UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS Prof. Dr. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

RONEY FELICIANO DA SILVA

O ENSINO DE ÁLGEBRA: ALGUMAS QUESTÕES DO ENEM E DA OBMEP

ARRAIAS - TO
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS Prof. Dr. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

RONEY FELICIANO DA SILVA

O ENSINO DE ÁLGEBRA: ALGUMAS QUESTÕES DO ENEM E DA OBMEP

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa

ARRAIAS - TO
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S586e Silva, Roney Feliciano da.
O Ensino de Álgebra : Algumas Questões do ENEM e OBMEP. / Roney Feliciano da Silva. – Arraias, TO, 2017.
78 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2017.

Orientador: Dr Eudes Antonio da Costa

1. Polinômios. 2. Álgebra . 3. ENEM. 4. OBMEP. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS Prof. Dr. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

PROFMAT

RONEY FELICIANO DA SILVA

O ENSINO DE ÁLGEBRA: ALGUMAS QUESTÕES DO ENEM E DA OBMEP

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho APROVADO em 29 de Abril de 2017:

BANCA EXAMINADORA

Eudes Antonio

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa (UFT)
Orientador - Presidente da banca

Rui Seimetz

Prof. Dr. Rui Seimetz (UnB)
1º membro da banca

Keidna Cristiane O. Souza

Prof. Dra. Keidna Cristiane Oliveira Souza (UFT)
2º membro da banca

ARRAIAS - TO
2017

Aos meus pais e irmãos.
Aos amigos, pelo apoio e companheirismo.

Agradecimentos

A DEUS pelo dom da vida, sabedoria e saúde.

De modo especial aos meus pais Desli Feliciano e Rosa Neide pelo apoio, incentivo, orientação e motivação.

Aos meus irmãos, Edna Maria, Edilma Aparecida e Vanderli Feliciano, vocês foram muito importante durante toda esta caminhada, sem palavras para agradecer o que fizeram por mim.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Eudes Antonio, que fez de tudo para estarmos concretizando este trabalho, o meu muito obrigado! Espero que você seja retribuído pelo seu esforço, dedicação e paciência.

Aos ilustres colegas do mestrado, pelo companheirismo nestes dois anos de muito estudo e esforço. Serei eternamente grato a vocês que incentivaram e contribuíram com o meu aprendizado durante o curso.

A todos os professores do programa PROFMAT da UFT Arraias, por terem contribuído para o meu crescimento intelectual. A esta instituição e seus servidores pela oportunidade de fazer desse sonho uma realidade e a todos que me ajudaram direto ou indiretamente para realização deste trabalho.

"Matemática não é apenas números, e sim envolve letras e toda a capacidade que o ser humano conseguir expressar."

(François Viète)

Resumo

Este trabalho apresenta algumas concepções sobre a álgebra e o ensino dela no ensino médio. Tais concepções sob uma análise curricular da educação básica no Brasil, com relação aos conteúdos algébricos. Visando contribuir com a formação de professores de Matemática do Ensino Básico apresentamos um estudo sobre os polinômios no qual elencamos algumas propriedades. Abordamos algumas ideias para o ensino de álgebra (anel polinomial), destacamos a localização das raízes de equações polinomiais e sua aplicação e apresentamos alguns métodos para resolução de equações polinomiais do 2º grau. Salientamos a importância do ensino de álgebra (polinômios e funções polinomiais) e sua presença em duas grandes avaliações nacionais, Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), evidenciando os conteúdos algébricos em algumas questões dessas avaliações e apresentando a resolução sob uma organização de três componentes fundamentais para o ensino de matemática: Conceituação, Manipulação e Aplicação.

Palavras-chaves: Polinômios. Álgebra. ENEM. OBMEP.

Abstract

This work presents some conceptions about algebra and her teaching in high school. Such conceptions under a curricular analysis of basic education in Brazil, with respect to algebraic contents. Aiming to contribute to the formation of Mathematics teachers in Basic Education we present a study on the polynomials in which we list some properties. We address some ideas for the teaching of algebra (polynomial ring), we highlight the location of the roots of polynomial equations and their application and we present some methods for solving polynomial equations of 2º degree. We highlight the importance of teaching algebra (polynomials and polynomial functions) and its presence in two large national assessments, the National High School Examination (ENEM) and the Brazilian Mathematics Olympiad of Public Schools (OBMEP), highlighting the algebraic contents in some of these questions Assessments and presenting the resolution under an organization of three fundamental components for the teaching of mathematics: Conception, Manipulation and Application.

Key-words: Polynomials. Algebra. ENEM. OBMEP.

Lista de abreviaturas e siglas

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OCDE	Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Econômico
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudante
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
OCEM	Orientações Curriculares do Ensino Médio
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
RCTO	Referencial Curricular do Estado do Tocantins
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
UFT	Universidade Federal do Tocantins
UnB	Universidade de Brasília
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
a.C	antes de Cristo
km	quilômetros
min	minuto
h	hora
mdc	máximo divisor comum
$m.m.c$	minímo multiplo comum
mdc	minímo multiplo comum
Prof	professor
Dr	doutor
Dra	doutora

Lista de símbolos

$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\sum$	somatório
gr	grau do polinômio
$\phi(x)$	polinômio nulo
$\cup$	união
$\subset$	está contido
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	se e somente se
$\geq$	maior ou igual
$\leq$	menor ou igual
$\in$	pertence
$\neq$	diferente
$\equiv$	idêntico a
π	Pi, $\pi = 3,14159265...$
°C	grau Celsius

Sumário

INTRODUÇÃO

Diante das mudanças sociais e educacionais presentes, partindo do princípio que a educação básica tem por finalidade desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores como apregoa os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Considerando a necessidade constante de atualização do elemento crucial para transmissão do conhecimento matemático, que é o professor, foram fatores que motivaram a elaboração deste trabalho.

O estudo foi elaborado de maneira sequencial. No primeiro capítulo fazemos um levantamento curricular dos conhecimentos prévios que esperam ser adquiridos pelos alunos e as dificuldades que estes apresentam em relação aos conteúdos algébricos na educação básica. No segundo capítulo apresentamos aqueles conceitos que envolvem as funções polinomiais com diversos exemplos e aplicações no cotidiano, levando ao objetivo final que é o aprimoramento do conhecimento em álgebra.

Apresentamos no terceiro capítulo exemplos, no qual fazemos uso de uma liguagem algébrica acessível aos estudantes, que tornasse simples a resolução, objetivando mostrar a coerência com a teoria abordada. Além disso, tentamos elucidar no quarto capítulo, situações motivadoras devido a grande abragência e importâcia do ENEM e OBMEP no Brasil, apresentando a resolução de algumas questões, destacando também a importância das componentes fundamentais para o ensino de matemática, Conceituação, Manipulação e Aplicação.

Uma proposta deste trabalho foi mostrar que a complexidade de algumas questões das provas do ENEM (Questões de Matemática) e OBMEP pode caminhar em direção a aprendizagem, no sentido de fornecer melhor suporte para o estudo da álgebra, tornando viável a utilização de questões interessantes, que relaciona principalmente com artimética, geometria, trigonometria entre outras.

De acordo com o professor Elon (1, 2007, pág. 02) quando questionado, por que o ensino da matemática vai tão mal, ele responde “não apenas o ensino de matemática que vai mal, mas todo o ensino vai mal” e ainda resalta que “qualquer criança cuja capacidade mental lhe permita aprender a ler e escrever é também capaz de aprender a matemática que se ensina no ensino básico.”

1 A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DE ÁLGEBRA

Como conhecemos hoje, a álgebra clássica, é o resultado de mais de 4000 anos de desenvolvimento, enquanto álgebra moderna só apareceu nos últimos 200 anos. Evidência de estudo egípcio de álgebra clássica é datado de 1650 a.C. Assim o estudo da álgebra foi desenvolvido no período babilônico antigo entre 1800 e 1600 a.C bem como durante o período clássico grego de 500 a.C a 323 a.C. Álgebra de hoje é o resultado de um estudo mais aprofundado por hindus, árabes e acadêmicos europeus.

1.1 Concepções sobre álgebra e utilização das variáveis

Segundo Fiorentini e outros (2, 1993), a álgebra divide-se em álgebra clássica elementar e álgebra moderna abstrata. A primeira insiste em considerar a álgebra como uma aritmética universal ou generalizada; a outra entende a álgebra como um "sistema cujos símbolos e regras operatórias sobre eles são de natureza essencialmente arbitrária" (2, 1993, pág 78).

Ainda em Fiorentini e outros (2, 1993), temos que a álgebra clássica envolve símbolos que representam grandezas, são então combinados de acordo com as operações. A segunda categoria de álgebra, álgebra abstrata, envolve estudos muito mais sofisticados, em que vetores, números complexos e as matrizes são manipuladas usando equações e operações comparáveis às operações aritméticas.

Conforme Milies (3, 2004), o uso de letras para representar classes de números e assim tratar das equações de forma mais geral demorou a ser aceito. Um aperfeiçoamento desta notação foi devido a René Descartes (1596-1650) que, utilizou pela primeira vez a prática hoje usual de utilizar as primeiras letras do alfabeto para representar quantidades conhecidas e as últimas, como x, y e z para as incógnitas.

De acordo com Fiorentini e outros (2, 1993), na década de 1960, o movimento da matemática moderna surgiu com a proposta de superar os problemas enfrentados no ensino da matemática até então. Naquele momento, ocorre um destaque para a álgebra (teoria dos conjuntos e operações) e um relativo abandono da geometria. Na tentativa de superar o ensino mecânico da matemática, a álgebra passou a ocupar um lugar de destaque, por ser considerado um ensino mais linguístico.

A introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problemas concretas permite que o aluno veja uma outra utilidade para as letras ao identificá-las como números de um conjunto numérico, úteis para representar generalizações. Sobre a utilização das variáveis, os PCNs (4, 1998) registra que:

> A noção de variável, de modo geral, não tem sido explorada no ensino fundamental e por isso muitos estudantes que concluem esse grau de ensino (e também o médio) pensam que a letra em uma sentença algébrica serve sempre para indicar (ou encobrir) um valor desconhecido, ou seja, para eles a letra sempre significa uma incógnita. (4, 1998, pág. 118).

Ainda nos PCNs (4, 1998), recomenda-se que no início do ensino fundamental deve desenvolver uma pré-álgebra mas, é especialmente nos anos finais que os trabalhos algébricos devem ser ampliados. Desenvolvendo um trabalho com situações-problemas, o aluno reconhecerá diferentes proposições da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar, representando problemas por meio de equações identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a "sintaxe" (regras para resolução) de uma equação.

De acordo com Oliveira e Laudares (5, 2015), o conceito de variável depende de dois processos: o de generalização que permite a passagem de situações concretas para aquilo que é comum a todas elas e a simbolização que é uma forma reduzida de expressar essa característica comum a todas as situações. O conceito de generalização pode ser desenvolvido ainda no Ensino Fundamental, por meio de atividades que trabalham com padrão sem a necessidade de apresentação formal da álgebra, entretanto esse desenvolvimento já pode servir para um amadurecimento de tal conceito.

Uma vez que não são raros os equívocos por parte do aluno nas interpretações de variável e incógnita, dar ênfase nas aplicações ajudaria a se apropriar do conceito, contribuindo para a compreensão da utilização dos símbolos nos conteúdos da álgebra, bem como interpretar, dar significados e explorar a linguagem algébrica, por mais simples que possa parecer, o vício na utilização de algumas letras,[1] pode dificultar essa compreensão, conforme Valentino (6, 2004).

> O uso constante de x, y e z para representar incógnitas de uma equação e a pouca utilização de outras letras, que, quando utilizadas causam estranheza ao aluno, representam um obstáculo para a própria compreensão do conceito de variável. O uso da mesma letra pode 'engessar' a compreensão do aluno no sentido de perceber que uma mesma letra expressa idéias diferentes, ora como incógnita, ora como variável. (6, 2004, pág.5).

Segundo Oliveira e Laudares (5, 2015), quando o estudante entende que as variáveis podem se comportar como incógnitas elas representam valores fixos, determináveis pelas condições fornecidas pela equação ou que variáveis é uma quantidade indeterminada, cujo valor varia de acordo com outra quantidade que também é variável, mas dependendo do contexto matemático, pode ser que fique mais claro essa ideia. Porém, nem sempre o estudante consegue perceber essa diferença entre variável e incógnita, o que dificulta ou praticamente impede que este desenvolva o pensamento algébrico.

[1] Neste trabalho, por considerar sua finalidade acadêmica, utilizaremos rotineiramente as mesmas letras por uma questão de uniformidade

> Não adiantará por uma variável à frente de uma criança até que esta a veja variar. Quando a variável tiver realmente variado na experiência da criança, então haverá sentido colocar o nosso número escolhido, em lugar de todos os números diferentes que já representaram o nosso número escolhido, e não será necessário muito tempo para convencê-la de que, como economia de expressão, pode usar-se uma letra-código para o nosso número escolhido. (7, 1974, pág.70).

Coxford e Shulte (8, 1995, pág. 20) alerta que, "As diferentes concepções da álgebra relacionam-se com os diferentes usos das letras." A seguir apresentamos o resumo esquematizado por estes autores:

Concepção da Álgebra	**Uso das Variáveis**
Aritmética Generalizada	Generalizadores de Modelos (traduzir, generalizar)
Meio de Resolver Certos Problemas	Incógnitas, Constantes (resolver, simplificar)
Estudo de Relações	Argumentos, Parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais Arbitrários no Papel (manipular, justificar)

Assim consideremos as seguintes equações, todas com a mesma forma: o produto de dois números é igual a um terceiro:

$$(I): \ A = bh$$
$$(II): \ 40 = 50x$$
$$(III): \ \operatorname{sen}(x) = \cos(x)\operatorname{tg}(x)$$
$$(IV): \ 1 = n.\frac{1}{n}, \quad n \neq 0$$
$$(V): \ y = kx$$

No entanto, cada uma delas tem um carácter diferente, a saber:

Em (I), se considerarmos a e b números positivos, A pode ser a área de um retângulo dada em função da multiplicação da base b pela altura h, essas letras tem caráter conhecidos.

Já em (II), temos que neste tipo de equação um valor a ser determinado para a incógnita x, de maneira que a igualdade seja satisfeita.

Em (III) estabelece-se uma relação entre a função $\operatorname{sen}(x)$ com o produto das funções $\cos(x)$ e $\operatorname{tg}(x)$, sendo x o argumento da função.

Na equação (IV) ao contrário das outras, generaliza uma propriedade aritmética.

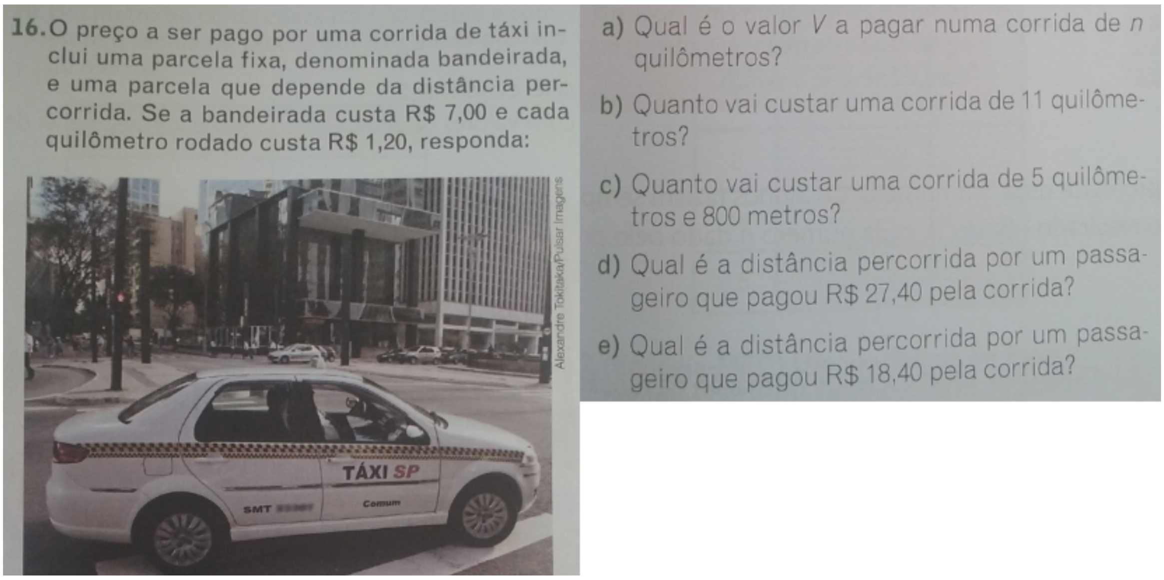
Em (V), x é o argumento de uma função y, e o valor k uma constante ou parâmetro dependendo de como é usada.

A concepção de álgebra como estudo de estruturas, nos cursos superiores, e envolve o estudo de grupos, anéis, domínios de integridade. Em situações dessa natureza, a variável x é um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades.

Os PCNs (4, 1998) faz o seguinte alerta,

> O ensino de álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significado à linguagem e às idéias matemáticas. Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes aplicações de álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas). (4, 1998, pág 84).

Podemos verificar em alguns livros didáticos da educação básica brasileira, como ocorre essa abordagem, ou seja, a forma que é apresentada a relação entre incógnitas e variáveis. Na figura 1 temos um exemplo.


16. O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$ 7,00 e cada quilômetro rodado custa R$ 1,20, responda:

a) Qual é o valor V a pagar numa corrida de n quilômetros?

b) Quanto vai custar uma corrida de 11 quilômetros?

c) Quanto vai custar uma corrida de 5 quilômetros e 800 metros?

d) Qual é a distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 27,40 pela corrida?

e) Qual é a distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 18,40 pela corrida?

Figura 1 – Fonte: (9, 2015, pág. 107)

Podemos observar na figura 1, uma questão proposta pelo livro didático de Andrini e Vasconcellos (9, 2015), adotado por algumas escolas públicas brasileiras para o 9º ano do Ensino Fundamental.

Na alternativa A desejamos estabelecer uma correspondência entre o valor V a ser pago e a quantidade n de quilômetros rodados, extraindo do problema que a bandeirada custa $R\$7,00$ e cada quilômetro rodado custa $R\$1,20$. Logo o valor será dado pela seguinte expressão:

$$V(n) = 7 + 1,2 \cdot n.$$

Assim o valor está em função da quantidade de quilômetros rodados. Com isso o aluno começa a perceber que a medida que n varia o valor a ser pago também sofrerá variação.

Na alternativa B, não acontece o mesmo caso, pois aqui a quantidade de quilômetros já é estabelecida, ou seja $n = 11$, o que queremos determinar é o valor a ser pago por uma pessoa que usou o serviço do táxi por 11 quilômetros. Assim,

$$V(11) = 7 + 1,2 \cdot 11,$$

donde obtemos $V(11) = 20,20$. A resolução da alternativa C é análoga a esta.

Nas alternativas D e E, situações análogas também, iremos resolver a D, nesta sabemos o valor que foi pago, ou seja, $V(n) = 27,40$. Assim, precisamos determinar o valor da incógnita n (quantidade de quilômetros rodados).

$$27,40 = 7 + 1,2 \cdot n,$$

então temos que,

$$(1,2)n = 27,40 - 7,$$

logo,

$$n = \frac{27,40 - 7}{1,2},$$

portanto $n = 17$. Concluimos que se a pessoa pagou $R\$ 27,40$, então percorreu uma distância de $17\,km$.

Como destacado por Oliveira e Laudares (5, 2015, pág. 04), “o papel do professor será fundamental para que os estudantes desenvolvam um sentido numérico concomitante ao pensamento algébrico.” provocando a percepção do que há de comum entre os dois, pra que os alunos consigam fazer a transição da aritmética para a álgebra como uma continuidade e não como uma fenda. A ausência de conhecimento acerca de aplicações do conteúdo matemático pode acarretar na falta de interesse dos alunos, então o relacionamento entre a teoria e a prática estabelecida pelo professor, torna-se um elemento integrante desse processo de transição.

