



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS Prof. Dr. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA



GUIMARÃES VIEIRA DA SILVA

IRRACIONALIDADE E TRANSCENDÊNCIA: ASPECTOS
ELEMENTARES

ARRAIAS - TO
2018

GUIMARÃES VIEIRA DA SILVA

**IRRACIONALIDADE E TRANSCENDÊNCIA: ASPECTOS
ELEMENTARES**

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Robson Martins de Mesquita.

ARRAIAS - TO
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S586i Silva, Guimarães Vieira da.
IRRACIONALIDADE E TRANSCENDÊNCIA: ASPECTOS
ELEMENTARES. / Guimarães Vieira da Silva. – Arraias, TO, 2018.
47 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do
Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Pós-
Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2018.

Orientador: Dr. Robson Martins de Mesquita

1. Números Racionais e Irracionais. 2. Números Algébricos e
Transcendentes. 3. Número e. 4. Matemática. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de
qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde
que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime
estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

**Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica
da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).**

GUIMARÃES VIEIRA DA SILVA*

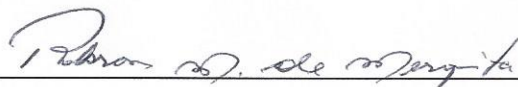
IRRACIONALIDADE E TRANSCENDÊNCIA:
ASPECTOS ELEMENTARES.

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

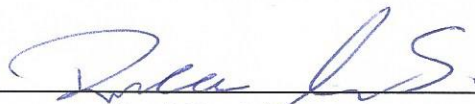
Orientador: Prof. Dr. Robson Martins de Mesquita.

Data de Aprovação 04/07/2018

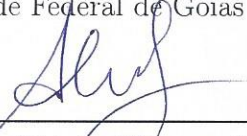
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. Robson Martins de Mesquita (Orientador)
Universidade Federal do Tocantins - (UFT)



Prof. Dr. Ronaldo Antônio dos Santos
Universidade Federal de Goiás - (UFG)



Profa. Dra. Alcione Marques Fernandes
Universidade Federal do Tocantins - (UFT)

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

*Trabalho dedicado em especial a minha família
que sempre soube compreender minha dedica-
ção e vocação ao estudo e, conseqüentemente,
minhas ausências.*

Aos amigos, pelo apoio e companheirismo.

Agradecimentos

A Deus, pelas bênçãos constantes em minha vida e a oportunidade da minha consciência.

À família pelo, carinho e compreensão. Agradecimento especiais à minha esposa, Marlene da Silva Martins, que em nenhum momento me deixou desistir e nem sequer falar essa palavra.

Especialmente agradeço aos meus pais, Helena Pereira da Silva e José Vieira da Silva e aos meus irmãos e irmãs.

À parte mais incrível da minha vida: meus filhos, netos e nora.

Ao professor Robson Martins Mesquita, meus sinceros agradecimentos pelas disciplinas ministradas na Pós-Graduação, pela orientação incondicional durante toda elaboração deste trabalho.

Aos professores da banca examinadora, Dr. Ronaldo Antônio dos Santos e Dra. Alcione Marques Fernandes, pela leitura atenta e valiosas correções.

Aos professores do Departamento de Matemática-UFT-campus de Arraias pelo grande ensinamento.

Aos meus colegas e amigos de Pós-Graduação, turma de 2016 e 2017, pelas inúmeras oportunidade e experiências compartilhadas.

Aos meus queridos amigos de trabalho, professores do Centro de Ensino Estado de Goiás, pelo incentivo e apoio. Em especial às diretoras, Maria Aldeny Silva Jesus e Aldenir Ferreira Cezar.

Aos funcionários da UFT-Arraias, pelo apoio, e amizade, quando caminhava pelos corredores.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que de forma direta ou indiretamente contribuíram para esse momento especial em minha vida. Muito obrigado!

“Como o tecido do universo é o mais perfeito e fruto do trabalho do mais sábio Criador, nada acontece no universo sem que alguma lei de máximo e mínimo apareça.”

(Leonhard Euler)

Resumo

O presente trabalho tem como perspectiva a caracterização dos números Racionais e Irracionais, e a sua devida aplicabilidade e variações no que tange o aspecto algébrico e transcendental. Sabe-se que o Número e (de Euler), pode ser classificado como um número transcendental, isto é, aqueles que não são raízes de nenhum polinômio que possua coeficientes inteiros. Nesse pressuposto, o Número e deve ser considerado existente e irracional. O objetivo desta pesquisa consiste em caracterizar os fatores que abrangem os Números Racionais e Irracionais, oferecendo a compreensão necessária referente ao Número e e a sua ação nos Números Algébricos e Transcendentes. Como recurso metodológico, utilizou-se uma revisão de literatura, com um crivo pautado nos fatores qualitativos e quantitativos, a fim de se refletir sobre a temática proposta. Assim, nesta presente pesquisa, buscou-se apresentar informações dentro das melhores formas e possibilidades de favorecer a compreensão, considerando a dificuldade em torno deste respectivo tema, devido a sua característica abstrata, o que dificulta o entendimento por parte de muitos. Portanto, destacam-se as iniciativas e argumentos em torno deste princípio temático, como forma de, possivelmente, fomentar o interesse de muitos pelo mesmo, além de que, tal trabalho possa ser relevante às necessidades de investigação de outros desejosos por este universo de pesquisa.

Palavras-chave: Números Racionais e Irracionais. Números Algébricos e Transcendentes. Número e .

Abstract

The present work has as its perspective the characterization of Rational and Irrational numbers, and their due applicability and variations regarding the algebraic and transcendental aspects. It is known that the number e (of Euler) can be classified as a transcendental number, that is, those that are not roots of any polynomial that has integer coefficients. In this assumption, the Number should be considered existent and irrational. The objective of this research is to characterize the factors that comprise the Rational and Irrational Numbers, offering the necessary understanding regarding Number e and its action in Algebraic and Transcendent Numbers. As a methodological resource, a literature review was used, based on qualitative and quantitative factors, in order to reflect on the proposed theme. Thus, in this present research, we sought to present information within the best ways and possibilities to favor understanding, considering the difficulty around this respective theme, due to its abstract feature, which makes it difficult for many to understand. Therefore, we highlight the initiatives and arguments around this thematic principle as a way of possibly fostering the interest of many by the same, and that such work may be relevant to the research needs of others desirous by this universe of research.

Keywords: Rational and Irrational Numbers. Algebraic and Transcendent Numbers. Number e .

Lista de ilustrações

Figura 1 – Conjunto dos racionais positivos	25
Figura 2 – Classificação dos Números	37
Figura 3 – Função Logarítmo	43

Lista de tabelas

Tabela 1 – Aplicação com diferentes Capitalizações do Empréstimo	38
Tabela 2 – Valores Crescentes de n	40

Lista de abreviaturas e siglas

UFT	Universidade Federal do Tocantins
PROFMAT	Mestrado Profissional em Rede Nacional
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

Lista de símbolos

e	Número de Euler
ϕ	Letra grega “fi”
\mathbb{N}	Conjunto dos Números Naturais
\mathbb{Z}	Conjunto dos Números Inteiros
\mathbb{Q}	Conjunto dos Números Racionais
\mathbb{R}	Conjunto dos Números Reais
\mathbb{I}	Conjunto dos Números Irracionais

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	CARACTERIZAÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS E IR- RACIONAIS	15
2.1	Números Naturais \mathbb{N}	15
2.2	Números inteiros \mathbb{Z}	16
2.3	Números Racionais \mathbb{Q}	20
2.4	Conjuntos Enumeráveis	24
2.5	Números Irracionais	28
2.5.1	A preponderância dos irracionais	29
2.5.2	Algumas irracionalidades simples	31
3	NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES	34
3.1	Números Algébricos	35
3.2	O Número e	37
3.2.1	A existência do Número e	40
3.2.2	A Irracionalidade do Número e	42
3.3	A Transcendência do Número e	43
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	46
	REFERÊNCIAS	47

1 INTRODUÇÃO

Na Matemática em geral, sabe-se que os números racionais e irracionais compõem a base instrumental da mesma, possuindo suas especificidades e abordagens conceituais. Desse modo, caracterizam-se como Números Racionais todas as representações numéricas que se manifestam em forma de fração, enquanto os Números Irracionais, constituem-se por meio de representações que não podem ser colocados em forma de fração, possuindo Algarismos não periódicos. Dentre outros fatores e detalhes existentes, o presente trabalho apresenta uma abordagem sobre os Números Algébricos, além do Número e , em seu aspecto irracional e transcendental.

Nesse pressuposto, tal trabalho teve como objetivo caracterizar os números Racionais e Irracionais, propondo a devida compreensão em torno do Número e e sua ação irracional e transcendental, dentro de seus aspectos elementares. Para a execução do mesmo, recorreu-se a uma revisão de literatura, num crivo crítico pautado no princípio qualitativo e quantitativo.

Contudo, a partir deste preâmbulo, para que se trabalhasse tal perspectiva temática, estruturou-se o trabalho do seguinte modo: segundo capítulo, ao qual realizou uma caracterização geral dos números Racionais e Irracionais; enquanto, no terceiro capítulo, trabalhou-se o princípio dos números algébricos e transcendentais do Número e ; encerrando com as considerações finais.

2 CARACTERIZAÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS

Os números racionais e irracionais constituem a base de composição da Matemática em geral, diferenciando-se por suas especificidades. Nesse sentido, sabe-se que os Números Racionais, compreendem tudo aquilo que pode ser apresentado em forma de fração. No entanto, os Números Irracionais constituem-se como aqueles que possuem representações que não podem ser apresentadas como fração, na representação decimal possui uma quantidade de algarismos não periódicos, com totalidade ilimitada.

