENDES, Iran Abreu. História da matemática e tecnologias digitais: do que tratam três décadas de teses e dissertações? **Paradigma**, Maracay, v. 42, n. 2, p. 183-205, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p183-205.id1064. Acesso em: 10 abr. 2025.

SÁNCHEZ, Ivonne C.; CASTILLO, Luis Andrés. Métodos históricos para determinar a equação da Orthotome à parábola. **Revista Prática Docente**, Confresa, v. 9, p. e24011, 2024. Disponível em: https://doi.org/10.23926/RPD.2024.v9.e24011.id893. Acesso em: 10 abr. 2025.

SÁNCHEZ, Ivonne C.; MENDES, Iran Abreu; CASTILLO, Luis Andrés. Atividades históricas com geogebra para explorar a representação geométrica do cone. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, v. 11, n. 1, p. e23117, 2023. Disponível em: https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16866. Acesso em: 10 abr. 2025.

SANDERS, Mark. STEM, STEM Education, STEMmania. **The Technology Teacher**, [Reston], p. 20-26, Dec./Jan. 2009.

SANTOS, Jonata Souza dos. **Sequência didática digital com a temática derivadas – um experimento no ensino superior**. 2021. 256 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2021. Disponível em: http://www.ppgecim.ulbra.br/teses/index.php/ppgecim/article/view/384. Acesso em: 15 jan. 2025.

SCHAUN, Thaise Thurow. **As representações tridimensionais das superfícies quádricas na disciplina de cálculo com realidade aumentada**. 2019. 90 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2019. Disponível em: http://guaiaca.ufpel.edu.br/handle/prefix/6573. Acesso em: 15 jan. 2025.

SILVA, Alison Luan Ferreira da; SOUSA, Giselle Costa de. Investigação-histórica-com-tecnologia para a unidade de números, probabilidade e estatística no 8º ano: o caso do princípio da casa dos pombos de dirichlet. **Revista História da Matemática para Professores**, [Natal], v. 6, n. 1, p. 14-23, 2020. Disponível em: https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/47. Acesso em: 10 abr. 2025.

SILVA, Alison Luan Ferreira da. **História da matemática, tecnologias digitais e investigação matemática no ensino de unidades temáticas de matemática da BNCC para o 8º ano**. 2019. 247 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/items/50fa2c4c-3423-4757-81f9-208d86f242e5. Acesso em: 15 jan. 2025.

SILVA, Armando Paulo da. **A modalidade EaD semipresencial e a disciplina de cálculo diferencial e integral**. 2017. 227 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru, 2017. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/148813. Acesso em: 15 jan. 2025.

SILVA, Otto Henrique Martins da. **Uma contribuição pedagógica da visualização dinâmica no ensino e na aprendizagem de cálculo diferencial e integral**. 2021. 300 f. Tese (Doutorado em Educação) – Escola de Educação e Humanidades, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2021. Disponível em: https://pergamum-biblioteca.pucpr.br/acervo/358998?_gl=1*1ukq4a5*_gcl_au*Nzg5NTYyMDUxLjE3NzU4NDIyNjM.*_ga*NjcxMjQ5MTM1LjE3NzU4NDIyNjY.*_ga_11M5C4PYGB*czE3NzU4N

DIyNjYkbzEkZzAkdDE3NzU4NDIyODkkajM3JGwwJGg5NDY5NzA5Njc. Acesso em: 15 jan. 2025.

SILVA, Ronalda Pereira da. **Arquimedes e o método**. 2014. 95 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2014. Disponível em: https://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/2418/1/Arquimedes%20e%20o%20m%C3%A9todo.pdf. Acesso em: 15 jan. 2025.

SOUSA, Giselle Costa de. História da matemática em alianças com tecnologias digitais. **REMATEC - Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, [Natal], v. 18, n. 44, p. e2023005, 2023. Disponível em: https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n44.pe2023005.id510. Acesso em: 10 abr. 2025.