Podemos obsersar também, o importante papel do professor no ensino de álgebra, como enfatiza Poyla (10, 1995) :

> Não apenas os piores alunos da turma, mas até estudantes bem inteligentes, pode ter aversão à álgebra (...) A sua aversão pela álgebra se justificará se não lhe for dada ampla oportunidade para que ele se convença, por sua própria experiência, de que a linguagem dos símbolos matemáticos ajuda o raciocínio. Auxiliá-lo nessa experiência constitui uma das mais importantes tarefa do professor. (10, 1995, pág. 101).

Dessa maneira o trabalho com conceitos algébricos, no início da escolaridade, pode vir a contribuir para que os estudantes desenvolvam um tipo de raciocínio específico, denominado pensamento algébrico. Essa ideia, diferencia-se de uma ideia de álgebra escolar como um processo de simples manipulação de símbolos.

1.2 Sobre o ensino de aritmética e álgebra

Relacionando aritmética (álgebra clássica ou elementar) e álgebra moderna (álgebra abstrata), estas são áreas afins de estudo matemático, embora existam algumas diferenças. A aritmética centra-se principalmente na utilização de números em cálculos (e suas propriedades), enquanto álgebra pode ser encarada como uma generalização da aritmética em que os símbolos são usadas em lugar de números para compreender melhor os princípios da equação.

A álgebra hoje é apresentada formalmente aos estudantes do Ensino Fundamental somente a partir do 7º ano, quando símbolos são usados pra representar quantidades, "de forma fragmentada, abstrata e descontextualizada sem a preocupação com formação do conceito da variável em suas diversas formas", conforme Souza e Diniz em Oliveira e Laudares (5, 2015, pág. 4).

Analisando a estrutura curricular presente nos PCNs (4, 1998) e (11, 2000), verifica-se uma idéia mestra na construção do conceito de números e de operações. A estrutura lógica e histórica da organização dos conteúdos é sempre da forma: primeiro aritmética, depois álgebra.

Quando se faz uma ruptura entre a abordagem da aritmética e a álgebra o estudante pode não estabelecer uma relação entre elas e entender como se fosse uma nova matemática, "a matemática das letras" com novas regras, fórmulas e aplicações; e isso impede que ele consiga, trazer os conceitos já absorvidos na aritmética e aplicá-los na álgebra. Como Oliveira e Laudares (5, 2015, pág. 4), salientou que "é preciso começar mais cedo o trabalho com a álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolva-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra"

Uma das diferenças mais flagrantes entre a aritmética e a álgebra é, obviamente, a utilização de letras nesta última. Mesmo quando as crianças interpretam as letras como representações de números, há uma forte tendência a considerar que as letras representam valores específicos únicos, como em "$x + 2 = 7$", e não números variáveis como na propriedade em que "$x+y+z = x+y+p$".

De acordo com Coxford e Shulte (8, 1995), a álgebra não é totalmente desvinculada da aritmética, muitas dificuldades algébricas provém do mau entendendimento das relações e procedimentos aritméticos. Primeiro é preciso que tais relações e procedimentos sejam compreendidos, pois se os alunos tiverem concepções erradas a respeito deles, seu desempenho em álgebra poderá ser afetado. Nesse caso, as dificuldades que o aluno tem em álgebra não será tanto de álgebra propriamente dita, mas de problemas em aritmética que não foram corrigidos.

Para Coxford e Shulte (8, 1995, pág.24), "em aritmética o foco da atividade é encontrar determinadas respostas numéricas particulares. Na álgebra é diferente, o foco é estabelecer procedimentos e relações de uma forma simplificada geral". Umas das maneiras de tentar descobrir o que torna a álgebra difícil é identificar os tipos de erros que os alunos frequetemente cometem nessa matéria e investigar as razões dos mesmos. Uma das razões desses erros, de acordo com Khidir (12, 2006), é a desconexão entre aritmética e a álgebra, o trecho abaixo explica o que o autor relata.

> A falta de sentido e significado da linguagem matemática, especificamente a linguagem algébrica reforça as dificuldades dos alunos no desenvolvimento de atividades algébricas. No modo de ensino há uma desconexão entre a aritmética e a álgebra, que estão sendo aprendidas pelos alunos como se fossem elementos de ciências distintas. (12, 2006, pág.76).

As possíveis causas das dificuldades no aprendizado de álgebra poderão servir para lançar alguma luz no processo de análise dos erros cometidos pelos alunos e de suas causas e, assim, pode nos proporcionar instrumentos extremamente úteis para decidir sobre os meios de ajudar os estudantes a melhorarem sua compreensão da matemática.

1.3 Álgebra no currículo do ensino médio

Segundo os *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio* (11, 2000, pág. 44 PCNEM), o currículo do ensino médio deve garantir espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre aritmética e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio-histórica que está na origem desses temas. Esses conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção no real.

Como nos alerta Lima (1, 2007):

> No ensino que se pratica na maioria das escolas, não há sequer uma referência passageira à ideia de demonstração. Os fatos geométricos são apresentados como dogmas, sem maiores preocupação em justificá-los. Quanto às manipulações algébricas, elas são apresentadas de modo formal, com poucas aplicações à realidade e com abundantes exercícios de simplificação, equações mais ou menos complicadas, polinômios cuja origem nunca se justifica, sem dar ideia de por que se estuda tudo aquilo. (1, 2007, pág. 166).

Observa-se que os conceitos algébricos no ensino da matemática estão associados à capacidade de identificar atributos e regras de formação de sequências, uma das primeiras evidências de organização do pensamento. Pode-se também reconhecer mudanças e relações, primeiros indícios da ideia de função. Dentro desse contexto a *Base Nacional Comum Curricular* (13, 2016, BNCC) salienta o seguinte:

> De maneira análoga ao que acontece no ensino fundamental, a álgebra no ensino médio deve ser entendida como o estabelecimento de relações, ampliando e consolidando as noções de equações e função. Nessa etapa de escolaridade, merece especial destaque o estudo das funções por seu papel como modelo matemático para analisar e interpretar relações de dependência entre variáveis de duas grandezas em fenômenos do mundo natural ou social, incluindo os trabalhados em componentes de outras áreas de conhecimento como Física, Química e Biologia, por exemplo. (13, 2016, pág. 576)

No que tange a BNCC (13, 2016), o trabalho com a conversão entre representações algébricas e gráficas são de vital importância para análise e interpretação das relações existentes entre as variáveis envolvidas. O uso de softwares pode se constituir numa ferramenta fundamental para esse trabalho, sobretudo para analisar variações quando se modificam parâmetros. No entanto, a BNCC (13, 2016) faz uma alerta, para que devem ser evitadas atividades exaustivas que envolvem rotineiramente apenas cálculo algébrico, como os de resolução de equações e inequações.

Conforme relato de Domingues (14, 1995):

> O que ocorre no ensino de álgebra em nível médio talvez seja uma fixação exagerada nas manipulações mecânicas com símbolos, e isso, se de um lado pode produzir uma falsa sensação de facilidade, de outro pode produzir uma impressão muito forte de inutilidade, além de dar apenas uma ideia muito pálida e parcial da natureza e do alcance dessa matéria. Na verdade vários dilemas sérios se apresentam no ensino de álgebra em nível elementar e somente os conhecendo a fundo se podem evitar as concepções erradas de que está pontilhado. (8, 1995, Apresentação).

Ainda de acordo com BNCC (13, 2016), as noções sobre sequências numéricas, estudadas em etapas anteriores, são retomadas nessa etapa com o trabalho das progressões aritméticas e geométricas, consolidando e sistematizando procedimentos algébricos de generalização.

O PCNEM (11, 2000), preconiza que:

> O trabalho com números pode também permitir que os alunos se apropriem da capacidade de estimativa, para que possam ter controle sobre a ordem de grandeza de resultados de cálculo ou medições e tratar com valores numéricos aproximados de acordo com a situação e o instrumental disponível. (11, 2000, pág. 44).

De acordo com as *Orientações Curriculares para o Ensino Médio* (15, 2008, pág. 69, OCEM), "A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático". Por exemplo, as relações entre aritmética e álgebra, até mesmo problemas geométricos podem ser interpretados pelos alunos sob o ponto de vista algébrico, o que significa tratar do entendimento das formas geométricas via álgebra, discutindo a resolução com ênfase nas propriedades algébricas empregadas.

Ainda segundo OCEM (15, 2008), espera-se que ao final do ensino médio os alunos saibam usar a matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a matemática como um conhecimento social e historicamente construído, saibam apreciar a importância da matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

No cenário estadual analisamos o documento que estabelece as diretrizes do ensino, intitulado *Referencial Curricular do Estado do Tocantins* (16, 2008, RCTO), neste os conceitos algébricos também incorporam o bloco de conteúdos, são considerados os principais responsáveis por uma importante competência para este nível de ensino, destacando que,

> A abstração, que se inicia nos primeiros anos do ensino fundamental com o significado de variável e intensifica-se com o estudo das equações e inequações até a compreensão inicial do conceito de função. O estudo da álgebra é fundamental para que o aluno possa generalizar padrões aritméticos e estabelecer relações entre diversas grandezas. (16, 2008, pág. 336).

Identificamos que dentro do eixo pensamento algébrico a ser trabalhado no terceiro bimestre do terceiro ano do ensino médio, estabelecido no RCTO (16, 2008), elenca as seguintes competências,

> Permitir que o aluno traduz e generalize padrões aritméticos, estabeleça relações entre grandezas variáveis, compreenda e utilize diversos significados do uso da simbologia em situações novas e, muitas vezes, inesperadas, bem como sirva de ferramenta para resolver problemas que tenham aplicações diretas. (16, 2008, pág. 09).

Ainda de acordo RCTO (16, 2008), objetiva que os alunos adquiram as seguintes habilidades.

> Estabelecer e aplicar relações entre coeficientes e raízes de polinômios; Efetuar operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) de polinômios; Determinar as raízes de uma equação algébrica, bem como as suas multiplicidades; Relacionar o estudo de polinômios e equações polinomiais com o estudo de funções; Aplicar os teoremas do resto e de D'Alembert, o dispositivo de Briott-Ruffini, o teorema fundamental da álgebra e as relações de Girard. Escrever uma equação para representar uma relação entre duas variáveis; Escrever uma sentença, dada uma equação linear simples. (16, 2008, pág. 09).

Embora as respostas definitivas aos problemas educionais talvez permaneçam para sempre além de nosso alcance, é somente através de uma avaliação honesta e de uma conversa aberta que poderemos ter esperanças de promover as condições de ensino necessárias para mostrar aos nossos alunos que alguém, de fato, se preocupa com a questão.

2 ESTUDO SOBRE POLINÔMIOS

Segundo Coxford e Shulte (8, 1995), o estudo de polinômios está entre os tópicos mais importantes envolvendo o estudo de álgebra no ensino médio (sistema norte americano). Tanto o aluno quanto o professor podem aprender muitos aspectos do pensamento matemático através do estudo de polinômios, e afirma ser importante que o ensino do tema permaneça no currículo (norte americano).

No Brasil, de acordo com Lima (1, 2007, pág. 171), "a matemática do Ensino Médio, que é praticada nas escolas brasileiras, embora aborde temas relevantes, trata esses assuntos de maneira bastante insatisfatória," deixando de apresentar interessantes aplicações e interpretações.

Acreditando que existe inesgotáveis possibilidades de enriquecer o conhecimento e habilidades do professor e consequentemente as aulas, iremos desenvolver neste capítulo um estudo sobre polinômios.

2.1 Contexto histórico

O estudo para encontrar as soluções de equações polinomiais foi um dos grandes desafios da matemática (álgebra clássica). As primeiras contribuições vieram com o matemático árabe AL-Khowarizmi , no século IX, com importantes conclusões sobre a resolução de equações polinomiais de 1º e 2º graus. "Os trabalhos de Al-Khowarizmi eram tão sistemáticos que os leitores não apresentava dificuldades para entender as soluções, nesse sentido merece ser chamado o pai da álgebra", conforme BOYER (17, 2010, pág. 157).

De acordo com Eves (18, 2011), apenas no século XVI, no Renascimento, é que os matemáticos italianos Girolano Cardano $(1501-1576)$, Niccolo Tartaglia, $(1500-1557)$ e Ludovico Ferrari $(1522-1565)$ começaram a propor fórmulas para resolver equações polinomiais de 3º e 4º graus. No entanto, a resolução de equações polinomiais de grau superior a 4 ainda continuou sendo um desafio (problema em aberto), por um longo período.

Segundo Boyer (17, 2010), o matemático alemão Carl Friedrich Gauss $(1777-1855)$ em 1799, em sua tese de doutoramento, demonstrou que "toda equação polinomial de grau n $(n \in \mathbb{N})$ admite pelo menos uma raiz complexa", o que ficou conhecido como o Teorema Fundamental da Álgebra. Em 1824, o matemático norueguês Niels Henrik Abel $(1802-1829)$ demonstrou que uma equação polinomial do 5º grau não poderia ser resolvida através de fórmulas envolvendo radicais. Em 1829, o jovem matemático francês

Évariste Galois $(1811 - 1832)$ demonstrou que a impossibilidade, descoberta por Abel, estendia-se a todas as equações polinomiais de grau maior que 4.

As descobertas de Abel e Galois não significam, no entanto, que não poderemos conhecer as raízes de uma equação polinomial de grau maior que 4. Existem teoremas gerais que, associados a condições particulares, permitem que descubramos algumas raízes de equações deste tipo. Por exemplo o Teorema Fundamental da Álgebra (2.3.4) e como veremos adiante o Teorema das Raízes Racionais (2.3.6).

Nas seções seguintes será realizado um breve estudo sobre polinômios e equações polinomiais.

2.2 Polinômios com coeficientes reais

Para maiores informações e detalhes adicionais à esta seção poderão serem consultadas as seguintes referências (23), (22), (19), (21) e (20)

Definição 2.2.1. Um *polinômio ou função polinomial*, com coeficientes reais é uma expressão do tipo

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j, \tag{2.1}$$

com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $a_j \in A \subset \mathbb{R}$. Sendo A um subconjunto não vazio do conjunto dos números reais.

Para $0 \leqslant j \leqslant n$, os elementos a_j são chamados de coeficientes do polinômio $p(x)$, as parcelas a_jx^j de termos, e estes tais que $a_j \neq 0$ de monômios do polinômio $p(x)$. O coeficiente a_0 é chamado de termo constante.

Chamamos de polinômio constante o polinômio da forma:

$$p(x) = a_0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots + 0x^n = a_0.$$

Quando,

$$p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n = 0 \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \cup 0,$$

chamamos $p(x)$ de polinômio nulo e o denotaremos por $p(x) \equiv \phi(x) = 0$.

Em todo polinômio, não identicamente nulo $p(x) \neq 0$, algum coeficiente deve ser diferente de zero, então há um maior índice n tal que $a_n \neq 0$. Definimos o grau de $p(x)$ como sendo este número n e denotaremos por $gr\ p(x) = n$. Nesse caso, a_n é chamado de coeficiente líder (ou dominante) de $p(x)$. Os polinômios com coeficente líder $a_n = 1$ são chamados polinômios mônicos.

Observação 2.2.1. Não se define o grau do polinômio identicamente nulo. Enfatizamos ainda que:

$$gr\, p(x) = 0 \Longleftrightarrow p(x) = a_0 \neq 0,\ a_0,\quad \text{com} \quad a_0 \in A \subset \mathbb{R}^*.$$

Pode-se escrever um polinômio $p(x)$ com as j-ésimas potências de x em qualquer ordem crescente ou decrescente, mas neste dá-se-a preferência à ordem crescente em j.

Exemplo 2.2.1. São polinômios com coeficientes no conjuntos dos números inteiros $p(x) = 2+3x+2x^2-5x^3$ sendo $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$ e $a_3 = -5$.

Exemplo 2.2.2. São polinômios com coeficientes no conjuntos dos números racionais $p(x) = 6-3x+x^2$ e $q(x) = 9x+\frac{1}{2}x^2+\frac{\sqrt{36}}{12}x^3+\frac{5}{3}x^4$.

Exemplo 2.2.3. São polinômios com coeficientes no conjuntos dos números reais $r(x) = 4+\frac{7}{3}x+\sqrt{5}x^2+\pi x^3$ e $s(x) = \frac{12}{13}-x-6x^2-3x^4+x^5$.

Salvo menção contrária, iremos considerar todos os polinômios deste trabalho daqui em diante com coeficientes no conjunto dos números reais. Dizemos que os polinômios:

$$p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n,$$

e

$$q(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}+b_nx^n,$$

são polinômios iguais se, e somente se, $a_j = b_j$, para todo $0 \leq j \leq n$. Nesse caso escrevemos $p(x) = q(x)$.

Dado um polinômio $p(x)$, dizemos que o número λ é raiz do polinômio ou zero do polinômio, se e somente se, $p(\lambda) = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+a_3\lambda^3+\cdots+a_n\lambda^n \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.4. Temos que 1 é raiz do polinômio,

$$p(x) = -1-2x+2x^2+x^3.$$

Como vimos, 1 é raiz de $p(x)$ se, e somente se, $p(1) = 0$, veja que, substituindo x por 1, obtemos

$$\begin{aligned} p(1) &= -1-2(1)+2(1)^2+(1)^3 \\ &= -1-2+2+1 \\ &= 0\ , \end{aligned}$$

temos então que o valor numérico de $p(x)$ quando $x = 1$ é zero e, portanto, uma das raízes do polinômio $p(x) = -1-2x+2x^2+x^3$.

Como consequência das propriedades da adição e da multiplicação dos números reais, a adição e a multiplicação de polinômios com coeficientes reais possuem algumas propriedades que descreveremos a seguir.

2.2.1 Adição de polinômios

Sejam

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j \qquad \text{e} \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j.$$

A adição entre os polinômios não nulos $p(x)$ e $q(x)$ de grau rescpectivamente, m e n é definida por:

$$p(x) + q(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j + \sum_{j=0}^{n} b_j x^j = \sum_{j=0}^{M} (a_j + b_j) x^j.$$

Sendo, $M \leq max\{m,n\}$ e considerando que o símbolo $max\{m,n\}$ significa o maior entre os números m e n, com $m,n \in \mathbb{N}$.

O resultado da adição de dois polinômios é chamado de *soma*.

Exemplo 2.2.5. Sejam $p(x) = 5 + 4x - 3x^2 + 5x^3$ e $q(x) = 2 - 3x + 5x^2 - 5x^3$ então:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (5+2) + (4 + (-3))x + ((-3) + 5)x^2 + (5 + (-5))x^3 \\ &= 7 + (1)x + (2)x^2 + (0)x^3 \\ &= 7 + x + 2x^2 . \end{aligned}$$

Observação 2.2.2. A subtração de dois polinômios é dada por,

$$p(x) - q(x) := p(x) + (-q(x)),$$

sendo $-q(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} (-b_j) x^j$.

Exemplo 2.2.6. Dados $p(x) = 3 + 2x - 6x^2$ e $q(x) = 2 - 3x - 5x^3$ então:

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (3 + 2x - 6x^2) + (-2 + 3x + 5x^3) \\ &= (3 + (-2)) + (2 + (3))x + ((-6) + (-0))x^2 + (0 + (5))x^3 \\ &= 1 + (5)x + (-6)x^2 + (5)x^3 \\ &= 1 + 5x - 6x^2 + 5x^3 . \end{aligned}$$

Os polinômios em relação à operação de adição possuem as seguintes propriedades.

Proposição 2.2.1. *Sejam* $p(x) = \sum\limits_{j=0}^{l} a_j x^j$, $q(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j$ *e* $r(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} c_j x^j$ *três polinômios não identicamente nulo então,*

(A_1) ***Comutativa:*** $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$.

(A_2) ***Associativa:*** $p(x)+\Big[q(x)+r(x)\Big] = \Big[p(x)+q(x)\Big]+r(x)$
(A_3) ***Polinômio neutro:*** *O polinômio* $\phi(x)$ *é o elemento neutro ou nulo tal que* $\phi(x)+p(x) = p(x)+\phi(x) = p(x)$.
(A_4) ***Polinômio simétrico:*** *Todo polinômio é simetrizável em relação à adição, ou seja, para todo* $p(x)$*, existe um* $[p'(x)]$ *tal que*

$$p(x)+p'(x) = p'(x)+p(x) = \phi(x).$$

Apresentaremos aqui a demonstração da propriedade (A_2). As demais podem ser encontrada em Iezzi (22, 2002, pág. 52-53).