Esse capítulo apresenta o princípio dos conjuntos numéricos, assim como os conceituais que asseguram aos números e a sua respectiva representatividade para a base estrutural da Matemática, delimitando as suas variações numéricas a partir dos aspectos conceituais.

2.1 Números Naturais \mathbb{N}

O conjunto dos números naturais passou a existir pela necessidade do homem em contar seus objetos. No início, as civilizações utilizavam os dedos, pedras, ossos de animais, ou nós de uma corda para fazer as medições. O grande aumento dessas necessidades resultou na criação de símbolos chamados de numerais, utilizados para representar certa quantidade. Com a evolução do homem e aperfeiçoamento da matemática foram introduzidos os conceitos de números naturais.

O conjunto \mathbb{N} dos números naturais pelos axiomas de Peano do século XX , são utilizados como base de estudo para os números naturais.

A essência de \mathbb{N} reside na palavra “sucessor”. Intuitivamente, quando $n, n' \in \mathbb{N}$, dizer que n' é o sucessor de n significa que n' vem logo depois de n , não havendo outros números naturais entre n e n' . O uso e propriedades de “sucessor” é regido pelas regras abaixo:

- a) Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.
- b) Números naturais diferentes tem sucessores diferentes.
- c) Existe um único número natural, designado por 1, que não é sucessor de nenhum número natural.
- d) Se m e n são números naturais tais que o sucessor de m é igual ao sucessor

de n temos que $m = n$.

e) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de cada elemento de X ainda pertence a X , então $X = \mathbb{N}$.

Conforme Morgado e Carvalho (2015, p. 3):

O axioma da letra c estabelece 1 como sendo o único número natural que não é o sucessor de nenhum outro e que, portanto, representa o “ponto partida” no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais. É comum, também, adotar-se 0 como ponto de partida, levando a $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. A opção por uma ou alternativa é uma questão de gosto ou de conveniência.

Assim, o conjunto dos números naturais \mathbb{N} é descrito como o conjunto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

O conjunto dos números naturais é munido de duas operações básicas: a adição e a multiplicação. A adição associa a cada dois números $x, y \in \mathbb{N}$ a soma $x + y \in \mathbb{N}$ e a multiplicação por sua vez associa a cada dois números $x, y \in \mathbb{N}$ o produto $x \cdot y \in \mathbb{N}$.

2.2 Números inteiros \mathbb{Z}

Para ser possível tratar dos números algébricos primeiramente devemos introduzir definições e propriedades acerca dos números inteiros.

O conjunto dos Números Inteiros, representado por \mathbb{Z} , formado pelos números naturais e pelos números negativos lembrando que m é dito um inteiro negativo se existe $n \in \mathbb{N}$ e não nulo tal que, $n + m = 0$. A necessidade da criação deste conjunto se deve ao fato de que dados $a, b \in \mathbb{N}$, a diferença $a - b \notin \mathbb{N}$ se $a < b$. Assim, representamos os números inteiros da seguinte forma:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Definição 2.1. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, dizemos que b divide a e escrevemos $b \mid a$, se existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bc$. Neste caso, também se diz que a é um múltiplo de b .

Exemplo 2.1. Se $a = 18$, e $b = 2$, temos que 2 divide 18, pois $18 = 2 \cdot 9$, ou seja, 18 é um múltiplo de 2.

Definição 2.2. Um número $p \in \mathbb{Z}$ $p \neq 0$ $p \neq \pm 1$, é primo se e somente se os únicos números **naturais** que o dividem são $|p|$ e 1.

Portanto, quando um número n não é primo existem números inteiros não nulos e ambos diferentes de 1 e de n , b e c , tais que $n = bc$ e, neste caso, n é dito um **número composto** e b e c são **os fatores** de n . Se algum dos fatores de um número composto for um número primo, será dito que tal fator é um **fator primo de n** . Para nossos propósitos neste trabalho, precisaremos do *algoritmo da divisão*, que enunciamos e demonstramos a seguir:

Teorema 2.2.1. (*Algoritmo da Divisão*). *Se $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, então existem e são únicos $q; r \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq r < |b|$, tais que,*

$$a = qb + r. \quad (2.1)$$

Demonstração: (i) Existência.

Caso $b > 0$. Consideremos o conjunto dos números múltiplos de b ordenados de acordo com a ordem natural da reta, isto é, o conjunto $\dots, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, \dots$, com,

$$\dots < -3b < -2b < -b < 0 < b < 2b < 3b < \dots$$

Note que disso decorre uma decomposição da reta em intervalos disjuntos da forma:

$$[qb; (q+1)b) := \{x \in \mathbb{R} \mid qb \leq x < (q+1)b\}, \quad q \in \mathbb{Z}$$

Assim, dado $a \in \mathbb{Z}$, este pertence a apenas um desses intervalos e portanto necessariamente é da forma $a = qb + r$, com $q \in \mathbb{Z}$ e $r \geq 0$. É claro que $r < (q+1)b - qb = b$ (o comprimento do intervalo).

Caso $b < 0$. Aplicamos o teorema no caso demonstrado em (i) para determinar $q_1; r \in \mathbb{Z}$, com $0 \leq r < |b|$ para escrever:

$$a = q_1|b| + r, \quad (2.2)$$

fazendo $q = -q_1$, como $|b| = -b$, pois $b < 0$, obtemos de (2.2) $a = qb + r$, onde $q; r \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < |b|$.

(ii) Unicidade.

Suponha que $a = qb + r = q_1b + r_1$ com $0 \leq r < |b|$ e $0 \leq r_1 < |b|$. Assim,

$$|r - r_1| = |q_1 - q||b| \quad (2.3)$$

Afirmamos que $r = r_1$. De fato, pois se $r \neq r_1$, tem-se que

$$0 < |r - r_1| < |b|, \quad (2.4)$$

pois $r, r_1 \in [0, |b|)$ implica que a distância entre um e o outro é menor que o comprimento do intervalo, que é $|b| - 0 = |b|$.

De (2.3) em (2.4) segue que $0 < |q - q_1| |b| < |b|$ implicando que $0 < |q - q_1| < 1$, o que é um absurdo, pois sendo $|q - q_1|$ um inteiro diferente de zero, não pode ser menor que 1.

Portanto $r = r_1$ e, por (2.3), $q = q_1$. E o teorema está demonstrado. \square

Para demonstrarmos que o Máximo Divisor Comum de dois inteiros é uma combinação linear (inteira) destes mesmos inteiros, precisaremos demonstrar um lema auxiliar, bem simples, e fazer uso do Princípio da Boa Ordenação dos Inteiros, também conhecido como Princípio de Menor Inteiro, que assumiremos como um postulado.

Lema 2.2.1. *Sejam $a, x_0, b, y_0, d \in \mathbb{Z}$, se $d \mid a$ e $d \mid b$, então $d \mid (ax_0 + by_0)$.*

Demonstração: Como $d \mid a$, pela definição 2.1 implica que existe $q \in \mathbb{Z}$, tal que $a = qd$.

Também pela definição 2.1 $d \mid b$ implica que existe $p \in \mathbb{Z}$, tal que $b = pd$.

Logo,

$$ax_0 + by_0 = qdx_0 + pdy_0 = d(qx_0 + px_0).$$

Observe que $K = (qx_0 + py_0) \in \mathbb{Z}$, pois vale a lei do fechamento da adição e multiplicação em \mathbb{Z} e $q, x_0, p, y_0 \in \mathbb{Z}$.

Portanto, $ax_0 + by_0 = dK, K \in \mathbb{Z}$, ou seja, $d \mid (ax_0 + by_0)$. \square

Exemplo 2.2. $2 \mid 4$ e $2 \mid 6 \Rightarrow 2 \mid (4x_0 + 6y_0), \forall x_0; y_0 \in \mathbb{Z}$.

Definição 2.3. *Seja S um subconjunto não vazio de \mathbb{Z} . Todo elemento $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \leq x$, para todo $x \in S$, chama-se cota inferior de S . Uma cota inferior de S que pertença a S chama-se mínimo de S e é denotado por $\min(S)$. É fácil ver que o mínimo de S , quando existe, é único.*

Postulado 1. *O Princípio do menor Inteiro: Seja $S \neq \emptyset$ um subconjunto de \mathbb{Z} . Se S admite alguma cota inferior em \mathbb{Z} , então S possui um mínimo.*

Teorema 2.2.2. *Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, pelo menos um deles não nulos, existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $ax_0 + by_0 = d$, onde $d = m.d.c(a, b)$.*

Demonstração: Considere $S = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0; n = ax + by, \text{ para algum } x \text{ e algum } y \text{ inteiros.}\}$

Observe primeiramente que $S \neq \emptyset$, pois, para $x = a$ e $y = b$, $n = a^2 + b^2 > 0$, uma vez que pelo menos um dentre os inteiros a e b é não nulo. Portanto, 0 é uma cota inferior de S . Pelo Princípio do Menor Inteiro existe $d > 0$ tal que $d = \min(S)$. Mostremos que d é o máximo divisor comum entre a e b .

(i) d é obviamente maior que zero;

(ii) Como $d \in S$, então existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ de maneira que $d = ax_0 + by_0$. Aplicando o algoritmo da divisão aos elementos a e d :

$$a = dq + r \quad 0 \leq r < d \quad (2.5)$$

Das duas últimas igualdades segue que

$$a = (ax_0 + by_0)q + r$$

ou, ainda

$$r = a(1 - qx_0) + b(-y_0)q$$

Se r for positivo a equação acima garante que $r \in S$, o que é um absurdo, pois, por (2.5) $r < d$, contrariando a minimalidade de d . Portanto, $a = dq$ e $d \mid a$. Da mesma forma se conclui que $d \mid b$. Agora, se $d_1 \in \mathbb{Z}$ é tal que $d_1 \mid a$, $d_1 \mid b$, então pelo Lema 2.3.1, $d_1 \mid d$.