SOUZA, Antônio Aparecido Alves de. **Do castelo de esperas à chegada da tecnologia**: o uso do graphmática para o ensino de cálculo. 2015. 107 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário Univates, Lajeado, 2015. Disponível em: https://www.univates.br/bdu/items/86779bb3-9a4f-471e-8638-f711ce5869d7. Acesso em: 5 jan. 2025.

TEIXEIRA, Lucas Santos *et al*. Animações para o ensino do cálculo diferencial com Manim. *In*: VIZOLLI, Idemar; COSTA, Dailson Evangelista; MORAES, Mônica Suelen Ferreira de (org.). **A formação e o trabalho do professor-pesquisador em educação matemática**. Palmas: SBEM-TO, 2024. p. 516-523. Disponível em: https://ojs.sbemto.org/index.php/iiietem/article/view/405. Acesso em: 10 abr. 2025.

TEIXEIRA, Lucas Santos *et al*. Uma exploração do Teorema de Stewart com GeoGebra: do estático ao dinâmico. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, v. 9, n. 2, p. e2002, 2023. Disponível em: https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6467. Acesso em: 10 abr. 2025.

TEIXEIRA, Lucas Santos; COSTA, Eudes Antonio da. A regra de Cramer como ferramenta didática no ensino de sistemas de equações lineares 2x2 mediado pelo GeoGebra. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2025, Manaus. **Anais...** Manaus: UFAM, 2025. Disponível em: https://www.even3.com.br/anais/anaisenem/1065757-a-regra-de-cramer-como-ferramenta-didatica-no-ensino-de-sistemas-de-equacoes-lineares-2x2-mediado-pelo-geogebra. Acesso em: 10 abr. 2026.

TEIXEIRA, Lucas Santos; COSTA, Eudes Antonio. Explorando o limite intuitivo e o paradoxo de Zenão com GeoGebra e Python. *In*: VIZOLLI, Idemar; COSTA, Dailson Evangelista; MORAES, Mônica Suelen Ferreira de (org.). **A formação e o trabalho do professor-pesquisador em educação matemática**. Palmas: SBEM-TO, 2024. p. 3 65-370523. Disponível em: https://ojs.sbemto.org/index.php/iiietem/article/view/405. Acesso em: 10 abr. 2025.

TEIXEIRA, Lucas Santos *et al*. Animações matemáticas com Manim para abordar o método de completar quadrados. *In*: VIZOLLI, Idemar; COSTA, Dailson Evangelista; MORAES, Mônica Suelen Ferreira de (org.). **A formação e o trabalho do professor-pesquisador em educação matemática**. Palmas: SBEM-TO, 2024. p. 507-515. Disponível em: https://ojs.sbemto.org/index.php/iiietem/article/view/405. Acesso em: 10 abr. 2025.

THOMSEN, Marianne; JANKVIST, Uffe Thomas; CLARK, Kathleen Michelle. The interplay between history of mathematics and digital technologies: a review. **ZDM – Mathematics Education**, [Berlin], v. 54, n. 7, p. 1427-1443, 2022. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s11858-022-01368-0. Acesso em: 10 abr. 2025.

VALENTE, José Armando. (org.). Informática na educação no Brasil: análise e contextualização histórica. In: VALENTE, J.A. (org.). **O computador na sociedade do conhecimento**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação a Distância, Programa Nacional de Informática na Educação, 1999.

WAIDEMAN, Adriele Carolini. **Um aplicativo para o estudo de derivadas**. 2018. 173 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2018. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/3839. Acesso em: 15 jan. 2025.

XIE, Yu; FANG, Michael; SHAUMAN, Kimberlee. STEM Education. **Annual Review of Sociology**, [Palo Alto], v. 41, p. 331-357, 2015. Disponível em: https://doi.org/10.1146/annurev-soc-071312-145659. Acesso em: 10 abr. 2025.