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que $l = m = n$, após reescrever $p(x), q(x)$ e $r(x)$ com as mesmas potências de x:

$$\begin{aligned}
\Big(p(x)+q(x)\Big)+r(x) \quad & \overset{(1)}{=} \sum_{j=0}^{n}(a_j+b_j)x^j+\sum_{j=0}^{n}c_jx^j \\
& \overset{(2)}{=} \sum_{j=0}^{n}\left((a_j+b_j)+c_j\right)x^j \\
& \overset{(3)}{=} \sum_{j=0}^{n}\left(a_j+(b_j+c_j)\right)x^j \\
& \overset{(4)}{=} \sum_{j=0}^{n}a_jx^j+\sum_{j=0}^{n}(b_j+c_j)x^j \\
& \overset{(5)}{=} p(x)+\Big(q(x)+r(x)\Big) \; .
\end{aligned}$$

Em (1) e (2) usamos a definição da adição de polinômios; em (3), a associatividade da adição nos $\mathbb{R}$; e, em (4) e (5), novamente, a definição da adição de polinômios. □

A proposição a seguir estabelece uma importante propriedade do grau de polinômios com relação a operação de adição.

Proposição 2.2.2. *Seja* $p(x)$ *e* $q(x)$ *dois polinômio, se* $\Big(p(x)+q(x)\Big) \neq 0$*, então:*

$$gr\,\Big(p(x)+q(x)\Big) \leq max\Big\{gr\;p(x), gr\;q(x)\Big\}.$$

Valendo a igualdade sempre que $gr\;p(x) \neq gr\;q(x)$.

Demonstração. Sejam $gr\;p(x) = m$ e $gr\;q(x) = n$ com,

$$p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{m-1}x^{m-1}+a_mx^m$$

e

$$q(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}+b_nx^n,$$

se $m \neq n$ podemos supor, sem perda de generalidade, que $m < n$. Então,

$$(p+q)(x) = (a_0+b_0)+\cdots+(a_m+b_m)x^m + b_{m+1}x^{m+1}+\cdots+b_nx^n,$$

donde,

$$gr\left(p(x)+q(x)\right) = n = max\Big\{gr\ p(x), gr\ q(x)\Big\}.$$

Se $m = n$ e $p(x)+q(x) \neq 0$, então

$$(p+q)(x) = (a_0+b_0)+\cdots+(a_m+b_m)x^m.$$

Existem agora duas possibilidades: $a_m+b_m = 0$ ou $a_m+b_m \neq 0$. No primeiro caso,

$$gr\left(p(x)+q(x)\right) < m = max\Big\{gr\ p(x), gr\ q(x)\Big\}.$$

No segundo caso,

$$gr\left(p(x)+q(x)\right) = m = max\Big\{gr\ p(x), gr\ q(x)\Big\}.$$

Em qualquer caso, ainda teremos,

$$gr\left(p(x)+q(x)\right) \leq max\Big\{gr\ p(x), gr\ q(x)\Big\}.$$

□

Exemplo 2.2.7. Conforme o Exemplo (2.2.5) temos que a adição dos polinômios,

$$p(x) = 5+4x-3x^2+5x^3 \quad \text{e} \quad q(x) = 2-3x+5x^2-5x^3,$$

tem como resultado,

$$\begin{aligned} p(x)+q(x) &= (5+4x-3x^2+5x^3)+(2-3x+5x^2-5x^3) \\ &= 7+x+2x^2\ . \end{aligned}$$

Assim $gr\left(p(x)+q(x)\right) = 2$. Portanto $gr\left(p(x)+q(x)\right) \leq max\Big\{gr\ p(x), gr\ q(x)\Big\}$, pois o $max\Big\{gr\ p(x), gr\ q(x)\Big\} = 3$.

2.2.2 Multiplicação de polinômios

Dados dois polinômios não identicamente nulo:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} a_jx^j \quad \text{e} \quad q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j.$$

A multiplicação entre os polinômios $p(x)$ e $q(x)$ é definida por:

$$p(x)q(x) = \sum_{j=0}^{m} a_jx^j \sum_{j=0}^{n} b_jx^j = \sum_{j=0}^{m+n} c_jx^j,$$

sendo,

$$\begin{aligned}
&c_0 = a_0b_0;\\
&c_1 = a_0b_1 + a_1b_0;\\
&c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0;\\
&\vdots\\
&c_j = a_0b_j + a_1b_{j-1} + \cdots + a_jb_0 = \sum_{\lambda+\mu=j} a_\lambda b_\mu;\\
&\vdots\\
&c_{m+n} = a_nb_m\ ;
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$p(x)q(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + \cdots + a_mb_nx^{m+n}.$$

O resultado da multiplicação de dois polinômios é chamado de *produto*.

Exemplo 2.2.8. Sejam $p(x) = 3 + 2x - 6x^2$ e $q(x) = 2 - 3x - 5x^3$ então:

$$\begin{aligned}
p(x)q(x) &= (3(2)) + (3(-3x)) + (3(-5x^3)) + (2x(2)) + (2x(-3x))\\
&\quad + (2x(-5x^3)) + ((-6x^2)(2)) + ((-6x^2)(-3x)) + ((-6x^2)(-5x^3))\\
&= 6 - 9x - 15x^3 + 4x - 6x^2 - 10x^4 - 12x^2 + 18x^3 + 30x^5\\
&= 6 - 5x - 18x^2 + 3x^3 - 10x^4 + 30x^5\ .
\end{aligned}$$

Observação 2.2.3. Seja $\phi(x) := 0$, o polinômio identicamente nulo, pode-se mostrar que

$$p(x)\phi(x) := \phi(x),$$

para todo $p(x)$.

Os polinômios em relação à multiplicação possuem as seguintes propriedades:

Proposição 2.2.3. *Sejam $p(x) = \sum_{j=0}^{l} a_jx^j$, $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j$ e $r(x) = \sum_{j=0}^{m} c_jx^j$ três polinômios não identicamente nulo, então,*

(M_1) ***Comutativa:*** $p(x)q(x) = q(x)p(x)$

(M_2) ***Associativa:*** $p(x)\Big[q(x)r(x)\Big] = \Big[p(x)q(x)\Big]r(x)$

(M_3) ***Polinômio neutro:*** *Existe um polinômio $I(x) = 1$, denominado polinômio neutro da multiplicação tal que para todo $p(x)$ tem-se que:*

$$p(x)I(x) = I(x)p(x) = p(x).$$

As demonstrações dessas propriedades acima podem ser encontrada em Muniz Neto (23, 2012, pág.32) e em Hefez e Villela (21, 2012, pág. 100)

Adicionalmente, temos uma propriedade que denominada propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição,

Proposição 2.2.4. *Dados os polinômios* $p(x) = \sum\limits_{j=0}^{l} a_j x^j$, $q(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j$ *e* $r(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} a_j x^j$ *não identicamente nulos, temos que,*

$$p(x)\Big(q(x)+r(x)\Big) = p(x)q(x)+p(x)r(x).$$

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que $m = n$, após reescrever $p(x), q(x)$ e $r(x)$ com as mesmas potências de x:

$$\begin{aligned}
p(x)\Big(q(x)+r(x)\Big) &\overset{(1)}{=} \left(\sum_{j=0}^{l} a_j x^j\right)\left(\sum_{j=0}^{m} (b_j+c_j)x^j\right)\\
&\overset{(2)}{=} \sum_{j=0}^{l+m}\left(\sum_{j=\lambda+\mu} a_\lambda(b_\mu+c_\mu)\right)x^j\\
&\overset{(3)}{=} \sum_{j=0}^{l+m}\left(\sum_{j=\lambda+\mu} a_\lambda b_\mu + a_\lambda c_\mu\right)x^j\\
&\overset{(4)}{=} \sum_{j=0}^{l+m}\left(\sum_{j=\lambda+\mu} a_\lambda b_\mu\right)x^j + \sum_{j=0}^{l+m}\left(\sum_{j=\lambda+\mu} a_\lambda . c_\mu\right)x^j\\
&\overset{(5)}{=} p(x)q(x)+p(x)r(x).
\end{aligned}$$

Em (1) usamos a definição da adição de polinômios; em (2), a definição da multiplicação de polinômios; em (3), a distributividade em $\mathbb{R}$; em (4), a definição da adição dos reais; e, em (5), novamente, a definição da multiplicação polinomial. □

Exemplo 2.2.9. Sejam $p(x) = 2x+x^2-4x^3$, $q(x) = 1-4x+5x^2$ e $r(x) = 2-x^2$. Vamos calcular $p(x)\Big(q(x)+r(x)\Big)$. Usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição de polinômios, verificaremos que

$$p(x)\Big(q(x)+r(x)\Big) = p(x)q(x)+p(x)r(x).$$

$$
\begin{aligned}
(I)\ \ p(x)\Big(q(x)+r(x)\Big) &= (2x+x^2-4x^3)\Big((1-4x+5x^2)+(2-x^2)\Big)\\
&= (2x+x^2-4x^3)(1-4x+5x^2)+(2x+x^2-4x^3)(2-x^2)\\
&= 2x(1-4x+5x^2)+x^2(1-4x+5x^2)-4x^3(1-4x+5x^2)\\
&\quad +2x(2-x^2)+x^2(2-x^2)-4x^3(2-x^2)\\
&= 2x-8x^2+10x^3+x^2-4x^3+5x^4-4x^3+16x^4-20x^5+4x\\
&\quad -2x^3+2x^2-x^4-8x^3+4x^5\\
&= (2+4)x+(-8+1+2)x^2+(10-4-4-2-8)x^3+(5+16-1)x^4\\
&\quad +(-20+4)x^5\\
&= 6x-5x^2-8x^3+20x^4-16x^5.
\end{aligned}
$$

De outra maneira, resolvendo primeiro a adição, teremos que,

$$
\begin{aligned}
(II)\ \ p(x)\Big(q(x)+r(x)\Big) &= (2x+x^2-4x^3)\Big((1-4x+5x^2)+(2-x^2)\Big)\\
&= (2x+x^2-4x^3)\Big(3-4x+4x^2\Big)\\
&= 2x(3-4x+4x^2)+x^2(3-4x+4x^2)+(-4x^3)(3-4x+4x^2)\\
&= (6x-8x^2+8x^3)+(3x^2-4x^3+4x^4)+(-12x^3+16x^4-16x^5)\\
&= 6x-5x^2-8x^3+20x^4-16x^5\ .
\end{aligned}
$$

Ainda com relação à multiplicação de polinômios, vale a seguinte propriedade do grau.

Proposição 2.2.5. *Sejam,*

$$p(x)=\sum_{j=0}^{m} a_j x^j \quad e \quad q(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j,$$

polinômios não nulos de grau respectivamente m e n se o produto entre eles for não nulo então,

$$gr\ \Big(p(x)q(x)\Big)=gr\ p(x)+gr\ q(x)=m+n.$$

Demonstração. Sejam $a_m\neq 0$ e $a_n\neq 0$ com,

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{m-1}x^{m-1}+a_mx^m,$$

e

$$q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}+b_nx^n,$$

fazendo,

$$p(x)q(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_kx^k,$$

com $k=m+n$, se $k>m+n$ temos que $c_k=0$. Portanto, se mostrarmos que $c_{m+n}\neq 0$, seguirá que $p(x)q(x)\neq 0$ e $gr\ \Big(p(x)q(x)\Big)=m+n=gr\ p(x)+gr\ q(x)$, mas é imediato que,

$$c_{m+n}=\sum_{\substack{i+j=m+n\\ i,j\geq 0}} a_ib_j=a_mb_n\neq 0.$$

□

Exemplo 2.2.10. De acordo com o Exemplo (2.2.8), temos que,

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= (3+2x-6x^2)(2-3x-5x^3) \\ &= 6-5x-18x^2+3x^3-10x^4+30x^5\ , \end{aligned}$$

segue então que o $gr\left(p(x)q(x)\right)=5$ que é exatamente igual a $gr\ p(x)+gr\ q(x)=5$.

2.2.3 Divisão de polinômios

Já vimos como adicionar e multiplicar polinômios, sendo o resultado ainda um polinômio. Na divisão o resultado também será um polinômio?

Dados os polinômios $p(x)=-6x-x^2+x^3$ e $f(x)=2x+x^2$ temos que,

$$p(x)=(2x+x^2)(-3+x),$$

chamando $q(x)=-3+x$, segue que $p(x)=f(x)q(x)$, portanto o polinômio $p(x)$ é escrito como o produto de dois outros polinômios, logo $p(x)$ é divisivel por $f(x)$ e tem como resultado o polinômio $q(x)$. Entretanto veremos que nem sempre é possível efetuar a divisão entre dois polinômios dados, ou seja, ao considerarmos $f(x)$ e $g(x)$, dois polinômios não identicamente nulos, nem sempre existe $h(x)$, tal que,

$$f(x)=g(x)h(x).$$

Exemplo 2.2.11. Considere

$$f(x)=-1+x \quad \text{e} \quad g(x)=-3+2x+x^2,$$

então um tal polinômio $h(x)$ não existe, pois, caso existisse, pela propriedade da multiplicação de polinômios deveríamos ter:

$$\begin{aligned} gr\ f(x) &= gr\ g(x)+gr\ h(x) \\ &= 2+gr\ h(x), \end{aligned}$$

mas, $gr\ f(x)=1$ assim teríamos

$$1=2+gr\ h(x),$$

implicando que $gr\ h(x)=-1$, o que é um absurdo.

Proposição 2.2.6. *Sejam $p(x)$ e $f(x)$ dois polinômios não identicamente nulos, se $f(x)$ divide $p(x)$, então $gr\ f(x)\leq gr\ p(x)$.*

Demonstração. Como $f(x)$ divide $p(x)$ e ambos são não nulos, então existe um polinômio não identicamente nulo $q(x)$ tal que $p(x) = f(x)q(x)$. Pela propriedade multiplicativa do grau, temos que:

$$\begin{aligned} gr\, p(x) &= gr\, \big(f(x)q(x)\big) \\ &= gr\ f(x) + gr\ q(x) \geq gr\ f(x). \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.2.12. Dados os polinômios $p(x) = -6x - x^2 + x^3$ e $f(x) = 2x + x^2$, tal que, $f(x)$ divide $p(x)$, como vimos anteriormente o resultado dessa divisão é o polinômio $q(x) = (-3 + x)$, como podemos observar $gr\ p(x) = 3$ e $gr\ f(x) = 2$, ou seja sendo válido $gr\ p(x) \geq gr\ f(x)$.

Porém a condição $gr\ p(x) \geq gr\ f(x)$ não é suficiente para divisão exata de $p(x)$ por $f(x)$, na maioria das vezes deixando um resto nessa divisão. Dados dois polinômios, $p(x)$ (dividendo) e $f(x)$ (divisor), sendo $f(x)$ não identicamente nulo, dividir $p(x)$ por $f(x)$ é determinar dois outros polinômios $q(x)$ (quociente) e $r(x)$ (resto). De acordo com o exemplo a seguir.

Exemplo 2.2.13. Seja os polinômios $p(x) = 7x - 3x^2 + 3x^3$ e $f(x) = -3 + x$, temos que,

$$gr\ f(x) \leq gr\ p(x),$$

queremos determinar $q(x)$ e $r(x)$ tal que,

$$p(x) = q(x)f(x) + r(x).$$

Veja que,

$$p(x) = (-3 + x)(11 + 6x + 3x^3) + 33\ ,$$

sendo $q(x) = 11 + 6x + 3x^3$ (quociente) e $r(x) = 33$ (resto).

Teorema 2.2.1. *(divisão Euclidiana):* *Sejam os polinômios $p(x)$ e $f(x) \neq 0$, então existem outros dois únicos polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que:*

$$p(x) = q(x)f(x) + r(x), \tag{2.2}$$

Com $r(x) = 0$, (caso em que a divisão é exata) ou $gr\ r(x) < gr\ f(x)$.

Demonstração. (Prova da existência): Sejam os polinômios,

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$$

e

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_nx^m = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j.$$

Se $p(x) = 0$, então tome $q(x) = r(x) = 0$.

Agora tomando $p(x) \neq 0$ e $gr\ p(x) < gr\ f(x)$, então tome $q(x) = 0$ e $r(x) = p(x)$.

Podemos supor $n \geq m$. A demonstração será feita por indução sobre $n = gr\ p(x)$.

Se $n = 0$, então $0 = n \geq m = gr\ f(x)$, logo $m = 0$, $p(x) = a_0 \neq 0$, $f(x) = b_0$. Assim, $p(x) = a_0b_0^{-1}f(x)$, com $q(x) = a_0b_0^{-1}$ e $r(x) = 0$.

Suponhamos o resultado válido para polinômios com grau menor do que $n = gr\ p(x)$. Vamos mostrar que vale para $p(x)$.

Seja $p_1(x)$ o polinômio definido por $p_1(x) = p(x) - a_nb_m^{-1}x^{n-m}f(x)$. Podemos escrever da seguinte maneira.

$$p_1(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n - \underbrace{a_nb_n^{-1}x^{n-m}\Big(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_nx^m\Big)}_{*}.$$

O termo $(*)$ é um polinômio que tem grau n e coeficiente líder a_n. Logo, $gr\ p_1(x) < gr\ p(x)$. Por hipótese de indução, existem $q_1(x)$ e $r_1(x)$ tais que:

$$p_1(x) = q_1(x)f(x) + r_1(x),$$

com $r_1(x) = 0$ ou $gr\ r_1(x) < gr\ f(x)$. Logo,

$$\begin{aligned} p(x) \quad &= p_1(x) + a_nb_m^{-1}x^{n-m}f(x) \\ &\overset{(1)}{=} \Big(q_1(x)f(x) + r_1(x)\Big) + a_nb_m^{-1}x^{n-m}f(x) \\ &\overset{(2)}{=} \Big(q_1(x) + a_nb_m^{-1}x^{n-m}\Big)f(x) + r_1(x), \end{aligned}$$

em (1), substituímos a expresão de $f_1(x)$ e, em (2), usamos a comutatividade da adição e a distributidade.

Temos então $q(x) = q_1(x) + a_nb_m^{-1}x^{n-m}$ e $r(x) = r_1(x)$.
(Prova da unicidade): Sejam $q_1(x)$, $r_1(x)$, $q_2(x)$,$r_2(x)$ tais que:

$$p(x) = q_1(x)f(x) + r_1(x) \overset{(3)}{=} q_2(x)f(x) + r_2(x),$$

com

$$(4)\begin{cases} r_1(x) = 0 \quad \text{ou} \quad gr\ r_1(x) < gr\ f(x) \\ r_2(x) = 0 \quad \text{ou} \quad gr\ r_2(x) < gr\ f(x). \end{cases}$$

De (3) segue que $\Big(q_1(x)-q_2(x)\Big)f(x)\overset{(5)}{=}r_2(x)-r_1(x)$.
Se $q_1(x)\neq q_2(x)$, então $\Big(q_1(x)-q_2(x)\Big)\neq 0$, assim $(r_2(x)-r_1(x))\neq 0$ e pela Proposição (2.2.6) obtemos que:

$$gr \underbrace{f(x)}_{(divisor)} \leq gr\ (r_2(x)-r_1(x)) \overset{(4)}{<} gr\ f(x),$$

chegamos a uma contradição. Portanto, $q_1(x)=q_2(x)$, logo $r_1(x)=r_2(x)$. □

O método da chave é um algoritmo de divisão, que apresentaremos, sendo um mecanismo prático que tem a função de obter o quociente e o resto, respectivamente $q(x)$ e $r(x)$, em diversas etapas, de uma forma semelhante a que se faz no algoritmo da divisão euclidiana de números inteiros.