(iii) Se $d' \mid a$ e $d' \mid b$, como $d = ax_0 + by_0$, então pelo lema 2.2.1, $d' \mid d$ e, portanto, $d = m.d.c(a, b)$. \square

Lema 2.2.2. *Seja $r \in \mathbb{Z}$ um número primo, e $a, b \in \mathbb{Z}$. Se r divide o produto ab então r divide a ou b .*

Demonstração:

Se $r \mid a$, nada temos que provar. Suponhamos que r não divide a , ou seja, r e a são primos entre si. Logo, pelo Teorema 2.2.2, existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $ax_0 + ry_0 = 1$.

Assim,

$$abx_0 + rby_0 = b \quad (2.6)$$

Como $r \mid ab$, por hipótese e claramente $r \mid rb$, logo segue que,

$$r \mid (abx_0 + rby_0). \quad (2.7)$$

\square

Portanto de 2.6 segue que $r \mid b$.

Corolário 2.2.1. *Seja $p \in \mathbb{N}$ um número primo e $a \in \mathbb{Z}$. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, se $p \mid a^n$, então $p \mid a$.*

Demonstração:

Segue por indução. Queremos provar a veracidade, para todo $n \in \mathbb{N}$, da proposição

$$P(n) : p \mid a^n \Rightarrow p \mid a$$

. Observe que $P(1)$ é trivialmente verdadeira. Suponha que $P(k)$ é verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$ (Hipótese de Indução) e considere a proposição

$$P(k+1) : p \mid a^{k+1} \Rightarrow p \mid a$$

Ora, $a^{k+1} = a^k \cdot a$ e $p \mid a^{k+1}$ é o mesmo que $p \mid (a^k) \cdot (a)$. Pelo Lema 2.3.2, segue que $p \mid a^k$ ou $p \mid a$ e a hipótese de indução implica que $p \mid a$ ou $p \mid a$. \square

2.3 Números Racionais \mathbb{Q}

Definição 2.4. O conjunto dos números racionais, \mathbb{Q} é definido como o conjunto dos números que podem ser representados na forma onde $\frac{p}{q}$, p e q pertencem a \mathbb{Z} , $q \neq 0$, ou seja;

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Exemplo 2.3. $\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}$ é um número racional, pois pode ser colocado na forma $\frac{2}{5}$, apesar de que $2\sqrt{3}$ e $5\sqrt{3}$ não serem números inteiros.

Onde dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são iguais se e somente se $a \cdot d = b \cdot c$. Em notação técnica:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Por exemplo:

No conjunto dos números racionais estão definidas duas operações binárias: a adição, que a cada par $x, y \in \mathbb{Q}$ associa a soma $x + y \in \mathbb{Q}$ e a multiplicação, que associa $x, y \in \mathbb{Q}$ ao produto $x \cdot y \in \mathbb{Q} : x, y \in \mathbb{Q}$, sendo $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, definimos;

$$x + y = \frac{ad + bc}{bd}, \quad x \cdot y = \frac{ac}{bd},$$

$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, pois $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$ mais ainda, $\frac{2}{3} = \frac{2k}{3k}$, pois qualquer $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, pois $2(3k) = 6k = 3(2k)$.

Na representação de um número racional $\frac{a}{b}$, b deve ser interpretado como um divisor. A notação $\frac{a}{b}$ significa, portanto, o número obtido pela divisão de a por b .

Exemplo 2.4. $\frac{4}{1} = \frac{2016}{504}$, pois $504 \cdot 4 = 2016 = 2016 \cdot 1$. Ora, $2016 = 504 \cdot 4$ é o mesmo que $2016 \div 504 = 4$ e, neste caso a igualdade $\frac{4}{1} = 4$.

Geralmente, para cada $n \in \mathbb{Z}$, atribui-se a igualdade $\frac{n}{1} = n$. Esta igualdade permite a identificação de \mathbb{Z} com $\left\{ \frac{n}{1} = n; n \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{Q}$ e, com isso, considera-se os inteiros como subconjunto dos números racionais e temos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Exemplo 2.5. Sendo $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, possui uma representação advinda da interpretação de $\frac{1}{2}$ como a divisão de 1 por 2.

Realmente, fazendo tal divisão, sabemos que $1 \div 2 = 0,5$. Daí, temos que as notações $\frac{1}{2}$ e $0,5$ representam o mesmo número racional, ou seja, $\frac{1}{2} = 0,5$. O número $0,5$ é denominada representação decimal de $\frac{1}{2}$. Muitos outros números racionais, infinitos deles, como veremos logo abaixo possuem representação decimal finita. Também existem infinitos números racionais que possuem representação decimal infinita. Vejamos os exemplos:

a) Alguns racionais com representação decimal finita.

$$\frac{3}{1} = 3; \quad \frac{1}{2} = 0,5; \quad \frac{1}{8} = 0,125.$$

b) Alguns números racionais com representação decimal infinita e periódica.

$$\frac{1}{3} = 0,3333\dots; \quad \frac{7}{11} = 0,6363\dots; \quad \frac{1}{6} = 0,1666\dots$$

Um número racional, na forma irredutível¹ $\frac{p}{q}$, tem uma representação decimal finita se, e somente se, q não tiver outros fatores primos além de 2 e 5. Vale esclarecer que q não precisa, necessariamente, ter os fatores primos 2 e 5; pode ter apenas um deles como fator primo, ou nenhum. Desta forma:

$$\frac{1}{50} = 0,02; \quad \frac{1}{8} = 0,125; \quad \frac{11}{1} = 11,0;$$

temos que os valores de q iguais a 50, 8 e 1. Se q for divisível por algum primo diferente de 2 e de 5, então o número racional p/q , p e q primos entre si, não terá uma representação decimal finita. Para demonstrar que a fração decimal é do tipo finito, tem-se o seguinte exemplo:

$$\frac{p}{q} = \frac{314935}{1600} = \frac{314935}{2^6 \cdot 5^2} = \frac{314935 \cdot 5^4}{2^6 \cdot 5^2 \cdot 5^4} = \frac{314935 \cdot 5^4}{2^6 \cdot 5^6} = \frac{314935 \cdot 5^4}{10^6} = 196,834375$$

Para se obter parte decimal desse número, faz-se necessário transformar a fração $\frac{p}{q}$ em outra, que tenha no denominador uma potência de 10. No exemplo anterior, foi multiplicado o numerador e o denominador por 5^4 .

Em um caso geral, supõe-se q seja da forma $2^x \cdot 5^y$, com x e y inteiros positivos ou nulos, onde: ou y é menor ou igual a x ($x \leq y$), ou então, y é maior do que x ($y > x$). Se $y \leq x$, ocorre a multiplicação do numerador e o denominador da fração por 5^{x-y} :

¹ uma fração p/q se diz irredutível se o maior divisor comum de p e q for 1, ou seja, se p e q forem primos entre si.

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^x \cdot 5^y} = \frac{p \cdot 5^{x-y}}{2^x \cdot 5^y \cdot 5^{x-y}} = \frac{p \cdot 5^{x-y}}{2^x \cdot 5^x} = \frac{p \cdot 5^{x-y}}{10^x}.$$

Sendo $x - y$ positivo ou nulo, 5^{x-y} será um inteiro e, portanto, $p \cdot 5^{x-y}$ também será um inteiro, digamos k . Assim:

$$\frac{p}{q} = \frac{k}{10^x},$$

A divisão do inteiro k por 10^x requer apenas que se coloque a vírgula no lugar correto.

Por outro lado, se $y > x$, multiplica-se o numerador e o denominador de $\frac{p}{q}$ por 2^{y-x} :

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^x \cdot 5^y} = \frac{p \cdot 2^{y-x}}{2^x \cdot 5^y \cdot 2^{y-x}} = \frac{p \cdot 2^{y-x}}{2^y \cdot 5^y} = \frac{p \cdot 2^{y-x}}{10^y}$$

Escrevendo j no lugar de $p \cdot 2^{y-x}$, tem-se:

$$\frac{p}{q} = \frac{j}{10^y},$$

e assim, obtém-se novamente, $\frac{p}{q}$, uma representação decimal finita.

Dízimas periódicas são números racionais que tem uma representação decimal finita e os que tem uma representação decimal infinita de algarismos decimais que, a partir de um certo algarismo, se repetem em grupos de um ou mais algarismos, ordenados sempre na mesma disposição e chamados de período como, por exemplo,

$$\frac{518}{99} = 5,23232323\dots \quad e \quad \frac{215}{990} = 0,2171717\dots$$

Outra notação utilizada é a de colocar um traço sobre o período:

$$\frac{518}{99} = 5,23\overline{23} \quad e \quad \frac{215}{990} = 0,217\overline{17}$$

Todo número racional em sua forma irredutível $\frac{p}{q}$, possui representação decimal finita ou representação decimal infinita periódica. Veremos agora, que vale a recíproca, ou seja, que toda representação decimal infinita periódica representa um número racional. Antes, veremos a ilustração da ideia geral da prova em um exemplo particular.

Na dízima periódica a seguir:

$$x = 13,12\overline{53}$$

Inicialmente multiplica-se por um número e, depois, por um outro; os números vão ser escolhidos de tal modo que ao subtrairmos os dois produtos obtidos, as partes periódicas infinitas vão desaparecer. No exemplo, os números 10^4 e 10^2 atendem esse propósito, pois

$$10^4 \cdot x = 131253, \overline{53}$$

e

$$10^2 \cdot x = 1312, \overline{53}$$

de modo que a diferença $10^4 \cdot x - 10^2 \cdot x$ é

$$9900x = 129941$$

Portanto,

$$x = \frac{129941}{9900}$$

é um número racional.