Fazendo,

$$\begin{array}{c|c} p(x) & f(x) \\ \hline r(x) & q(x) \end{array}$$

assim dizemos que: $p(x)$ é o dividendo; $f(x)$ é o divisor; $q(x)$ é o quociente e $r(x)$ é o resto.

$$p(x)=q(x)f(x)+r(x).$$

Veja um exemplo da divisão de dois polinômios utilizando o método da chave:

Exemplo 2.2.14. Na divisão de $p(x)=3x^3+4x^2-2x+4$ por $f(x)=x^2+2x-4$ temos os seguintes passos, através do método da chave:

1º passo: Dividimos o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor, obtendo assim a primeira parcela do quociente.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3+4x^2-2x+4 & x^2+2x-4 \\ \cline{2-2} -3x^3-6x^2+12x & 3x \uparrow \textit{primeiro} \\ \hline -2x^2+10x+4 & \quad \textit{termo do} \\ \uparrow \textit{primeiro resto} & \quad \textit{quociente} \end{array}$$

Como o grau do primeiro resto não é menor que o grau do divisor, a divisão ainda não está concluída, prosseguiremos com a divisão, agora o resto $-2x^2+10x+4$ será o dividendo.

2º passo: Procede-se de maneira análoga ao primeiro passo para obter o segundo fragmento do quociente.

$$\begin{array}{l|l}
3x^3+4x^2-2x+4 & x^2+2x-4 \\ \cline{2-2}
-3x^3-6x^2+12x & 3x-2 \uparrow \textit{segundo} \\ \hline
-2x^2+10x+4 & \quad \textit{termo do} \\
2x^2+4x-8 & \quad \textit{quociente} \\ \hline
14x-4 & \\
\uparrow \textit{resto parcial} & \\ \hline
\end{array}$$

Como o grau do resto é menor que o grau do quociente, paramos aqui, temos quociente $q(x) = 3x-2$ e resto $r(x) = 14x-4$. Ou seja,

$$p(x) = (3x-2)(x^2+2x-4)+14x-4,$$

caso $r(x) = 0$, a divisão de $p(x)$ por $f(x)$ é dita exata e $p(x)$ é divisível por $f(x)$.

Outros métodos para efetuar divisão de polinômios, como por exemplo o dispositivo de Briot-Ruffini para a divisão por $(x-a)$ e método de Descartes podem ser consultados em Ciriaco (19, 2016, pág. 20).

2.3 Alguns resultados importantes sobre os polinômios

Teorema 2.3.1. ***(Teorema do resto):*** *O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $(x-a)$ é igual ao valor numérico de $p(a)$.*

Demonstração. De acordo com a definição de divisão polinomial

$$q(x)(x-a)+r(x) = p(x). \tag{2.3}$$

Sendo $q(x)$ e $r(x)$ respectivamente quociente e resto. Como $(x-a)$ tem grau 1, o resto $r(x)$ ou é nulo ou tem grau zero. Portanto $r(x)$ é um polinômio constante.

Segue de (2.3), que

$$r(x) = p(x) - q(x)(x-a).$$

Calculemos os valor do polinômio $r(x)$ em a:

$$\begin{aligned} \underbrace{r(a)}_{r} &= p(a) - q(a)\underbrace{(a-a)}_{0} \\ &= p(a). \end{aligned}$$

Portanto $r = p(a)$. □

Teorema 2.3.2. ***(Teorema de D'Alembert):*** *O polinômio $p(x)$ é divisível por $(x-a)$ se, e somente se, a é raiz de $p(x)$.*

Demonstração. De acordo com o Teorema do Resto, temos que o resto de $p(x)$ por $(x-a)$ é $p(a)$, portanto se $p(x)$ for divisivel por $(x-a)$, então $p(a)=0$, ou seja,

$$\underbrace{r(a)=0}_{\text{(divisão exata)}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{p(a)=0}_{\text{(a é raíz de p(x))}}$$

□

Exemplo 2.3.1. Verificaremos que $p(x)=-2+x+x^3-2x^4+x^5$ é divisível por $(x-1)$. Segundo o Teorema de D'Alembert (2.3.2), um polinômio é divisível por um binômio $(x-a)$ se $p(a)=0$ então, fazendo

$$\begin{aligned} p(1) &= -2+(1)+(1)^3-2(1)^4+(1)^5 \\ &= -2+1+1-2+1 \\ &= 3-4 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Como $p(1)=1$ é diferente de zero, o polinômio não será divisível pelo binômio $(x-1)$.

Teorema 2.3.3. ***(Teorema do Fator):*** *Seja a uma raiz de um polinômio $p(x)$, de grau $n>0$, então $(x-a)$ é um fator de $p(x)$.*

Demonstração. Pelo Teorema de D'Alembert, a divisão de $p(x)$ por $(x-a)$, resulta em um quociente $q(x)$ e um resto $r(x)$ tal que $p(x)=(x-a)q(x)+r(x)$. Se a é raiz do polinômio, então $p(a)=0$, pelo Teorema do Resto temos que $r(a)=0$. Logo, $p(x)=(x-a)q(x)$. Portanto, $(x-a)$ é um fator de $p(x)$. □

Teorema 2.3.4. ***(Teorema Fundamental da Álgebra):*** *Toda equação polinomial $p(x)$ com coeficientes em $\mathbb{C}$ com grau $n \geq 1$ possui pelo menos uma raiz complexa (real ou não).*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em MUNIZ NETO (23, 2012, pág. 66) e foi feita pelo matemático Johann Carl Friedrich Gauss, em 1799. A partir dele, podemos demonstrar o Teorema da decomposição de um polinômio, o qual garante que qualquer polinômio pode ser decomposto em fatores de primeiro grau.

Teorema 2.3.5. ***(Teorema da Decomposição):*** *Todo polinômio $p(x)$ de grau $n \geq 1$*

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$$

pode ser fatorado como um produto de uma constante por polinômios de primeiro grau.

$$p(x)=a_n(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n). \tag{2.4}$$

com $r_1,r_2,\cdots,r_n$ as raízes de $p(x)$.

Demonstração. Seja o polinômio $p(x)$ de grau $n \geq 1$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n.$$

Pelo Teorema fundamental da Álgebra, $p(x)$, admite uma raiz $r_1 \in \mathbb{C}$. Logo, podemos escrever $p(x)$ como:

$$p(x) = (x - r_1)q_1(x),$$

sendo $q_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$.

Se $n - 1 \geq 1$, então, $q_1(x)$ admite uma raiz r_2 complexa e podemos escrever:

$$q_1(x) = (x - r_2)q_2(x)$$

donde obtemos,

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)q_2(x).$$

Repetindo este processo até que $q_n(x)$ seja constante, obtemos:

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)q_n(x)$$

Por definição de igualdade de polinômios, temos que o coeficiente a_n de $p(x)$ deve ser igual a $q_n(x)$.
Logo:

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n).$$

$\square$

Observação 2.3.1. Nada impede que a decomposição de $p(x)$ apresente fatores iguais. Associando os fatores identicos da decomposição de $p(x)$, obtemos:

$$p(x) = a_n(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2}\cdots(x - r_p)^{m_p},$$

com,

$$\begin{cases} m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n \\ r_1, r_2, \cdots, r_p \qquad \text{são dois a dois distinos.} \end{cases}$$

Neste caso, $p(x)$ é divisível separadamente pelos polinômios $(x - r_1)^{m_1}, (x - r_2)^{m_2}, \cdots, (x - r_p)^{m_p}$.

Definição 2.3.1. Dizemos que r é raiz de multiplicidade m, com $m \geq 1$ do polinômio $p(x)$ se, e somente se,

$$p(x) = (x - r)^m q(x) \quad \text{e} \quad q(r) \neq 0,$$

isto é, r é raiz de multiplicidade m do polinômio $p(x)$ quando esse é divisível por $(x - r)^m$ e não é divisível por $(x - r)^{m+1}$, ou melhor, a decomposição de $p(x)$ apresenta exatamente m fatores iguais a $(x - r)$.

Quando $m = 1$, dizemos que a raiz é simples, quando $m = 2$, dizemos que é raiz dupla, para $m = 3$, dizemos que a raiz é tripla, e assim sucessivamente.

Exemplo 2.3.2. O polinômio $p(x) = x^3(x-7)^2$ admite zero como raiz de multiplicidade 3 e 7 com multiplicidade 2, embora $p(x)$ seja de grau 5, tem apenas duas raízes distintas. Entretanto a soma da multiplicidade das raízes é igual ao grau de $p(x)$.

O próximo resultado nos dará uma limitação sobre o número de raízes de um polinômio.

Proposição 2.3.1. *Seja $p(x)$ um polinômio de grau $n \geq 1$. Eentão $p(x)$ tem no máximo n raízes reais.*

Demonstração. A prova será feita por indução sobre $n = gr\ p(x)$.

Se $n = 1$, então $p(x) = a_0 + a_1 x$ e admite apenas $\left(\frac{-a_0}{a_1}\right)$ como raiz e o resultado é válido.

Seja $n \geq 1$ e suponhamos o resultado ser verdadeiro para polinômios de grau n.

Queremos agora mostrar que seja válido para um polinômio de grau igual $n+1$. Então seja $p(x)$ um polinômio tal que, $gr\ p(x) = n+1$, se $p(x)$ não tem raízes reais, nada há a demonstrar. Digamos que $p(x)$ tenha uma raiz $r \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema do Fator (2.3.3), $(x-r)$ é um fator de $p(x)$, logo existe um polinômio $q(x)$ tal que,

$$p(x) = q(x)(x-r), \quad \text{com} \quad gr\ q(x) = n.$$

Por hipótese de indução $q(x)$ tem no máximo n raízes reais. Usando o Teorema da Decomposição (2.3.5) em $q(x)$ temos que,

$$p(x) = \underbrace{a_n(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)}_{q(x)}(x-r).$$

Logo, $p(x)$ tem no máximo $n+1$ raízes no conjunto dos reais. □

2.3.1 Relações entre coeficientes e raízes

Nosso objetivo aqui é determinar relações existentes entre os coeficientes e as raízes de um polinômio.

Teorema 2.3.6. ***(Questão(03/a)/ENQ/PROFMAT/2016.1)*** *Considere a equação polinomial com coeficientes inteiros:*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n = 0. \tag{2.5}$$

com $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$. Se a equação polinomial admite uma raiz racional $\left(\frac{r}{s}\right)$, em que $r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0$ com r e s primos entre si, então r é divisor de a_0 e s é divisor de a_n.

Demonstração. Queremos mostrar que, se a equação $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n=0$ admite raízes do tipo $(\frac{r}{s})\in\mathbb{Q}$, com $mdc(r,s)=1$, então $r\mid a_0$ e $s\mid a_n$, substituindo $x=\frac{r}{s}$ em $p(x)$ obtemos:

$$p\Big(\frac{r}{s}\Big)=a_0+a_1\frac{r}{s}+\cdots+a_{n-1}\frac{r^{n-1}}{s^{n-1}}+a_n\frac{r^n}{s^n}=0.$$

Assim multiplicando essa igualdade por s^n, obtemos:

$$0=\underbrace{a_0s^n+a_1rs^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r^{n-1}s}_{B}+a_nr^n.$$

Como $s\mid 0$ e $s\mid B$, então pela Proposição (3.4) em Hefez (24, 2014, pág. 48) $s\mid a_n.r^n$, mas $mdc(r,s)=1$, logo $s\mid a_n$. Analogamente, definindo $C=a_1rs^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r^{n-1}s+a_nr^n$, temos $0=a_0s^n+C$. Como $r\mid 0$ e $r\mid C$, então $r\mid a_0s^n$, mas $mdc(r,s)=1$, logo $r\mid a_0$. $\square$

O teorema anterior só se aplica aos polinômios com coeficientes inteiros (todos). Não é suficiente que apenas o coeficiente líder (a_n) e o termo independente (a_0) sejam inteiros.

Questão 2.3.1. (Questão(03/b)/ENQ/PROFMAT/2016.1) Encontre todas as raízes reais do polinômio

$$p(x)=2x^4+x^3-7x^2-3x+3. \tag{2.6}$$

Resolução: Nesse caso, os divisores de $a_0=3$ são ±1 e ±3 e os divisores de $a_4=2$ são ±1, ±2. Logo pelo Teorema (2.3.6) as possíveis raízes racionais de (2.6) são

$$\Big\{\pm1,\pm3,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}\Big\}$$

Então calculamos:

$p(1)=-4$	$p(\frac{1}{2})=0$
$p(-1)=0$	$p(\frac{-1}{2})=2,75$
$p(3)=120$	$p(\frac{3}{2})=-3,75$
$p(-3)=84$	$p(\frac{-3}{2})=-1,5.$

Com isso, temos duas raízes racionais de $p(x)$, a saber $x=-1$ e $x=\frac{1}{2}$. Assim o polinômio $p(x)$ é divisível por $x-(-1)=x+1$ e por $(x-\frac{1}{2})$. Dividindo $p(x)$ sucessivamente por $(x+1)$ e $(x-\frac{1}{2})$ segue que,

$$\begin{aligned} p(x) &= (x+1)(x-\frac{1}{2})(x^2-3) \\ &= (2x^2+x-1)(x^2-3)\ . \end{aligned}$$

Temos ainda $x^2 - 3 = 0$ tem $\pm\sqrt{3}$ como raízes. Portanto $p(x) = 0$ se, e somente se, $2x^2 + x - 1 = 0$ ou $x^2 - 3 = 0$. Assim as raízes de $p(x)$ são as soluções dessas equações do segundo grau, ou seja, $p(x)$ possui quatro raízes reais, a saber, $\{-1, \frac{1}{2}, \pm\sqrt{3}\}$. •

Observação 2.3.2. O resultado do Teorema (2.3.6) não garante a existência de raízes racionais de uma equação polinomial de coeficientes inteiros. Apenas, em caso de existência, são mostradas as possibilidades para as raízes. É somente um método. Nem sempre o mais prático.

Proposição 2.3.2. *Seja $p(x)$ um polinômio de coeficientes inteiros. Se $a_n = \pm 1$, então as possíveis raízes racionais de $p(x)$ são inteiras.*

Demonstração. Segue de imediato do Teorema das Raízes Racionais para polinômios com coeficientes inteiros, Teorema (2.3.6), que se o polinômio $p(x)$ admite uma raiz racional $\left(\frac{r}{s}\right)$, em que $r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0$ com $mdc(r, s) = 1$, então r é divisor de a_0 e s é divisor de a_n. Uma vez que $a_n = \pm 1$ então s é divisor de ± 1, logo $s = 1$ ou $s = -1$. Portanto as possíveis raízes racionais de $p(x)$ são $\pm r$, como $r \in \mathbb{Z}$. Logo, se $p(x)$ admite raízes racionais estas são inteiras. □

Exemplo 2.3.3. Determinar as raízes racionais do seguinte polinômio $p(x) = 2 + x - 3x^2 + x^3$, temos que $p(x)$ é um polinômio mônico, ou seja tem coeficiente líder $a_3 = 1$, logo podemos aplicar a Proposição (2.3.2), sendo assim, caso $p(x)$ admita alguma raiz racional ela deve ser um divisor de $a_0 = 2$, então as possíveis raízes racionais de $p(x)$ caso exista são $\{\pm 1\ ,\ \pm 2\}$. Calculando o valor numérico temos,

$p(1) = 1$ $\qquad$ $p(2) = 0$

$p(-1) = -3$ $\qquad$ $p(-2) = -20$

temos que 2 é a única raiz racional de $p(x)$ e esta pertence aos inteiros, satisfazendo o resultado da proposição (2.3.2). A saber $p(x) = (x-2)(x^2 - x - 1)$ e as demais raízes de $p(x)$ não pertence ao conjunto dos números racionais.

As relações de Girard (Albert Girard), são relações entre os coeficientes de um polinômio e as suas raízes. Para os casos de polinômios do primeiro e segundo grau são importantes para determinar raízes. Entretanto para polinômios de grau n, com $(n \geq 3)$ se tivermos alguma informação adicional sobre as raízes, é possível determiná-las.

Proposição 2.3.3. ***(Relações de Girard):*** *Se $r_1, r_2, \cdots, r_n$ são as raízes do polinômio,*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n.$$

então,

$$s_j(r_1, \cdots, r_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \frac{a_{n-j}}{a_n}, \qquad j = 1, \cdots, n\ ,$$

sendo

$$
\begin{aligned}
s_1(r_1,\cdots,r_n) &= \sum_j r_j = r_1+\cdots+r_n,\\
s_2(r_1,\cdots,r_n) &= \sum_{j_1<j_2} r_{j_1}r_{j_2} = r_1r_2+r_1r_3+\cdots+r_{n-1}r_n,\\
s_3(r_1,\cdots,r_n) &= \sum_{j_1<j_2<j_3} r_{j_1}r_{j_2}r_{j_3}\\
&= r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+\cdots+r_{n-2}r_{n-1}r_n,\\
&\vdots\\
s_{n-1}(r_1,\cdots,r_n) &= \sum_{j_1<j_2\cdots<j_{n-1}} r_{j_1}r_{j_2}r_{j_{n-1}}\\
&= r_1r_2\cdots r_{n-1}+\cdots+r_2r_3\cdots r_n,\\
s_n(r_1,\cdots,r_n) &= r_1r_2\cdots r_n.
\end{aligned}
$$

Demonstração. Sendo $r_1,r_2,\cdots,r_n$ as raízes de $p(x)$, então pelo Teorema da Decomposição, Teorema (2.3.5), podemos escrever,

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n\\
&= a_n(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)\\
&= a_n\Big(x^n-s_1(x_1,\cdots,x_n)x^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}s_{n-1}(x_1,\cdots,x_n)x+(-1)^n s_n(x_1,\cdots,x_n)\Big).
\end{aligned}
$$

Desenvolvendo a igualdade acima e igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau, obtém-se o resultado desejado. □

Exemplo 2.3.4. Determine as raízes do polinômio $p(x)=2-2x-x^2+x^3$, sabendo que o produto de duas de suas raízes é igual a (-2).

Temos que $a_0=2$, $a_1=-2$, $a_2=-1$ e $a_3=1$.

Sejam r_1,r_2, e r_3 as raízes da equação, das relações entre os coeficientes e raízes, temos que,

$$
\begin{aligned}
s_1(r_1,r_2,r_3) &= r_1+r_2+r_3\\
&= (-1)^1\Big(\frac{a_{3-1}}{a_3}\Big)\\
&= (-1)\left(\frac{a_2}{a_3}\right)\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_2(r_1,r_2,r_3) &= r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3\\
&= (-1)^2\Big(\frac{a_{3-2}}{a_3}\Big)\\
&= 1\left(\frac{a_1}{a_3}\right)\\
&= -2.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} s_3(r_1,r_2,r_3) &= r_1r_2r_3 \\ &= (-1)^3\Big(\frac{a_{3-3}}{a_3}\Big) \\ &= (-1)\left(\frac{a_0}{a_3}\right) \\ &= -2. \end{aligned}$$

Acrescentando a condição acima a informação adicional que o produto de duas de suas raízes é igual a (-2), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} (I): \quad r_1+r_2+r_3=1 \\ (II): \quad r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=-2 \\ (II): \quad r_1r_2r_3=-2 \\ (IV): \quad r_1r_2=-2. \end{cases}$$

De (III) e (IV) segue-se que $r_3=1$. De (I), temos $r_1+r_2=0$, que justamente com a (IV) nos fornece $r_1=\pm\sqrt{2}$. Como $r_2=-r_1$, as raízes do polinômio $p(x)$ são, $\{1,\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$.

3 O ENSINO DE FUNÇÕES E EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 2^o E 3^o GRAU

No ensino de matemática o importante não é ensinar por meio de uma simples repetição de fórmulas e resultados. É importante ensinar, mostrando historicamente os seus avanços, como se desenvolveu cada parte dessa ciência. Portanto, o estudo das equações algébricas são indispensáveis para se ampliar o conhecimento da matemática, demonstrando a fascinante evolução que a humanidade teve no decorrer dos tempos. Assim, o desenvolvimento de recursos que venham facilitar a aprendizagem de álgebra, devem ser valorizados e incentivados.

> É claro que, dado o carácter cumulativo dos conhecimentos matemáticos, aos quais nos referimos $(\cdots)$, a prática de exercícios algébricos formais é indispensável a fim de que se adquira a desenvoltura necessária ao entendimento de temas mais avançados. Mas é preciso reconhecer a aridez dessa atividade e intercalá-la com problemas atraentes, provocantes e simples, que relacionem o conhecimento matemático com a realidade do dia-a-dia ou mesmo com as ciências naturais. (1, 2007, pág. 166).

Nesse sentido, nas próximas seções iremos trabalhar alguns exercícos algébricos formais, intercalando com problemas atraentes, provocantes e simples. Porém alguns detalhes em sua abordagem são dignos de atenção, que julgamos uma exploração necessária por parte do professor para o enrequecimento do processo de ensino e aprendizagem.

3.1 Equações polinomiais do 2^o grau

Conforme OCEM (15, 2008 pág. 73) "o estudo da função polinomial do 2^o grau pode ser motivado via problemas de aplicações, em que é preciso encontrar um certo ponto de máximo (clássicos problemas de determinação de área máxima)". No estudo dessa função pode ser explorado as propriedades da posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo e mínimo, zeros da função, devendo ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o comportamento do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras.

Ainda de acordo com OCEM (15, 2008) "também é pertinente deduzir a fórmula que calcula os zeros da função quadrática". Assim destacamos que a dedução da fórmula que calcula os zeros/raízes da função polinomial do 2^o grau pode evitar o recurso da simples memorização citada anteriomente, tornando significativo o processo de encontrar soluções dos problemas de aplicações, aperfeiçoando também o entendimento de incógnitas e variáveis.

3.1.1 Método de completar quadrados

Detalhes adicionais desta subseção poderão ser obtidos em Silva (25, 2014, pág. 17).

Para encontrar os zeros da função polinomial do 2º grau, isto é $p(x) = 0$, precisamos determinar os valores de x tal que a igualdade abaixo seja satisfeita:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0. \tag{3.1}$$

Nesse momento, utilizando-se de manipulações algébricas, dividimos ambos os membros da equação acima por a, e em seguida, completamos quadrados que é um recurso, geralmente desenvolvildo no 8º ano do ensino fundamental, quando estuda produtos notáveis.

Seja $ax^2 + bx + c = 0$, podemos dividir por a uma vez que $a \neq 0$, teremos então:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

e assim,

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Com o objetivo de completar o quadrado do lado esquerdo, somamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ em ambos os lados da igualdade acima:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a},$$

ou seja,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},$$

donde obtemos,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)},$$

o que acareta em,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

portanto,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{3.2}$$

Aqui é importante, por parte do professor, destacar a importância da análise do termo $b^2 - 4ac$ que é chamado de Δ (delta), ou discriminante, ou seja, $\Delta = b^2 - 4ac$. Sendo assim, a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ terá ou não solução no conjunto dos números reais se, 1º) $\Delta > 0$ existem duas raízes reais e distintas;

2º) $\Delta = 0$ existem duas raízes reais e iguais, também chamadas de raízes duplas;

3º) $\Delta < 0$ não existem raízes reais.

Isso precisa ficar esclarecido para o aluno, pois muitas questões não exigem a determinação das raizes, apenas a existência delas. A interpretação geométrica é outro fator que pode tornar o processo do conhecimento das raízes mais significativo e prático e por isso merece destaque no ensino desse conteúdo.

Exemplo 3.1.1. Considerando as três equações a seguir, iremos fazer a análise do valor do Δ e a relação que tem com a quatidade de raízes de cada equação:

$$1+4x+2x^2=0. \tag{3.3}$$

$$\pi+4\pi x-4\pi x^2=0. \tag{3.4}$$

$$7+5x+x^2=0. \tag{3.5}$$

Temos em (3.3), que $\Delta=(4)^2-4(2)(1) \Longrightarrow \Delta=8>0$, portanto (3.3), deve admitir duas raízes reais distintas, que de acordo com a equação (3.2), são $\{\left(\frac{-2+2\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{-2-2\sqrt{2}}{2}\right)\}$.

Para equação (3.4), temos que $\Delta=(4\pi)^2-4(-4\pi)(\pi) \Longrightarrow \Delta=0$ portanto (3.4), admite uma raiz dupla. Sendo que a equação (3.2) neste caso, se reduz apenas a $\left\{x=\frac{-b}{2a}\right\}$, logo a raiz dupla de (3.4) é $\left\{\frac{-1}{2}\right\}$.

Observe que para a equação (3.5), temos $\Delta=(5)^2-4(1)(7) \Longrightarrow \Delta=(-3)$, uma vez que o valor do discriminante é negativo, então a equação (3.5) não admite nenhuma raiz real.

Será de suma importância o professor destacar nesse momento que o processo de encontrar os valores para x que satisfaça a equação (3.1) está inteiramente ligado as relações com os coeficientes da função polinomial do 2º grau. Isso torna-se significativo para o aluno, pois deixa de ser apenas uma fórmula, não havendo preocupação em memorizá-la. Também deve ser destacado a verificação da validade das raízes determinadas, ou seja, se as raízes estão de acordo com a realidade do problema, conforme veremos na Questão (3.3.2) o qual uma das raízes é descartada por não condizer com a realidade do problema.

Exemplo 3.1.2. Determine a diferença entre a maior e a menor das raízes de

$$x^2-px+\frac{(p^2-1)}{4}=0.$$

Desejamos aqui encontrar o valor da diferença entre a maior e a menor raiz. Assim, precisamos determinar o valor de tais raízes, de acordo com o método de completar quadrados teremos que:

$$x^2 - px = -\left(\frac{p^2-1}{4}\right).$$

Completando quadrado, segue que:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2-1}{4}\right).$$

Daí,

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Como ambos lado da igualdade são números positivos, extraindo a raiz quadrada temos que:

$$x - \frac{p}{2} = \pm\frac{1}{2}.$$

Logo, $x = \frac{p\pm 1}{2}$, e então as raízes são $x_1 = \frac{p+1}{2}$ e $x_2 = \frac{p-1}{2}$. Note que $x_1 > x_2$.

Fazendo a diferença

$$x_1 - x_2 = \frac{p+1-p+1}{2}.$$

Assim, como desejado, determinamos que $x_1 - x_2 = 1$.

3.1.2 Método da mudança de variáveis $x = y + t$

O método de mudança de variáveis é também conhecido como Método de Viète, podendo ser uma boa opção para quem não quiser “decorar” a fórmula (3.2), tendo que, no entanto, operar com o produto notável $(y+t)^2$. Também é uma opção de demonstração de como se obter a fórmula (3.2).

Exemplo 3.1.3. Seja $-16 + x^2 = 0$ uma equação do 2º grau incompleta, temos então que $x = \pm\sqrt{16}$, ou seja, $x = \pm 4$.

De uma forma geral, queremos resolver equações do tipo,

$$ay^2 + c = 0 \quad \text{com} \quad a \neq 0. \tag{3.6}$$

O método consiste na mudança da variável x para novas variáveis auxiliares y e t com o objetivo de obter uma equação do tipo (3.6).

Inicialmente fazemos $x = y + t$ na equação.

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0. \tag{3.7}$$

obtemos,

$$a(y+t)^2+b(y+t)+c=0 \quad \text{ou} \quad ay^2+2aty+at^2+by+bt+c=0,$$

reescrevemos a igualdade acima como uma equação na nova variável y:

$$ay^2+(2at+b)y+at^2+bt+c=0. \tag{3.8}$$

Viète transformou a equação (3.8) numa equação incompleta do 2º grau, anulando o coeficiente do termo y, ou seja, devemos ter, $2at+b=0$, donde obtemos,

$$t=\frac{-b}{2a}. \tag{3.9}$$

Substituindo o valor de t na equação (3.8) resulta em,

$$ay^2+a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=0,$$

ou equivaletemente,

$$ay^2+\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c=0,$$

ou ainda,

$$ay^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=0.$$

Agora isolando y^2 temos que:

$$ay^2=\frac{b^2-4ac}{4a} \Longleftrightarrow y^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Sendo $b^2-4ac \geq 0$ teremos solução real para y e assim temos,

$$y=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Como $y=x-t$, e $t=\frac{-b}{2a}$, então basta substituir y e t e chegaremos a solução da equação (3.7), obtendo assim,

$$x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Observação 3.1.1. É interessante discutir, em sala de aula, a mudança de variáveis ($x=y+t$) e a escolha $\left(t=-\frac{b}{2a}\right)$. O uso da mudança para as variáveis auxiliares não altera o valor das raízes da equação original em x. É apenas um artifício com o objetivo de facilitar a resolução. A escolha $\left(t=-\frac{b}{2a}\right)$ pode levar o aluno a pensar que "sumiu" algo no meio da equação e, com isso, o resultado ficará comprometido. No entanto, deve-se ressaltar que t é uma variável auxiliar e poderíamos escolher outras expressões para ela, mas a escolha sugerida pelo Método de Viète é uma boa alternativa, pois transforma uma equação completa numa incompleta do 2º grau, que é notoriamente mais fácil de se resolver.

Exemplo 3.1.4. Para determinar as raízes da equação

$$x^2 - 7x + 12 = 0. \tag{3.10}$$

usaremos o método da substituição de variáveis, inicialmente, substituímos $x = y + t$ na equação (3.10), obtendo:

$$(y+t)^2 - 7(y+t) + 12 = 0,$$

desenvolvendo, temos

$$y^2 + 2ty + t^2 - 7y - 7t + 12 = 0.$$

Reescrevendo na variável y, temos $y^2 + (2t-7)y + t^2 - 7t + 12 = 0$. Assim iremos escolher $t = \frac{7}{2}$ para anular o coeficiente $(2t-7)$ de y, chegando em:

$$y^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{7}{2}\right) + 12 = 0,$$

desenvolvendo temos que,

$$y^2 + \left(\frac{(49 - (2)49 + 48)}{4}\right) = 0,$$

isolando o y teremos,

$$y = \pm\frac{1}{2}.$$

Logo, subtituindo os valores de y e t em $x = y + t$ temos que:

$$x_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 4 \qquad \text{ou} \qquad x_2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = 3.$$

3.1.3 Método da soma e do produto das raízes

Também conhecido como relações de Girard, embora seja considerado apenas uma relação entre coeficientes e raízes, esse método torna-se muito prático para equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a = 1$. É o que ilustraremos a seguir.

Como já foi discutindo anteriomente que se $b^2 - 4ac \geq 0$, então as raízes da equação:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0 \tag{3.11}$$

são dadas por: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
Note que:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b - b}{2a} \\ &= \frac{-b}{a}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

e

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \\ &= \frac{b^2-b^2-4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

De acordo com a praticidade dessa relação, destacada anteriormente quando $a=1$, deve-se pelo fato das igualdades acima, admitir as seguintes relações:

$$x_1+x_2=-b \quad \text{e} \quad x_1x_2=c.$$

Exemplo 3.1.5. Utilizaremos o método da soma e produto das raízes para determinar as raízes da equação:

$$x^2-15x+50=0$$

Sabemos que $a=1$, $b=-15$ e $c=0$, então pelo método da soma e produto das raízes teremos,

$$x_1+x_2=15=10+5 \quad \text{e} \quad x_1x_2=50=(10)(5),$$

dois números inteiros tais que a soma seja 15 e o produto 50 são:

$$x_1=10 \ \text{ e } \ x_2=5.$$

3.1.4 Equações do segundo grau cuja soma dos coeficientes seja igual a zero

Um fato curioso ocorre nas equações do segundo grau do tipo $ax^2+bx+c=0$ com $a\neq 0$, em que a soma dos coeficientes é igual a zero, ou seja, $a+b+c=0$. Por exemplo, na equação,

$$-53-74x+127x^2=0\ ,$$

temos que $a=(127)$, $b=(-74)$ e $c=(-53)$, então claramente, o valor da adição $a+b+c$ será nula.

Este fato embora, pareça ser muito simples, não se observa a presença dele em livros didáticos, bem como é passado por desapercebido pela maioria dos professores durante a abordagem do conteúdo em sala de aula, deixando de apresentar mais uma importante relação, que pode vir auxiliar no processo de determinar raízes de tais equações. Portanto, investigamos o que ocorre nas equações do segundo grau com essa característica.

Observando a relação entre zeros da função $p(x)=ax^2+bx+c$ e as raízes da equação polinomial de segundo grau $ax^2+bx+c=0$. Partindo da hipótese que: $a+b+c=0$, temos que:

$$a+b+c=0,$$

ou equivalente,

$$a(1)^2 + b(1) + c = 0 \ ,$$

donde obtemos que $p(1) = 0$.

Ou seja, $x = 1$ é uma raiz de $p(x)$ que é equivalente a dizer que $x = 1$ é solução de $ax^2 + bx + c = 0$. Ora, mas se $x = 1$ é raiz do polinômio $ax^2 + bx + c$, então pelo Teorema de D'Alembert (2.3.2), $(x-1)$ divide $ax^2 + bx + c$. Fazendo essa divisão temos o quociente $ax + (b+a)$ e resto $a+b+c$. Ora, $a+b+c = 0$ por hipótese e podemos escrever $b+a = -c$, portanto desta divisão temos quociente $ax - c$ e resto 0. Logo podemos escrever

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= (x-1)(ax-c) \\ &= a(x-1)(x - \frac{c}{a}). \end{aligned}$$

e assim observamos da expressão anterior que a outra raiz de $ax^2 + bx + c = 0$ é $x = (\frac{c}{a})$.

Concluímos então que toda equação do segundo grau cuja soma de seus coeficientes seja zero, possui as seguintes raízes.

$$x_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{c}{a}.$$

De posse dessa informação fica fácil determinar as raízes de uma equação do segundo grau, cuja soma dos seus coeficientes seja igual a zero.

Exemplo 3.1.6. Determinaremos as raízes da equação $-53 - 74x + 127x^2 = 0$.
Pelo que foi observado anteriormente temos que $127 - 74 - 53 = 0$, então:

$$x_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_2 = \frac{-53}{127}.$$

3.2 Simetria do gráfico da função polinomial do 3^{o} grau

Nesta subseção exploraremos a simetria do gráfico da função polinomial do 3º grau. Nos livros didáticos, normalmente enfatizam a simetria da parábola, isto é, o gráfico da função polinomial do 2º grau.

As funções polinomiais de grau superior a 2 podem ilustrar as dificuldades que se apresentam nos traçados de gráficos, quando não se conhecem os "zeros" da função. Casos em que a função polinomial se decompõe em um produto de funções polinomiais de grau 1 merecem ser trabalhados. Esses casos evidenciam a propriedade notável de que, uma vez tendo identificado que o número a é um dos zeros da função polinomial $p(x)$, de acordo com o Teorema (2.3.3) esta pode ser expressa como o produto do fator $(x-a)$ por outro polinômio de grau menor que o grau de $p(x)$, por meio da divisão de $p(x)$ por $(x-a)$.

De acordo com Silva (26, 2002), o gráfico de um polinômios do terceiro grau, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ com $a \neq 0$ apresenta uma característica em seu comportamento que é semelhante ao comportamento do gráfico do polinômo do segundo grau

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

com $a \neq 0$ que por sua vez o gráfico é uma parábola e possui a propriedade de ser simétrica em relação a reta $x = x_v$, onde x_v é a abcissa do vértice da parábola, um cálculo direto mostra que $f(x_v - h) = f(x_v + h)$ para qualquer $h \in \mathbb{R}$.

Na maioria das vezes é comum o professor não ressaltar essa relação que existe no gráfico da função polinomial do terceiro grau. Deixando escapar aqui a possibilidade, de aprimorar a compreensão do aluno com respeito a simetria do gráfico dessas funções.

Com cálculos simples mostraremos tal relação:

$$\begin{aligned}
p(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\
&= a\left(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}\right) \\
&= a\left(x^3 + 3\frac{b}{3a}x^2 + 3\left(\frac{b}{3a}\right)^2 x + \left(\frac{b}{3a}\right)^3 - 3\left(\frac{b}{3a}\right)^2 x - \left(\frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}\right) \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)x + \frac{d}{a} - \frac{b^3}{27a^3}\right] \\
&= a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x + d - \frac{b^3}{27a^2}.
\end{aligned}$$

Logo, $p(x) = a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + c_1\left(x + \frac{b}{3a}\right) + c_0$, sendo $c_1 = c - \frac{b^2}{3a}$ e $c_0 = d - \frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2}$. Agora, fazendo
$x_p = -\frac{b}{3a}$, temos $p(x_p) = c_0$ isso implica que o ponto $P = (-\frac{b}{3a}; c_0) \in p(x)$. Este ponto vai exercer um papel importante. Pondo $x_p = -\frac{b}{3a}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{p(x_p + h) - p(x_p - h)}{2} &= \frac{ah^3 + c_1h + c_0 - ah^3 - c_1h + c_0}{2} \\
&= c_0 = p(x_p)\ ,
\end{aligned}$$

para qualquer que seja $h \in \mathbb{R}$.

Este resultado diz que a ordenada do ponto P é o ponto médio do segmento de extremos

$$\Big(p(x_p - h); p(x_p + h)\Big),$$

ou seja, o gráfico de $p(x)$ é simétrico em relação ao ponto P. Observe que, no caso do segundo grau, tínhamos uma simetria em relação a uma reta; no terceiro grau, temos uma simetria em relação a um ponto. No exemplo ilustrativo a seguir, P é o ponto em questão, determinado pelas coordenadas $\Big(x_p; p(x_p)\Big)$, sendo $x_p = \frac{-b}{3a}$.

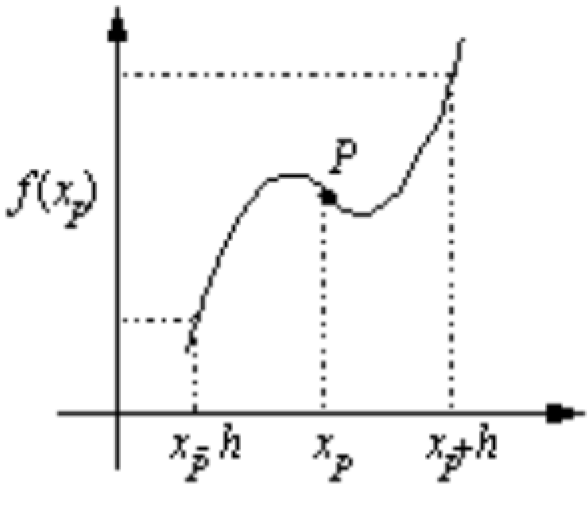


Figura 2 – Fonte:http://rpm.org.br/cdrpm/49/2.htm

Exemplo 3.2.1. Observe o gráfico da função polinomial do 3º grau

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7,$$

é simétrico com relação ao ponto $\Big(x_p; f(x_p)\Big)$, que por sua vez, podemos determinar,

$$x_p = \frac{-b}{3a} = \frac{-(-6)}{3},$$

portanto $x_p = 2$ e $f(x_p) = 1$ então,

$$(x_p; f(x_p)) = (2; 1).$$

Logo, no esboço do gráfico uma vez marcado, por exemplo, o ponto $(3;2) = (2+1;1+1)$, ou seja, $h = 1$. A partir desse ponto obtém-se imediatamente o outro ponto do gráfico $(2-1;1-1) = (1;0)$.
Com mesmo raciocínio, marcando o ponto $(4;9) = (2+2;1+8)$, obtém-se o ponto $(2-2;1-8) = (0;-7)$, e assim por diante.

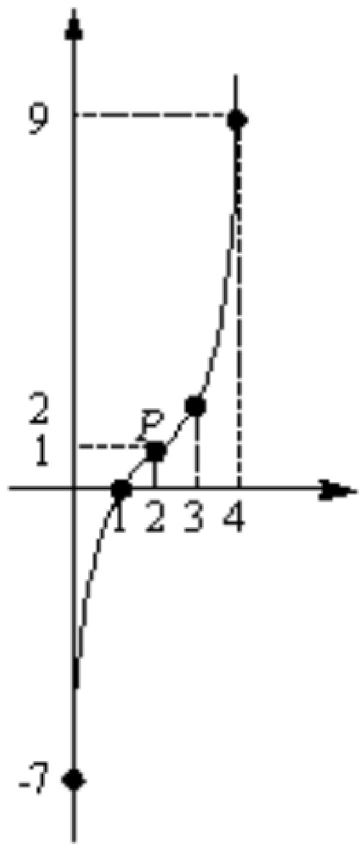


Figura 3 – Fonte:http://rpm.org.br/cdrpm/49/2.htm

3.3 Algumas aplicações com polinômios

Nesta seção iremos fazer uso da liguagem polinomial para resolver alguns exercícios algébricos ou até mesmo artiméticos ou geométricos que fazendo uso de recursos algébricos resolve tais exercícios com esforço reduzido.