Qualquer dízima periódica (sem parte inteira na forma), pode ser descrita como:

$$x = 0, a_1 a_2 \dots a_s \overline{b_1 b_2 \dots b_t},$$

em que a_1, a_2, \dots, a_s representam os s algarismos consecutivos da parte não periódica e b_1, b_2, \dots, b_t representam os t algarismos do período, é parte que se repete. No exemplo anterior, $s = 2$, $t = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b_1 = 5$ e $b_2 = 3$.

Ao multiplicar x , inicialmente por 10^{s+t} , depois por 10^s , e subtrair os resultados, tem-se

$$10^{s+t} \cdot x = a_1 a_2 \dots a_s b_1 b_2 \dots b_t + 0, \overline{b_1 b_2 \dots b_t},$$

$$10^s \cdot x = a_1 a_2 \dots a_s + 0, \overline{b_1 b_2 \dots b_t};$$

e

$$10^{s+t} - 10^s \cdot x = a_1 a_2 \dots a_s b_1 b_2 \dots b_t - a_1 a_2 \dots a_s,$$

de modo que

$$x = \frac{a_1 a_2 \dots a_s b_1 b_2 \dots b_t - a_1 a_2 \dots a_s}{10^{s+t} - 10^s},$$

Assim está na forma “inteiro sobre inteiro”, portanto x é racional. □

Uma afirmação equivalente à proposição acima é a seguinte: “todo número cuja representação decimal seja infinita e não periódica não pode ser um número racional”. O conjunto de tais números, ou seja, o conjunto dos números cuja representação decimal seja infinita e não periódica é não vazio, pois, por exemplo, o número $0,1234567891011\dots$ pertence a este conjunto. Este conjunto é denominado o conjunto dos números irracionais. Sua importância é tal que merece uma definição destacada.

Definição 2.5. *O conjunto dos números irracionais é definido como o conjunto dos números cuja representação decimal é infinita e não periódica.*

A reunião dos números racionais com o dos números irracionais é o conjunto dos números reais. Mais precisamente:

Definição 2.6. *O conjunto dos números reais, denotado por \mathbb{R} , é o conjunto de todas as representações decimais sejam elas finitas, infinitas, periódicas ou não, ou seja, a reunião dos racionais com os irracionais: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.*

2.4 Conjuntos Enumeráveis

Definição 2.7. *Um conjunto é enumerável quando existe uma bijeção entre o conjunto e um subconjunto de \mathbb{N} .*

Alguns exemplos:

1) **O conjunto dos Números Naturais.**

Neste caso, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = x$, é, evidentemente, uma bijeção.

2) **O conjunto dos Números Inteiros.**

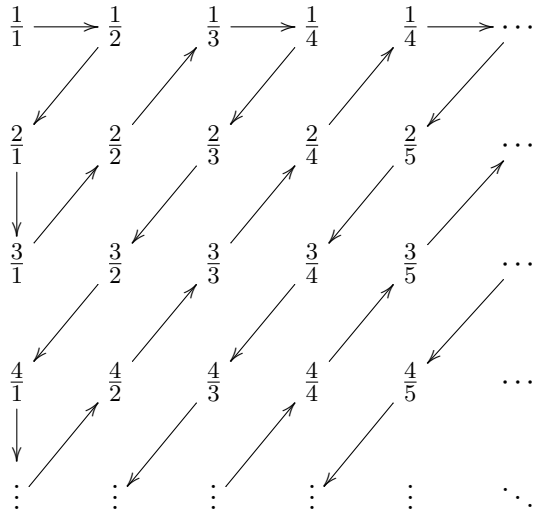
Considere $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, dado por $f(n) = 2n, n \geq 0$ e $f(n) = 1 - 2n, n < 0$.

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, & f(2) &= 4, & f(3) &= 6, \dots \\ f(-1) &= 3, & f(-2) &= 5, & f(-3) &= 7, \dots \end{aligned}$$

3) O conjunto dos Números Racionais.

O conjunto dos racionais positivos é enumerável conforme figura 1:

Figura 1 – Conjunto dos racionais positivos



Fonte: Figueiredo (2011)

Observe que todos os números da forma p/q com $p, q \in \mathbb{N}$ e $q \neq 0$, podem ser organizados como na figura acima seguindo as flexas como indicado na figura tem-se, a definição de uma função f onde $f(n) = n$ -ésimo elemento. Assim, pode-se mostrar que o conjunto $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ é enumerável.

A enumerabilidade de \mathbb{Q} é consequência verificar no item (i) do próximo Teorema, lembrando que $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$, onde $\mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q}; x < 0\}$.

Demonstramos abaixo algumas propriedades sobre conjuntos enumeráveis.

Teorema 2.4.1. (i) *Observe que se A é enumerável e $B \subset A$ é um conjunto infinito, então B é também enumerável.*

(ii) *A união de um conjunto finito com um conjunto enumerável é conjunto enumerável;*

(iii) *A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável;*

(iv) *A união de um número finito de conjuntos enumeráveis é enumerável;*

(v) *A união de um conjunto enumerável de conjuntos finitos é enumerável;*

(vi) *A união de um conjunto enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração:

(i) Imediato.

(ii) Seja $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ o conjunto finito e $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ o conjunto enumerável. O conjunto $A \cup B$ é enumerável. De fato a correspondência biunívoca entre $A \cup B$ e \mathbb{N} será assim:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & , \dots , & a_n, & b_1, & b_2, & \dots & \\ \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\ 1 & , \dots , & n, & n+1, & n+2, & \dots & \end{array}$$

(iii) Sejam $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ e $B = \{b_1, b_2, \dots\}$, dois conjuntos enumeráveis, então $A \cup B$ é enumerável, bastando fazer a correspondência biunívoca definida abaixo.

$$\begin{array}{cccccc} a_1, & b_1, & a_2, & b_2, & a_3, & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \end{array}$$

(iv) Sejam A_1, A_2, \dots, A_n , os conjuntos enumeráveis, mostrar que $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, é enumerável, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Para isso usa-se o Princípio de Indução Finita.

(a) $k = 1$ é válida pois A_1 é enumerável.

(b) $k = 2$ é válida pelo item (iii).

Hipótese de Indução: Suponha que seja válida para k , ou seja, se A_1, A_2, \dots, A_k são enumeráveis então $A_1 \cup A_k$ é enumerável.

Provar que a propriedade é válida para $k + 1$.

A_1, \dots, A_k, A_{k+1} são enumeráveis, então

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \cup A_{k+1}$$

é enumerável. Veja que

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \cup A_{k+1} = (A_1 \cup \dots \cup A_k) \cup A_{k+1}$$

Considerar que $A = (A_1 \cup \dots \cup A_k)$, então

Agora A é enumerável por Hipótese de Indução e $A \cup A_{k+1}$ é enumerável por (iii).

Portanto $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \cup A_{k+1}$ é enumerável.

Logo pelo Princípio de Indução Finita, (iv) é válida.

(v) $\{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ um conjunto enumerável onde cada A_i é um conjunto finito, para qualquer $i \in \{1, \dots, n, \dots\}$.

Mostra-se que $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ é enumerável.

Suponha que $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1l_1}\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2l_2}\}$, e $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nl_n}\}$,

Então

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1l_1}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2l_2}, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nl_n}, \dots\}$$

Tem-se a seguinte correspondência entre $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ e \mathbb{N} .

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}, & \dots, & a_{1l_1}, & a_{21}, & \dots, & a_{2l_2}, & \dots, & a_{n1}, & \dots, & a_{nl_n}, & \dots \\ \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ 1, & \dots, & l_1, & l_{1+1}, & \dots, & l_1 + l_2, & \dots, & l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} + 1, & \dots, & l_{n+1} & \dots \end{array}$$

Tem-se que, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ é enumerável.

(vi) Seja $C = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ um conjunto enumerável onde cada A_i é um conjunto enumerável para qualquer $i \in 1, \dots, n, \dots$

Suponha que

$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\}$, ..., $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots\}$, ... os elementos A_1, A_2, \dots, A_n podem ser dispostos da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccc} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \dots \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \dots \\ a_{n1}, & a_{n1}, & a_{n3}, & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

Gerando flechas como feito em \mathbb{Q}^+ definimos f dada por $f(n) = n - \text{ésimo}$ elemento que encontramos seguindo as flechas. Dessa forma definimos uma correspondência biunívoca entre \mathbb{N} e $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ provando que C é um conjunto enumerável. \square

Proposição 2.4.1. *O conjunto \mathbb{R} dos números reais não é enumerável.*

Demonstração: Pelo item (i) do teorema anterior é suficiente mostrar que o conjunto dos números reais entre 0 e 1 é não enumerável.

Supondo que $[0, 1)$ é um conjunto enumerável, e

$$[0, 1) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, \dots\}$$

Escrevendo esses números escritos em forma decimal, evitando representações decimais

finitas pelo uso da forma infinita periódica em tais casos. Por exemplo, o número $1/2$ será escrito como $0,4999999\dots$ e não $0,5$, temos:

$$r_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\dots,$$

$$r_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\dots,$$

$$r_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\dots,$$

$$r_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}a_{n5}\dots$$

Dado um número

$$\beta = 0, b_1b_2b_3b_4\dots,$$

da seguinte maneira. Agora b_1 representa qualquer algarismo entre 0 e 9, porém diferente de a_{11} . Analogamente, seja b_2 qualquer algarismo, não nulo, diferente de a_{22} . Seja b_n qualquer algarismo, não nulo, diferente de a_{nn} . Então o número β é diferente de r_1 , pois eles diferem na primeira casa decimal, é diferente de r_2 pois eles diferem na segunda casa decimal e, em geral, β é diferente de r_n , pois eles diferem na n -ésima casa decimal. Portanto, β é diferente de cada um dos r'_n . Mas β é um número real entre 0 e 1 e tem-se, assim, uma contradição. \square

Vimos que o conjunto dos números racionais é enumerável e como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, se que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é não enumerável, ou seja, existem muito mais números irracionais do que números racionais.