Questão 3.3.1. (Artimética): Mostre que o produto de quatro números inteiros consecutivos mais uma unidade é igual a um quadrado perfeito.

Resolução: Vejamos alguns exemplos numéricos:
$(1.2.3.4)+1=49=7^2$;
$(3.4.5.6)+1=361=19^2$;
De modo geral, temos que:
Sejam x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, quatro números inteiros consecutivos.
Queremos mostrar que $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ é um quadrado perfeito, temos que:

$$\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=\sqrt{x^4+6x^3+11x^2+6x+1} \qquad (3.14)$$

1º caso: para $x \in \{0,-1,-2,-3\}$ tem-se:

$$\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=1,$$

como 1 é um quadrado perfeito, então está mostrado.
2º caso:

$$\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} \neq 1.$$

Então, temos que $\sqrt{x^4+6x^3+11x^2+6x+1}$ sendo um polinômio de grau igual a 2, uma vez que o radicando sempre será um número positivo. Logo,

$$\sqrt{x^4+6x^3+11x^2+6x+1}=ax^2+bx+c.$$

Elevando ao quadrado a igualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} x^4+6x^3+11x^2+6x+1 &= (ax^2+bx+c)^2 \\ &= a^2x^4+2abx^3+(2ac+b^2)x^2+2bcx+c^2. \end{aligned}$$

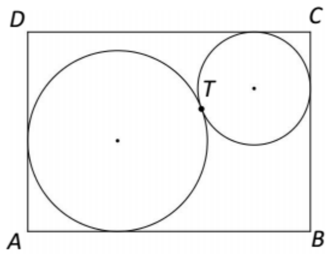
Aplicando igualdade de polinômios, têm-se:
$a^2=1$, $6=2ab$ e $6=2bc$ como $a=1$, implica que $b=3$, então $c^2=1$ e $2ac+b^2=11$
Assim, o polinômio de grau 2 é determinado por,

$$ax^2+bx+c=x^2+3x+1,$$

logo, $x(x+1)(x+2)(x+3)$ é um quadrado perfeito para todo $x \in \mathbb{Z}$. •

No Exame Nacional de Qualificação (ENQ) de 2013.1 contém uma questão do tipo "geométrica" em que uma solução pode ser dada usando a linguagem polinomial.

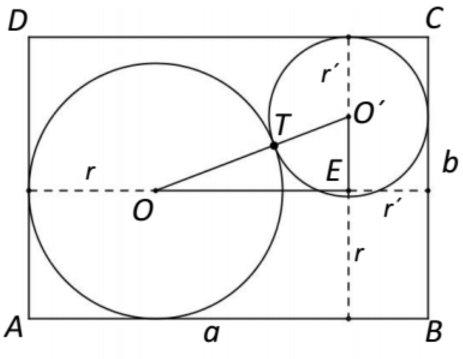
Questão 3.3.2. (ENQ/2013.1/Questão(01)) É dado um retângulo $ABCD$ tal que em seu interior estão duas circunferências tangentes exteriormente no ponto T, como mostra a figura abaixo. Uma delas é tangente aos lados AB e AD e a outra é tangente aos lados CB e CD.



Mostre que a soma dos raios dessas circunferências é constante (só depende das medidas dos lados do retângulo).

Resolução: No retângulo $ABCD$ consideremos $AB = a$ e $BC = b$. Sem perda de generalidade consideraremos $b \leq a$ e $a \leq 2b$, pois sem esta última condição as tangências indicadas não ocorreriam.

Sejam O e O' os centros das circunferências e r e r' os respectivos raios. Seja $s = r + r'$. Como a reta que contém os centros das circunferências passa pelo ponto de tangência então $OO' = OT + TO' = r + r' = s$.



A paralela a AB por O e a paralela a BC por O' cortam-se em E. Temos:

i) $r + OE + r' = a$, ou seja, $OE = a - s$.

ii) $r + EO' + r' = b$, ou seja, $EO' = b - s$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OEO', temos:

$$s^2 = (a - s)^2 + (b - s)^2. \tag{3.15}$$

$$s^2 = a^2 - 2as + s^2 + b^2 - 2bs + s^2.$$

Donde obtemos a seguinte equação do segundo grau em s

$$s^2-(2a+2b)s+a^2+b^2=0. \tag{3.16}$$

Agora resta encontrar as raízes de (3.16).

$$\begin{aligned} s &= \frac{2a+2b \pm \sqrt{(2a+2b)^2-4(a^2+b^2)}}{2} \\ &= \frac{2a+2b \pm \sqrt{4a^2+8ab+4b^2-4(a^2+b^2)}}{2} \\ &= \frac{2a+2b \pm 2\sqrt{2ab}}{2} = a+b \pm \sqrt{2ab}. \end{aligned}$$

Assim as duas raízes de (3.16) são $x_1 = a+b+\sqrt{2ab}$ e $x_2 = a+b-\sqrt{2ab}$. Como claramente $s < a+b$, pois as circunferências estão no interior do retângulo, o valor de s que procuramos é a menor raiz da equação acima. O que comprova que o valor de $s = r+r'$ é constante e só depende das medidas dos lados do retângulo. •

Observação 3.3.1. Neste momento é impotante dar atenção quanto as aplicações, cabe uma análise das condiçõs em que o problema está inserido. As vezes tem resoluções que está modelada por uma equação polinomial do 2º grau. Entretanto, apenas uma de suas raízes é aceita no contexto da aplicação. Como foi o caso acima. Temos duas raízes reais, porém os segmentos s, a e b formam um triângulo e por desigualdade triangular, o comprimento de um dos lados é sempre menor que a soma dos outros dois lados de um triângulo.

Questão 3.3.3. Neste exemplo usaremos a linguagem polinomial para mostrar que o número real $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ é irracional.

Resolução: De fato, sendo $x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, têm-se $x^2-2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ e, daí,

$$\left(x^2-2\right)^2 = 2+\sqrt{2}.$$

Logo, $\left(\left(x^2-2\right)^2-2\right)^2 = 2$, de maneira que x é raiz do polinômio mônico de coeficientes inteiros. Assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\left(x^2-2\right)^2-2\right)^2-2, \\ &= \left(x^4-4x^2+2\right)^2-2. \end{aligned}$$

Portanto, se $x \in \mathbb{Q}$, segue do Teorema (2.3.6) que $x \in \mathbb{N}$ e $x \mid f(0) = 2$, de modo que $x = 1$ ou $x = 2$. Mas como:

$$1 < x < \sqrt{2+\sqrt{2+2}} = 2,$$

Chegamos a uma contradição. •

De modo similar, podemos mostrar a irracionalidade de alguns números reais, vejamos.

Questão 3.3.4. Mostrar que $\operatorname{tg}10^\circ$ é irracional.

Resolução: Denotemos $x = \operatorname{tg}10^\circ$. Aplicando a fórmula da soma da tangente da soma sucessivamente, obtemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}30^\circ &= \frac{\operatorname{tg}20^\circ + \operatorname{tg}10^\circ}{1 - \operatorname{tg}20^\circ . \operatorname{tg}10^\circ} = \frac{\frac{2\operatorname{tg}10^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 10^\circ} + \operatorname{tg}10^\circ}{1 - \frac{2\operatorname{tg}^2 10^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 10^\circ}},\\
&= \frac{\frac{2x}{1-x^2} + x}{1 - \frac{2x^2}{1-x^2}} = \frac{3x - x^3}{1-3x^2}.
\end{aligned}$$

Mas, como $\operatorname{tg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, segue que:

$$\frac{\left(3x - x^3\right)^2}{\left(1-3x^2\right)^2} = \frac{1}{3},$$

ou, ainda,

$$3x^6 - 27x^4 + 33x^2 - 1 = 0.$$

Portanto, por construção, $\operatorname{tg}10^\circ$ é um zero da função polinomial de coeficientes inteiros

$$p(x) = 3x^6 - 27x^4 + 33x^2 - 1.$$

Basta mostrar que a mesma não possui raízes racionais. Para tanto, utilizaremos o Teorema (2.3.6). Sabendo inicialmente que, as possíveis raízes racionais de $p(x)$ são ± 1 e $\pm\frac{1}{3}$; entretanto, calculando diretamente $p(\pm 1)$ e $p(\pm\frac{1}{3})$ temos:

$p(1) = 8$	$p(\frac{1}{3}) = 2,34$
$p(-1) = 8$	$p(-\frac{1}{3}) = 2,34$

Assim concluímos que nenhum desses números é igual a 0, conforme desejado. •

4 Álgebra nas Questões do ENEM e OBMEP

De acordo com relatório do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) (27, 2016, pág. 32), os resultados dos estudantes brasileiros na avaliação de matemática no (Programme for International Student Assessment) PISA 2015, mostra que "No Brasil, $70,3\%$ dos estudantes estão abaixo do nível 2 em matemática, patamar que a Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Econômico (OCDE)[1] estabelece como necessário para que o estudante possa exercer plenamente sua cidadania.".

A reportagem publicada no portal G1 (28, 2013, pág. 01), registra que "Oito em cada dez municípios brasileiros têm menos de um quarto de alunos do 9º ano do ensino fundamental aprendendo o adequado à sua série em matemática." Ainda de acordo com esta reportagem, o levantamento do movimento Todos pela Educação ressalta ainda que em 2005, o número era nove em cada dez cidades ($95,7\%$) e que, em 2015, caiu para oito em cada dez ($85,3\%$).

O levantamento realizado pelo AppProva (plataforma que auxilia alunos e escolas a se prepararem para o ENEM) e noticiado pelo Portal Brasil (29, 2016), revela que matemática é uma das disciplinas com o maior número de erros entre os anos de 2009 e 2014. O estudo foi realizado a partir da análise de microdados do exame, e o objetivo é auxiliar professores e estudantes para aprimorarem o desempenho nas provas. A taxa de acertos nessa disciplina foi uma das menores no período analisado, apenas 29%. Ainda de acordo com esse levantamento os conteúdos, dentro da matemática, que os estudantes mais erraram foram sistema de equações e funções polinomiais do segundo grau.

As dificuldades que os alunos do ensino médio apresentam nas questões de matemática, presentes no ENEM e na OBMEP, podem ser um indicativo de que apesar da contextualização dessas questões e das mesmas estarem de acordo com a matriz de referência de elaboração das provas, que por sua vez esta inserida no currículo, está havendo uma lacuna que não é preenchida no atual sistema brasileiro de ensino de matemática.

Neste capítulo iremos estudar algumas questões algébricas presentes nestes exames, para que sejam exploradas, além de uma simples exposição do gabarito. Como hoje o ENEM se tornou a principal porta de acesso para os alunos do ensino médio ingressar em um curso superior, o estímulo e motivação do aluno pode ser despertado por estar respondendo questões nos mesmos moldes de provas vindouras. E que estes momentos venham auxiliar no processo de ensino e aprendizagem.

[1] É uma organização internacional, composta por 34 países e com sede em Paris, França. A OCDE tem por objetivo promover políticas que visem o desenvolvimento econômico e o bem-estar social de pessoas por todo o mundo.

Concordamos com Lima (1, 2007, pág. 177),o qual afirma que "o ensino de matemática deve dar ênfase na seguinte tríplice, conceituação, manipulação e aplicação". Não necessariamente deve seguir essa sequência, mas é importante que as três sejam trabalhadas para assegurar a harmonia do ensino e cada uma delas é necessária para o bom êxito do ensino desta.

Neste intuito, iremos apresentar as resoluções das questões nas seções seguintes observando essas três etapas. A dosagem adequada de cada uma delas depende do equilíbrio do processo de aprendizagem, buscando sobretudo o discernimento e a clareza das ideias, afim de desenvolver nos alunos o hábito de pensar e agir ordenadamente.

Ainda de acordo com Lima (1, 2007), temos que:

> **Conceituação**: Compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo a nítida conscientização de que as conclusões sempre são provenientes de hipóteses que se admitem, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimento de conexões entre conceitos diversos, bem como a intrepretação e a reformulação de idéias e fatos sob diferentes formas e termos. É importante destacar que a conceituação é indispensável para o bom resultado das aplicações e uma abordagem histórica é de fundamental importância.
>
> **Manipulação**: De caráter algébrico (mas não exclusivamente), compreende as habilidades e a destreza no manuseio de equações, fórmulas e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permite a concentração realmente nos pontos cruciais, poupando-lhe da perda de tempo e energia com detalhes secudários, auxiliando para que as resoluções sejam de forma simples e eficaz.
>
> **Aplicação**: Sem dúvida o maior desafio e também o momento em que ocorrerá a maior aprendizagem matemática. É o emprego das noções e teorias da matemática para obter resultados, conclusões e previsões em diversas situações. Incluindo também a resolução de problemas que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a auto-estima, estimula a imaginação e recompensa o esforço.

Esperamos que esta abordagem possa permitir um melhor esclarecimento ao aluno, possibilitando ao mesmo compreender e intrepretar, através das etapas da resolução de cada questão, mostrando assim o que de fato a questão busca desenvolver e os conhecimentos necessários para resolvê-la, enfatizando com isso a importância do estudo de algumas equações e expressões algébricas presentes no currículo da educação básica brasileira. Verificando também que essas questões estão de acordo com os conteúdos previstos para serem trabalhados em sala de aula.

4.1 Álgebra em algumas questões do ENEM

A álgebra está presente na quinta competência da matriz de referência para elaboração da prova de matemática do ENEM (30, 2016), descrita da seguinte forma: "Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas". Que busca avaliar a capacidade do aluno de representar gráfica e algebricamente fenômenos da matemática.

De acordo com esta competência que são elaboradas algumas das questões do ENEM. A seguir estão as habilidades que são cobradas nesta competência, descritas na matriz de referência ENEM (30, 2016) de matemática e suas tecnologias, as quais são o guia do elaborador na hora de fazer a questão.

> H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
> H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
> H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
> H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
> H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Os conteúdos, relacionados a estas habilidades, que devem ser conhecidos pelos alunos, são os seguintes: "gráficos e funções, funções algébricas do 1º e do 2º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas, equações e inequações, funções trigonométricas, plano cartesiano, paralelismo e perpendicularidade."

De acordo com a tríplice apresentada anteriormente, iremos apresentar a seguir a resolução comentada de algumas questões do ENEM em edições anteriores (31, 2017), evindenciando cada uma das etapas: Conceituação, Manipulação e Aplicação.

QUESTÃO 171

Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos.

Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y?

A) $5X - 3Y + 15 = 0$
B) $5X - 2Y + 10 = 0$
C) $3X - 3Y + 15 = 0$
D) $3X - 2Y + 15 = 0$
E) $3X - 2Y + 10 = 0$

Figura 4 – Questão do ENEM 2013-prova azul. Fonte: http://portal.inep.gov.br/web/guest/provas-e-gabaritos

Resolução: Da coleta das informações já é possível estabelecer que cada ciclo corresponde ao tempo em que as luzes verde, amarela e vermelha ficam acessas, e esse ciclo dura y segundos, temos ainda que a luz amarela permanece acesa por 5 segundos a cada ciclo, e que a luz verde ficará acessa durante x segundos.

Conceituação: Conhecimentos de função do 1º grau e frações são os requesitos básicos para resolução dessa questão. Uma vez que a questão pergunta qual é a expressão que representa a relação entre x e y. É importante perceber que o tempo y de cada ciclo em segundos está em função do tempo x.

Manipulação: No enunciado também informa que o tempo em que a luz verde fica acesa corresponde a $\left(\frac{2}{3}\right)$ do tempo que a luz vermelha fica acesa, assim:

$$y = 5 + x + (\text{Vermelha}). \tag{4.1}$$

e o tempo que a luz verde permanece acesa é x, isso quer dizer que com uma simples manipulação algébrica possamos determinar o tempo que a luz vermelha fica acesa em cada ciclo,

$$x = \frac{2}{3}(\text{Vermelha}) \Longleftrightarrow (\text{Vermelha}) = \frac{3}{2}x.$$

Substituindo-se esse valor na equação (4.1), temos que

$$y = 5 + x + \frac{3}{2}x.$$

Aplicando o m.m.c que é 2 na expressão acima e as propriedades de frações, teremos que

$$y = 5 + x + \frac{3}{2}x \Longleftrightarrow y = \frac{10}{2} + \frac{2x}{2} + \frac{3}{2}x\ ,$$

logo,

$$y = \frac{10}{2} + \frac{5}{2}x \Longleftrightarrow 2y = 5x + 10.$$

Aplicação: Na etapa anterior já foi estabelecida a relação entre x e y, observe que o valor y depende do valor de x, entretanto, nas alternativas da questão não consta esta expressão, exigindo calma e atenção do aluno, pois neste momento ele precisa percerber que existe uma expressão equivalente na alternativa B, sendo portanto $5x-2y+10=0$ a expressão desejada. •

QUESTÃO 172

A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento (t = 0) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39 °C.

Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

A 19,0
B 19,8
C 20,0
D 38,0
E 39,0

Figura 5 – Questão do ENEM 2013-prova azul. Fonte: http://portal.inep.gov.br/web/guest/provas-e-gabaritos

Resolução: Conforme informação do enunciado a temperatura T do forno no momento de seu desligamento (no instante $(t=0)$) reduz de acordo com a expressão abaixo,

$$T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400, \qquad \text{com t em minutos.} \tag{4.2}$$

Conceituação: Assim, podemos calcular em quantos minutos o forno atingirá a temperatura de 39 °C e, consequentemente, poder ser aberto: Fazendo $T(t) = 39\,°\text{C}$ em (4.2), teremos assim uma equação do 2º grau incompleta, então basta manipular para determinar o valor de t.

Manipulação: Como desejamos que a temperatura seja de 39 °C, então basta substituir $T(t)$ por 39 em (4.2),

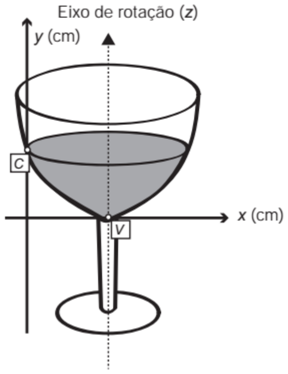
$$\begin{aligned} 39 &= -\frac{t^2}{4} + 400 \\ \frac{t^2}{4} &= 400 - 39 \\ \frac{t^2}{4} &= 361 \\ t &= \sqrt{361 \cdot 4} \\ t &= 19 \cdot 2 \Longrightarrow t = 38. \end{aligned}$$

Aplicação: Nesta etapa podemos usar o valor de t, encontrado na manipulação, para aplicar a equação (4.2) e verificar que de fato que ao passar 38 minutos o valor de

$T(38)$ será $39\,°\mathrm{C}$ e assim a trava de segurança será liberada para abertura. Portanto, D é a alternativa correta. •

QUESTÃO 152

A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

- A 1.
- B 2.
- C 4.
- D 5.
- E 6.

Figura 6 – Questão do ENEM 2013-prova azul. Fonte: http://portal.inep.gov.br/web/guest/provas-e-gabaritos

Resolução: Nesta questão, o enunciado já fornece a função real que expressa a parábola no plano cartesiano:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + c.$$

Conceituação: Sabendo que V é o vértice da parábola e está localizado sobre o eixo x, de acordo com essas informações retiradas da questão, pede-se que encontre c, a medida em centímetros da altura do líquido contido na taça. Os conceitos e noções das propriedades da equação do segundo grau serão de extrema importância para resolução dessa questão. De posse da função real

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + c,$$

conhecendo que o vértice da parábola está sobre o eixo x, isso quer dizer que existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$.

Manipulação: Com as informações obtidas na conceituação, podemos estabelecer que

$$\frac{3}{2}x^2 - 6x + c = 0. \tag{4.3}$$

Sabendo que a parábola tem apenas um vértice, então o discriminante da equação (4.3), equação polinomial do segundo grau, deve ser igual a zero. Como,

$$\triangle = b^2 - 4.a.c \Longrightarrow \triangle = (-6)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right)c,$$

agora fazendo o discriminante igual a zero temos,

$$(-6)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right)c = 0 \Longrightarrow 36 - 6c = 0.$$

Donde obtemos $c = 6$.

Aplicação: Nesta etapa podemos usar o valor de c encontrado na manipulação para aplicar a equação (4.3) e encontrar o valor de x que é vértice da parábola.

$$\frac{3}{2}x^2 - 6x + 6 = 0.$$

Resolvendo essa equação do segundo grau:

$$\triangle = b^2 - 4.a.c \Longrightarrow \triangle = (-6)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right)6 \Longrightarrow \triangle = 0.$$

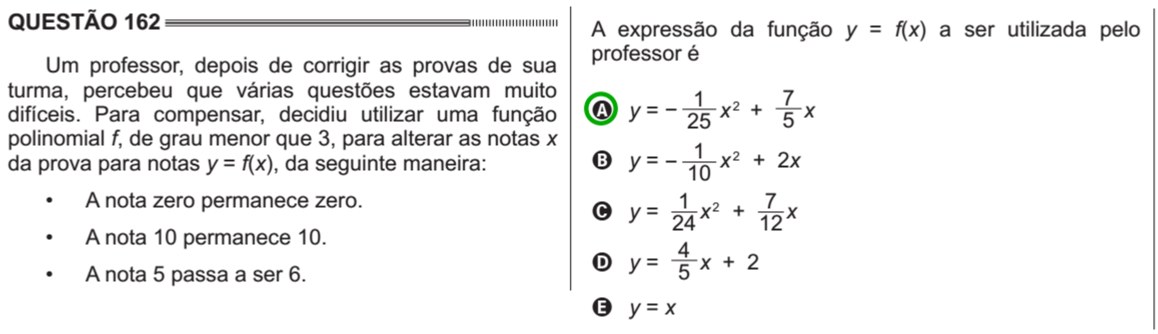
Logo

$$x = \frac{-b}{2a} \Longrightarrow x = \frac{-(-6)}{2\left(\frac{3}{2}\right)} \Longrightarrow x = 2.$$

Podendo substituir na equação $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + c$ e verificar a validade

$$f(2) = \frac{3}{2}(2)^2 - 6(2) + 6 \Longrightarrow f(2) = 6.$$

Portanto a altura do líquido na taça é de 6 centímetros, sendo correta a alternativa C. •



QUESTÃO 162

Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial *f*, de grau menor que 3, para alterar as notas *x* da prova para notas *y* = *f*(*x*), da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função *y* = *f*(*x*) a ser utilizada pelo professor é

A. $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

B. $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

C. $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

D. $y = \frac{4}{5}x + 2$

E. $y = x$

Figura 7 – Questão do ENEM 2014-prova cinza. Fonte: http://portal.inep.gov.br/web/guest/provas-e-gabaritos

Resolução: Temos que expressar a função polinomial f, de grau menor que 3, ou seja, pode ser uma função polinomial constante, de grau 1 ou grau 2.

Conceituação: Assim podemos expressar da seguinte maneira $f(x) = c + bx + ax^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$. Que satisfaça as seguintes condições impostas pelo professor,

1º) A nota zero permanece zero, ou seja, $f(0) = 0$;

2^{o}) A nota 10 permanece 10, ou seja, $f(10) = 10$;

3^{o}) A nota 5 passa a ser 6, ou seja, $f(5) = 6$.

Uma vez que o enunciado da questão fornece a informação que,

$$f(x) = c + bx + ax^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

é o modelo da função que muda da nota x para a nota $y = f(x)$.

Manipulação: Assim, temos que verificar as condições exigidas pelo professor.

$$f(0) = (c + b(0) + a(0)^2) = 0 \Longrightarrow c = 0.$$

$$f(10) = \left(c + b(10) + a(10)^2\right) = 10 \Longrightarrow 10a + b = 1.$$

$$f(5) = \left(c + b(x) + a(5)^2\right) = 6 \Longrightarrow 25a + 5b = 6.$$

Temos que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} (I): \quad 10a + b = 1 \\ (II): \quad 25a + 5b = 6. \end{cases}$$

De (I) temos que $b = 1 - 10a$, substituindo em (II), teremos

$$25a + 5(1 - 10a) = 6 \Longleftrightarrow -25a = 1 \Longleftrightarrow a = \left(-\frac{1}{25}\right).$$

Agora substituindo o valor encontrado para a em (I),

$$10\left(-\frac{1}{25}\right) + b = 1 \Longrightarrow b = 1 + \left(\frac{10}{25}\right) \Longrightarrow b = \left(\frac{7}{5}\right).$$

Logo, a função $y = f(x)$ pode ser descrita da seguinte maneira,

$$y = \frac{7}{5}x - \frac{1}{25}x^2.$$

Aplicação: Podemos agora substituir x pelos valores 0,10 e 5 na expressão da função $f(x) = \frac{7}{5}x - \frac{1}{25}x^2$,

$$f(0) = \frac{7}{5}0 - \frac{1}{25}0^2 \Longrightarrow f(0) = 0;$$
$$f(10) = \frac{7}{5}10 - \frac{1}{25}10^2 \Longrightarrow f(10) = 10;$$
$$f(5) = \frac{7}{5}5 - \frac{1}{25}5^2 \Longrightarrow f(5) = 6.$$

Verificamos com isso que função $f(x) = \frac{7}{5}x - \frac{1}{25}x^2$ satisfaz as condições exigidas pelo professor, afim de alterar as notas e torna a alternativa A correta. •

QUESTÃO 159

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

A janeiro.
B abril.
C junho.
D julho.
E outubro.

Figura 8 – Questão do ENEM 2015-prova rosa. Fonte: http://portal.inep.gov.br/web/guest/provas-e-gabaritos

Resolução: Nesta questão a relação estabelecida entre a produção ser máxima quando preço é mínimo e a produção ser mínima quando preço é máximo deve ser comprendida para avançar na resolução.

Conceituação: Será necessário para resolução desta questão conhecimento de funções trigonométricas, especificamente a função cosseno, máximo e mínimo dessa função. Desejamos determinar o mês que a produção foi máxima, como o enunciado fornece a função preço,

$$p(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right). \tag{4.4}$$

Então, precisamos determinar o mês para o qual se tem o preço mínimo.

Manipulação: Para determinar o valor mínimo da função preço (4.4), basta determinar o valor mínimo de $\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$. Sendo a função cosseno, periódica, contínua e imagem contida no intervalo $[-1,1]$, obtemos daí que, o valor mínimo que a função cosseno pode assumir é (-1). fazendo,

$$\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1.$$

Sabendo que $\cos(\pi) = -1$, então precisamos determinar o valor de x que satisfaça,

$$\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = \pi.$$

Resolvendo a igualdade acima, temos que

$$\pi x - \pi = 6\pi \Longrightarrow x = 7.$$

Aplicação: Como x representa o mês do ano conforme enunciado, então $x = 7$ significa que o mês correspondente é julho. Sustituindo x por 7 em (4.4) teremos,

$$p(7) = 8 + 5\cos\left(\frac{6\pi}{6}\right) \Longrightarrow p(7) = 8 + 5\cos(\pi) = 3.$$

Como o menor preço é atigindo no mês de maior safra, logo a maior safra ocorreu no mês de julho, alternativa D. •

QUESTÃO 165

Um meio de transporte coletivo que vem ganhando espaço no Brasil é a *van*, pois realiza, com relativo conforto e preço acessível, quase todos os tipos de transportes: escolar e urbano, intermunicipal e excursões em geral.

O dono de uma *van*, cuja capacidade máxima é de 15 passageiros, cobra para uma excursão até a capital de seu estado R$ 60,00 de cada passageiro. Se não atingir a capacidade máxima da *van*, cada passageiro pagará mais R$ 2,00 por lugar vago.

Sendo x o número de lugares vagos, a expressão que representa o valor arrecadado $V(x)$, em reais, pelo dono da *van*, para uma viagem até a capital é

A) $V(x) = 902x$
B) $V(x) = 930x$
C) $V(x) = 900 + 30x$
D) $V(x) = 60x + 2x^2$
E) $V(x) = 900 - 30x - 2x^2$

Figura 9 – Questão do ENEM 2015-prova azul, 2ª aplicação. Fonte: http://portal.inep.gov.br/web/guest/provas-e-gabaritos

Resolução: Sendo x o número de passageiros que não compareceram para a excursão. O número de passageiros será $(15-x)$, uma vez que a *van* tem quinze lugares, então o pagamento pelos lugares ocupados será acrescido de $R\$\,2,00$ por cada lugar vago.

Conceituação: Expressões algébricas, será o conteúdo de extrema importância para esta resolução, interpretar a situação e montar uma expressão que descreva matematicamente o comportamento de determinadas situações são habilidades que precisam ser estimuladas para melhorar o amadurecimento com respeito a este conteúdo.

Manipulação: Sabendo que o valor a ser pago inicialmente é $R\$\,60,00$ por passageiro, como o número de passageiro é $(15-x)$, então o pagamento dos lugares ocupados será de,

$$60(15-x) = 900 - 60x.$$

Cada passageiro que compareceu vai pagar mais $R\$2,00$ por lugar vago e como faltou x pessoas, assim será acrescido $2x$ no valor do pagamento dos lugares ocupados. Dessa maneira, o total de pagamento pelos lugares vagos será $2x(15-x) = 30x - 2x^2$.

Aplicação: O valor arrecadado $V(x)$, em reais, pelo dono da *van*, para uma viagem até a capital será dado pela adição das duas parcelas, ou seja,

$$\begin{aligned} V(x) &= (900-60x) + (30x - 2x^2) \\ &= 900 - 30x - 2x^2. \end{aligned}$$

Por exemplo, se não faltar nenhum passageiro, caso em que $x = 0$, teremos

$$V(0) = 900 - 30(0) - 2(0)^2 \Longrightarrow V(0) = 900.$$

Ilustrando assim a situação em que os passageiros irão pagar apenas os $R\$60,00$, como são 15 lugares, exatamente o valor dado por $V(0)$. Portanto, a expressão que representa o valor arrecado pelo dono da *van* é a alternativa E.

De acordo com Valentino (6, 2003, pág. 10) “Uma grande dificuldade sentida pelos alunos é aceitar uma expressão algébrica como resposta”. Como na questão acima, não bastará o aluno resolver a equação. O mais importante, e mais difícil, será determiná-la.

•

4.2 Álgebra em algumas questões da OBMEP

A OBMEP é uma prova elaborada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), por meio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e tem como objetivo estimular o estudo da matemática e revelar talentos na área. Como houve uma quase universalização na participação das escolas públicas na OBMEP. Agora em 2017, as escolas privadas de todo o Brasil estão sendo convidadas a participar da OBMEP.

Devido ser uma prova de abragência nacional, e seu caráter de exclusivadade matemático, esses fatores nos instigaram a realizar a resolução de algumas questões retiradas das provas de edições anteriores (32, 2017), escolhendo assim, questões nas quais fossem possível fazer uso dos conhecimentos algébricos em suas resoluções, evidenciando também as três etapas (Conceituação, Manipulação e Aplicação).

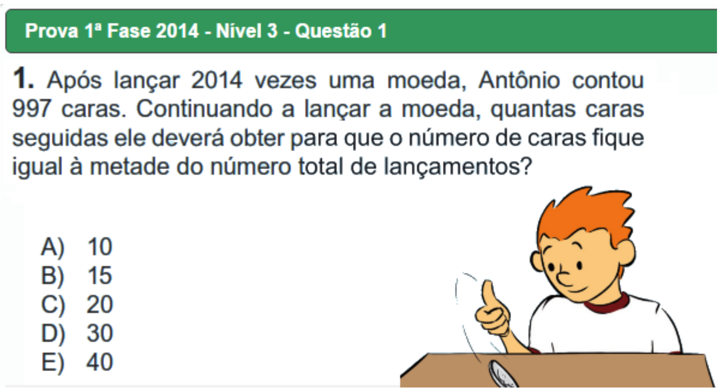


Figura 10 – Questão da OBMEP 2014, 1ª Fase, Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Resolução: De acordo com as informações do enunciado, Antônio já realizou 2014 lançamentos da moeda, dos quais obteve 997 caras,

Conceituação: Expressões algébricas, será o pricipal requisito para resolução desta questão.

Manipulação: Suponhamos que x seja o número necessário de caras consecutivas, a serem obtidas após os 2014 lançamentos para que o número de caras seja igual a metade do número dos lançamentos. Assim,

$$997 + x = \frac{2014 + x}{2},$$

logo,

$$1994 + 2x = 2014 + x,$$

isolando x, temos que $x = 20$.

Aplicação: Aplicando o resultado obtido na manipulção $x = 20$, teremos assim que o número de caras obtidas passa de 997 para 1117 que é exatamente a metade de $2014 + 20 = 2034$. Portanto é a letra C a alternativa correta. •

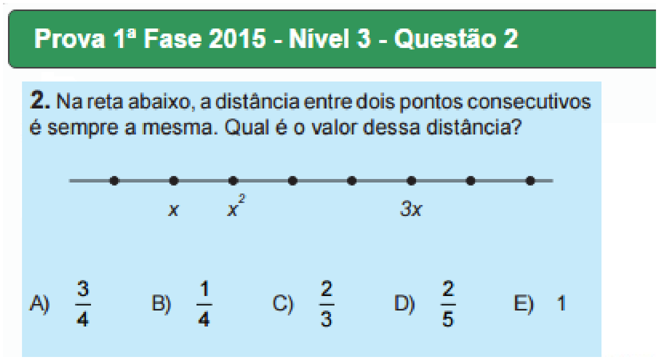


Figura 11 – Questão da OBMEP 2015, 1ª Fase, Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Resolução: Do enunciado da questão sabemos que a distância entre dois pontos consecutivos da reta é sempre a mesma. Seja U uma unidade de medida, assim $U = x^2 - x$ e $3x - x = 4U$. Obtemos a seguinte igualdade,

$$3x - x = 4(x^2 - x),$$

já que os pontos estão igualmente espaçados.

Conceituação: Expressões algébricas, equação do 2º grau são de extrema importância para resolução desta questão.

Manipulação: Queremos determinar o valor de x na equação,

$$3x - x = 4(x^2 - x),$$

desenvolvendo,

$$2x = 4x^2 - 4x,$$

então para determinar o valor de x temos que resolver a equação do 2º grau,

$$-6x + 4x^2 = 0.$$

Fazendo uso do *método da soma e produto*, descrito no Capítulo 3 deste trabalho. Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação, logo

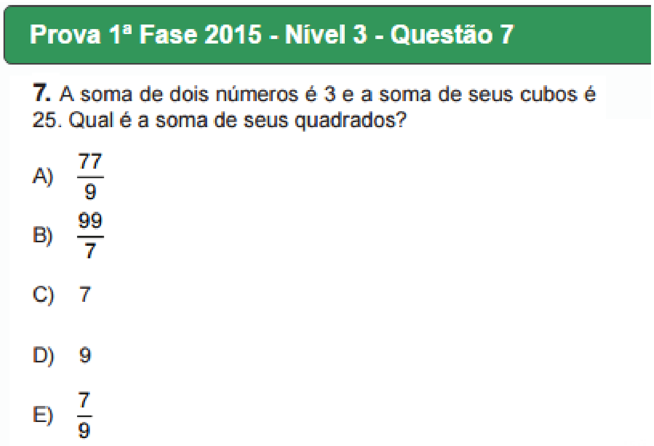
$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{e} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

sendo $a = 4$, $b = -6$ e $c = 0$, teremos então as duas raízes da equação $\{0 \text{ e } \frac{3}{2}\}$.

Aplicação: Talvez aqui esteja a "armadilha" para o erro da questão, pois não consiste apenas em determinar o valor de x, precisamos determinar a distância entre dois pontos da reta, sendo assim, a raiz $x = 0$ não condiz com a realidade do problema, a distância entre os pontos não pode ser nula, logo fazendo $x = \frac{3}{2}$, teremos

$$x^2 - x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \Longrightarrow x^2 - x = \frac{3}{4},$$

como a diferença entre os pontos x^2 e x é igual a distância entre quaisquer dois pontos consecutivos da reta, pois os pontos estão equiespaçados. Podemos concluir que a resposta correta é a alternativa A. •



Prova 1ª Fase 2015 - Nível 3 - Questão 7

7. A soma de dois números é 3 e a soma de seus cubos é 25. Qual é a soma de seus quadrados?

A) $\frac{77}{9}$

B) $\frac{99}{7}$

C) 7

D) 9

E) $\frac{7}{9}$

Figura 12 – Questão da OBMEP 2015, 1ª Fase, Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Resolução: Temos que o valor de $x + y = 3$ e $x^3 + y^3 = 25$, queremos determinar o valor da adição de $x^2 + y^2$.

Conceituação: Fazendo uso dos produtos notáveis, temos condições de determinar o valor desejado.

Manipulação: Utilizando do quadrado da soma temos que,

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \tag{4.5}$$

ou seja,

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy. \tag{4.6}$$

Veja que necessitamos do produto xy.

Do cubo da soma, teremos

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3, \tag{4.7}$$

assim,

$$3x^2y + 3xy^2 = (x+y)^3 - x^3 - y^3.$$

Na equação (4.7), podemos colocar em evidência o termo $3xy$ no lado esquerdo e o sinal negativo do lado direito da igualdade, ficando da seguinte maneira,

$$3xy(x+y) = (x+y)^3 - (x^3 + y^3).$$

Isolando o produto xy, obtemos,

$$xy = \frac{(x+y)^3 - (x^3+y^3)}{3(x+y)}. \tag{4.8}$$

Aplicação: Como

$$x + y = 3 \quad \text{e} \quad (x^3 + y^3) = 25,$$

substituindo na equação (4.8), segue que,

$$xy = \frac{(3)^3 - (25)}{9}.$$

Agora, substituindo este produto na equação (4.6), teremos

$$x^2 + y^2 = (3)^2 - \frac{2\big(27 - (25)\big)}{9},$$

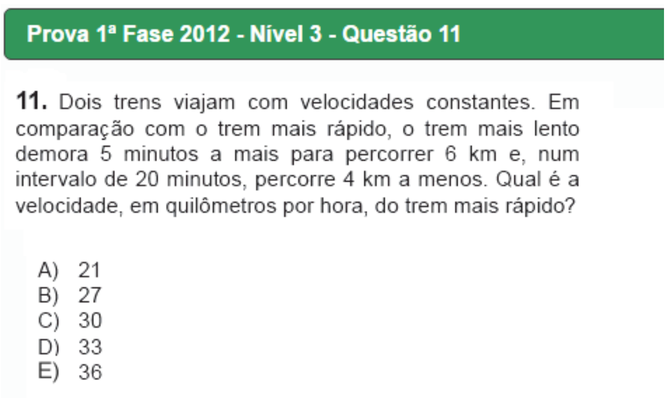
fazendo as operações, temos que

$$x^2 + y^2 = 9 - \frac{4}{9},$$

assim,

$$x^2 + y^2 = \frac{77}{9}.$$

Portanto, alternativa A. •



Prova 1ª Fase 2012 - Nível 3 - Questão 11

11. Dois trens viajam com velocidades constantes. Em comparação com o trem mais rápido, o trem mais lento demora 5 minutos a mais para percorrer 6 km e, num intervalo de 20 minutos, percorre 4 km a menos. Qual é a velocidade, em quilômetros por hora, do trem mais rápido?

A) 21
B) 27
C) 30
D) 33
E) 36

Figura 13 – Questão da OBMEP 2012, 1ª Fase, Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Resolução: Algumas noções de física elementar serão importantes para auxiliar a resolução desta questão, consideramos R e L as respectivas velocidades do trem rápido e do trem mais lento.

Conceituação: Das hipóteses da questão, obtemos que $R = \frac{6}{t}$, onde t é o tempo em minutos que o trem mais rápido leva para percorrer 6 quilômetros. Temos também que $L = \frac{6}{(t+5)}$. O enunciado ainda fornece que fazendo $t = 20$ a distância percorrida pelo trem mais lento será $4\,km$ menor do que a do trem mais rápido, ou seja, $L = \frac{(x-4)}{20}$ e $R = \frac{x}{20}$ sendo x a distância percorrida pelo trem mais rápido no tempo de 20 minutos.