2.5 Números Irracionais

Um número irracional é, por definição, um número cuja representação decimal não é uma dízima periódica. Ou seja, um número que não pode ser escrito como uma fração $\frac{x}{y}$ em que x é um número inteiro e y um número natural não nulo.

No conjunto dos números irracionais operações de adição e multiplicação são definidas, embora não sejam fechadas. Por exemplo: $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$ são irracionais e $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4 \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ são irracionais mas $\sqrt{2} + (-\sqrt{2})$ é racional e $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2 \in \mathbb{Q}$.

Seja y um número irracional qualquer e x um número racional diferente de zero, então a adição, subtração, multiplicação e divisão de x e y resultarão em números irracionais. É apresentado abaixo uma lista com essas propriedades operacionais referentes aos números irracionais.

Proposição 2.5.1. *Se $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ então:*

- $x - y$ é irracional;
- $y - x$ é irracional;
- $x + y$ é irracional;
- $x \cdot y$ é irracional, se $x \neq 0$;
- $\frac{y}{x}$ é irracional, se $x \neq 0$;
- $\frac{x}{y}$ é irracional, se $y \neq 0$.

Demonstração: Se existem racionais $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ tais que:

$$x - y = r_1, \quad y - x = r_2, \quad x + y = r_3, \quad x \cdot y = r_4, \quad \frac{y}{x} = r_5, \quad \frac{x}{y} = r_6,$$

resolvendo essas equações em y , teríamos que:

$$y = x - r_1, \quad y = r_2 + x, \quad y = r_3 - x, \quad y = \frac{r_4}{x}, \quad y = r_5 \cdot x, \quad y = \frac{x}{r_6}.$$

e y seria racional, pois \mathbb{Q} é fechado com relação às operações de adição e multiplicação. Um absurdo. \square

Observação 2.1. *O que esta proposição mais precisamente demonstra é que a partir de um único irracional pode-se obter infinitos outros.*

2.5.1 A preponderância dos irracionais

Como vimos acima, tanto o conjunto dos números racionais quanto o dos irracionais possuem infinitos elementos, embora sendo \mathbb{Q} enumerável possuir menos elementos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, por este ser não enumerável.

O fato de os dois conjuntos serem infinitos deixa esta diferença entre eles um tanto obscura, uma vez que não temos como “medir o infinito” por meio de uma contagem que não tem como ser finalizada. Para se ter uma idéia do quão maior é o conjunto dos irracionais que o dos racionais, mostraremos como cobrir todo o conjunto dos números racionais com uma coleção enumerável de intervalos cuja soma de todos os comprimentos fique arbitrariamente pequena e veremos que os irracionais não possuem esta propriedade.

Definição 2.8. *Um conjunto S de é dito um conjunto de medida nula se é possível cobrir todos os pontos de S com um conjunto de intervalos cuja soma dos comprimentos seja arbitrariamente pequena.*

Como um primeiro e interessante exemplo no contexto de nosso trabalho, mostraremos que os inteiros positivos é um conjunto de medida nula.

Proposição 2.5.2. \mathbb{Z} é um conjunto de medida nula.

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, temos:

$$1 \in \left(1 - \frac{\epsilon}{2}, 1 + \frac{\epsilon}{2}\right) = I_1, 2 \in \left(2 - \frac{\epsilon}{4}, 2 + \frac{\epsilon}{4}\right) = I_2$$

mas, geralmente, $n \in \mathbb{Z}$ e $n \in \left(n - \frac{\epsilon}{2^n}, n + \frac{\epsilon}{2^n}\right) = I_n$. Sendo $l(I_n) \Rightarrow$ comprimento de I_n

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{n\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n,$$

$$l(I_n) = \left| \left(n + \frac{\epsilon}{2^n}\right) - \left(n - \frac{\epsilon}{2^n}\right) \right| = \frac{\epsilon}{2^{n-1}},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\epsilon}{2^{n-1}} = \epsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

□

O argumento usado para mostrar que os inteiros positivos formam um conjunto de medida nula pode ser estendido para o caso dos conjuntos enumeráveis. Devido à importância deste fato, ele será devidamente enunciado como um teorema.

Teorema 2.5.1. Qualquer conjunto enumerável $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ é de medida nula.

Demonstração:

Basta, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomar o intervalo $I_n = \left(a_n - \frac{\epsilon}{2^n}, a_n + \frac{\epsilon}{2^n}\right)$. Como no caso dos inteiros positivos, vemos que S está contido numa reunião de intervalos cuja soma de todos os comprimentos é menor ou igual a 2ϵ . □

Dizemos que quase todos os números reais possuem uma dada propriedade P se o conjunto dos números reais que não a possuem é de medida nula. Já vimos que os racionais é um conjunto enumerável. Pelo teorema anterior, segue que \mathbb{Q} tem medida nula. É claro que se A for um conjunto de medida nula, segue que qualquer conjunto $B \subseteq A$ também é de medida nula, uma vez que qualquer cobertura para A também é uma cobertura para B . Para qualquer intervalo limitado $I \subset \mathbb{R}$, $I = (I \cap \mathbb{Q}) \cup (I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$, união disjunta. Portanto temos que (admitiremos isto!)

$$l(I) = l(I \cap \mathbb{Q}) + l(I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = 0 + l(I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = l(I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})).$$

Isto quer dizer que a medida dos irracionais em qualquer intervalo limitado é a medida total do intervalo. Estendendo este raciocínio para toda a reta real, (um fato intuitivamente

crível mas que não é de forma nenhuma imediato. É necessário que se conheça a estrutura dos abertos da reta para que se demonstre isto!) "vemos" que quase todos os números reais são irracionais!

2.5.2 Algumas irracionalidades simples

Prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$:

Antes de provar a irracionalidade de $\sqrt{2}$, é importante que se faça a seguinte observação:

Se p^2 é par, então p também é par. De fato, suponha que p fosse ímpar, teríamos que p seria da forma $p = 2k + 1$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Daí ter-se-ia sucessivamente

$$p^2 = (2k + 1)^2$$

$$p^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1, \text{ sendo } 2k^2 + 2k = c.$$

$p^2 = 2c + 1$, $c \in \mathbb{Z}$ e p^2 seria ímpar, o que é um absurdo, pois parte da suposição de que p^2 é par. Portanto, se p^2 for par p não pode ser ímpar, portanto p também é par.

Suponha, então, que $\sqrt{2}$ seja um número racional na forma $\frac{p}{q}$ com $q \neq 0$, ou seja, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Se $d = \text{mdc}(p, q)$, então $\frac{p}{d}$, $\frac{q}{d}$ são primos entre si. Portanto, sem perda de generalidade, que $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível, ou seja, $\text{mdc}(p, q) = 1$. Por cálculos algébricos, tem-se $2q^2 = p^2$ e então p^2 é par implicando que $p = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$ e q satisfaz a equação $q^2 = 2k^2$. Consequentemente, q^2 também é par, o que acarreta que q é par pela observação acima.

Logo, p e q são ambos inteiros pares, então $\text{mdc}(p, q) \neq 1$, o que nega a hipótese de que $\frac{p}{q}$ é irredutível. A contradição se deve à hipótese de que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto $\sqrt{2}$ é irracional.

Prova da irracionalidade de $\sqrt{3}$:

Para realizar uma demonstração da irracionalidade de $\sqrt{3}$ observe que: Se p^2 é múltiplo de 3, então p é múltiplo de 3.

De fato, se p não for múltiplo de 3 existem únicos k e $r \in \mathbb{Z}$, tais que $p = 3k + r$, $0 \leq r < 3$. Na expressão, k significa quociente e o r significa resto. Para que p não seja múltiplo de 3 o resto só pode ser 1 ou 2. Elevando a expressão ao quadrado e simplificando obtemos que;

$$p^2 = 3(3k^2 + 2kr) + r^2$$

$$\text{Substituindo } 3k^2 + 2kr = y \in \mathbb{Z}$$

$$p^2 = 3y + r^2$$

Substituindo $r = 1$, tem-se:

$p^2 = 3y + 1$, que não é múltiplo de 3.

Substituindo $r = 2$, tem-se:

$p^2 = 3(y + 1) + 1$, que não é múltiplo de 3.

Ou seja, se p^2 é múltiplo de 3, então p é múltiplo de 3.

Estamos agora em condições de provar que a irracionalidade de $\sqrt{3}$. Considere que $\sqrt{3}$ é um número racional da forma $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, onde $\text{mdc}(p, q) = 1$. Por cálculo algébricos: $3q^2 = p^2$.

E p^2 é múltiplo de 3. Pelo que vimos acima, p é também múltiplo de 3, ou seja, existe inteiro y tal que $p = 3y$. Substituindo p por $3y$ na equação $3q^2 = p^2$, temos:

$$\Rightarrow (3y)^2 = 3q^2,$$

$$\Rightarrow 9y^2 = 3q^2,$$

$$\Rightarrow 3y^2 = q^2.$$

Logo, q^2 é múltiplo de 3 e, portanto, q é múltiplo de 3 e, então, $q = 3t$. Conclui-se pela observação acima, que p e q são ambos múltiplo de 3, o que é absurdo, pois contraria a hipótese inicial p e q não tem fatores em comum. Logo $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{3}$ é irracional.