Manipulação: Da segunda relação acima, podemos concluir que, se

$$20L = (x-4) \quad \text{e} \quad 20R = x,$$

então $20R = 20L + 4$, assim teremos

$$R = L + \frac{1}{5}. \tag{4.9}$$

Agora podemos usar esse resultado na primeira relação e substituindo o valor de R e L em função de t, pois é o tempo que precisamos para determinar a velocidade do trem mais rápido. Dessa maneira a equação (4.9) pode ser escrita da seguinte maneira,

$$\frac{6}{t} = \frac{6}{(t+5)} + \frac{1}{5} \Longrightarrow \frac{6}{t} = \frac{30+(t+5)}{5t+25},$$

simplificando teremos

$$-150 + 5t + t^2 = 0. \tag{4.10}$$

Resolvendo a equação do segundo grau em t, fazendo uso do *método da soma e produto*, descrito no Capítulo 3 deste trabalho. Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação, logo

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{e} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

sendo $a = 1$, $b = 5$ e $c = -150$, teremos então

$$x_1 + x_2 = -5 \quad \text{e} \quad x_1 x_2 = -150,$$

assim as duas raízes da equação (4.10) serão $\{(-15)\,\text{e}\,10\}$.

Aplicação: Como o tempo não pode ser negativo, então a raiz $x_1 = (-15)$ pode ser descartada, logo $t = 10$, que substituindo na expressão da velocidade do trem mais rápido, obtemos

$$R = \frac{6}{t} \Longrightarrow R = \frac{6}{10} = 0,6\ km/min.$$

Transformando para unidade de medida desejada, basta multiplicar $0,6$ por 60, pois uma hora tem 60 minutos, e a questão pede a velocidade em km/h. Assim podemos concluir que a velocidade do trem mais rápido é de $36km/h$. Portanto, alternativa E é a correta. •

O próximo problema é importante no sentido de mostrar que a álgebra está relacionada com a geometria, auxiliando na resolução das questões geométricas, podendo ser um estímulo para o aluno e mostrar a generalização que a álgebra pode dar as questões geométricas. Como veremos na questão a seguir, a função f que associa a cada valor de x o perímetro do polígono.

Prova_OBMEP 2016_2ª FASE

3. A figura mostra um polígono *ABCDE* em que todos os lados, exceto *AE*, são horizontais ou verticais e têm os comprimentos indicados na figura.

Considere, agora, uma reta vertical distante *x* do vértice *A*, com 0 < *x* ≤ 5. Ela divide o polígono *ABCDE* em dois polígonos, um situado à direita da reta e outro à esquerda. Considere a função *f* que associa a cada valor de *x* o perímetro do polígono situado à esquerda da reta. Por exemplo, *f*(3) é o perímetro do triângulo *AHE*, enquanto *f*(5) é o perímetro do polígono *ABCDE*.

c) Escreva as expressões de *f*(*x*) para 0 < *x* ≤ 3 e para 3 < *x* ≤ 5.

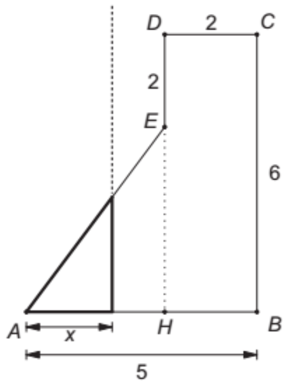
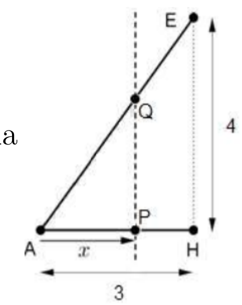


Figura 14 – Questão da OBMEP 2016, 2ª Fase, Fonte: http://www.obmep.org.br/provas.htm

Resolução: Faremos a resolução em dois casos separados, primeiro caso vamos obter a expressão de $f(x)$, com $0 < x \leq 3$ e posteriormente para o segundo caso com $3 < x \leq 5$.

1º caso:
para $0 < x \leq 3$: Consideremos P e Q os pontos de intersecção da reta vertical com o polígono, conforme a figura ao lado.



Conceituação: Perímetro de polígonos, semelhança de triângulos, frações algébricas e função do primeiro grau serão conceitos que utiliza-se na resolução desta questão.

Manipulação: Segue que os triângulos APQ e AHE são semelhantes caso (AAA). Consequentemente,

$$\frac{x}{3} = \frac{PQ}{4}$$

e $\frac{x}{3} = \frac{AQ}{AE}$. Pelo Teorema de Pitágoras podemos concluir que $AE = 5$. Escrevendo os comprimentos PQ e AQ em função de x,temos que, $PQ = \frac{4}{3}x$ e $AQ = \frac{5}{3}x$. Assim, para

$0 < x \leq 3$, a função que associa a cada valor x o perímetro do polígono APQ situado à esquerda da reta, é dada pela seguinte expressão:

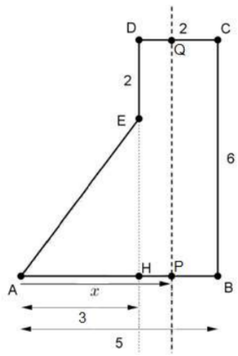
$$f(x) = AP + PQ + QA = x + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}x \Longrightarrow f(x) = \frac{12}{4}x = 4x.$$

Aplicação: Portanto, o perímetro está em função do comprimento de x, descrito pela função $f(x) = 4x$.

2º caso:

para $3 < x \leq 5$: Neste segundo caso iremos obter a expressão de $f(x)$, para $3 < x \leq 5$.

Conceituação: Perímetro de polígonos, frações algébricas, e função do primeiro grau, serão conceitos que utiliza na resolução desta questão. Como no primeiro caso, consideremos agora P e Q os pontos de intersecção da reta vertical com o polígono, conforme a figura ao lado.



Manipulação: Para $0 < x \leq 5$, teremos que a função f que a a cada valor x o perímetro do polígono $APQDE$ situado à esquerda da reta é descrita pela seguinte expressão,

$$f(x) = AP + PQ + QD + DE + EA = x + 6 + (x - 3) + 2 + 5 \Longrightarrow f(x) = 2x + 10.$$

Aplicação: Portanto, o perímetro está em função do comprimento de x para $3 < x \leq 5$, descrito pela função $f(x) = 2x + 10$. •

Veja a seguir uma questão algébrica presente no Clube de Matemática da OBMEP (33, 2017). O Clube de Matemática da OBMEP foi criado a partir de três grandes objetivos: Disseminar o estudo da Matemática. Incentivar o desenvolvimento intelectual dos participantes promovendo debates, pesquisas e, sobretudo, desafiando-os a análises críticas de resultados obtidos por eles mesmos e por outros. Desmistificar ideias preconcebidas relativas à Matemática.

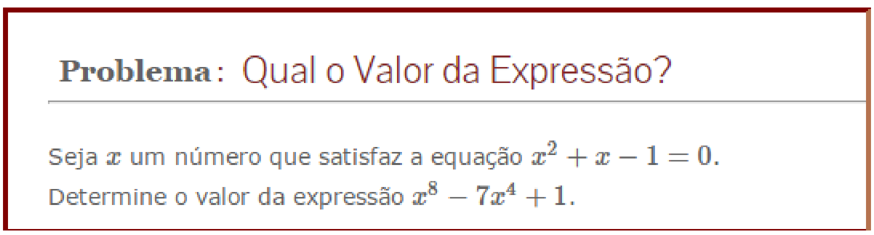


Figura 15 – Fonte:http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-qual-o-valor-da-expressao/

Resolução: Inicialmente o aluno pode ser atraído a encontrar as raízes da equação

$$x^2 + x - 1 = 0, \tag{4.11}$$

posteriormente substituirá na expressão $x^8 - 7x^4 + 1$ na tentativa de determinar seu valor, porém as raízes da equação (4.11) são $\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$, mesmo com uso de calculadora o aluno será frustado, pois terá que trabalhar com aproximações. Esse estilo de questão ajuda muito a destacar a importância dos recursos didáticos e ajuda a constituir um pensamento algébrico e significativo para o aluno, pois é preciso enxergar além do processo "determine o x".

Conceituação: Expressões algébricas, frações, equações do segundo grau e exponenciação, um fato importante que devemos perceber é que zero não é raiz da equação (4.11), pois $f(0) = (0)^2 + 0 - 1 \Longrightarrow f(0) = -1$.

Manipulação: Portanto, se x é uma solução de (4.11), então $x \neq 0$. Logo, podemos dividir ambos os lados da equação por x, ficando

$$x^2 + x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x - \frac{1}{x} = -1,$$

podemos agora elevar ao quadrado ambos os lados da última igualdade,

$$x - \frac{1}{x} = -1 \Longleftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (-1)^2,$$

desenvolvendo teremos,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 3,$$

novamente elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade acima,

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (3)^2 \Longleftrightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 7,$$

calculando o m.m.c da expressão, teremos que

$$x^8 - 7x^4 + 1 = 0. \tag{4.12}$$

Aplicação: Portanto, através de manipulações algébricas conseguimos determinar o valor da expressão $x^8 - 7x^4 + 1$ quando x for solução da equação (4.11), temos a seguinte igualdade,

$$x^8 - 7x^4 + 1 = 0.$$

Outra alternativa que pode ser explorada é fazer uma análise gráfica, com a utilização do software Geogebra, isso permite um resultado significativo instigando os alunos à interpretação geométrica.

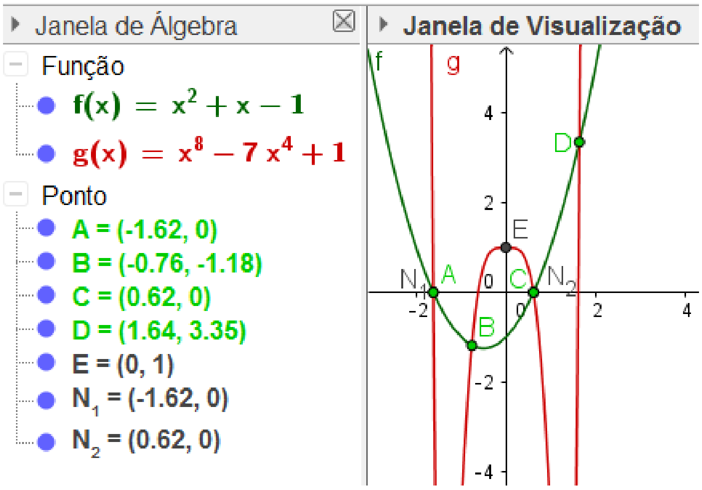


Figura 16 – Fonte: autor

Este software é gratuito e disponível em ($https://www.geogebra.org/download$) Geogebra (34, 2017), com uma plataforma contendo vários recursos matemáticos, pricipalmente geométricos. Esse é um importante recurso tecnológico a ser explorado em sala de aula. Evidenciando que devemos "compreender e utilizar (...) a tecnologia como conhecimento sistemático de sentido prático" (11, 2000, pág. 29).

Esse recurso didático deve sempre ser explorado nesses momentos, pois amplia a compreensão do aluno e facilita a explicação do professor. A interpretação geométrica dessa questão possibilita ao aluno que de posse do conhecimento das duas únicas raízes da função (4.11), perceber que elas também são raízes da função

$$g(x) = x^8 - 7x^4 + 1.$$

Apenas o uso do software sem exploração dos conceitos matemáticos, pode não ser significativo para aprendizagem, sendo necessário essa sintonia entre a análise algébrica com a interpretação geométrica. •

5 CONSIDERAÇÕES

Percebemos nesse estudo que o currículo de matemática da educação básica no Brasil é abrangente, e conforme reportagem do portal Uol (35, 2017, pág.01), “a maioria dos professores da rede pública no país não consegue desenvolver todo o conteúdo de sua disciplina ao longo do ano”. Registram ainda que ”apenas 45% dos docentes conseguiram desenvolver ao menos 80% do conteúdo previsto”. Isto significa que há conteúdos curriculares que não estão sendo devidamente abordados.

Neste, preocupamos em apresentar uma relação entre a álgebra no currículo do ensino da educação básica e a presença dos conteúdos propostos por este currículo nas provas do ENEM (Questões de Matemática) e OBMEP. Fornecendo também ao professor de matemática do ensino básico um estudo detalhado de polinômios a esse nível.

Esperamos contribuir na formação continuada dos professores, pois uma abordagem inicial dos polinômios faz parte dos conteúdos do Ensino Fundamental e Médio. É importante que os alunos desenvolvam o conhecimento para lidar com as expressões, funções e equações polinomiais, consiga encontrar suas raízes e sua aplicabilidade, tornando assim o ensino desse conteúdo significativo e prático. Acreditamos que dessa forma o educando consegue relacionar o conteúdo com situações do cotidiano que possam surgir.

Entendemos que o professor precisa estar bem preparado para que o processo de ensino e aprendizagem seja realizado com êxito, abordando o assunto por diversos aspectos, apresentando as definições de forma certa e segura, sabendo motivar os estudantes com exemplos práticos e, mais próximo da realidade dos alunos. Nesse intuito surgem algumas questões do ENEM e da OBMEP, que são provas de âmbito nacional, podendo suas questões serem exploradas em sala de aula, com o objetivo de proporcionar aos alunos uma familiarização com o estilo daquelas avaliações.

A fim de preparar suas aulas o professor pode fazer uso das questões presentes nessas avaliações, sob uma organização e linguagem acessível ao alunos, dosando o grau de abstração e generalidade aceitáveis ao público alvo, evidenciando assim que os conteúdos algébricos previstos no currículo da educação básica aparecem nelas e, portanto, são coerentes com relação a esses conteúdos a serem trabalhados em sala de aula.

A partir do conhecimento da teoria, o professor pode criar exemplos novos, utilizando o método escolhido de forma simplificada, sem limitar-se apenas as questões do ENEM e OBMEP. Elas servirão de entusiasmo e motivação, porém a tríplice: conceituação, manipulação e aplicação, o professor não poderá desfazer, devendo estar presente nos métodos e técnicas para o ensino de matemática.

Referências

1 LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**, 3 ed. Rio de Janeiro: SBM 2007. Citado 5 vezes nas páginas 12, 19, 22, 43 e 58.

2 FIORENTINI D.; MIORIM, Maria A.; MIGUEL, Antônio. **Contribuições para um repensar...a educação algébrica elementar** Em: Pro-Posições, Campinas, v. 4, n. 1, p.78-90, mar.1993. Citado na página 13.

3 MILIES, César P. **Breve História da Álgebra Abstrata**. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, SBM, Salvador, Brasil, 2004. Disponível em <www.bienasbm.ufba.br/M18.pdf> acesso: 22/12/2016. Citado na página 13.

4 BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Fundamental**. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 1998. Citado 4 vezes nas páginas 13, 14, 16 e 18.

5 OLIVEIRA, Silvânia Cordeiro; LAUDARES, João Bosco. **Pensamento Algébrico: Uma Relação entre Álgebra, Aritmética e Geometria**, São João del-Rei Minas Gerais, 2015. Disponível em: <http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/PENSAMENTO-ALGÉBRICO-UMA-RELAÇ~AO-ENTRE-ÁLGEBRA-ARITMÉTICA\-E-GEOMETRIA.pdf> acesso: 09/12/2016. Citado 3 vezes nas páginas 14, 17 e 18.

6 VALENTINO, Rosalina. L. M. **O Conhecimento Algébrico que os Alunos Apresentam no Início do Curso de Licenciatura em Matemática: Um olhar Sob os Aspectos da Álgebra Elementar**. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife: 2004. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/04/CC10940826860.pdf> acesso: 08/01/2017. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 67.

7 DIENES, Z. P. **Aprendizado Moderno da Matemática**. Tradução: Jorge Enéas Fortes. Rio De Janeiro: ZAHAR Editores, 1970. Citado na página 15.

8 COXFORD, Arthur F; SHULTE Albert P. **As Idéias da Álgebra**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual 1995. Citado 4 vezes nas páginas 15, 18, 20 e 22.

9 ANDRINI, Álvaro ; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática**. 4.ed. V.7, Editora Brasil, São Paulo 2015. Citado na página 16.

10 POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas: Um novo Aspecto do Método Matemático**. Tradução: Heitor L. de Araújo. 2 ed. Rio de Janeiro: 1995. Citado na página 17.

11 BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**. Parte III: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 18, 19, 20 e 75.

12 KHIDIR, Kaled Sulaiman. **Aprendizagem da Álgebra - uma análise baseada na Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davídov**. UCG dissertação. Goiânia 2006. Citado na página 19.

13 BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Proposta Preliminar, 2ª versão revista. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

14 DOMINGUES, Hygino H. **Apresentação** Em: *As Idéias da Álgebra*, São Paulo: Atual 1995. Citado na página 20.

15 BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 20, 21 e 43.

16 TOCANTINS. **Referencial Curricular do Ensino das Escolas Públicas do Estado do Tocantins**. SEDUC. Palmas 2008. Citado na página 21.

17 BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 3 ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher ltda, 2010. Citado na página 22.

18 EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Higyno H. Domingues. Campinas, Editora da Unicamp, São Paulo 2011. Citado na página 22.

19 CIRIACO, Oséas Arruda. **Equações Polinomiais: Um Estudo Aplicado ao Ensino Médio**. UEMS dissertação. Dourados 2016. Disponível em: <http://br.123dok.com/document/rz3pwmyx-equacoes-polinomiais-um-estudo-aplicado-ao-ensino-medio.html> acesso: 12/01/2017. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 35.

20 DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna**. Volume único. 4 ed. São Paulo: Editora Atual, 2003. Citado na página 23.

21 HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lucia Torres. **Polinômios e Equações Algébricas**. 1 ed. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM 2012. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 29.

22 IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**. vol.6. 7.ed.São Paulo: Atual, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 26.

23 MUNIZ NETO, Antonio C. **Tópicos de Matemática Elementar: Polinômios**, 1 ed. V:6 Rio de Janeiro: SBM 2012. Citado 3 vezes nas páginas 23, 29 e 36.

24 HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Editora da SBM, 2014. Citado na página 39.

25 SILVA, Márcio Vieira. **Equações do Segundo Grau e Mudança de Variáveis**. UFRN Dissertação. Natal 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/18669/1/MarcioVS_DISSERT.pdf> acesso: 12/01/2017. Citado na página 44.

26 SILVA, Valdir V. **Gráficos Funções Polinomiais.** Em: Revista do Professor de Matemática, 49, 2002. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/49/2.htm>. acesso:16/09/2016. Citado na página 50.

27 BRASIL. **Brasil no PISA 2015 Sumário Executivo**. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Brasília: 2016. Citado na página 57.

28 G1. **apenas 10 dos alunos aprendem o ideal em matematica no ensino médio**. Disponível em: <http://g1.globo.com/educacao/noticia/8-em-cada-10-municipios-tem-baixa-aprendizagem-em-matematica-diz-ong.ghtml> acesso em: 15/02/2017. Citado na página 57.

29 PORTAL BRASIL. **Matemática, Física e Química são as maiores dificuldades no Enem**. Disponível em: <http://www.brasil.gov.br/educacao/2016/10/matematica-fisica-e-quimica-sao-as-maiores-dificuldades-no-enem> acesso: 27/02/2017. Citado na página 57.

30 BRASIL. **Matriz de Referência ENEM**. Disponível em <http://download.inep.gov.br/educacao_basica\/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf> acesso: 29/04/2017. Citado na página 59.

31 ENEM. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/provas-e-gabaritos> acesso: 29/04/2017. Citado na página 59.

32 OBMEP. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm> acesso: 29/04/2017. Citado na página 67.

33 CLUBE da Matemática da OBMEP. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/> acesso: 29/04/2017. Citado na página 73.

34 GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download> acesso: 29/04/2017. Citado na página 75.

35 UOL. **Maior parte dos professores da rede pública não completa conteudo**. Disponível em <http://noticias.ne10.uol.com.br/educacao//noticia/2017/03/20/maior-parte-dos-professores-da-rede-publica-nao-completa-conteudo-669056.php> acesso:20/03/2017. Citado na página 76.