Prova da irracionalidade de \sqrt{p} :

Supondo que \sqrt{p} é um número racional e pode ser escrito na forma de fração irredutível $\frac{a}{b}$ com a e b , ambos primos entre si. Tem-se:

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}, \text{ com } b \neq 0, \text{ com } \text{mdc}(a, b) = 1.$$

$$\Rightarrow p = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow a^2 = p \cdot b^2$$

$$\Rightarrow p \mid a^2$$

Se $p \mid a^2$, então, pelo Lema 2.2.2 $p \mid a$. Pode-se escrever que $a = kp$, $k \in \mathbb{Z}$. Então, temos:

$$a^2 = pb^2 \Rightarrow (kp)^2 = pb^2$$

$$\Rightarrow k^2p^2 = pb^2$$

$$\Rightarrow b^2 = k^2p$$

$$\Rightarrow p \mid b^2$$

$$\Rightarrow p \mid b$$

Dessa forma temos, $p \mid a$ e também $p \mid b$ e chegamos a um absurdo, pois a hipótese

inicial é que a e b são primos. Portanto, \sqrt{p} não pode ser racional, logo \sqrt{p} é irracional.

Comentário 2.1. *E se considerássemos o número: $\sqrt{2 + \sqrt[3]{5}}$.*

Analisando pelo mesmo raciocínio acima chegaríamos à igualdade $5 = \left(\frac{p^2 - 2q^2}{q^2}\right)^3$, que é muito mais difícil de analisar por este método. Um resultado simples e muito útil que possibilita a verificação de uma “grande classe” de irracionais é o seguinte teorema.

Teorema 2.5.2. *Se o número racional $x = \frac{a}{b}$ satisfaz uma equação*

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_0 = 0$$

com coeficientes inteiros, então a é um divisor de c_0 e b é um divisor de c_n .

Demonstração:

Suponha que x seja um número racional da forma $x = \frac{a}{b}$. Onde os inteiros a e b são primos entre si. Então teríamos que

$$c_n a^n = b \left(-c_{n-1} a^{n-1} - c_{n-2} a^{n-2} - \dots - c_0 b^{n-1} \right) \quad (2.8)$$

Isto mostra que b é um divisor de $c_n a^n$. Como $\text{mdc}(a, b) = 1$, nenhum fator primo de b é um fator primo de a , o que significa que b não divide a . Pelo Teorema Fundamental da Aritmética os fatores primos de a também são fatores primos de a^n , o que significa que b também não é um divisor de a^n . Pelo Lema 2.3.2 podemos concluir que b é um divisor de c_n .

Reescrevendo (2.8) como

$$c_0 b^n = a \left(-c_n a^{n-1} - \dots - c_1 b^{n-1} \right)$$

vê-se do mesmo modo acima que a é um divisor de c_0 . Retornando aos casos analisados anteriormente munidos desta ferramenta, o trabalho é muito menor. Basta observar que $\sqrt[n]{p}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ é raiz do polinômio $P(x) = x^n - p$. Pelo teorema anterior, as possíveis raízes racionais deste polinômio são os divisores de p : p , $-p$, 1 e -1 , que, por inspeção, se verifica que não são raízes de $P(x)$. Portanto, as raízes reais de $P(x)$, se existir alguma, serão todas irracionais.

Embora este método seja bastante poderoso, ele não resolve a todos os problemas sobre a determinação de irracionalidade de um número. Existem números que são irracionais e que não são raízes de nenhum polinômio com coeficientes inteiros. Tais números são os números transcendentais, que veremos no próximo capítulo deste trabalho. \square

3 NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES

Joseph Liouville criou a teoria dos números transcendentos, em 1844, por meio de um teorema que distingue os números algébricos. A ideia de Liouville para arquitetar estes números foi achar uma característica que contenha todos os números algébricos e, logo após, construir um número que não possuía tal propriedade.

Definição 3.1. Um número real diz-se **algébrico** se satisfizer uma equação polinomial da forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ com coeficientes inteiros, onde $a_n \neq 0$; se não satisfizer nenhuma equação como esta, chama-se **transcendente**.

Exemplo 3.1. Os números racionais são todos algébricos, pois se $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ então $qx - p = 0$, ou seja, $\frac{p}{q}$ é raiz do polinômio com coeficientes inteiros $P(x) = qx - p$.

Como consequência do resultado a seguir temos a existência dos números transcendentos.

Teorema 3.1. O conjunto dos números algébricos é enumerável.

Demonstração:

Dado $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, o conjunto das raízes de P é denotado por \mathcal{R}_p . Note que \mathcal{R}_p tem no máximo n elementos. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe apenas uma quantidade enumerável de polinômios, em $\mathbb{Q}[x]$, com grau n . De fato, considere $\mathbb{X}_n = \{Q \in \mathbb{Q}[x] : \partial Q = n\}$.

Tome $\psi : \underbrace{\mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q}^*}_{n+1 \text{ cópias}} \rightarrow \mathbb{X}_n$ dada por

$$\psi : (a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad (3.1)$$

Note que ψ é bijeção. Como $\mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q}^*$ é enumerável, segue-se que \mathbb{X}_n também o é.

definimos $\mathcal{A}_n = \bigcup_{\partial p=n} \mathcal{A}_n$. Pelo teorema (2.4.1), cada \mathcal{A}_n é enumerável. Agora é só observar que

$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n \quad (3.2)$$

Dai $\overline{\mathbb{Q}}$ é enumerável (pois é escrito como união enumerável de enumeráveis). \square

3.1 Números Algébricos

Definição 3.2. *Qualquer solução de uma equação da forma*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0 \quad (3.3)$$

*onde cada coeficiente $a_i \in \mathbb{Z}$, $i \in 0, 1, \dots, n-1$, é chamado **inteiro algébrico**.*

Exemplo 3.2. *Seja $b \in \mathbb{Z}$, então b é um inteiro algébrico, pois b é solução da equação $x - b = 0$, a qual é do tipo (3.3), para $n = 1$ e $a_0 = -b$.*

Exemplo 3.3. $\sqrt{7}$ é um número algébrico, já que é solução de $x^2 - 7 = 0$.

Exemplo 3.4. $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ é um inteiro algébrico. Uma vez que é solução de uma equação do tipo (3.3). Abaixo descrevemos como obtê-la. Temos que $x = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, para chegar a uma equação do tipo (3.3), precisamos aplicar duas quadraturas.

Aplicando a primeira quadratura:

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow (\sqrt{2 + \sqrt{3}})^2 \Rightarrow x^2 = 2 + \sqrt{3}$$

Para eliminar o radical que restou, aplicamos outra quadratura:

$$\begin{aligned} x^2 &= 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \\ x^2 - 2 &= \sqrt{3} \Rightarrow \\ (x^2 - 2)^2 &= (\sqrt{3})^2 \Rightarrow \\ x^4 - 4x^2 + 4 &= 3 \Rightarrow \\ x^4 - 4x^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$, é a equação procurada.

O teorema a seguir caracteriza os Inteiros Algébricos.

Teorema 3.2. *Todo número inteiro algébrico é um número inteiro ou irracional.*

Demonstração: Basta considerar $c_n = 1$ no enunciado do teorema (2.5.2). □

Os números algébricos possuem algumas propriedades de fechamento, as quais são listadas abaixo.

- (i) A soma de dois números algébricos é algébricos.
- (ii) O produto de dois números algébricos é algébricos.
- (iii) O simétrico $-\alpha$ de um número algébrico α é algébrico.
- (iv) O inverso α^{-1} de um número algébrico $\alpha \neq 0$ é algébrico.

A demonstração dessas propriedades podem ser encontradas detalhadamente no livro do (FIGUEIREDO, 2011).

Seja β um número transcendente qualquer e α um número algébrico diferente de zero, então a adição, subtração, multiplicação e divisão de α e β resultarão em números transcendentos. É apresentado abaixo uma lista com essas propriedades operacionais referentes aos números transcendentos.

Proposição 3.1.1. *Se $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ então:*

- $\alpha - \beta$ é transcendente;
- $\alpha + \beta$ é transcendente;
- $\alpha \cdot \beta$ é transcendente;
- $\frac{\beta}{\alpha}$ é transcendente.

Demonstração: Se existem algébricos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, tais que:

$$\alpha - \beta = \alpha_1, \quad \alpha + \beta = \alpha_2, \quad \alpha \cdot \beta = \alpha_3, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \alpha_4,$$

resolvendo essas equações em β , teríamos que:

$$\beta = \alpha - \alpha_1, \quad \beta = \alpha_2 - \alpha, \quad \beta = \frac{\alpha_3}{\alpha}, \quad \beta = \frac{\alpha_4}{\alpha}.$$

e β seria algébrico, pois $\overline{\mathbb{Q}}$ é fechado com relação às operações de adição e multiplicação. Um absurdo. \square

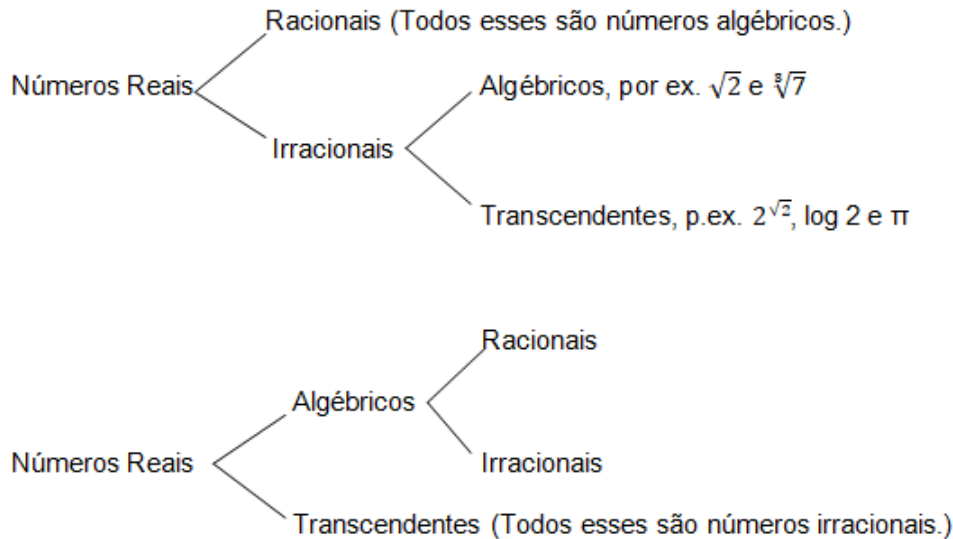
Em 1900, no Congresso Internacional de Matemática em Paris, o matemático alemão David Hilbert propôs uma lista de 23 problemas. O sétimo problema de Hilbert pergunta se o número α^β , onde α é algébrico (diferente de zero e um) e β é algébrico (não racional), é transcendente. Essa questão foi resolvida em 1934 por A. O. Gelfond e independentemente em 1935 por T. Schneider. A demonstração deste teorema está além dos objetivos deste trabalho.

Teorema 3.3 (Gelfond-Schneider). *Seja $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1\}$, $\beta \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$. Então α^β é transcendente.*

Como consequência deste teorema temos que números tais como: $2^{\sqrt{2}}$ e $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ são transcendentos.

Com relação à transcendência, os números podem ser classificados como abaixo:

Figura 2 – Classificação dos Números



Fonte: Niven (1984)

3.2 O Número e

Percebe-se que muitos assuntos explorados durante o Ensino Médio, como as funções exponenciais e funções logarítmicas estão relacionados com matemática financeira. Pode-se apresentar o número e ao discente da educação básica, utilizando a matemática financeira. De acordo com Maor (2008, p.13), uma explicação virtual é a de que o número e teria aparecido primeiro ligado a uma fórmula para o cálculo de juros compostos.

Suponha-se que X empreste a Y importância de R\$ 10.000,00, que pode ser aplicado por 1 ano à taxa de 12% a.a. e nas seguintes hipóteses de capitalização contínua: anual, semestral, trimestral, mensal, semanal e diária.

De acordo com a capitalização, se a quantia for capitalizada no final do ano seu montante será igual ao capital multiplicado pelo fator $(1 + 0,12)^1 = 1,12$. Neste momento Y pagaria R\$ 11.200,00, sendo R\$ 10.000,00 que tomou emprestado e R\$ 1.200,00 de juros. Isto seria justo? Não. O correto seria que X recebesse e reais. Veja o porque. Se meu cliente viesse me pagar outros possíveis fatores multiplicativos para o capital, se capitalização for semestral, juros será igual a $(1 + \frac{0,12}{2})^2 = 1,1236$. Isto me daria 11.236,00 reais mas, mesmo assim, não seria justo.

Generalizando um pouco mais essa ideia, se um capital C for aplicado a uma taxa de juros igual a i por um período t e com n capitalizações periódicas iguais durante esse t , o valor do montante M acumulado ao final da aplicação será igual a:

$$\text{Montante} = C \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$$

A Tabela 1 apresenta todas as informações capitalizadas do empréstimo.

Tabela 1 – Aplicação com diferentes Capitalizações do Empréstimo

Capitalização	n	i/n	Montante (R\$)
Anual	1	0,12	11.200,00
Semestral	2	0,06	11.236,00
Trimestral	4	0,03	11.255,09
Mensal	12	0,01	11.268,25
Semanal	52	0,002307692	11.273,41
Diária	365	0,002307692	11.274,75

Fonte: Autor (2018)

Verificou-se que o valor do montante aumenta à medida que aumenta o número de capitalizações de uma dada taxa nominal. Agora o que ocorre quando admitimos uma capitalização horária:

$$M = 10.000 \left(1 + \frac{0,12}{24 \cdot 365}\right)^{24 \cdot 365}$$

$$M = 10.000 (1 + 0,000013699)^{8760}$$

$$M \cong 11.275,00.$$

Então percebe que este resultado permite inferir que o valor do montante não cresce indefinidamente com a frequência de capitalização, e sim tendendo para um limite. Logo, surgiu a ideia do montante em capitalização contínua.

Seja:

$$M_{nk} = C_0 \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn}$$

$$M_{nk} = C_0 \left(1 + \frac{1}{\frac{k}{i}}\right)^{\frac{k}{i} \cdot ni}$$

Fazendo-se: $k' = \frac{k}{i}$

$$M_{nk} = C_0 \left(1 + \frac{i}{k'}\right)^{k' ni}$$

$$M_{nk} = C_0 \left[\left(1 + \frac{1}{k'}\right)^k \right]^{ni}$$

se: $k \rightarrow \infty \Rightarrow k' \rightarrow \infty$. Então:

$$M'_n = \lim_{k' \rightarrow \infty} (M_{nk}) = \lim_{k' \rightarrow \infty} \left\{ C_0 \left[\left(1 + \frac{1}{k'}\right)^k \right]^{ni} \right\}$$

$$M'_n = C_0 \left[\lim_{k' \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k'}\right)^k \right]^{ni}$$

$$\lim_{k' \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k'}\right)^k = e.$$

Onde e é um número irracional usado na base dos logaritmos naturais ou neperianos (2,718281828459045235360287...).

Logo, tem-se:

$$M'_n = C_0 e^{ni}$$

Se Y acertar o pagamento por capitalização em espaço de tempo cada vez menor obtém-se um retorno cada vez maior embora limitado. Verifica-se como a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se comporta para valores crescentes de n na Tabela 2.

Observação 3.1. *No exemplo acima, em que o período de capitalização não coincide com o período da taxa, adotou-se a conversão de que a taxa por período de capitalização é a taxa proporcional simples à taxa nominal dada (no caso, de 12% ao ano).*

Tabela 2 – Valores Crescentes de n

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
6	2,521626
10	2,59374
10^3	2,71692
10^4	2,718156
10^5	2,718268
10^6	2,71828
10^7	2,71828

Fonte: Autor (2018)

Os matemáticos chamam esse número de e , agora sim, segue-se que o justo e exato que X deveria receber pelos seus e reais emprestados seria $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Pode-se concluir que, à medida que aumentamos o valor de n , o valor de expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ parece se aproximar do número 2,7182 que é a melhor aproximação n .

Acredita-se que através de um problema prático da matemática financeira consegue introduzir aos discentes do ensino médio o número de Euler¹ e outros exemplos, relativos a desintegração radioativo, crescimento populacional, entre outros. O objetivo da próxima é mostrar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existe.

3.2.1 A existência do Número e

Em se tratando da existência do Número e , tem-se uma sequência importante que tem como n -ésimo termo $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$. Ela é evidentemente crescente. Além disso, é limitada, pois

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração:

Evidentemente que a sequência é monótona crescente, pois, $a_{n+1} > a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mostra-se que a sequência é limitada. Iniciando com $n = 3$, logo:

¹ Leonardo Euler nasceu na Basileia (Suíça) em 15 de abril de 1707 e faleceu em São Petersburgo (Rússia) em 18 de setembro de 1783.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n > 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{n-1}$, então, $a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$.

A partir do segundo termo desta soma, temos uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$. Utilizando a fórmula $S = \frac{a_1}{1-q}$, temos que: $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. Então teremos $a_n < 1 + 2 = 3$, a sequência a_n é limitada superiormente por 3 é convergente.

Toda sequência monótona limitada é convergente. \square

Demonstração:

Considere, sem perda de generalidade, a sequência $(x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots)$ não-decrescente limitada. Se a sequência é limitada superiormente, o seu conjunto de valores possui supremo s . Afirma-se que $s = \lim x_n$. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, o número $s - \varepsilon$ não é cota superior do conjunto dos x_n . Logo, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $s - \varepsilon < x_{n_o} \leq s$. A sequência é monótona então:

$$n > n_o \Rightarrow a_{n_o} \leq a_n \Rightarrow s - \varepsilon < a_n$$

$$\forall n > n_o \Rightarrow s - \varepsilon < x_{n_o} \leq x_n < s + \varepsilon$$

Assim completa a demonstração que $\lim x_n = s$. \square

Relacionando com a sequência $\lim a_n = e$, a sequência do termo geral cujo n -ésimo termo é $b_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. A fórmula do binômio de Newton nos dá:

$$b_n = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}, \text{ ou seja,}$$

$$b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Ao analisar que, cada expressão dentro do parênteses é menor que 1, tem-se que $b_n \leq a_n$ para todo n , assim, $b_n \leq \lim a_n$. Também a sequência b_n tem um limite superior. Inclusivamente, b_n é monótona crescente pois $b_{n+1} > b_n$ para todo n . Na verdade:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \\ &\dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) > 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) = b_n \end{aligned}$$

Assim tem-se $b_{n+1} > b_n$ onde, b_n é convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Por outro lado, fixando arbitrariamente $p \in \mathbb{N}$, obtém-se, para todo $n > p$,

$$b_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{p!} \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right).$$

Fazendo n aumentar sem limites (e mantendo p fixo) na desigualdade acima, o segundo membro tende para o limite a_p . Da desigualdade acima obtém-se, $\lim b_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{p!} = a_p$. Dessa desigualdade nos dá $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_p$.

Conclusão os limites $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existem e são iguais, ou seja, existe $e \in \mathbb{R}$, tal que;

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right). \quad (3.4)$$

3.2.2 A Irrracionalidade do Número e

O número de Euler, nomeado desta forma em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é a base dos logaritmos naturais. A origem do número de Euler e não é tão clara, ela parece recuar ao século XVI, quando se percebeu que a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ que aparecia na fórmula dos juros compostos, tendia a certo limite - cerca de 2,71828 - à medida que n aumenta, como vimos no início da seção. Assim, e tornou-se o primeiro número a ser definido por um processo de limite, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Apresenta-se uma demonstração da irracionalidade de e feita por Fourier, em 1815.

Como $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$, dado $m \in \mathbb{N}$, temos que

$$0 < m!e - \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m!}{(m+k)!} \quad (3.5)$$

Note que $\binom{m+k}{k} \geq m$, para todo $k \geq 0$ e assim

$$\frac{(m+k)!}{k!m!} \geq m \Rightarrow \frac{m!}{(m+k)!} \leq \frac{1}{mk!} \quad (3.6)$$

Então

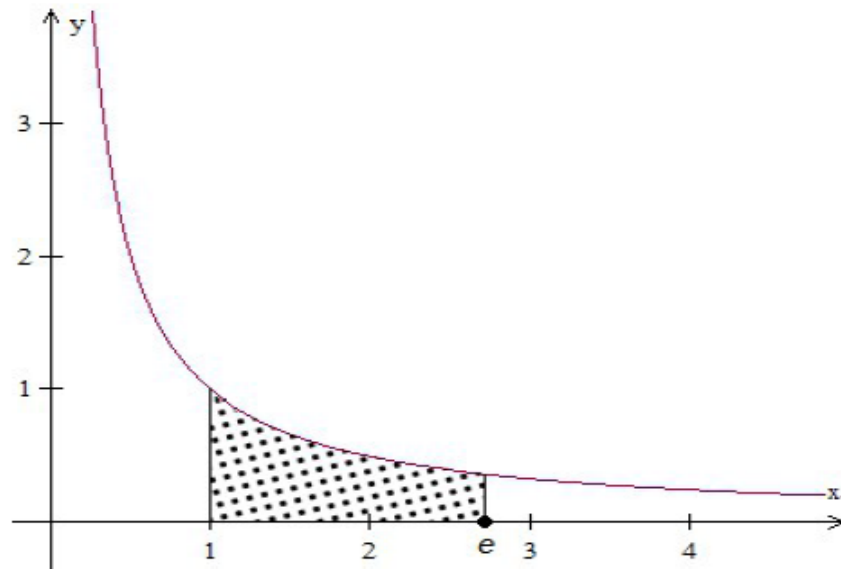
$$0 < m!e - \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!} \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{e-1}{m} \quad (3.7)$$

Suponha que e é racional com denominador $q \geq 2$ já que $e \notin \mathbb{Z}$. Assim $\frac{e-1}{q} < 1$ e $q!e \in \mathbb{Z}$ e portanto, de (3.7), obtemos que $q!e - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q!}{k!}$ é inteiro entre 0 e 1. Esse absurdo implica a irracionalidade de e .

O número e , que aparece no estudo da função logarítmica, é definido como o número tal que a área hachurada sob a hipérbole $y = \frac{1}{x}$ de $x = 1$ a $x = e$ abaixo é igual a 1.

A curva da Figura 4 é o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x > 0$.

Figura 3 – Função Logarítmo



Fonte: Figueiredo (2011)

3.3 A Transcendência do Número e

A demonstração com maiores detalhes pode ser obtida em livros de Cálculo e Análise, pois, o objetivo deste trabalho é apenas apresentar a sequência de fatos que compõem a prova dos fundamentos da transcendência do número e .

A demonstração da transcendência do número e intrigou diversos matemáticos do século XIX. O matemático francês Charles Hermite,² no ano de 1873, escreveu seu nome na história da matemática ao demonstrar a transcendência de e .

Seja $P(x)$ um polinômio de grau r . Defina a função

$$F(x) = P(x) + P'(x) + \dots + P^{(r)}(x). \quad (3.8)$$

Aplicando o teorema do valor médio à função $e^{-x}F(x)$ no intervalo $[0, k]$, obte-se

$$F(k) - e^{(k)}F(0) = -ke^{k(1-y_k)}P(ky_k), \quad (3.9)$$

com $0 < y_k < 1$. Seja

$$T_k = -ke^{k(1-y_k)}P(ky_k). \quad (3.10)$$

² Charles Hermite, Matemático Francês (nascido em 24 de dezembro de 1822, Dieuze, padre morreu em 14 de janeiro de 1901, Paris).

Suponha que e seja algébrico, isto é, existem inteiros c_0, c_1, \dots, c_n (onde, $C_0 > 0$) tais que

$$c_n e^n + \dots + c_1 e + c_0 = 0. \quad (3.11)$$

Multiplicando (3.11) com $F(0)$:

$$c_n e^n F(0) + \dots + c_1 e F(0) + c_0 F(0) = 0. \quad (3.12)$$

então,

$$\begin{aligned} & c_n F(n) + \dots + c_1 F(1) + c_0 F(0) = \\ & = c_n F(n) + \dots + c_1 F(1) + c_0 F(0) - (c_n e^n F(0) + \dots + c_1 e F(0) + c_0 F(0)). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Reescrevendo a igualdade acima de outro modo e usando as igualdades (3.9) e (3.10)

$$c_n F(n) + \dots + c_1 F(1) + c_0 F(0) = c_n t_n + \dots + c_1 t_1. \quad (3.14)$$

Considere o polinômio:

$$P(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (1-x)^p (2-x)^p \dots (n-x)^p, \quad (3.15)$$

sendo p um número primo tal que $p > n$, e $p > c_0$, são dados em (3.11). A ideia agora é demonstrar que para tal polinômio P , o lado esquerdo de (3.14) é um inteiro não divisível por p , enquanto o lado direito é menor que 1 em valor absoluto. Isso nos dará o absurdo.

Seja $Q(x) = \sum_{j=0}^r a_j x^j$ um polinômio com coeficientes inteiros. É possível provar que

$$Q^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^r \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i}, \quad i \leq r. \quad (3.16)$$

Observe que cada coeficiente a_j é multiplicado por i números consecutivos em (3.16). Considerando que o produto de k , números inteiros consecutivos é divisível por k , onde os coeficientes de

$$\frac{1}{(p-1)!} Q^i(x), \quad p \leq i, \quad (3.17)$$

são inteiros divisíveis por p .

Desenvolvendo os produtos indicados em (3.15), obtém-se

$$P(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!} x^{p-1} + \frac{b_0}{(p-1)!} x^p + \frac{b_1}{(p-1)!} x^{p+1} \dots \quad (3.18)$$

Ainda de (3.15), pode-se perceber que $1, 2, \dots, n$ são raízes de $P(x)$ de multiplicidade p . Logo,

$$P^i(k) = 0; k = 1, 2, \dots, n; i < p. \quad (3.19)$$

Além disso, de (3.18), conclui-se que

$$P^{(p-1)}(0) = (n!)^p; eP^{(i)}(0) = 0; i < p - 1. \quad (3.20)$$

Assim, de (3.17) e (3.19), $F(k)$; $k = 1, 2, \dots, n$, é um inteiro divisível por p , e, de (3.20), $F(0)$ é um inteiro não divisível por p . Segue que $c_n F(n) + \dots + c_1 F(1) + c_0 F_0$ é um inteiro não divisível por p .

Substituindo (3.15) em (3.10), tem-se

$$t_k = -k e^{k(1-y_k)} \frac{1}{(p-1)!} (ky_k)^{p-1} (1-ky_k)^p (2-ky_k)^p \dots (n-ky_p)^p. \quad (3.21)$$

Usando (3.21) e o fato de que $0 < y_k < 1$, pode-se mostrar que

$$|t_k| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}, k < n. \quad (3.22)$$

Para p suficientemente grande, substituindo $k = 1, 2, \dots, n$, na desigualdade acima, que

$$|c_n F(n) + \dots + c_1 F(1) + c_0 F(0)| < 1. \quad (3.23)$$

Assim, o lado esquerdo de (3.14) é um inteiro não divisível por p , mas, o lado direito de (3.14) tem valor absoluto menor do que 1. Isso é um absurdo. Logo, e é transcendente. \square

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho recorreu-se ao processo teórico em torno dos Números Racionais e Irracionais, com as suas respectivas peculiaridades conceituais. Nesse sentido, os Números Racionais, dentro de seus fatores elementares, expressam tudo àquilo que pode ser entendido como números em formato de fração. Sendo que, os Números Irracionais, operam com estruturas não fracionárias, além de poderem ser representados por números decimais, com algarismos não periódicos, tendo suas totalidades ilimitadas.

Além disso, buscou-se tratar do princípio transcendental do Número e , e a devida comprovação de sua irracionalidade, relatando os aspectos teóricos de sua existência como número, e a devida abordagem sobre os aspectos que repercutem ao limite do Número e .

Como recurso metodológico, utilizou-se o método de revisão de literatura, a partir do viés qualitativo e quantitativo, tendo como universo de pesquisa uma reflexão generalizada, trazendo a tona, dados colhidos no levantamento bibliográfico, como forma de ressaltar a realidade, e se posicionar criticamente sobre a mesma.

Contudo, o contato com esta temática de difícil compreensão, considerando a sua abordagem de viés abstrato, oportunizou-me a projeção de um novo olhar para os elementos voltados a transcendência do Número e , o que favorecerá o fomento necessário para novos procedimentos em torno deste universo de pesquisa, a fim de conhecer mais e , possivelmente, contribuir da melhor forma para o desenvolvimento e ampliação desta temática.

Portanto, a possibilidade de poder oportunizar a reflexão de outros profissionais e pesquisadores, para a busca aprofundada da compreensão em torno dos números racionais e irracionais, além de um olhar crítico voltado a transcendência do Número e , motivou a produção deste trabalho. Assim, destaca-se que, além da necessidade de se conhecer mais sobre o exposto, melhor ainda será a possibilidade de poder contribuir com outros que desejarem navegar por esta proposta temática, tendo este trabalho como ferramenta de pesquisa.

Referências

FIGUEIREDO, D. Números irracionais e transcendentos, terceira edição, julho, 2011. **Sociedade Brasileira de Matemática**, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 25, 36 e 43.

MAOR, E. Tradução: Jorge calife. **Rio de Janeiro: Editora Record**, 2008. Citado na página 37.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. Matemática discreta. **Rio de Janeiro: SBM**, 2015. Citado na página 16.

NIVEN, I. Irracionais. **Editora Sociedade Brasileira de Matemática**, 1984. Citado na página 37.